

Resultados recentes sobre as equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis

Ricardo M. S. Rosa
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
(IM-UFRJ)

I EBED
Escola Brasileira de Equações Diferenciais
9 a 13 de junho de 2003
IMECC - Unicamp

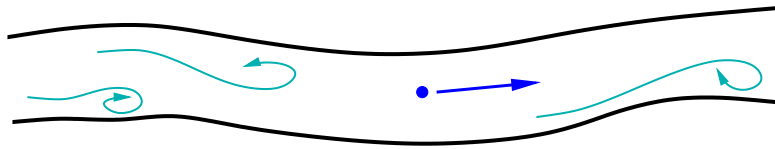
Resultados recentes sobre as equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis

Tópicos:

1. **As equações de Navier-Stokes, equações correlatas e algumas questões fundamentais**
2. Aspectos matemáticos das equações de Navier-Stokes
3. Teoria estatística convencional de turbulência
4. Soluções estatísticas das equações de Navier-Stokes
5. Aplicações das soluções estatísticas em turbulência

Equações de Navier-Stokes (escoamento compressível)

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i, & i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j} = 0, \end{cases}$$



$(u_1, u_2, u_3) =$ vetor velocidade do fluido,

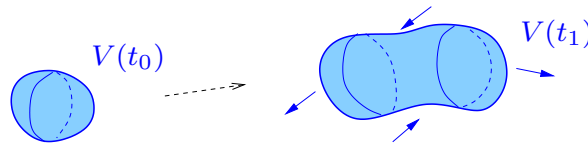
$(x_1, x_2, x_3) =$ posição, $(f_1, f_2, f_3) =$ força de volume,

$\rho =$ densidade, $\sigma_{ij} =$ tensor de stress.

3

Tensor de stress e pressão

$$\frac{d}{dt}(\text{momento}) = \overbrace{\int_{V(t)} \mathbf{f}}^{\text{f}\grave{\text{c}} \text{ volume}} + \overbrace{\int_{\partial V(t)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}}^{\text{f}\grave{\text{c}} \text{ superfície}} = \int_{V(t)} (\mathbf{f} + \text{div } \boldsymbol{\sigma}).$$



$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + d_{ij}, \quad p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_{kk}}{3} \quad \delta_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \text{delta de Kronecker},$$

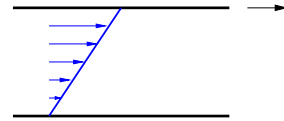
$$d_{ij} = 2\mu \left(e_{ij} - \frac{e_{kk}}{3} \delta_{ij} \right) \quad (\text{escoamento Newtoniano}),$$

$$e_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \text{tensor rate-of-strain}.$$

$(p =$ pressão hidrostática, $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, caso fluido estático).

4

Escoamentos Newtonianos



- ▶ Newton (1687): $d = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$, caso laminar

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(x_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & d & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = d_{12} = d_{21}.$$

- ▶ Euler (1755): $d_{ij} = 0$ (fluido "ideal") \Rightarrow eqs. de Euler;
- ▶ Navier (1822), Cauchy (1828), Poisson (1829), Saint-Venant (1843) e Stokes (1845):

$$d_{ij} = 2\mu \left(e_{ij} - \frac{e_{kk}}{3} \delta_{ij} \right) \Rightarrow \text{equações de Navier-Stokes.}$$

Equações de Navier-Stokes

- ▶ Navier (1822): μ = função do espaçamento molecular, sem significado físico;
- ▶ Cauchy (1828), Poisson (1829): idem;
- ▶ Saint-Venant (1843): derivação das equações com mais fundamento físico, valendo para escoamentos não necessariamente laminares;
- ▶ Stokes (1845): idem, da forma feita atualmente, com μ = viscosidade molecular (atrito).

A ponte suspensa de Navier (Pont des Invalides)



“Navier: Blow-up and Collapse”, *AMS Notices*, Janeiro 2003.

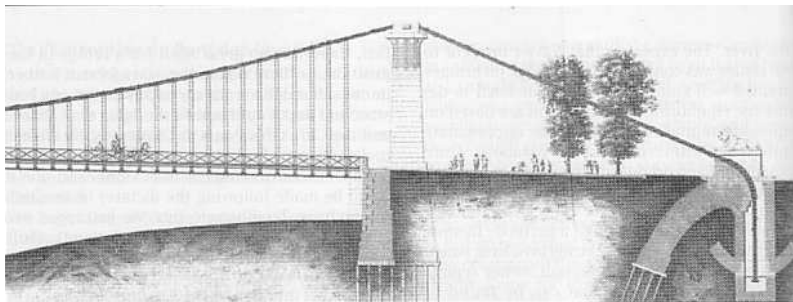
Navier: professor *École des Ponts et Chaussées*, Paris.

Pontes Suspensas: Finley, pioneiro, nos EUA (≈ 1800), depois engenheiros da Grã-Bretanha, finalmente Navier na França, sob incentivo de seus superiores e do governo...

Navier: Após estudar pontes da Grã-Bretanha, entre 1821 e 1823, escreve tratado sobre pontes usando “métodos matemáticos modernos” (equações diferenciais simples e séries de Fourier, uma de suas especialidades).

