LOKALE LORENTZ-TRANSFORMATIONEN UND KRÜMMUNG

J. Roberto S. Mozara

1. Einführung

Das zentrale mathematische Objekt in der speziellen Relativitätstheorie sind die Lorentz-Transformationen zwischen inertialen Beobachtern. Ereignisse in einer flachen Raumzeit können mit Hilfe inertialer Koordinatensysteme beschrieben werden und zwischen je zwei Koordinatensystemen existiert eine vermittelnde Lorentz-Transformation. Bei Berücksichtigung der gravitativen Wechselwirkung wird die Raumzeit selbst zu einem dynamischen Objekt und durch Anwesenheit von Materie gekrümmt. Über die Krümmung wird dann wieder die Materie gravitativ beeinflusst. Masse und Energie sind hierbei als eine Art Ladung der gravitativen Wechselwirkung anzusehen und alles, was nicht zum Vakuum hinzugezählt wird, nimmt demnach an dieser Wechselwirkung teil. Die Gravitation wirkt also universell zwischen allen physikalischen Objekten und dies führt dazu, dass es prinzipiell keine inertialen Systeme geben kann. Folglich ist es für einen Beobachter unklar, wie ein anderer Beobachter sein registriertes Ereignis wahrnimmt, da Lorentz-Transformationen nicht definierbar sind. Für hinreichend kleine Bereiche in der Raumzeit kann man jedoch auf das Einsteinsche Äquivalenzprinzip zurückgreifen, welches unter anderem aussagt, dass sich hier die physikalischen Gesetze auf die der speziellen Relativitätstheorie reduzieren. In lokaler Form können dann wieder Lorentz-Transformationen definiert und zwischen den Koordinaten verschiedener Beobachter transformiert werden.

Doch schon in der speziellen Relativitätstheorie bestand das Problem, zwei Beobachter an unterschiedlichen Orten in der Raumzeit zu vergleichen. Hiermit ist gemeint, wie zwischen den Koordinaten zweier Beobachter, die ein Ereignis registrieren, transformiert werden soll. Ein Ereignis kann zum Beispiel das Aussenden eines Lichtsignals an einem Ort sein, welches von den beiden Beobachtern gemessen werden kann. Dabei tritt schon die Schwierigkeit auf, wie ein einzelner Beobachter das Ereignis in der Raumzeit lokalisieren kann, da hierbei die einzige ankommende Information die Richtung des Lichtsignals ist. Nimmt man einmal an, dass ein Beobachter diesem Signal ein Raumzeitpunkt zuordnen kann, so bleibt aufgrund der räumlichen Separation der Beobachter weiterhin das Problem, deren Informationen zu vergleichen. Erweitert man deshalb die (homogenen) Lorentz-Transformationen durch Translationen, so erhält man die (inhomogene) Poincaré-Gruppe. Diese lassen jedoch im Gegensatz zu den Lorentz-Transformationen die Minkowski-Norm nicht invariant (außer man ändert das Skalarprodukt ab [7]).

Im Fall gekrümmter Räume und weit auseinanderliegender Beobachter müssen weitere neue Konzepte herangezogen werden, da auch herkömmliche lineare Gruppen wie die Poincaré-Gruppe nicht mehr helfen können. Hierzu könnte vor allem der Paralleltransport verwendet werden, mit dem man Informationen von einem Ort der Raumzeit zu einem anderen transportieren kann. Dies scheint umso mehr ein interessantes Konzept zu sein, da man mit Hilfe der Theorie der Hauptfaserbündel Tangentialräume und Koordinatensysteme in ihnen, die Beobachtern entsprechen, in Bündeln auf eine vereinigte Art und Weise beschreiben kann. Der Paralleltransport lässt sich von der Basismannigfaltigkeit, der Raumzeit, erweitern zu einem Paralleltransport auf Bündeln, in denen auch Koordinatensysteme verschoben werden können. Es handelt sich natürlich um eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Translation in flachen Räumen, sodass hier ebenfalls das Problem bestehen bleibt, die schon bei der Poincaré-Gruppe auftrat.

Im Folgenden wird das Konzept der lokalen Lorentz-Transformationen betrachtet. Anschaulich hat man die Situation, dass sich zwei Beobachter in einem Punkt der gekrümmten Raumzeit treffen, dabei aber unterschiedliche Geschwindigkeiten und Bewegungsrichtungen haben. Die zu den Beobachtern gehörenden Bezugssysteme lassen sich dann in diesem Raumzeitpunkt mit einer lokalen Lorentz-Transformation verbinden. Ebenfalls sehen die formalen Ausdrücke für die Krümmung für jeden Beobachter unterschiedlich aus und können entsprechend ineinander transformiert werden. Es wird deutlich werden, dass die lokalen Lorentz-Transformationen wie Drehungen funktionieren und dadurch die Bezugssysteme ineinander überführen können.

Ziel dieser Ausarbeitung wird es sein, lokale Lorentz-Transformationen zu erklären und sie durch Anwendung auf den Krümmungsbegriff zu charakterisieren. Zunächst werden in Abschnitt 2 die grundlegenden Begriffe gegeben und physikalisch motiviert. Dann werden in Abschnitt 3 (S. 5) auf diese Größen lokale Lorentz-Transformationen angewandt und deren Verhalten unter ihnen untersucht. Letztendlich führt man in der Allgemeinen Relativitätstheorie immer den Levi-Civita-Zusammenhang ein und die Begriffe werden in Abschnitt 4 (S. 7) auf diesen Fall spezialisiert. Im Anschluss wird es ein Beispiel (S. 9) geben, an dem deutlich wird, wie sich die Berechnung von Größen wie die Krümmung mit Hilfe des neuen Formalismus vereinfacht. Als Zusatz wird in Abschnitt 6 (S. 10) noch einmal um alle entwickelten Begriffe ein mathematischer Rahmen gelegt und mit diesem Wissen schließlich ein Ausblick auf weiterführende Anwendung gegeben (S. 18). Es wird sich herausstellen, dass die Krümmung ein fundamendales Konstrukt in allen (bis jetzt bestätigten) physikalischen Theorien darstellt.

2. Basisfelder und Cartans Strukturgleichungen

Zunächst wird ein Basisfeld auf einer Lorentz-Mannigfaltigkeit M eingeführt, die der Raumzeit eines gegebenen physikalischen Problems entspricht. Das Basisfeld spannt in jedem Punkt $x \in M$ den Tangentialraum T_xM auf und es kann durch $n = \dim(M)$ linear unabhängige Vektorfelder auf M realisiert werden. Das Basisfeld wird mit

$$e_x = (e_1, \ldots, e_n)_x \tag{1}$$

bezeichnet und so gewählt, dass es glatt (also die Zuordnung stetig differenzierbar) ist [6]. In jedem Punkt von M sitzt dann eine orthonormale Basis e_x, deren Vektoren bei Verschiebung längs eines Weges in M stetig in Vektoren übergehen, die wieder eine orthonormale Basis bilden.

Da es sich bei der Raumzeit um eine Lorentz-Mannigfaltigkeit handelt, ist sie mit einem 2-fach kovarianten symmetrischen Tensorfeld der Signatur (1,3) versehen: der Lorentz-Metrik g [4]. Die n Vektorfelder, die in jedem Punkt $x \in M$ der Mannigfaltigkeit den Tangentialraum T_xM aufspannen, lassen sich nun orthonormal bezüglich dieser Metrik g wählen. In jedem Punkt $x \in M$ sitzt dann eine orthonormale Basis.

Konkret werden Basisfelder mit Hilfe der Vielbeine konstruiert [1][2]. In jedem Punkt der Mannigfaltigkeit M bildet man eine koordinatenunabhängige Basis durch

$$\hat{e}_a = e_a{}^\mu \hat{e}_\mu, \tag{2}$$

wobei $e_\mu = \partial/\partial x^\mu$ eine Basis ist, die durch eine Karte (U, x) auf $U \subset M$ gegeben wird, und $e_a{}^\mu \in GL(n, \mathbb{R})$. Für die Basisformen hat man entsprechend

$$\hat{\theta}^a = e^a{}_\mu \hat{\theta}^\mu, \tag{3}$$

wobei $\hat{\theta}^\mu = \mathrm{d}x^\mu$ ist. Diese Definitionen führen weg von koordinatenangepassten Tangential- und Kotangentialräumen hin zu einer neuen Betrachtungsweise von diesen Räumen und ebenfalls von dem Begriff des Zusammenhangs und der Krümmung. Koordinatenbasen werden durch griechische Indizes und koordinatenunabhängige Basen durch lateinische Indizes gekennzeichnet. Die Orthonormierung erreicht man (im Lorentzschen Fall) durch

$$g(\hat{e}_a, \hat{e}_b) = \eta_{ab} \tag{4}$$

und die so erhaltenen Vektoren bilden koordinatenunabhängige Orthonormalbasen. Offensichtlich lassen sich die Orthonormalbasen nur innerhalb einer Kartenumgebung explizit angeben, sie existieren jedoch auf der ganzen Mannigfaltigkeit (vorausgesetzt, diese ist parallelisierbar, die n erzeugenden Vektorfelder sind also überall linear unabhängig). Schreibt man die Orthonormalitätsbedingung Gleichung (4) aus, so erhält man

$$\begin{aligned} g(\hat{e}_a, \hat{e}_b) &= g(e_a{}^\mu \hat{e}_\mu, e_b{}^\nu \hat{e}_\nu) \\ &= g_{\mu\nu} e_a{}^\mu e_b{}^\nu \;=\; \eta_{ab}. \end{aligned} \tag{5}$$

Die Matrizen $e_a{}^\mu$ bezeichnet man als Vielbeine und sie werden durch die Gleichung (5) bis auf eine g-orthogonale Transformation $\Lambda \in O(1, n-1)$ festgelegt. Da die Vielbeine in bijektivem Verhältnis zu den Orthonormalbasen stehen, werden sie für die folgenden Betrachtungen herangezogen und als Basisfelder aufgefasst.

