Lista 4 - Cálculo Infinitesimal II

Semestre 2017/2 - Prof. Ricardo M. S. Rosa

23 de outubro de 2017

Obs: Sejam claros nas suas repostas e façam as devidas justificativas. Boa sorte!

1ª Questão: Encontre todos os pontos críticos das funções abaixo e indique se são pontos de máximo ou de mínimo locais.

(1) $f(x,y) = x(x^2-1)+y^2$.
(2) $f(x,y) = x^4+x^3-x^2-2x^2y^2+y^2$
(3) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(y)$.
(4) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y)$.
(5) $f(x,y) = e^x+y^2$.

2ª Questão: Suponha que uma função $f(x,y)$ seja continuamente diferenciável em todo o plano $\mathbb{R}^2$ e tenha um único ponto crítico e suponha que esse ponto crítico esteja no primeiro quadrante, i.e. em $x,y>0$. Considere a função $g(x,y) = f(x^2,y^2)$, definida também em $\mathbb{R}^2$. Assinale o item verdadeiro e justifique a sua resposta.

(1) g possui exatamente um único ponto crítico.
(2) g possui exatamente dois pontos críticos.
(3) g possui no máximo quatro pontos críticos.
(4) g possui pelo menos cinco pontos críticos.
(5) nenhum das respostas anteriores.

3ª Questão: Considere uma região da forma

$$Q_{abc} = [0,a]\times[0,b]\times[0,c] = \{(x,y,z);\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b,\ 0\le z\le c\},$$

onde $a,b,c>0$. Dado $V>0$, ache a,b,c tais que o volume de Q_{abc} é igual a V e a área da superfície de Q_{abc} é a menor possível.

4ª Questão: Considere a superfície S dada pela equação $xyz=1$, com $x,y,z>0$, Mostre que o volume da região delimitada pelos planos xy, xz e yz e pelo plano tangente à superfície S em um ponto arbitrário de S independe da escolha do ponto.

5ª Questão: Em um certo fenômeno, queremos determinar uma relação entre duas quantidades escalares x e y.

(1) Por algum motivo, acreditamos que o fenômeno deva bem aproximado por uma lei da forma $y = af(x)+bg(x)$, para duas funções continuamente diferenciáveis f e g conhecidas a priori e para parâmetros reais a e b a serem determinados. Podemos usar o método de mínimos quadrados para encontrar a e b. Através de experimentos, obtemos, para uma sequência de pontos $x_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$, $n\in\mathbb{N}$, valores correspondentes y_i, $i=1,\ldots,n$. Mostre que o ponto de mínimo $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ do erro quadrático $e(a,b)=\sum_{i=1}^n(af(x_i)+bg(x_i)-y_i)^2$ deve ser solução de um sistema de equações lineares em a e b e escreva esse sistema.

(2) Obtenha, ainda, condições nos vetores $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ e $(g(x_1), \ldots, g(x_n))$ para que esse ponto de mínimo (a, b) exista e seja único, independentemente dos valores de y_i.

(3) Se, na verdade, esperamos aproximar o fenômeno por uma lei da forma $y = ax^b$, então a solução do problema de mínimos quadrados $e(a, b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i^b - y_i)^2$ não passa mais por resolver um sistema linear. Escreva o sistema correspondente.

(4) No caso do modelo anterior, com $y = ax^b$, podemos usar coordenadas logarítmicas e trabalhar com a relação linear $\ln y = \ln a + b \ln x$. Definindo $Y = \ln y$, $X = \ln x$ e $A = \ln a$, passamos a ter o problema linear $Y = A + bX$. Os experimentos nos dão valores de $X_i = \ln x_i$ e de $Y_i = \ln y_i$ e resolvemos o problema de mínimos quadrados com erro $E(a, b) = \sum_{i=1}^{n}(A + bX_i - Y_i)^2$. Dê condições apenas em $x_1, \ldots, x_n$ para garantir que o ponto de mínimo (A, b) exista e seja único, independentemente dos valores de $y_1, \ldots, y_n$.

6ª Questão: Considere a função $\Phi(x, y, z) = xy + xz + yz$.

(1) Mostre que o único ponto crítico de Φ é $(0, 0, 0)$.

(2) Mostre que $(0, 0, 0)$ não é ponto de máximo nem de mínimo.

(3) Dado um ponto qualquer (x_0, y_0, z_0) fora da origem e pertencente ao conjunto de nível zero de Φ, use o Teorema da Função Implícita para deduzir que esse conjunto é, localmente, uma superfície e mostre que $(y_0 + z_0)x + (x_0 + y_0)y + (x_0 + y_0)z = 0$ é uma equação para o plano tangente à essa superfície nesse ponto.

