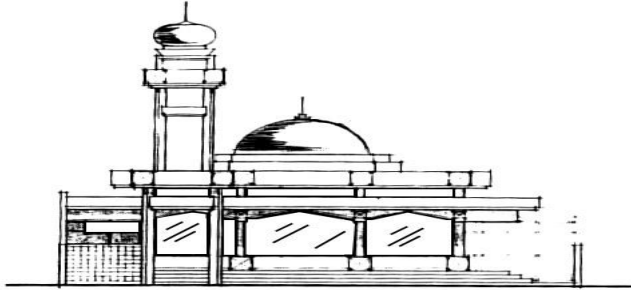


## INTEGRAL

Coba kalian perhatikan gambar kubah di bawah ini! Tahukah kalian bagaimana cara menentukan luas dan volume dari kubah tersebut? Ternyata konsep-konsep integral yang akan kita pelajari dapat menolong untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Integral merupakan salah satu bahasan dalam kalkulus yang merupakan cabang matematika. Tapi yang akan kita pelajari hanya dasar-dasarnya saja.



### A. Integral Tak Tentu

#### 1. Pengertian integral

Untuk mengetahui pengertian integral, akan lebih mudah jika kita pahami dulu materi turunan yang telah dipelajari sebelumnya.

Definisi :

Integral merupakan antiturunan, sehingga jika terdapat fungsi  $F(x)$  yang

kontinu pada interval  $[a, b]$  diperoleh  $\frac{d(F(x))}{dx} = F'(x) = f(x)$ . Antiturunan

dari  $f(x)$  adalah mencari fungsi yang turunannya adalah  $f(x)$ , ditulis  $\int f(x) dx$

Secara umum dapat kita tuliskan :

$$\int f(x) dx = \int F'(x) dx = F(x) + C$$

Catatan:

$\int f(x) dx$  : disebut unsur integrasi, dibaca " integral  $f(x)$  terhadap  $x$ "

$f(x)$  : disebut integran (yang diintegrasikan)

$F(x)$  : disebut fungsi asal (fungsi primitive, fungsi pokok)

$C$  : disebut konstanta / tetapan integrasi

Perhatikan tabel dibawah ini !

### Pendiferensialan

F(x)	F'(x) = f(x)
$x^2 + 3x$	$2x + 3$
$x^2 + 3x + 2$	$2x + 3$
$x^2 + 3x - 6$	$2x + 3$
$x^2 + 3x + \sqrt{3}$	$2x + 3$
$x^2 + 3x + C$ , dengan $C = \text{konstanta} \in \mathbb{R}$	$2x + 3$

### Pengintegralan

Berdasarkan tabel diatas dapat kita simpulkan bahwa dari F(x) yang berbeda diperoleh F'(x) yang sama, sehingga dapat kita katakan bahwa jika  $F'(x) = f(x)$  diketahui sama, maka fungsi asal F(x) yang diperoleh belum tentu sama. Proses pencarian fungsi asal F(x) dari F'(x) yang diketahui disebut *operasi invers pendiferensialan* (anti turunan) dan lebih dikenal dengan nama operasi integral.

Jadi, secara umum perumusan integrasi dasar sebagai berikut:

#### Integral fungsi aljabar

- $\int k \, dx = kx + C$
- $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ , bila  $n \neq -1$
- $\int ax^n \, dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c$ , dengan  $n \neq -1$
- $\int (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$
- $\int a \cdot f(x) \, dx = a \int f(x) \, dx$ , dimana a konstanta sebarang.

#### Integral fungsi trigonometri

- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
- $\int \sin(ax+b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
- $\int \cos(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$

Untuk mengerjakan integral fungsi trigonometri akan digunakan kesamaan-kesamaan sebagai berikut berikut ini:

$$\begin{array}{ll} 1. \sin^2 x + \cos^2 x = 1 & 4. \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \\ 2. \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) & 5. 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{1}{2} x \\ 3. \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) & 6. 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{1}{2} x \end{array}$$

**Contoh soal :**

$$\begin{array}{l} 1. \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C \\ 2. \int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C \\ 3. \int (2x^2 - 5x + 3) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x + C \\ 4. \int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C \\ 5. \int 4 dx = 4x + C \end{array}$$

**Latihan soal :**

$$\begin{array}{ll} 1. \int (2 - 3x)^2 dx. & 6. \int \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} dx. \\ 2. \int 2 \sin x dx & 7. \int (\cos x + \sin 2x) dx. \\ 3. \int (1 + \sqrt[3]{x}) dx. & 8. \int \cos^2 x dx. \\ 4. \int \frac{2x-1}{x^2} dx. & 9. \int 3x(x+1) dx. \\ 5. \int x\sqrt{x} dx & 10. \int \frac{dx}{3\sqrt{x^5}} dx. \end{array}$$