Navier: Em 1823, apresenta projeto com cálculos “precisos”, sem necessidade de exagerar na estrutura para compensar aproximações e erros “típicos” da engenharia.

A ponte: Em 1826, 5 semanas antes da conclusão, um suporte dos cabos da ponte racha, devido a um vazamento de água próximo. A ponte foi eventualmente desmontada.



Oscilações induzidas pelo vento (turbulento, em certos casos) são difíceis de serem calculadas; provavelmente o modelo usado não tinha a precisão necessária.

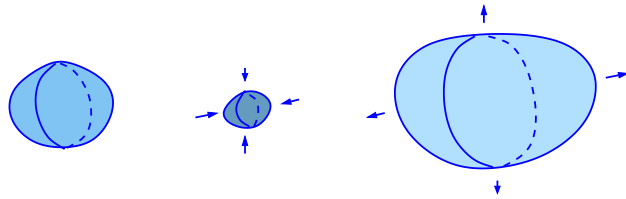
Equações de Navier-Stokes (compressível - vetorial)

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{u} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{f}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3),$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}),$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})_{ij}, \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu(e_{ij} + \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij}),$$

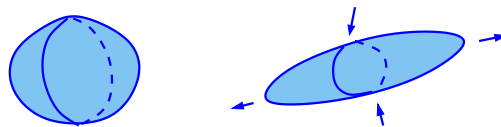


9

Escoamentos incompressíveis e homogêneos

Variação de volume:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV = \int_{\partial V(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V(t)} \nabla \cdot \mathbf{u} dV.$$



Escoamentos incompressíveis (densidade independente de variações na pressão): $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ e

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{D\rho}{Dt}.$$

Escoamentos incompressíveis e homogêneos:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ e } \rho \equiv \rho_0 \text{ (constante).}$$

Equações de Navier-Stokes (incompressível e homogêneo)

$$\begin{cases} \rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

Dividindo por ρ_0 e substituindo p/ρ_0 por p e \mathbf{f}/ρ_0 por \mathbf{f} :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) =$ campo de velocidades,

$p =$ pressão cinemática,

$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) =$ densidade das forças de volume,

$\nu =$ viscosidade cinemática.

Algumas questões fundamentais

- ▶ Existência e unicidade de soluções globais (o prêmio de US\$ $1,00 \times 10^6$ da Fundação Clay);
- ▶ Limite de Euler ($\text{Re} \rightarrow \infty$);
- ▶ Derivação das equações via mecânica estatística;
- ▶ Estabilidade, instabilidade e transição para turbulência;
- ▶ Turbulência completamente desenvolvida;
- ▶ α -model ou equações de Camassa-Holm;
- ▶ Estruturas coerentes (vórtices - linhas, folhas, etc.);
- ▶ Variedade inercial (lenta), aprox numérica, inicialização;
- ▶ Escoamentos geostróficos, no. Rossby e fça de Coriolis.

Prêmio: US\$1,00 × 10⁶ da Clay Foundation

Problema A: (Solução global) Dado \mathbf{u}_0 suave, com $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$ e $|\partial_{x_i}^k \mathbf{u}_0(\mathbf{x})| \leq c_{km}(1 + |\mathbf{x}|)^{-m}$, $k, m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, achar soluções suaves $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, $p = p(t, \mathbf{x})$ das ENS em \mathbb{R}^3 , com $\mathbf{u}, p \in \mathcal{C}^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$, $\int_{\Omega} |\mathbf{u}(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq C$, $\forall t \geq 0$, e $\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$.

Problema B: (explosão em tempo finito) Mostrar existência de \mathbf{u}_0 e \mathbf{f} suaves, com $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$ e

$$|\partial_{x_i}^k \mathbf{u}_0(\mathbf{x})| \leq c_{km}(1 + |\mathbf{x}|)^{-m}, \quad |\partial_t^r \partial_{x_i}^k \mathbf{u}_0(\mathbf{x})| \leq c_{rkm}(1 + t + |\mathbf{x}|)^{-m},$$

$r, k, m \in \mathbb{N}, t \geq 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, tais que não existam soluções das ENS em \mathbb{R}^3 como acima.

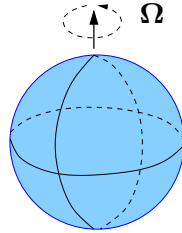
Problemas A', B': com condições de contorno periódicas.