7ª Questão: Ache o menor disco $D_r = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq r^2\}$, $r > 0$, que contém o conjunto de nível $x^4 - 6x^2 + 2y^2 = 0$.

8ª Questão: Seja $F(x, y) = -3x^2 - 3y^2 - 2xy - 2x + 2y - 1$ e considere dois caminhos ligando o ponto $(x, y) = (-2, -2)$ ao ponto $(x, y) = (2, 2)$: um ao longo da reta $y = x$ e outro ao longo da semicircunferência $x^2 + y^2 = 8$, $y \geq x$. Ache o máximo de F ao longo de cada caminho e determine qual caminho tem o menor valor máximo.

9ª Questão: (Teorema espectral via multiplicadores de Lagrange em $\mathbb{R}^3$) Seja $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma matriz simétrica em $\mathbb{R}^3$.

(1) Mostre que

$$\lambda_1 = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \|\mathbf{x}\|^2 = 1} A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$$

é um autovalor de A e que os pontos de mínimo são autovetores associados ao autovalor λ_1.

(2) Seja $\mathbf{x}_1$ um dos pontos de mínimo associado ao problema de mínimo acima e considere o plano Π_1, em $\mathbb{R}^3$, que contém a origem e é ortogonal a $\mathbf{x}_1$. Mostre que

$$\lambda_2 = \min_{\mathbf{x} \in \Pi_1, \|\mathbf{x}\|^2 = 1} A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$$

também é um autovalor de A e que os pontos de mínimo são autovetores associado ao autovalor λ_2.

(3) Mostre que a reta que passa pela origem e é ortogonal a $\mathbf{x}_1$ e a $\mathbf{x}_2$ é um autoespaço de A.

(4) Deduza que existe uma base ortonormal em que A é diagonal.

Obs: Esse método pode ser generalizado para uma dimensão arbitrária $n \in \mathbb{N}$ definindo, por recursão, $\lambda_1 = \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3, \|\mathbf{x}\|^2=1} A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$, com $\mathbf{x}_1$ como um ponto de mínimo desse problema, e, para $j = 2, \ldots, n$, $\lambda_j = \min_{\|\mathbf{x}\|^2=1,\, \mathbf{x}\perp\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{j-1}} A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$, com um ponto de mínimo $\mathbf{x}_j$.

10ª Questão: Em Teoria dos Jogos, no modelo de Cournot para um duopólio, onde duas empresas, F_1 e F_2, dominam a produção e comercialização de um mesmo produto, cada empresa produz quantidades $q_1 \geq 0$ e $q_2 \geq 0$ do produto, com um mesmo custo marginal $c > 0$, de modo que o custo total de produção de cada empresa é $C(q_i) = cq_i$. O preço P de venda do produto é o mesmo em ambas as empresas e diminui de acordo com a produção total das duas empresas, de acordo com a função $P(q_1, q_2) = a - b(q_1 + q_2)$, onde $a > c$ e $b > 0$ são parâmetros que dependem do mercado, de acordo com a "lei da oferta e da procura". O lucro de cada empresa é

$$\pi_i(q_1, q_2) = P(q_1, q_2)q_i - C(q_i) = (a - b(q_1 + q_2) - c)q_i.$$

(1) Dado uma quantidade q_2 de produção da firma F_2, determine a quantidade $q_1 = R(q_2)$ de produção da firma F_1 que maximize o seu lucro. Analogamente, mostre que a quantidade $q_2 = R(q_1)$ maximiza o lucro da firma F_2, quando a quantidade q_1 de produção da firma F_1 é dada. A função R é chamada de *função de melhor resposta*.

(2) O *equilíbrio de Nash* (ou *equilíbrio de Cournot-Nash*, nesse modelo) é o par (q_1^*, q_2^*) de produção com a propriedade de que

$$\pi_1(q_1^*, q_2^*) \geq \pi_1(q_1, q_2^*), \quad \pi_2(q_1^*, q_2^*) \geq \pi_2(q_1^*, q_2), \qquad \forall q_1, q_2 \geq 0.$$

Ou seja, é a estratégia que garante que o seu lucro seja o maior possível, assumindo que a outra firma também fará a escolha de ter o maior lucro possível. Encontre o equilíbrio de Nash desse modelo, em função de a, b e c. Encontre uma relação significativa entre esse equilíbrio e a função de melhor resposta R.