Primeira Prova - Integração

Semestre 2018/2 - Prof. Ricardo M. S. Rosa

30 de outubro de 2018

Obs: Sejam claros nas suas repostas e façam as devidas justificativas. Boa sorte!

1ª Questão: Considere a medida de Lebesgue m e a sequência $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos conjuntos

$$E_n = \bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1} \left[\frac{2j}{2^n}, \frac{2j+1}{2^n}\right].$$

(1) Determine explicitamente o conjunto $\liminf_{n\to\infty} E_n$.

$\liminf_{n\to\infty} E_n =$ "união dos extremos" $= \cup_{n\in\mathbb{N}} \cup_{j=0}^{2^n-1} \{j/2^n\}$.

(2) Determine explicitamente o conjunto $\limsup_{n\to\infty} E_n$.

$\limsup_{n\to\infty} E_n = [0,1)$.

(3) Dado um intervalo $[a,b]$ com $0 \leq a < b \leq 1$, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} m([a,b]\cap E_n) = \frac{b-a}{2}.$$

Considere $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n b > 1$. Sejam j_1 o menor inteiro tal que $j_1 \geq 2^{n-1}a$ e j_2 o maior inteiro tal que $j_2 \leq 2^{n-1}b + 1/2$, de modo que $2(j_1-1)/2^n < a \leq 2j_1/2^n$ e $(2j_2-1)/2^n \leq b < (2j_2+1)/2^n$. Assim,

$$\bigcup_{j_1\leq j\leq j_2-1} \left[\frac{2j}{2^n}, \frac{2j+1}{2^n}\right] \subset [a,b]\cap E_n \subset \bigcup_{j_1-1\leq j\leq j_2} \left[\frac{2j}{2^n}, \frac{2j+1}{2^n}\right],$$

o que nos dá

$$\frac{b-a}{2} - \frac{3}{2^{n+1}} < \frac{j_2-j_1}{2^n} \leq m([a,b]\cap E_n) \leq \frac{j_2-j_1+2}{2^n} \leq \frac{b-a}{2} + \frac{5}{2^{n+1}}.$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} m([a,b]\cap E_n) = (b-a)/2$.

(4) Dado um conjunto mensurável $A \subset [0,1]$ qualquer, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} m(A\cap E_n) = \frac{1}{2}m(A).$$

Como $m(A)$ é finito, dado $\varepsilon > 0$, existe um número finito de intervalos disjuntos $Q_j = [a_j,b_j] \subset [0,1]$, $j = 1,\ldots,J$, satisfazendo $m(A \triangle F) < \varepsilon$, onde $F = \cup_j Q_j$ e $A \triangle F$ é a diferença simétrica entre A e F. Pelo item anterior, para cada j, existe N_j tal que $|m(Q_j\cap E_n) - m(Q_j)/2| \leq \varepsilon/J$. Usando que

$$|m(A) - m(F)| \leq m(F \triangle A) < \varepsilon$$

e

$$|m(A\cap E_n) - m(F\cap E_n)| \leq m(F \triangle A) < \varepsilon$$

obtemos

$$|m(A\cap E_n)-\frac{1}{2}m(A)| \le \frac{3\varepsilon}{2}+\sum_{j=1}^{J}\left|m(Q_j\cap E_n)-\frac{1}{2}m(Q_j)\right| \le \frac{5\varepsilon}{2},$$

para $n \ge N = \max_j N_j$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, obtemos $\lim_{n\to\infty} m(A\cap E_n) = m(A)/2$.

2ª Questão: Dada uma função real f definida no intervalo $[0,1]$, considere a função $f^\star$ definida por

$$f^\star(x) = \sup_{x\le y\le 1} f(y), \quad \forall x \in [0,1].$$

(1) Mostre que se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções definidas em $[0,1]$ que converge pontualmente para f e $\varphi_n(x) \le f(x)$, para todo $x \in [0,1]$ e todo $n \in \mathbb{N}$, então a sequência $(\varphi_n^\star)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para $f^\star$.

Para cada $x \in [0,1]$, como $\varphi \le f$ em todos os pontos de $[0,1]$, temos $\varphi_n^\star(x) = \sup_{x\le y\le 1}\varphi(x) \le \sup_{x\le y\le 1} f(x) \le f^\star(x)$. Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, existe y_0, $x \le y_0 \le 1$ tal que $f(y_0) > f^\star(x) - \varepsilon/2$. Como $\varphi_n(y_0)$ converge para $f(y_0)$, obtemos $\varphi_n(y_0) > f(y_0) - \varepsilon/2 > f^\star(x) - \varepsilon$, para n suficientemente grande. Portanto, $f^\star(x) \ge \varphi_n^\star(x) = \sup_{x\le y\le 1}\varphi_n(y) \ge \varphi_n(y_0) > f^\star(x) - \varepsilon$, para n suficientemente grande. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, isso implica em $\lim_{n\to\infty}\varphi_n^\star(x) = f^\star(x)$, para todo $x \in [0,1]$.

(2) Mostre que se φ é uma função simples em $[0,1]$, então $\varphi^\star$ é uma função escada.