Natürlich müssen die algebraischen Eigenschaften der neuen Basis mit denen der alten übereinstimmen, zum Beispiel die Eigenschaft der Basisvektoren Derivationen zu sein. Weiterhin bilden die Vielbeine orthonormale Bezugssysteme in jedem Punkt der Raumzeit, sodass eine Familie von Beobachtern vorliegt. Die Integralkurve des zeitartigen Einheitsvektors eines Beobachters ist dessen Weltlinie. Im Allgemeinen müssen Weltlinien keine Geodäten sein, wenn andere Kräfte außer der Gravitation eine Rolle spielen [7]. Das Bezugssystem in einem Punkt der Raumzeit liegt in dessem Tangentialraum, welcher ein Minkowski-Raum ist. Die Raumzeit lässt sich bekannterweise in einer hinreichend kleinen Umgebung um den Beobachter durch den Tangentialraum approximieren, sodass dort der Formalismus der speziellen Relativitätstheorie anwendbar ist. Dies entspricht dem Einsteinschen Äquivalenzprinzip.

Die Orthonormierung hat den physikalischen Sinn, dass Bezugssysteme durch orthonormale Vektoren gebildet werden und mit ihnen der Levi-Civita-Zusammenhang besser beschrieben werden kann. Die Basisfelder haben weiterhin den Vorteil, dass der Kommutator zwischen zwei Vektoren aus ihnen nicht verschwindet und die so erhaltenen Ausdrücke neue physikalische Inhalte bieten, wie man bei den folgenden Definitionen für die Krümmung und die Torsion vermuten kann. Es gibt unendlich viele verschiedene

Basisfelder, die orthonormierten sind eine Teilmenge der allgemeinen linearen Basisfelder (es gibt auch affine und noch andere). Für Bezugsfelder kann man unter anderem die folgende Spezialfälle auswählen: Die idealen Beobachter, deren Integralkurven des zeitartigen Vektorfeldes Geodäten sind (frei fallende Testteilchen) oder solche, deren Raumanteil nicht rotiert (Paralleltransport des Raumanteils); letztere nennt man gyrostabilisiert [7].

Schließlich sollen noch der Krümmungs- und der Torsionstensor explizit in einer Orthonormalbasis gegeben werden. Der Krümmungstensor wird basisunabhängig und global definiert durch

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{6}$$

und der Torsionstensor durch

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]. \tag{7}$$

Offensichtlich sind die Definitionen abhängig von der Wahl des Zusammenhangs. Der Levi-Civita-Zusammenhang ist neben seiner Metrik-Kompatibilität (Paralleltransport wird zu einer Isometrie) ausgezeichnet dadurch, dass mit ihr die Torsion verschwindet. Die Torsion ist ein Maß für die Windung oder Verdrehung, zum Beispiel eines bewegten Koordinatensystems entlang einer Kurve [7]. Das Verschwinden des Krümmungstensors in einer Kartenumgebung bedeutet, dass die Mannigfaltigkeit dort flach ist und ein euklidisches Koordinatensystem existiert [4]. Beide zusammen beschreiben, wie sich ein Tangentialraum bei Paralleltransport entlang einer Kurve auf einer Mannigfaltigkeit verhalten: Die Krümmung beschreibt, wie ein Tangentialraum sozusagen rollt, die Torsion beschreibt dessen Drehung [7].

Durch Einsetzen der Vielbeine in beide Seiten der Gleichung

$$\nabla_{\hat{e}_a} \hat{e}_b = \Gamma^c{}_{ab} \hat{e}_c \tag{8}$$

ergibt sich für die Zusammenhangskoeffizienten in der Orthonormalbasis die Abhängigkeit von den Christoffel-Symbolen zu [1]

$$\Gamma^c{}_{ab} = e^c{}_\nu e_a{}^\mu (\partial_\mu e_b{}^\nu + e_b{}^\lambda \Gamma^\nu_{\mu\lambda}) = e^c{}_\nu e_a{}^\mu \nabla_\mu e_b{}^\nu. \tag{9}$$

Die zu dieser kovarianten Ableitung gehörige lokale Zusammenhangsform hat die Form

$$\omega^a{}_b = \Gamma^a{}_{cb} \hat{\theta}^c. \tag{10}$$

Die Zusammenhangskoeffizienten bilden damit die Komponenten dieser matrixwertigen lokalen Zusammenhangsform und sie enthalten die Information, welcher Basisvektor nach welchem Basisvektor kovariant abgeleitet wird. Und die lokale Zusammenhangsform bildet den Vektor, nach dem abgeleitet wird, auf die Zusammenhangskoeffizienten ab.

Mit Hilfe der lokalen Zusammenhangsform lassen sich der Krümmungs- und der Torsionstensor in die Form

$$\begin{aligned} R^a{}_b &= \mathrm{d}\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \\ T^a &= \mathrm{d}\hat{\theta}^a + \omega^a{}_b \wedge \hat{\theta}^b \end{aligned} \tag{11}$$

bringen, welche als Cartans Strukturgleichungen bekannt sind. Es handelt sich bei beiden um tensorwertige 2-Formen und sie ergeben die gleichen Komponenten wie die der Tensoren in den Gleichungen (6) und (7).

3. Lokale Lorentz-Transformationen

Die Lorentz-Metrik $g_{\mu\nu}$ ist wegen ihrer Symmetrie ein $n(n+1)/2$-dimensionaler Tensor, die Vielbeine ${e_a}^\mu$ sind demgegenüber n^2-dimensional. Für die Vielbeine wurde im vorigen Abschnitt die Definitionsgleichung

$$g(\hat{e}_a, \hat{e}_b) = {e_a}^\mu {e_b}^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \tag{12}$$

gegeben, für den euklidischen Fall ist statt der Minkowski-Metrik die euklidische Metrik δ_{ab} zu verwenden. Der Ausdruck auf der linken Seite ist invariant unter lokalen g-orthogonalen Transformationen, welche Rotationen entsprechen. Diese sind deshalb nur lokal definierbar, da die Metrik ortsabhängig ist. Die lokalen orthogonalen Rotationen definiert man für orthonormale Basisvektoren in $x \in M$ durch

$$\hat{e}_a \to \hat{e}'_a = {\Lambda_a}^b \hat{e}_b \tag{13}$$

und für deren Vielbeine gilt entsprechend

$${e_a}^\mu(x) \to {e'_a}^\mu(x) = {\Lambda_a}^b(x) {e_b}^\mu(x). \tag{14}$$

Orthonormale Basisformen haben dagegen die Transformationseigenschaft

$$\hat{\theta}^a(x) \to \hat{\theta}'^a(x) = \Lambda^a{}_b(x) \hat{\theta}^b(x) \tag{15}$$

und entsprechendes gilt für deren Vielbeine [1]. Die lokalen orthogonalen Transformationen gelten nur für die Orthonormalbasis oder allgemein für Größen mit lateinischen Indizes; Größen mit griechischer Indizierung werden mithilfe von Koordinatentransformationen behandelt [2]. Transformationen können auch gemischt vorgenommen werden, zum Beispiel hat man für einen (2,2)-Tensor T die Formel

$$\begin{aligned} T &= T^{a'\mu'}{}_{b'\nu'}\, \hat{e}_{a'} \otimes \hat{e}_{\mu'} \otimes \hat{\theta}^{b'} \otimes \hat{\theta}^{\nu'} \\ &= T^{a'\mu'}{}_{b'\nu'}\, ({\Lambda_{a'}}^a \hat{e}_a) \otimes \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \hat{e}_\mu \otimes (\Lambda^{b'}{}_b \hat{\theta}^b) \otimes \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \hat{\theta}^\nu \\ &= T^{a'\mu'}{}_{b'\nu'} {\Lambda_{a'}}^a \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \Lambda^{b'}{}_b \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \hat{e}_a \otimes \hat{e}_\mu \otimes \hat{\theta}^b \otimes \hat{\theta}^\nu \\ &= T^{a\mu}{}_{b\nu}\, \hat{e}_a \otimes \hat{e}_\mu \otimes \hat{\theta}^b \otimes \hat{\theta}^\nu. \end{aligned} \tag{16}$$

Setzt man die rotierten Vielbeine in die Definitionsgleichung (5) ein, so erhält man punktweise

$$\eta_{ab} = {e'_a}^\mu {e'_b}^\nu g_{\mu\nu} = {\Lambda_a}^c {\Lambda_b}^d {e_c}^\mu {e_d}^\nu g_{\mu\nu} = {\Lambda_a}^c {\Lambda_b}^d \eta_{cd}\ . \tag{17}$$

An jedem Punkt der Raumzeit lassen die lokalen orthogonalen Rotationen die Minkowski-Metrik invariant, sodass es sich um lokale Lorentz-Transformationen handelt. Man beachte die Indexstruktur in den Gleichungen (16) und (17); aus Gleichung (17) folgt

$$(\Lambda^{-1})_a{}^b = \Lambda^b{}_a. \tag{18}$$

Ähnliches gilt bekannterweise für die Vielbeine. Im Folgenden werden orientierungserhaltende Lorentz-Transformationen betrachtet, sodass wegen Gleichung (17) im Lorentzschen Fall $\Lambda(x) \in SO(1, n-1)$ und im Riemannschen Fall $\Lambda(x) \in SO(n)$ ist. Die Symmetrie der Gleichung (17) lässt darauf schließen, dass die Dimension dieser Gruppen $n(n-1)/2$ ist. Dies entspricht gerade der Anzahl der Freiheitsgrade, die die Vielbeine nach Definition der Gleichung (5) noch haben, sie sind bis auf eine lokale Lorentz-Transformation festgelegt und bilden auf diese Weise Äquivalenzklassen [1].