## B. Integral Tertentu

Integral tertentu dinotasikan dengan

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Keterangan:

$f(x)$  adalah integran, yaitu  $f(x) = F'(x)$

$a, b$  adalah batas-batas pengintegralan

$[a, b]$  adalah interval pengintegralan

**Contoh soal :**

$$1. \int_{-2}^2 x^3 \, dx = \left[ \frac{1}{4} x^4 \right]_{-2}^2 = \left[ \frac{1}{4} (2)^4 \right] - \left[ \frac{1}{4} (-2)^4 \right] = (4 - 4) = 0$$

$$2. \int_0^2 (x^2 + 4x) \, dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 + 2x^2 \right]_0^2 = \left[ \frac{1}{3} (2)^3 + 2(2)^2 \right] - \left[ \frac{1}{3} (0)^3 + 2(0)^2 \right] \\ = (8/3 + 8) - (0 + 0) = 10 \frac{2}{3}$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \, dx = \left[ \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ = \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) + \frac{1}{4} (0 - 0) = \frac{\pi}{4}$$

**Latihan soal :**

$$1. \int_{-1}^1 (1 - x^2) \, dx = \dots$$

$$2. \int_0^4 \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \, dx = \dots$$

$$3. \int_{-2}^0 (2 - x) \, dx = \dots$$

$$4. \text{Carilah nilai } p \text{ bila, } \int_0^p x(1 - x) \, dx = 0, \, p > 0 !$$

$$5. \text{Selidiki apakah } \int_1^3 4x^3 \, dx + \int_3^4 4x^3 \, dx = \int_1^4 4x^3 \, dx$$

$$6. \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \dots$$

$$7. \int_0^{\eta} \sin x dx = \dots$$

$$8. \int_{1/4\eta}^{1/2\eta} \sin 2x dx = \dots$$

$$9. \int_0^2 (x^2 - 6x + 8) dx = \dots$$

$$10. \int_{-\eta}^0 \cos x dx = \dots$$

### C. Teknik Pengintegralan

#### 1. Integral Substitusi

Pada bagian ini akan dibahas teknik integrasi yang disebut metode substitusi. Konsep dasar dari metode ini adalah dengan mengubah integral yang kompleks menjadi bentuk yang lebih sederhana.

Bentuk umum integral substitusi adalah sebagai berikut.

$$\int [f(u) \frac{du}{dx}] dx = \int f(u) du$$

**Contoh soal :**

a. Tentukan  $\int 2x(x^2 + 3)^4 dx$ !

b. Tentukan  $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$ !

Penyelesaian:

a. Misalkan  $u = x^2 + 3$ , maka  $\frac{du}{dx} = 2x$  atau  $dx = \frac{du}{2x}$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga diperoleh, } \int 2x(x^2 + 3)^4 dx &= \int 2x u^4 \frac{du}{2x} \\ &= \int u^4 du \\ &= \frac{1}{5} u^5 + C \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{5}(x^2 + 3)^5 + C$$

b. Misalkan  $u = \sin x$ , maka  $\frac{du}{dx} = \cos x$  atau  $dx = \frac{du}{\cos x}$

$$\begin{aligned}\text{Sehingga diperoleh, } \int \sin^3 x \cos x \, dx &= \int u^3 \cos x \frac{du}{\cos x} \\ &= \int u^3 \, du \\ &= \frac{1}{4} u^4 + C \\ &= \frac{1}{4} \sin^4 x + C\end{aligned}$$

## 2. Integral Parsial

Teknik integral parsial ini digunakan bila suatu integral tidak dapat diselesaikan dengan cara biasa maupun dengan cara substitusi. Prinsip dasar integral parsial adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}y = u \cdot v &\rightarrow dy = du \cdot v + u \cdot dv \\ \int dy &= \int v \, du + \int u \, dv \\ y &= \int v \, du + \int u \, dv \\ u \cdot v &= \int v \, du + \int u \, dv \\ \int u \, dv &= u \cdot v - \int v \, du\end{aligned}$$

pengintegralan parsial integral tak tentu

$$\int u \, v' = uv - \int u'v$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

pengintegralan parsial integral tertentu

$$\begin{aligned}\int_a^b u \, v' &= [uv]_a^b - \int_a^b u'v \\ \int_a^b u \, dv &= [uv]_a^b - \int_a^b v \, du\end{aligned}$$

**Contoh soal :**

Tentukan  $\int x^2 \sin x \, dx$  !