Seja $\varphi = \sum_{j=1}^J a_j\chi_{E_j}$, onde $a_j \in \mathbb{R}$ e os conjuntos E_j são Lebesgue mensuráveis e disjuntos. Para cada j, seja $b_j = \sup E_j$, com $b_0 = 0$. Sem perda de generalidade, podemos reordenar os conjuntos de tal forma que $0 = b_0 \le b_1 \le \cdot \le b_J \le 1$. Dessa forma, obtemos $\varphi^\star = \sum_{j=1}^J c_j\chi_{I_j}$, onde $c_j = \max\{0, a_j, \ldots, a_J\}$ e cada I_j é um intervalo com extremos b_{j-1} e b_j, sendo aberto ou fechado à esquerda ou à direita dependendo de b_{j-1} não pertencer ou pertencer a E_{j-1} e de b_j pertencer ou não a E_j, respectivamente.

Outra maneira é escrever $\varphi(x) = \sum_{j=1}^J a_j\chi_{E_j}$ com $0 < a_j < \ldots < a_J$ e $E_J \subset \ldots \subset E_1$, $J \in \mathbb{N}$. Nesse caso, $\varphi^\star(x) = \sum_{j=1}^J c_j\chi_{I_j}$, onde $c_j = \max\{0, a_j\}$ e $I_j = [0, b_j)$, se $b_j = \sup E_j$ com $b_j \notin E_j$ ou $I_j = [0, b_j]$, se $b_j = \max E_j$.

(3) Mostre que se f é mensurável e não-negativa, então $f^\star$ também é mensurável.

Sendo f mensurável e não-negativa, existe uma sequência de funções simples φ_n que converge para f pontualmente e com $0 \le \varphi_n \le f$. Segue, então, que $\varphi_n^\star \to f^\star$ pontualmente. Além disso, como φ_n é simples, temos $\varphi_n^\star$ escada, portanto mensurável. Logo, $f^\star$, sendo o limite pontual de funções mensuráveis, também é mensurável.

(4) Dê um exemplo de uma função real f em $[0,1]$ e de uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções reais em $[0,1]$ tais que a sequência converge pontualmente para f mas $(\varphi_n^\star)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para $f^\star$ em um conjunto de medida positiva.

Por exemplo, $f(x) = 0$ e $\varphi_n = \chi_{[(n-1)/n,1)}$ ou $\varphi_n(x) = \max\{0, 1 - n|x - (n-1)/n|\}$, para $x \in [0,1]$, de forma que $\varphi_n^\star \to \chi_{[0,1)}$, pontualmente, enquanto que $f^\star \equiv 0$.

3ª Questão: Seja $E \subset [0,1]$ um subconjunto mensurável em relação à medida de Lebesgue m em $\mathbb{R}$ e seja $a > 0$. Considere a função f dada por $f(t) = m(E \cap [t, t+a])$, para todo $t \in [0,1]$.

(1) Mostre que f é absolutamente contínua em $[0,1]$.

Para todo $0 < h < a$ e $t \in [0,1]$, temos

$$\begin{aligned} E \cap [t+h, t+h+a] &= (E \cap [t+h, t+a)) \cup (E \cap [t+a, t+h+a]) \\ &= ((E \cap [t, t+a)) \setminus (E \cap [t, t+h)) \cup (E \cap [t+a, t+h+a]), \end{aligned}$$

de modo que

$$f(t+h) = f(t) - m(E \cap [t, t+h)) + m(E \cap [t+a, t+h+a])$$

Logo,

$$|f(t+h - f(t)| \leq \max\{m(E \cap [t, t+h)), m(E \cap [t+a, t+h+a])\} \leq h,$$

mostrando que f é Lipschitz contínua, portanto absolutamente contínua.

(2) Escreve uma decomposição de f da forma $f = g - h$ onde g e h são não-decrescentes.

$f(t) = m(E \cap [t, t+a]) = m(E \cap [0, t+a]) - m(E \cap [0,t]) = g(t) - h(t)$, onde $g(t) = m(E \cap [0, t+a])$ e $h(t) = m(E \cap [0,t])$.

(3) Mostre que $f' = \chi_{E-a} - \chi_E$ quase sempre, onde χ_{E-a} e χ_E são as funções características dos respectivos conjuntos $E - a = \{t - a;\ t \in E\}$ e E.

Temos, usando, em particular, a invariância da medida de Lebesgue por translações, que

$$\begin{aligned} f(t) &= m(E \cap [t, t+a]) = m((E \cap [0, t+a]) \setminus (E \cap [0,t)) \\ &= m(E \cap [0, t+a]) - m(E \cap [0,t)) \\ &= m(E \cap [0,a]) + m(E \cap [a, t+a]) - m(E \cap [0,t]) \\ &= m(E \cap [0,a]) + m((E-a) \cap [0,t]) - m(E \cap [0,t]) \\ &= f(0) + \int_0^t (\chi_{E-a}(s) - \chi_E(s))\ \mathrm{d}m(s). \end{aligned}$$

Como $\chi_{E-a} - \chi_E$ é integrável, segue, novamente, que f é absolutamente contínua e, pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue, que $f' = \chi_{E-a} - \chi_E$ quase sempre. Observe que, em relação à decomposição $f = g - h$ no item anterior, temos $g(t) = f(0) + \int_0^t \chi_{E-a}(s)\ \mathrm{d}m(s)$ e $h(t) = \int_0^t \chi_E(s)\ \mathrm{d}m(s)$.