Um herauszufinden, wie sich die lokale Zusammenhangsform unter lokalen Lorentz-Transformationen ändert, kann man die Transformation des Torsionstensors mit dem in Gleichung (16) ausgemachten Indexverhalten untersuchen [1]:

$$T^a \to T'^a = \mathrm{d}\hat{\theta}'^a + \omega'^a{}_b \wedge \hat{\theta}'^b = \Lambda^a{}_b(\mathrm{d}\hat{\theta}^b + \omega^b{}_c \wedge \hat{\theta}^c). \tag{19}$$

Damit man eine Übersicht über die folgende Rechnung behält, wird diese indexfrei dargestellt. Beachtet werden sollte, dass $\hat{\theta}$ ein Kovektor und ω ein matrixwertiger Kovektor darstellt, Differentiale komponentenweise wirken und die Reihenfolge der Objekte wichtig ist, nicht aber, auf welcher Seite vom Keilprodukt eine Matrix (zum Beispiel eine Lorentz-Transformation) steht (falls sie denn als Koeffzient eines Kovektors aufgefasst werden kann). Letzteres liegt daran, da die Ausdrücke beiderseits des Keilprodukts wegen der Definition des Torsions- und des Krümmungstensors in Gleichung (11) nicht unabhängig voneinander sind, sondern zwei Indizes kontrahiert werden. Für den Torsionstensor hat man dann

$$T \to T' = \mathrm{d}\hat{\theta}' + \omega' \wedge \hat{\theta}' = \Lambda(\mathrm{d}\hat{\theta} + \omega \wedge \hat{\theta}) = \Lambda T, \tag{20}$$

da es sich um einen vektorwertigen Kovektor handelt. Substituiert man auf der linken Seite $\hat{\theta}' = \Lambda\hat{\theta}$, so ergibt sich dort mit Λ als matrixwertige 0-Form

$$\mathrm{d}(\Lambda\hat{\theta}) + \omega' \wedge (\Lambda\hat{\theta}) = \mathrm{d}\Lambda \wedge \hat{\theta} + \Lambda\mathrm{d}\hat{\theta} + \omega'\Lambda \wedge \hat{\theta} \tag{21}$$

und zusammen mit der rechten Seite von Gleichung (20) hat man dann nach Umstellen

$$\omega'\Lambda = \Lambda\omega - \mathrm{d}\Lambda \tag{22}$$

oder mit der Identität

$$0 = \mathrm{d}(\Lambda\Lambda^{-1}) = \mathrm{d}\Lambda\Lambda^{-1} + \Lambda\mathrm{d}\Lambda^{-1} \tag{23}$$

äquivalenterweise

$$\begin{aligned} \omega' &= \Lambda\omega\Lambda^{-1} - \mathrm{d}\Lambda\Lambda^{-1} \\ &= \Lambda\omega\Lambda^{-1} + \Lambda\mathrm{d}\Lambda^{-1}. \end{aligned} \tag{24}$$

Die lokale Zusammenhangsform transformiert also inhomogen; dies ist bekanntlich auch für die Zusammenhangskoeffizienten der Fall, wenn eine Koordinatentransformation ausgeführt wird.

Nun errechnet man für das Transformationsverhalten des Krümmungstensors unter lokalen Lorentz-Transformationen zunächst

$$\begin{aligned} R' &= \mathrm{d}\omega' + \omega' \wedge \omega' \\ &= \mathrm{d}(\Lambda\omega\Lambda^{-1} + \Lambda\mathrm{d}\Lambda^{-1}) \\ &\quad + (\Lambda\omega\Lambda^{-1} + \Lambda\mathrm{d}\Lambda^{-1}) \wedge (\Lambda\omega\Lambda^{-1} + \Lambda\mathrm{d}\Lambda^{-1}) \\ &= \mathrm{d}\Lambda \wedge \omega\Lambda^{-1} + \Lambda\mathrm{d}\omega\Lambda^{-1} - \Lambda\omega \wedge \mathrm{d}\Lambda^{-1} + \mathrm{d}\Lambda \wedge \mathrm{d}\Lambda^{-1} + \Lambda\mathrm{d}\mathrm{d}\Lambda^{-1} \\ &\quad + \Lambda\omega\Lambda^{-1} \wedge \Lambda\omega\Lambda^{-1} + \Lambda\mathrm{d}\Lambda^{-1} \wedge \Lambda\mathrm{d}\Lambda^{-1} \\ &\quad + \Lambda\omega\Lambda^{-1} \wedge \Lambda\mathrm{d}\Lambda^{-1} + \Lambda\mathrm{d}\Lambda^{-1} \wedge \Lambda\omega\Lambda^{-1}. \end{aligned} \tag{25}$$

Hierbei wurde in der ersten Zeile die Produktregel

$$\mathrm{d}(\rho \wedge \sigma) = \mathrm{d}\rho \wedge \sigma + (-1)^r \rho \wedge \mathrm{d}\sigma \tag{26}$$

für $\rho \in \ ^rT^*M$ und $\sigma \in \ ^sT^*M$ verwendet und die Definition $f \cdot \sigma = f \wedge \sigma$ für $f \in \mathcal{F}M$ [4]. Die letzten beiden Zeilen der dritten Gleichheit in Gleichung (25) sind die zweite Zeile der zweiten Gleichheit. Der letzte Summand der ersten Zeile verschwindet wegen dem Lemma von Poincaré, die letzte Zeile hebt nach Zusammenfassung der Λ-Matrizen beiderseits des Keilproduktes und Anwenden der Gleichung (23) den ersten und dritten Summand der ersten Zeile weg, und mit Gleichung (23) hebt der zweite Summand der zweiten Zeile den vierten Summanden der ersten Zeile weg. Übrig bleibt

$$\begin{aligned} R' &= \Lambda \mathrm{d}\omega \Lambda^{-1} + \Lambda \omega \Lambda^{-1} \wedge \Lambda \omega \Lambda^{-1} \\ &= \Lambda(\mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega)\Lambda^{-1} \\ &= \Lambda R \Lambda^{-1}. \end{aligned} \tag{27}$$

Offensichtlich wird bei Transformation der Basis gleichzeitig am Krümmungstensor eine homogene Ähnlichkeitstransformation erzeugt. Dies entspricht allgemein der Transformation einer Matrix, denn der Krümmungstensor ist eine matrixwertige 2-Form. Der Unterschied zu der lokalen Zusammenhangsform ist, dass die Matrix, die das Bild der Krümmungsform ist, einen Tensor darstellt, während die Zusammenhangskoeffizienten bekanntlich keine Tensoren sind.

Mit den Transformationseigenschaften ist dann auch herausgefunden worden, wie die Ausdrücke für zwei sich auf ihrem Weg in der Raumzeit kreuzende Beobachter unterscheiden, denn in ihren jeweiligen Koordinatensystemen haben die Torsion, die Krümmung und die Zusammenhangsform unterschiedliche Komponenten. Die endgültige Größe der Krümmung hängt aber nicht von den Bezugssystemen ab, denn sie ist eine vom Beobachter unabhängige lokale Eigenschaft des Raumes. Bildet man aus der entstehenden Krümmungsmatrix die Spur, so wird aus Gleichung (27) deutlich, dass diese basisunabhängig ist, da sich dabei die lokalen Lorentz-Transformationen wegheben. Ebenfalls ist das Skalarprodukt der transformierten Torsionsvektors mit sich selbst wegen der Gleichung (18) invariant.

4. Levi-Civita-Zusammenhang und Krümmung

Mit Hilfe des Zusammenhanges lässt sich auf einer Mannigfaltigkeit der Paralleltransport von Tensoren einführen. Längen und Winkel bleiben dabei erhalten, was durch die Metrik-Kompatibilität ausgedrückt wird: Die kovariante Ableitung des metrischen Tensors verschwindet, d.h. $\nabla_X g = 0$. Möchte man sich auf die natürliche Verallgemeinerung des Zusammenhangs in der klassischen Differentialgeometrie von Oberflächen beschränken, so fordert man das Verschwinden des Torsionstensors; in der Koordinatenbasis gilt dann bekannterweise $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = 0$. Dies definiert den Levi-Civita-Zusammenhang. Zu der Relation für die Christoffel-Symbole gibt es eine analoge für die Zusammenhangskoeffizienten. Definiert man den Ricci-Rotationskoeffizienten $\Gamma_{abc} = \eta_{ad}\Gamma^d{}_{bc}$, so erhält man mit den Gleichungen (5) und (9) und der

Metrik-Kompatibilität [1]

$$\begin{aligned}
\Gamma_{abc} &= \eta_{ad} e^d{}_\nu e_b{}^\mu \nabla_\mu e_c{}^\nu \\
&= \eta_{ad} e_b{}^\mu (\nabla_\mu (e^d{}_\nu e_c{}^\nu) - e_c{}^\nu \nabla_\mu e^d{}_\nu) \\
&= -\eta_{ad} e_b{}^\mu e_c{}^\nu \nabla_\mu (\eta_{ad} e^d{}_\nu) \\
&= -\eta_{ad} e_b{}^\mu e_c{}^\nu \nabla_\mu (e_a{}^\lambda g_{\lambda\nu}) \\
&= -e_b{}^\mu e_c{}^\nu g_{\nu\lambda} \nabla_\mu e_a{}^\lambda \\
&= -e_b{}^\mu \eta_{dc} e^d{}_\lambda \nabla_\mu e_a{}^\nu \\
&= -\eta_{dc} e^d{}_\nu e_b{}^\mu \nabla_\mu e_a{}^\nu \\
&= -\eta_{cd} \Gamma^d{}_{ba} \\
&= -\Gamma_{cba}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Für die lokale Zusammenhangsform ergibt sich damit

$$\omega_{ab} = \eta_{ac}\omega^c{}_b = \eta_{ac}\Gamma^c{}_{db}\hat{\theta}^d = \Gamma_{adb}\hat{\theta}^d = -\Gamma_{bda}\hat{\theta}^d = -\eta_{bc}\Gamma^c{}_{da}\hat{\theta}^d = -\eta_{bc}\omega^c{}_a = -\omega_{ba}. \tag{29}$$