Penyelesaian:

**Cara 1:** dengan menggunakan rumus  $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

Misal :  $u = x^2, \rightarrow du = 2x \, dx$

$dv = \sin x \, dx \rightarrow v = \int \sin x \, dx = -\cos x$

$$\begin{aligned} \text{sehingga diperoleh, } \int x^2 \sin x \, dx &= x^2 \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) 2x \, dx \\ &= x^2 \cdot (-\cos x) + \int \cos x \cdot 2x \, dx \\ &= -x^2 \cdot \cos x + 2 \left( x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx \right) \\ &= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2 \cos x + C \end{aligned}$$

Selain cara di atas, dapat pula diselesaikan dengan cara sebagai berikut :  
untuk menentukan integral parsial bentuk  $\int u \, dv$ , yang turunan ke-k dari u adalah 0 dan integral ke- k dari v selalu ada.

**Cara 2:**

Diturunkan	Diintegralkan
+ $x^2$	$\sin x$
- $2x$	$-\cos x$
+ $2$	$-\sin x$
- $0$	$\cos x$

Deferensialkan sampai nol

Sehingga diperoleh,  $\int x^2 \cdot \sin x \, dx = -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2 \cos x + C$

**Latihan soal :**

Selesaikan integral berikut dengan teknik substitusi atau integral parsial!

1.  $\int x^2 \cdot \sin x^3 dx$

2.  $\int 2x\sqrt{x^2 - 4}dx$

3.  $\int \sqrt{x+7}dx$

4.  $\int 3x(x-7)^5 dx$

5.  $\int -2x \cdot \cos(x+3)dx$

6.  $\int 3x(x^2 + 5)^5 dx$

7.  $\int 2x \cdot \sin(x^2 + 3)dx$

8.  $\int x^2 \cdot \sin x dx$

9.  $\int -x\sqrt{x+7}dx$

10.  $\int 3x \cdot \sin 6x dx$



## UJI KOMPETENSI

### A. Bubuhkan tanda silang (x) pada alternatif jawaban yang paling tepat!

1. Anti derivatif dari  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 8x$  adalah ...

- a.  $x^2 - 12x + 8 + C$       c.  $\frac{1}{9}x^4 - 3x^3 + 8x^2 + C$       e.  $\frac{1}{12}x^4 - 2x^3 + 4x^2 + C$   
b.  $x^3 - 6x^2 + x + C$       d.  $\frac{1}{3}x^2 + 6x + 8 + C$

2. Diketahui  $f'(x) = 2x - 3$  merupakan turunan dari  $f(x)$ ,  $f(1) = -6$ , fungsi  $f(x)$  adalah ...

- a.  $x^2 - 3x - 4$       b.  $x^2 - 3x + 4$       c.  $x^2 - 3x - 8$       d.  $2x^2 - 3x - 4$       e.  $2x^2 - 3x + 4$

3. Jika  $\int_{-2}^2 (4x + a) dx = 12$ , maka nilai  $a$  adalah ...

- a. 6      b. 3      c. 2      d. 1      e. 0

4.  $\int (1 + \frac{1}{x^2}) dx = \dots$

- a.  $x - \frac{1}{x} + C$       b.  $x - \frac{1}{x^3} + C$       c.  $x + \frac{1}{x} + C$       d.  $-2x - 3 + C$       e.  $x - \frac{1}{x} + C$

5. Nilai  $\int_0^1 5x(1-x)^6 dx = \dots$

- a.  $\frac{75}{56}$       b.  $\frac{10}{56}$       c.  $\frac{5}{56}$       d.  $-\frac{7}{56}$       e.  $-\frac{10}{56}$

6.  $\int (x^3 - \frac{1}{x^2}) dx = \dots$

- a.  $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + C$       c.  $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{x} + C$       e.  $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x^2} + C$   
b.  $-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{x} + C$       d.  $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + C$

7. Jika  $F'(x) = 8x - 2$  dan  $F(5) = 36$  maka  $F(x) = \dots$

- a.  $8x^2 - 2x - 159$       c.  $4x^2 - 2x - 74$       e.  $4x^2 - 2x - 59$   
b.  $8x^2 - 2x - 154$       d.  $4x^2 - 2x - 54$

8.  $\int_0^a 2x + 3 dx = 18$ , dengan  $a > 1$ , maka nilai  $a$  ....

- a. 2                      b. 3                      c. 4                      d. 5                      e. 6

9.  $\int_1^3 \frac{2}{x^3} dx = \dots$

- a. 1                      b.  $\frac{8}{9}$                       c.  $-\frac{1}{9}$                       d.  $-\frac{10}{9}$                       e.  $-\frac{12}{9}$

10. Hasil  $\int x(\frac{1}{\sqrt{x}} + x) dx = \dots$

- a.  $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{3}x^3 + c$                       c.  $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{3}x^2 + c$                       e.  $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{3}x^2 + c$   
 b.  $\frac{2}{3}x^2\sqrt{x} + \frac{1}{3}x^3 + c$                       d.  $\frac{2}{3}x\sqrt{2x} + \frac{1}{3}x^3 + c$