Die Gleichung (28) sagt aber nichts über die Torsion aus, diese Bedingung ist unabhängig von der Metrik-Kompatibilität und wird zusätzlich gefordert:

$$T^a = \mathrm{d}\hat{\theta}^a + \omega^a{}_b \wedge \hat{\theta}^b = 0. \tag{30}$$

Übersetzt man diese Gleichung wieder in die Koordinatenbasis, so folgt $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$. Dort gilt auch direkt die Relation

$$c_{\mu\nu}{}^\lambda \hat{e}_\lambda = [\hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu] = \nabla_\mu \hat{e}_\nu - \nabla_\nu \hat{e}_\mu = (\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu})\hat{e}_\lambda = 0, \tag{31}$$

da hier der Kommutator wegen dem Satz von Schwarz verschwindet. In der Orthonormalbasis jedoch sind die Basen Linearkombinationen aus Koordinatenbasen und die Koeffizienten können vom Ort abhängen, sodass der Kommutator nicht verschwindet. Hier erhält man aus der Torsionsbedingung allgemein

$$c_{ab}{}^c = \Gamma^c{}_{ab} - \Gamma^c{}_{bc}. \tag{32}$$

Dies ist die zu Gleichung (31) analoge Beziehung für die Orthonormalbasis. Damit erhalten die Komponenten des Krümmungstensors einen neuen Term, denn nun verschwindet der Kommutator in Gleichung (6) nicht mehr. Aus derselben Gleichung erhält man

$$\begin{aligned}
R^a{}_{dbc} &= \langle \hat{\theta}^a, R(\hat{e}_b, \hat{e}_c)\hat{e}_d \rangle \\
&= \langle \hat{\theta}^a, \nabla_b \nabla_c \hat{e}_d - \nabla_c \nabla_b \hat{e}_d - \nabla_{[\hat{e}_b, \hat{e}_c]} \hat{e}_d \rangle \\
&= \langle \hat{\theta}^a, \nabla_b (\Gamma^e{}_{cd} \hat{e}_e) - \nabla_c (\Gamma^e{}_{bd} \hat{e}_e) - c_{bc}{}^e \nabla_e \hat{e}_d \rangle \\
&= \langle \hat{\theta}^a, \hat{e}_b \Gamma^e{}_{cd} \hat{e}_e + \Gamma^e{}_{cd} \Gamma^f{}_{be} \hat{e}_f - \hat{e}_c \Gamma^e{}_{bd} \hat{e}_e - \Gamma^e{}_{bd} \Gamma^f{}_{ce} \hat{e}_f - c_{bc}{}^e \Gamma^f{}_{ed} \hat{e}_f \rangle \\
&= \hat{e}_b \Gamma^a{}_{cd} + \Gamma^e{}_{cd} \Gamma^a{}_{be} - \hat{e}_c \Gamma^a{}_{bd} - \Gamma^e{}_{bd} \Gamma^a{}_{ce} - c_{bc}{}^e \Gamma^a{}_{ed} \\
&= \hat{e}_b \Gamma^a{}_{cd} - \hat{e}_c \Gamma^a{}_{bd} + \Gamma^e{}_{cd} \Gamma^a{}_{be} - \Gamma^e{}_{bd} \Gamma^a{}_{ce} - (\Gamma^e{}_{bc} - \Gamma^e{}_{cb}) \Gamma^a{}_{ed}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Damit bleibt in der Orthonormalbasis der zusätzliche Term erhalten und er lässt sich mit der Torsionsbedingung Gleichung (31) vollständig durch die Zusammenhangskoeffizienten ausdrücken [1].

5. Beispiel

Im Folgenden sollen mit dem bisher entwickelten Formalismus anhand eines Beispiels explizite Ausdrücke für die lokale Zusammenhangsform und die Krümmung gegeben werden. Der Vorteil gegenüber der Berechnung der Krümmung mit Hilfe einer Koordinatenbasis liegt in der einfachen Struktur der Gleichungen, wie sich zeigen wird.

Es wird der typische Weg einer Berechnung der Krümmung anhand der (übrigens nicht parallelisierbaren) 2-Sphäre gezeigt [1]. Für die Metrik der 2-Sphäre gilt

$$\begin{aligned} g &= \mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta + \sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi \otimes \mathrm{d}\phi \\ &= \hat{\theta}^1 \otimes \hat{\theta}^1 + \hat{\theta}^2 \otimes \hat{\theta}^2 \end{aligned} \tag{34}$$

mit

$$e^1{}_\theta = 1, \quad e^1{}_\phi = 0, \quad e^2{}_\theta = 0, \quad e^2{}_\phi = \sin(\theta), \tag{35}$$

sodass zum Beispiel

$$\hat{\theta}^2 = e^2{}_\theta \mathrm{d}\theta + e^2{}_\phi \mathrm{d}\phi = \sin(\theta)\mathrm{d}\phi \tag{36}$$

ist. Die Berechnung der Zusammenhangsform entspricht der Berechnung der Zusammenhangskoeffizienten. Die Berechnung erfolgt im Sinne von Levi-Civita, also mit verschwindender Torsion. Zunächst ist wegen Gleichung (29)

$$\omega^a{}_a = \eta^{ab}\omega_{ab} = -\eta^{ab}\omega_{ab} = -\omega^a{}_a = 0, \tag{37}$$

außerdem

$$\omega^1{}_2 = \eta^{11}\omega_{12} = -\eta^{11}\omega_{21} = -\eta^{22}\omega_{21} = -\omega^2{}_1. \tag{38}$$

Man hat dann mit der Strukturgleichung (11) von Cartan

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\hat{\theta}^1 + \omega^1{}_2 \wedge \hat{\theta}^2 &= 0 \\ \mathrm{d}\hat{\theta}^2 + \omega^2{}_1 \wedge \hat{\theta}^1 &= 0. \end{aligned} \tag{39}$$

In der zweiten Gleichung kann man die Orthonormalbasen substituieren, sodass folgt

$$\mathrm{d}(\sin(\theta)\mathrm{d}\phi) - \omega^1{}_2 \wedge \mathrm{d}\theta = \cos(\theta)\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi + \mathrm{d}\theta \wedge \omega^1{}_2 = 0. \tag{40}$$

Damit wird die zweite und wegen $\mathrm{d}\hat{\theta}^1 = \mathrm{d}\mathrm{d}\theta = 0$ auch die erste der Gleichungen (39) gelöst durch

$$-\,\omega^2{}_1 = \omega^1{}_2 = -\cos(\theta)\mathrm{d}\phi. \tag{41}$$

Mit der Orthonormalbasis gilt

$$\omega^1{}_2 = -\cos(\theta)\mathrm{d}\phi = -\cot(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\phi = -\cot(\theta)\hat{\theta}^2 = \Gamma^1{}_{22}\hat{\theta}^2. \tag{42}$$

Setzen wir dies in Gleichung (9) ein, wo die Abhängigkeit der Zusammenhangskoeffizienten von den Christoffel-Symbolen dargestellt ist, so errechnet man bei Beachtung der Vielbeine in Gleichung (35)

$$\begin{aligned} \Gamma^1{}_{22} &= e^1{}_\nu e_2{}^\mu (\partial_\mu e_2{}^\nu + e_2{}^\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu}) \\ &= e^1{}_\theta e_2{}^\mu (\partial_\mu e_2{}^\theta + e_2{}^\phi \Gamma^\theta_{\mu\phi}) \\ &= e^1{}_\theta e_2{}^\phi e_2{}^\phi \Gamma^\theta_{\phi\phi} \\ &= \frac{1}{\sin^2(\theta)}\, \Gamma^\theta_{\phi\phi}. \end{aligned} \tag{43}$$

Dies ergibt umgestellt

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = \sin^2(\theta)\Gamma^1{}_{22} = -\sin(\theta)\cos(\theta), \tag{44}$$

was in der vorangehenden Vorlesung zum Proseminar schon einmal Resultat war. Dieses haben wir dort aufwändig mit Hilfe der Geodätengleichungen bestimmt. Es sei bemerkt, dass aus $\Gamma^2{}_{21} = -\Gamma^1{}_{22}$ und mit Gleichung (9) folgt $\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \Gamma^2{}_{21} = \cot(\theta)$.

Nun kann man zur Berechnung der Koeffizienten des Krümmungstensors übergehen. Die Strukturgleichung (11) von Cartan gibt unter Beachtung der Gleichungen (37)

$$\begin{aligned} R^1{}_1 &= \omega^1{}_2 \wedge \omega^2{}_1 &= -\,\omega^2{}_1 \wedge \omega^1{}_2 &= -R^2{}_2 \\ R^1{}_2 &= \mathrm{d}\omega^1{}_2 &= -\,\mathrm{d}\omega^2{}_1 &= -R^2, \end{aligned} \tag{45}$$

denn mit Gleichung (37) folgt unter anderem $\mathrm{d}\omega^a{}_a = 0$ und $\omega^1{}_2 \wedge \omega^2{}_2 = 0$. Wegen Gleichung (38) verschwinden aber die Ausdrücke in der ersten Zeile, sodass

$$R^1{}_{1ab} = R^2{}_{2ab} = 0. \tag{46}$$

Die zweite der Gleichungen (45) lautet ausgeschrieben

$$\tfrac{1}{2} R^1{}_{2ab}\hat{\theta}^a \wedge \hat{\theta}^b = \mathrm{d}(-\cos(\theta)\mathrm{d}\phi) = \sin(\theta)\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi = \hat{\theta}^1 \wedge \hat{\theta}^2. \tag{47}$$

Daraus ergibt sich

$$\tfrac{1}{2}(R^1{}_{212} - R^1{}_{221}) = 1 = -\tfrac{1}{2}(R^2{}_{112} - R^2{}_{121}), \tag{48}$$

und wegen der Antisymmetrie in den letzten beiden Koeffizienten zum Beispiel

$$R^1{}_{212} = 1. \tag{49}$$

Da man mit den Vielbeinen lateinische in griechische Indizes und umgekehrt umschreiben kann, erhält man als Beispiel für eine Komponente des Krümmungstensors in der Koordinatenbasis

$$\begin{aligned} R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} &= e_a{}^{\theta} e^b{}_{\phi} e^c{}_{\theta} e^d{}_{\phi} R^a{}_{bcd} \\ &= e_1{}^{\theta} e^2{}_{\phi} e^1{}_{\theta} e^2{}_{\phi} R^1{}_{212} \\ &= \sin^2(\theta), \end{aligned} \tag{50}$$

ebenfalls ein Resultat aus früheren Vorlesungen. Wieder wird deutlich, wie die Berechnung der Komponenten des Krümmungstensors mit Hilfe der Orthonormalbasen vereinfacht wird.

6. Rahmenbündel und Krümmungsform

Dieser Abschnitt ist als Zusatz gedacht. Er orientiert sich an das Skript "Eichfeldtheorie" von Frau Helga Baum [6] und auch die Notation ist von dort entnommen. Bezüge zur physikalischen Notation werden aber gegeben. Wer die ersten drei Kapitel des Skriptes gelesen hat, wird den folgenden Text vollständig verstehen können.

Aus Sicht der Theorie der Hauptfaserbündel handelt sich bei dem Basisfeld auf einer Mannigfaltigkeit M um einen glatten Schnitt im Rahmenbündel

$$GL(M) = \bigcup_{x \in M} GL(M)_x \tag{51}$$

mit

$$GL(M)_x = \{e_x = (e_1, \ldots, e_n)_x \mid e_x \text{ Basis in } T_xM\}, \tag{52}$$

also dem $GL(n,\mathbb{R})$-Hauptfaserbündel $(GL(M), \pi, M; GL(n,\mathbb{R}))$, wobei π die Projektion der Basis auf ihren Fußpunkt in M ist und jede Basis mit einer invertierbaren Matrix aus $GL(n,\mathbb{R})$ identifiziert werden kann. Die Menge aller glatten Schnitte im Rahmenbündel bezeichnet man mit $\Gamma(GL(M))$. Ein glatter Schnitt im Rahmenbündel wird realisiert durch eine stetig differenzierbare Abbildung

$$s : M \to GL(M), \quad x \mapsto s(x) = e_x^{(s)}, \tag{53}$$

sodass durch s ein glattes Basisfeld ausgewählt wird und $\pi(s(x)) = x$ ist. Jede orientierte Basis e_x kann eindeutig durch eine orientierungserhaltende invertierbare Matrix A (also mit $\det(A) > 0$) aus der Einheitsbasis gebildet werden, was daran liegt, dass $GL^+(n,\mathbb{R})$ einfach transitiv auf $\mathbb{R}^n$ wirkt. Wählt man ein orthonormiertes Basisfeld, so bewegt man sich in einem Teilbündel des Rahmenbündels $GL(M)$, nämlich dem $O(1,n-1)$-Hauptfaserbündel $(O(M,g), \pi, M; O(1,n-1))$ aller orthonormalen Basen auf M. Es ist wichtig zu erkennen, dass die Strukturgruppe $O(1,n-1)$ hier die Menge der Vielbeine $\{e_a{}^\mu\}$ bezeichnet, die Spalten stellen sozusagen die Basis dar und sind untereinander bezüglich der Minkowski-Metrik orthonormiert. Lokale Lorentz-Transformationen $\Lambda \in O(1,n-1)$ bewirken eine Drehung sowohl der orthonormierten als auch jeder anderen Basis.

Um zu den Cartanschen Strukturgleichungen zu gelangen, wurde im einführenden Abschnitt über die Basisfelder eine lokale Zusammenhangsform definiert, mit deren Hilfe die Torsion und die Krümmung als 2-Formen darstellbar waren. Dies soll im Folgenden aus einer abstrakten Sicht nochmals genauer begründet werden.

Für die Zusammenhangskoeffizienten, also die Christoffel-Symbole in der Orthonormalbasis, galt die Gleichung (8)

$$\nabla_{\hat{e}_a} \hat{e}_b = \Gamma^c{}_{ab} \hat{e}_c, \tag{54}$$

womit ebenfalls die kovariante Ableitung definiert wird. Diese kann für ein glattes Vektorfeld $Y \in \Gamma(TM)$ als eine Abbildung

$$\nabla Y : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM), \quad X \mapsto \nabla_X Y \tag{55}$$

aufgefasst werden. Die zu dieser kovarianten Ableitung gehörige lokale Zusammenhangsform auf dem Rahmenbündel $GL(M)$ hat die Form

$$\omega = \omega^a{}_b E^b{}_a = (\Gamma^a{}_{cb} E^b{}_a) \hat{\theta}^c, \tag{56}$$

wobei $E^b{}_a$ die Basismatrizen bezeichnen. Es handelt sich um eine Abbildung

$$\omega : TM \to \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}), \tag{57}$$

sie bildet also jeden Basisvektor im Tangentialraum T_xM an $x \in M$ auf die Lie-Algebra der Strukturgruppe $GL(n,\mathbb{R})$ des Rahmenbündels $GL(M)$ ab, die Elemente des Bildes werden von den Zusammenhangsmatrizen geformt. Es wird also $\hat{e}_c$ abgebildet auf $\Gamma^a{}_{cb} E^b{}_a$. Die lokale Zusammenhangsform entspricht dem pullback einer Zusammenhangsform $\widetilde{\omega}$ auf $GL(M)$ nach M. Dies sieht man wie folgt ein: Die Menge der kovarianten Ableitungen ∇ auf M steht in bijektiver Beziehung zu der Menge der Zusammenhangsformen auf $GL(M)$. Ist

$$\widetilde{\omega} : T(GL(M)) \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \tag{58}$$

eine Zusammenhangsform auf $GL(M)$ und

$$s : M \to GL(M), \quad x \mapsto s(x) = e_x^{(s)} \tag{59}$$

ein glatter Schnitt aus $\Gamma(GL(M))$ über M (also ein Basisfeld), dann gilt für die kovariante Ableitung und Vektoren aus der Basis $e_x = \{\hat{e}_a\}$

$$\begin{aligned} \nabla_{\hat{e}_c}\hat{e}_b &= \Gamma^a{}_{cb}\hat{e}_a \\ &= (\Gamma^a{}_{db}\hat{\theta}^d(\hat{e}_c))\hat{e}_a \\ &= (\omega^a{}_b(\hat{e}_c))\hat{e}_a \\ &= \widetilde{\omega}^a{}_b(\mathrm{d}s(\hat{e}_c))\hat{e}_a \end{aligned} \tag{60}$$

also

$$\omega = \omega^s = \widetilde{\omega} \circ \mathrm{d}s = s^*\widetilde{\omega}. \tag{61}$$

Dabei ist das Differential von s angewandt auf einen Basisvektor

$$\mathrm{d}s_x(\hat{e}_c)_x = \hat{e}_c(s)_{s(x)} \in T(GL(M)), \tag{62}$$

das heißt, dass s nach $\hat{e}_c$ abgeleitet und der entstehende Vektor nach $s(x)$ transportiert wird, wo er sich nun im Tangentialraum am Punkt $s(x)$ des Rahmenbündels befindet (Kettenregel). Es gilt

$$\dim(T(GL(M))) = \dim(TM) + \dim(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) \tag{63}$$

und deswegen ist klar, dass $\mathrm{d}s : TM \to T(GL(M))$ nur auf einen Unterraum in $T(GL(M))$ abbilden kann. Betrachtet man das anschaulich, projiziert schließlich die Zusammenhangsform $\widetilde{\omega}$ den entstehenden Vektor $\mathrm{d}s(\hat{e}_c)$ auf die Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ der Strukturgruppe. Die Zusammenhangsmatrizen bilden damit die Komponenten einer matrixwertigen Form, der lokalen Zusammenhangsform, und sie enthalten die Information, welcher Basisvektor nach welchem Basisvektor kovariant abgeleitet wird. Die lokale Zusammenhangsform ω bildet den Vektor, nach dem abgeleitet wird, auf die Zusammenhangsmatrizen ab.

Ein gegebenes Basisfeld ist ein glatter Schnitt $s : M \to GL(M)$ im Rahmenbündel und im Abschnitt über lokale Lorentz-Transformationen wurde untersucht, wie sich das Basisfeld unter diesen Transformationen verändert. Das Resultat einer solchen Transformation ist ein neues, g-orthogonal gedrehtes Basisfeld, welches wiederum einen glatten Schnitt in $GL(M)$ definiert. Man erhält also für zwei Schnitte s_i, s_j, die über eine lokale Lorentz-Transformation zusammenhängen,

$$s_i(x) = (e_{i1}, \ldots, e_{in})_x = (\Lambda_{ij}(x)e_{j1}, \ldots, \Lambda_{ij}(x)e_{jn})_x = \Lambda_{ij}(x)s_j(x). \tag{64}$$

Die Indizierung bezieht sich auf die Schnitte und kennzeichnet keine Komponenten. Bei der lokalen Lorentz-Transformation $\Lambda_{ij} : M \to O(1, n-1)$ handelt es sich demnach um eine Übergangsfunktion zwischen zwei Schnitten im Rahmenbündel und sie ist offensichtlich fasertreu, die Basis befindet sich wieder an $x \in M$. Mit dieser Auffassung kann man nun die Transformationseigenschaft der lokalen Zusammenhangsform und der Krümmungsform auf einer abstrakteren Ebene betrachten und sehen, wie man wieder auf dasselbe Ergebnis kommt.

Zunächst wird die lokale Zusammenhangsform

$$\omega^{s_i} = \widetilde{\omega} \circ \mathrm{d}s_i : TM \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \tag{65}$$

betrachtet. Für $Z \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Lie}(GL(n, \mathbb{R}))$ und $p = s(x) \in GL(m)$ bezeichne

$$\widetilde{Z}(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(-tZ) \cdot p)\Big|_{t=0} \in T_p(GL(m)) \tag{66}$$

das fundamentale Vektorfeld von Z auf $GL(m)$. Dieses liegt "parallel" zur Faser/Strukturgruppe über $x \in M$, also "senkrecht" zu M; eine Zusammenhangsform A projiziert Vektorfelder über dem Bündel auf die Strukturgruppe (womit der Normalenraum über der Faser der Kern von A ist und damit den parallel zu TM liegenden Unterraum in $T(GL(m))$ definiert, siehe auch Gleichung (63)). Jede Zusammenhangsform A auf einem Hauptfaserbündel hat also die Eigenschaften

$$A(\widetilde{Z}) = Z, \quad Z \in \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G), \qquad \text{und} \qquad L_g^* A = \mathrm{Ad}(g) \circ A, \quad g \in G, \tag{67}$$

wobei Ad die adjungierte Darstellung der Lie-Gruppe ist (im Fall einer Matrixgruppe ist $\mathrm{Ad}(g) = L_g \circ R_{g^{-1}}$). Sei $\gamma(t)$ ein Weg in M mit $\gamma(0) = x$ und $\dot{\gamma}(0) = X$ und $L_g : a \mapsto ga$ die Linkstranslation auf $GL(n, \mathbb{R})$, dann errechnet man zunächst mit der Produktregel für

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s_i(X) &= \mathrm{d}s_i \ \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \ \Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(s_i(\gamma(t))\big) \ \Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\Lambda_{ij}(\gamma(t)) \cdot s_j(\gamma(t))\big) \ \Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\Lambda_{ij}(x) \cdot s_j(\gamma(t))\big) \ \Big|_{t=0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\Lambda_{ij}(\gamma(t)) \cdot s_j(x) \ \Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(L_{\Lambda_{ij}(x)} s_j(\gamma(t))\big) \ \Big|_{t=0} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\Lambda_{ij}(\gamma(t)) \cdot (-\Lambda_{ij}^{-1}(x)) \cdot \Lambda_{ij}(x) \cdot s_j(x) \ \Big|_{t=0} \\
&= \mathrm{d}L_{\Lambda_{ij}(x)} \mathrm{d}s_j(X) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\exp[-t(\mathrm{d}\Lambda_{ij}(X)) \cdot \Lambda_{ij}^{-1}] \cdot \Lambda_{ij}(x) \cdot s_j(x) \ \Big|_{t=0} \\
&= \mathrm{d}L_{\Lambda_{ij}(x)} \mathrm{d}s_j(X) - \big(\mathrm{d}\Lambda_{ij}\widetilde{(X) \cdot \Lambda_{ij}^{-1}} \ (\Lambda_{ij}(x) \cdot s_j(x)).
\end{aligned} \tag{68}$$

Der zweite Summand misst die Differenz zwischen dem Vektor $\mathrm{d}s_i(X) \in T_{s_i(x)}(GL(M))$ und dem nach $s_i(x)$ linksverschobenen Vektor $\mathrm{d}s_j(X) \in T_{s_j(x)}(GL(M))$. Bei Anwendung der Zusammenhangsform $\widetilde{\omega}$ erhält man mit deren Eigenschaften in Gleichung (67) und der Tatsache, dass die lokalen Lorentz-Transformationen eine Matrixgruppe darstellen,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}(\mathrm{d}s_i(X)) \ = \ \omega^{s_i}(X) &= \mathrm{Ad}(\Lambda_{ij}(x)) \circ \widetilde{\omega}(\mathrm{d}s_j(X)) - \mathrm{d}\Lambda_{ij}(X)\Lambda_{ij}^{-1} \\
&= \Lambda_{ij}(x)\omega^{s_j}(X)\Lambda_{ij}^{-1}(x) - \mathrm{d}\Lambda_{ij}(X)\Lambda_{ij}^{-1}.
\end{aligned} \tag{69}$$

Dieses Resultat wurde schon in Gleichung (24) gefunden, dort wurde es aus der Definition und der Transformationseigenschaft des Torsionstensors hergeleitet. In der aktuellen Version wurde ausgenutzt, dass die lokale Zusammenhangsform durch einen Schnitt definiert wird, dessen Transformationseigenschaft mit Gleichung (64) bekannt ist und eine direkte anschauliche Form hat.

Die Krümmung ist ein etwas komplizierteres Konstrukt und ein vielseitiger Begriff, sie erfordert ein erweitertes Begriffssystem, der auch zu einer neuen Sichtweise auf die kovariante Ableitung führt. Ausdrücke, wie sie zum Beispiel in Gleichung (60) auftreten, können präziser gefasst werden, denn auf deren linken Seite stehen Größen, die im Tangentialbündel definiert sind, während auf deren rechten Seite eine Zusammenhangsform auf dem Rahmenbündel operiert, deren Werte in der Lie-Algebra der Strukturgruppe liegen. Es wird sich zeigen, dass die Ausdrücke zwar korrekt sind, aber im Fall der Krümmung die zugrundeliegende Geometrie des Formalismus nicht wirklich offenbaren (was Rechnungen in Komponenten meistens eigen ist). Weiterhin sehen Ergebnisse anders aus, wenn man nicht nur Basisvektoren einbezieht, sondern auch Linearkombinationen derselben. Dies offenbarte sich schon bei dem Übergang von einer Koordinatenbasis zu einer Orthonormalbasis, sodass bei den Komponenten des Krümmungstensors die Torsion hinzukam.

Zunächst sei eine heuristische Begründung für die Krümmungsform gegeben. In Gleichung (33) wurden die Komponenten des Krümmungstensors bestimmt zu

$$R^a{}_{dbc} = \hat{e}_b \Gamma^a{}_{cd} - \hat{e}_c \Gamma^a{}_{bd} + \Gamma^e{}_{cd}\Gamma^a{}_{be} - \Gamma^e{}_{bd}\Gamma^a{}_{ce} - (\Gamma^e{}_{bc} - \Gamma^e{}_{cb})\Gamma^a{}_{ed}. \tag{70}$$

Dies lässt sich wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} R^a{}_{dbc} &= \hat{e}_b \Gamma^a{}_{cd} - \hat{e}_c \Gamma^a{}_{bd} + \Gamma^a{}_{be}\Gamma^e{}_{cd} - \Gamma^a{}_{ce}\Gamma^e{}_{bd} - c_{bc}{}^e \Gamma^a{}_{ed} \\ &= \hat{e}_b(\Gamma^a{}_{fd}\hat{\theta}^f(\hat{e}_c)) - \hat{e}_c(\Gamma^a{}_{fd}\hat{\theta}^f(\hat{e}_b)) - \Gamma^a{}_{fd}\hat{\theta}^f(c_{bc}{}^e\hat{e}_e) \\ &\quad + (\Gamma^a{}_{fe}\hat{\theta}^f(\hat{e}_b))(\Gamma^e{}_{gd}\hat{\theta}^g(\hat{e}_c)) - (\Gamma^a{}_{fe}\hat{\theta}^f(\hat{e}_c))(\Gamma^e{}_{gd}\hat{\theta}^g(\hat{e}_b)) \\ &= \hat{e}_b(\omega^a{}_d(\hat{e}_c)) - \hat{e}_c(\omega^a{}_d(\hat{e}_b)) - \omega^a{}_d([\hat{e}_b, \hat{e}_c]) \\ &\quad + (\omega^a{}_e(\hat{e}_b))(\omega^e{}_d(\hat{e}_c)) - (\omega^a{}_e(\hat{e}_c))(\omega^e{}_d(\hat{e}_b)) \\ &= \mathrm{d}\omega^a{}_d(\hat{e}_b, \hat{e}_c) + \omega^a{}_e \wedge \omega^e{}_d(\hat{e}_b, \hat{e}_c). \end{aligned} \tag{71}$$

Man sieht sofort, dass dies eine 2-Form definiert und mit der eingangs definierten Krümmungsform in Gleichung (11) übereinstimmt. Letztendlich handelt es sich aber um die lokale Krümmungsform auf M. Um nun die Inhalte mathematisch zu präzisieren, wird der Begriff des assoziierten Vektorbündels benötigt. Das Tangentialbündel TM ist das zum Rahmenbündel $GL(M)$ und dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ assoziierte Faserbündel, sodass

$$TM = GL(M) \times_{GL(n,\mathbb{R})} \mathbb{R}^n = (GL(M) \times \mathbb{R}^n)/GL(n, \mathbb{R}). \tag{72}$$

Ist $e_x = (e_1, \dots, e_n) \in GL(M)_x$ und $v = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$, so hat man mit $g \in GL(n, \mathbb{R})$ für $X \in T_xM$ die Darstellung

$$X = v^i e_i = [e_x, v] = [e_x g, g^{-1}v], \tag{73}$$

wobei gleichzeitig die Gruppenwirkung angezeigt wurde, unter der die Äquivalenzklasse auf der rechten Seite invariant ist. Es wird dabei ebenso deutlich, dass X unabhängig von der Wahl der Repräsentanten innerhalb einer Äquivalenzklasse ist. Dies ist klar, denn wenn man die Basis und gleichzeitig die Komponenten transformiert, kommt derselbe Vektor heraus. Die Darstellung durch Äquivalenzklassen ist also nicht mehr als die getrennte Aufführung einer Basis und der Komponenten eines Vektors. Die kovariante

Ableitung auf dem assoziierten Vektorbündel TM entspricht einer Abbildung der 0-Formen $\Omega^0(M,TM)$ auf M mit Werten in TM auf die entsprechenden 1-Formen $\Omega^1(M,TM)$

$$\begin{aligned} \nabla = \mathrm{d}_\omega\big|_{\Omega^0(M,TM)} : \Omega^0(M,TM) = \Gamma(TM) &\to \Omega^1(M,TM) = \Gamma(T^*M \otimes TM), \\ Z &\to \nabla(Z) = \nabla Z. \end{aligned} \tag{74}$$

Die Menge der k-Formen $\Omega^k(M,TM)$ ist isomorph zu den horizontalen k-Formen $\Omega^k_{\mathrm{hor}}(GL(m),\mathbb{R}^n)$ auf dem Rahmenbündel $GL(m)$ in den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ (das Bild kann auch eine Matrix sein, die in diesem Raum wirkt). Eine horizontale Form auf dem Rahmenbündel projiziert alle vertikalen Vektorfelder auf die Null (womit eine horizontale Form zu einer Zusammenhangsform hinzuaddiert werden kann, ohne sie zu ändern; gerade dadurch entsteht die Menge aller Zusammenhänge und der Levi-Civita-Zusammenhang ist nur ein spezieller). Ist $\sigma \in \Omega^k(M,TM)$, so ist die zugehörige Form $\overline{\sigma} \in \Omega^k_{\mathrm{hor}}(GL(m),\mathbb{R}^n)$ für $X_1,\dots,X_k \in T_xM$ und einen glatten Schnitt $s : M \to GL(m)$ gegeben durch

$$\sigma_x(X_1,\dots,X_k) = [s(x), \overline{\sigma}_{s(x)}(\mathrm{d}s(X_1),\dots,\mathrm{d}s(X_k))]. \tag{75}$$

Es wird also eine Basis $s(x)$ und die Komponenten bis auf Äquivalenz festgelegt, die linke Seite ist aber nach Gleichung (73) eindeutig. Man erkennt, dass die Werte der horizontalen Formen im $\mathbb{R}^n$ liegen und damit dort der Darstellung eines Vektors in TM entsprechen. Ähnliches gilt für die Krümmungsform aus Gleichung (71); dort werden die Komponenten einer Matrix errechnet, welche die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors sind, nicht aber der Tensor selber. Der entsteht nach Gleichung (73), wenn man die Komponenten mit der Basis zusammensetzt, die Matrix also zu einem Tensor wird.

Weiterhin hat man das durch eine Zusammenhangsform definierte absolute Differential

$$D_\omega : \Omega^k_{\mathrm{hor}}(GL(m),\mathbb{R}^n) \to \Omega^{k+1}_{\mathrm{hor}}(GL(m),\mathbb{R}^n), \tag{76}$$

welches auf eine horizontale k-Formen $\overline{\sigma} \in \Omega^k_{\mathrm{hor}}(GL(m),\mathbb{R}^n)$ angewandt die Gestalt

$$D_\omega \overline{\sigma} = \mathrm{d}\overline{\sigma} + \widetilde{\omega} \wedge \overline{\sigma} \tag{77}$$

hat. Bei der Zusammenhangsform $\widetilde{\omega}$ handelt es sich nicht um eine horizontale Form, das absolute Differential einer beliebigen Form ist aber horizontal. Das Differential D_ω angewandt auf eine k-Form aus $\Omega^k_{\mathrm{hor}}(GL(m),\mathbb{R}^n)$ steht wegen der Isomorphie der beiden Formenräume in eindeutiger Beziehung zu der Anwendung des Differentials d_ω auf eine k-Form aus $\Omega^k(M,TM)$. Jedes Vektorfeld $Z \in \Gamma(TM)$ hat mit einem glatten Schnitt $s : M \to GL(m)$ und einer glatten Funktion $v \in C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$ mittels Gleichung (73) die Darstellung

$$Z(x) = [s(x), v(x)], \tag{78}$$

was nicht mehr als die Wahl einer Basis entspricht. Bemerkt man, dass ebenso $Z \in \Omega^0(M,TM)$ ist, kann man auch

$$Z(x) = [s(x), \overline{Z}(s(x))] \tag{79}$$

schreiben für $\overline{Z} \in \Omega^0_{\mathrm{hor}}(GL(m),\mathbb{R}^n)$. Man errechnet mit all den Begriffen und mit Gleichung (77) die kovariante Ableitung von $Z \in \Gamma(TM)$ nach $X \in \Gamma(TM)$ punktweise zu

$$\begin{aligned}
\nabla_X Z &= (\mathrm{d}_\omega Z)(X) \\
&= [s(x), (D_\omega(\overline{Z} \circ s))(X)] \\
&= [s(x), (D_\omega \overline{Z})(\mathrm{d}s(X))] \\
&= [s(x), \mathrm{d}\overline{Z}(\mathrm{d}s(X)) + \widetilde{\omega}(\mathrm{d}s(X))\overline{Z}(s(x))] \\
&= [s(x), \mathrm{d}(\overline{Z} \circ s)(X) + \omega^s(X)(\overline{Z} \circ s)(x)] \\
&= [s(x), \mathrm{d}v(X) + \omega^s(X)v(x)]. \qquad (80)
\end{aligned}$$

Aus der rechten Seite handelt es sich in der zweiten Komponente um gewöhnliche Vektoren im $\mathbb{R}^n$ und man sieht, dass das Bild der lokalen Zusammenhangsform ein Element aus $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ ist. Man vergleiche dies mit der gewöhnlichen Notation der kovarianten Ableitung in Komponenten, denn mit Gleichung (60) hat man

$$\begin{aligned}
\nabla_X Z &= X^a \nabla_a (Z^b \hat{e}_b) \\
&= X^a (\hat{e}_b Z^d \hat{e}_d + Z^b \Gamma^d{}_{ab} \hat{e}_d) \\
&= X^a (\hat{e}_b Z^d) \hat{e}_d + X^a Z^b \omega^d{}_b (\hat{e}_a) \hat{e}_d \\
&= X^a (\hat{e}_b Z^d) \hat{e}_d + \omega^d{}_b (X) Z^b \hat{e}_d. \qquad (81)
\end{aligned}$$

Die Vektoren in der zweiten Komponente auf der rechten Seite in Gleichung (80) sind hier schon mit den Basisvektoren gemäß Gleichung (73) zusammengefügt. Nun kann man die zweifache kovariante Ableitung ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\nabla_Y \nabla_X Z &= \big(\mathrm{d}_\omega((\mathrm{d}_\omega Z)(X)) \;\; (Y) \\
&= [s(x), \;\; D_\omega(\mathrm{d}v(X) + \omega^s(X)v(x))\big\}(\mathrm{d}s(Y))] \\
&= [s(x), (\mathrm{d} \;\; \mathrm{d}v(X) + \omega^s(X)v(x))\big\}(\mathrm{d}s(Y)) \\
&\qquad\quad + \widetilde{\omega}(\mathrm{d}s(Y)) \;\; \mathrm{d}v(X) + \omega^s(X)v(x))\big\}] \\
&= [s(x), \mathrm{d}s(Y)(\mathrm{d}v(X)) + \mathrm{d}s(Y)(\omega^s(X)v(x)) \\
&\qquad\quad + \omega^s(Y)\mathrm{d}v(X) + \omega^s(Y)\omega^s(X)v(x)]. \qquad (82)
\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla_Y Z &= [s(x), \mathrm{d}s(X)(\mathrm{d}v(Y)) + \mathrm{d}s(X)(\omega^s(Y)v(x)) \\
&\qquad\quad + \omega^s(X)\mathrm{d}v(Y) + \omega^s(X)\omega^s(Y)v(x)]. \qquad (83)
\end{aligned}$$

Weiterhin ergibt sich

$$\nabla_{[X,Y]} Z = (\mathrm{d}_\omega Z)([X, Y]) = [s(x), \mathrm{d}v([X, Y]) + \omega^s([X, Y])v(x)]. \qquad (84)$$

Subtrahiert man Gleichung (83) und (84) von (82), so ergibt sich nach Ordnung der Summanden

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= [s(x), \mathrm{d}s(X)(\mathrm{d}v(Y)) - \mathrm{d}s(Y)(\mathrm{d}v(X)) - \mathrm{d}v([X,Y]) \\ &\qquad + \mathrm{d}s(X)(\omega^s(Y)v(x)) - \mathrm{d}s(Y)(\omega^s(X)v(x)) - \omega^s([X,Y])v(x) \\ &\qquad + \omega^s(X)\mathrm{d}v(Y) - \omega^s(Y)\mathrm{d}v(X) \\ &\qquad + \omega^s(X)\omega^s(Y)v(x) - \omega^s(Y)\omega^s(X)v(x)]. \end{aligned} \tag{85}$$

Die erste Zeile verschwindet nach dem Lemma von Poincaré

$$\mathrm{d}s(X)(\mathrm{d}\overline{Z}(\mathrm{d}s(Y))) - \mathrm{d}s(Y)(\mathrm{d}\overline{Z}(\mathrm{d}s(X))) - \mathrm{d}\overline{Z}([\mathrm{d}s(X), \mathrm{d}s(Y)]) = \mathrm{d}(\mathrm{d}\overline{Z})(\mathrm{d}s(X), \mathrm{d}s(Y)) = 0. \tag{86}$$

Mit

$$\mathrm{d}s(X)v(x) = \mathrm{d}s(X)(\overline{Z}(s(x))) = \mathrm{d}\overline{Z}(\mathrm{d}s(X)) = \mathrm{d}v(X), \tag{87}$$

sodass sich nach Anwendung der Produktregel in der zweiten Zeile zusammen mit der dritten Zeile ergibt

$$\mathrm{d}\widetilde{\omega}(\mathrm{d}s(X), \mathrm{d}s(Y))v(x). \tag{88}$$

Die vierte Zeile lässt sich zu einem Keilprodukt zusammenfassen, sodass schließlich

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= [s(x), (\mathrm{d}\widetilde{\omega}(\mathrm{d}s(X), \mathrm{d}s(Y)) + \widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\omega}(\mathrm{d}s(X), \mathrm{d}s(Y)))v(x)] \\ &= [s(x), \quad (D_\omega \widetilde{\omega})(\mathrm{d}s(X), \mathrm{d}s(Y))\big\}v(x)]. \end{aligned} \tag{89}$$

Das Resultat ist die Krümmungsform

$$D_\omega \widetilde{\omega} \in \Omega^2_{\text{hor}}(GL(m), \mathbb{R}^n), \tag{90}$$

deren Bild die Krümmungsmatrix bildet, welche auf die Komponenten von $Z \in \Gamma(TM)$ wirkt (siehe Gleichung (77)). Mit Gleichung (89) ist auch sofort die lokale Krümmungsform bestimmt und sie stimmt mit derjenigen in Gleichung (71) überein. Damit kann man den Gleichung (89) im Sinne von Gleichung (73) komponentenweise hinschreiben

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= [(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n)_x, (((D_\omega \omega^s)(X,Y))^1{}_j v^j, \ldots, ((D_\omega \omega^s)(X,Y))^1{}_j v^j)] \\ &= ((D_\omega \omega^s)(X,Y))^i{}_j v^j \hat{e}_i, \end{aligned} \tag{91}$$

wobei die Komponenten der Matrix explizit gegeben sind durch

$$(\mathrm{d}\omega^s)^i{}_j = \mathrm{d}(\omega^s)^i{}_j \tag{92}$$

und

$$\begin{aligned} (\omega^s \wedge \omega^s)^i{}_j &= ((\omega^a{}_{cb} E^b{}_a)(\omega^d{}_{fe} E^e{}_f)\hat{\theta}^c \wedge \hat{\theta}^f)^i{}_j \\ &= (\omega^a{}_b \wedge \omega^b{}_f E^f{}_a))^i{}_j \\ &= \omega^i{}_b \wedge \omega^b{}_j. \end{aligned} \tag{93}$$

Man erhält dann die Komponenten von R in der Form von Gleichung (71), wenn man für X und Y Basisvektoren einsetzt. Die v^j und s_i definieren den Vektor Z und zählen nicht zu den Komponenten von R an sich, denn Z wird abgebildet. Ähnlich wie in Gleichung (25) kann man mit Hilfe der Transformationseigenschaft der lokalen Zusammenhangsform, dessen Transformationseigenschaft wiederum von derjenigen der glatten Schnitte im Rahmenbündel festgelegt ist, untersuchen, wie sich die Krümmungsform unter lokalen Lorentz-Transformationen ändert. Und schließlich erhält man für die Torsionsform den Ausdruck

$$T(X)Z = [s(x), D_\omega \hat{\theta}(X)v(x)], \tag{94}$$

wie man mit Gleichung (11) und (77) feststellt. Durch Anwenden des Differentialoperators D_ω auf die Krümmungs- und die Torsionsform erhält man die Bianchi-Identitäten.

7. Ausblick

Nach dem theorema egregium von Gauß ist die Krümmung einer Fläche bestimmbar durch Messungen auf der Fläche, ohne den umgebenden Raum hinzuziehen zu müssen. Krümmung ist damit eine intrisische Eigenschaft von Flächen [4]. Es stellt sich heraus, dass die fundamentalen Kräfte der Natur sich mit Hilfe der Krümmung von Mannigfaltigkeiten beschreiben lassen [3]. Die Gravitation ist offensichtlich eine solche Kraft, aber auch die drei anderen Wechselwirkungen sind mit diesem Konzept beschreibbar. In der Elektrodynamik zum Beispiel entspricht das Viererpotential dem Zusammenhang des Hauptfaserbündels $M \times U(1)$ (es handelt sich um eine U(1)-Eichtheorie) und die Wechselwirkung äußert sich durch die Krümmung dieses Bündels. Bekanntlich erhält man den Feldstärketensor zu $F = \mathrm{d}A$, dieser Ausdruck ist mit Gleichung (77) zu vergleichen (das Vektorpotential kommutiert, die Eichtheorie ist kommutativ). Aus derselben Gleichung kann man auch die Verallgemeinerung des Impulses in der Elektrodynamik ablesen (minimale Substitution, Impulsoperator). Weiterhin kann man zu jeder Zusammenhangsform eine horizontale Differentialform hinzuaddieren, ohne das Ergebnis zu ändern, was sich mathematisch in dem Begriff des affinen Zusammenhangs ausdrückt, physikalisch handelt es sich um eine Art Eichtransformation. Physikalische Felder (Tensoren, Spinoren) hängen von der Raumzeit ab und alle möglichen Feldwerte in einem Punkt bilden einen linearen Raum; dies führt zum Begriff des Vektorbündels. Die Faser entspricht einer Verallgemeinerung dieser linearen Räume. Die assoziierten Vektorbündel entsprechen physikalischen Feldern von Teilchen, die der Wechselwirkung (Krümmung) unterliegen. Auch hier lassen sich Eichtransformationen einführen, die lokale Lorentz-Transformation ist zum Beispiel eine solche. Sie entsprechen Übergängen zwischen zwei Schnitten und sind meistens lokal. Der Paralleltransport entspricht dem Transport von Informationen über die benutzten Eichungen (womit die in der Einführung auf S. 1 genannten Probleme behandelt werden können) und bei der kovarianten Richtungsableitung handelt es sich schließlich um eine eichinvariante Differentiation physikalischer Felder. Es ist deshalb nützlich die verschiedenen Begriffe wie assoziierte Vektorbündel und Krümmungsform im letzten Abschnitt sich in einer allgemeinen Form vorzustellen, da sie sich auch auf ganz andere Probleme anwenden lassen. Allem liegt die Vorgehensweise zugrunde, die Krümmungsverhältnisse von Mannigfaltigkeiten auf Hauptfaserbündeln zu untersuchen, wo verschiedene Tangentialräume und Bezugssysteme jeweils in einer Mannigfaltigkeit (den Bündeln) vereint beschrieben können.

Die Einführung eines Bezugsfeldes (Basisfeldes) wurde von Elie Cartan als Methode mitbewegter Koordinatensysteme (repère mobile) vorgeschlagen und führte zu der Definition des Rahmenbündels (ursprünglich Reperbündel) [7]. Mit Hilfe der Bezugsfelder kann man die Zusammenhangsform und die Krümmung vielseitig beschreiben. Der gezeigte Formalismus verallgemeinert eigentlich die homogenen Räume durch die Einführung der Krümmung. Bestimmte Mannigfaltigkeiten lassen sich als Äquivalenzklassen $M = G/H$ (G/H homogener Raum) beschreiben, wobei H eine Untergruppe der Lie-Gruppe G ist. Das H-Hauptfaserbündel $(G, \pi, M; H)$ besitzt keine Krümmung und man kann sich vorstellen, dass sich gekrümmte Mannigfaltigkeiten mit dieser Beschreibung lokal durch einen homogenen Raum approximieren lassen. Sie haben den Vorteil, dass auf ihnen eine Gruppenwirkung definiert ist und dadurch Translationen beschreibbar sind. Für den homogenen Raum G/H ist die Zusammenhangsform die kanonische Maurer-Cartan-Form μ_G, welche die Strukturgleichung

$$\mathrm{d}\mu_G + \tfrac{1}{2}\, \mu_G \wedge \mu_G = 0 \tag{95}$$

erfüllt. Man sieht hier also den Ansatz, der zum Begriff der Krümmung führt, denn bei dem Ausdruck handelt es sich um eine Krümmungsform mit der Gestalt wie in den Gleichungen (71) und (77).

In der Physik wird die Zusammenhangsform auch als Spin-Zusammenhang bezeichnet [2]. In der Allgemeinen Relativitätstheorie können Effekte wie die Spin-Bahn-Kopplung nicht beschrieben werden, was an der Wahl des Zusammenhangs im Sinne von Levi-Civita liegt, in welcher die Torsion verschwindet [7]. Diese Forderung führt zu einer natürlichen Erweiterung des Paralleltransports von in Räumen eingebetteten Flächen auf abstrakte Mannigfaltigkeiten, der Paralleltransport behält seine Isometrieeigenschaft bei, der Ricci-Tensor ist symmetrisch und die Strukturgruppe des Rahmenbündels ist auf $O(1, n-1)$ reduzierbar. Lässt man die Forderung für die Torsion fallen, so gelangt man zur Einstein-Cartan-Theorie, deren formale Grundlagen (Einführung mitbewegter Basisfelder und Rahmenbündel) in dieser Ausarbeitung zum Vortrag dargelegt wurden. Durch Einführung einer Orthonormalbasis verschwindet der Torsionsanteil des Krümmungstensors in Gleichung (33) nicht. Lässt man also eine Torsion zu, so ist der Ricci-Tensor nicht mehr symmetrisch und man erhält eine Möglichkeit, den Drehimpuls zu beschreiben. Man beachte, dass die Einsteinschen Feldgleichungen den Ricci-Tensor und den Energie-Impuls-Tensor mit seinen Nichtdiagonalelementen enthalten, wo die Komponenten des Drehimpulses stehen. Die Krümmung, wie sie in Gleichung (33) steht, enthält einen Rotations- und einen Torsionsanteil. Der Rotationsanteil entspricht dem gewöhnlichen Krümmungsbegriff, einem Paralleltransport entlang einer von zwei Vektoren gebildeten geschlossenen Schleife. Der Torsionsanteil hängt mit dem Begriff des development zusammen und entspricht der Krümmung für Translationen (Drehung entlang eines Weges). Im Endeffekt führt die Erweiterung der semi-Riemannschen Geometrie (mit verschwindender Torsion) zur Riemann-Cartan-Geometrie, zu den Spin-Bündeln und assoziierten Spinor-Bündeln. Mit diesen Begriffen kann man abstrakt die Dirac-Spinoren auf gekrümmten Raumzeiten untersuchen.

[1] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing 1990

[2] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: Introduction to General Relativity*, Prentice Hall 2003

[3] Teubner, *Taschenbuch der Mathematik - Teil II*, B. G. Teubner 1995

[4] H. Fischer, H. Kaul, *Mathematik für Physiker - Band 3*, B. G. Teubner 2003

[5] M. Schottenloher, *Geometrie und Symmetrie in der Physik*, vieweg 1995

[6] H. Baum, *Eichfeldtheorie*, HU Berlin, http://www-irm.mathematik.hu-berlin.de/ baum/

[7] http://www.wikipedia.de