Resultados conhecidos

- ▶ Existência global (no tempo) de soluções fracas (não necessariamente suaves ou únicas)
- ▶ Existência local (no tempo) de soluções suaves
- ▶ Um pouco de regularidade ($L^s(0, T; L^r(\Omega)^3)$, $r > 3$, $2/s + 3/r \leq 1$, Serrin (1962)) implica em soluções locais suaves e únicas
- ▶ Existência e unicidade global de soluções suaves em duas dimensões
- ▶ Estimativas "fractais" do conjunto de singularidades (" $\nabla \otimes \mathbf{u} = \infty$ ") no tempo, $d_H(S_t) \leq 1/2$ (dimensão de Hausdorff), e no espaço-tempo, $\mathcal{P}_1(S_{e:t}) = 0$ (medida de Hausdorff parabólica, "tempo conta dobrado")

Escoamentos geostróficos

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla \Phi + \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$



$\Phi = \phi + \phi_c =$ potenciais gravitacional + fç centrífuga

$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} =$ força de Coriolis

$\boldsymbol{\Omega} =$ velocidade angular (direção e magnitude)

15

Escoamentos com rápida rotação

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} \longmapsto \frac{1}{\epsilon} \mathbf{e}_\Omega \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{e}_\Omega = \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega}, \quad \Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$$

$$\epsilon = \frac{U}{2\Omega L} = \text{número de Rossby}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{U_\theta}{2\Omega L_\theta \sin \theta} = \text{número de Rossby local (latitude } \theta \text{)}$$

- ▶ Escoamentos geostróficos longe do equador: $\epsilon \sim 0.1$
- ▶ Grande interesse em escoamentos com rápida rotação pela comunidade de meteorologia e climatologia.
- ▶ Escoamentos com rápida rotação são quase 2D (“2 1/2”): existência e unicidade global de soluções suaves (**Babin, Malahov, Nicolaenko**)

16

Equações primitivas da atmosfera

- ▶ Densidade varia com a altura;
- ▶ Aproximação de Boussinesq;
- ▶ Altura relativamente pequena em relação ao globo;
- ▶ Falta existência e unicidade global mesmo em duas dimensões (escoamento latitudinal ou longitudinal), no caso sem viscosidade vertical.
- ▶ Outros componentes: temperatura, salinidade (no oceano), substâncias químicas, calotas polares, etc.

17

α -model ou equações de Camassa-Holm (viscosas)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{u}^t) \cdot \mathbf{v} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{v} = (I - \alpha^2 \Delta) \mathbf{u}. \end{cases}$$

- ▶ Existência e unicidade global em 3D conhecidas;
- ▶ Utilizado como modelo para fechamento turbulento;
- ▶ Semelhanças com a regularização de Leray:
 $\mathbf{v} = (I + \alpha(-\Delta)^{1/2}) \mathbf{u}$ e sem o termo $(\nabla \mathbf{u}^t) \cdot \mathbf{v}$.
- ▶ α -Euler = Camassa-Holm sem visc., 3D em aberto
- ▶ Marsden, Foias, etc.

18

Transição para turbulência - bifurcações

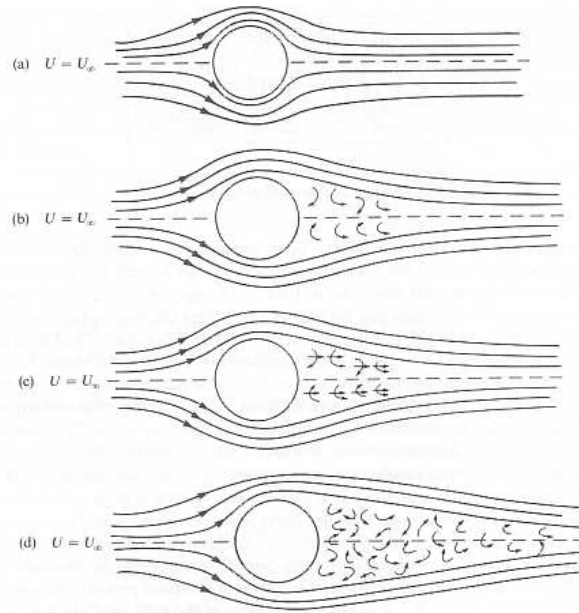


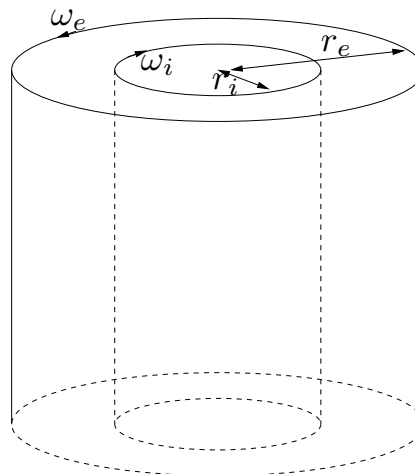
Figure 2.2. Flow past a sphere. (a) Laminar flow (small Reynolds number). (b) Appearance of the von Kármán vortices in the wake behind the sphere (stationary flow). (c) Time-periodic flow: the vortices behind the sphere are moving to the right in an (apparently) time-periodic manner. (d) Fully turbulent flow in the wake behind the sphere at large Reynolds numbers.

19

O problema de Couette-Taylor

Couette: $\omega_i = 0$, $\omega_e \neq 0$

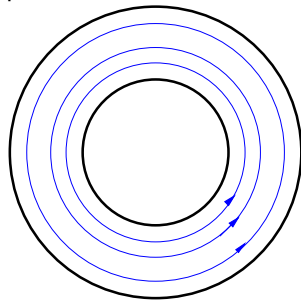
Mallock, Taylor: $\omega_i \neq 0$, $\omega_e = 0$



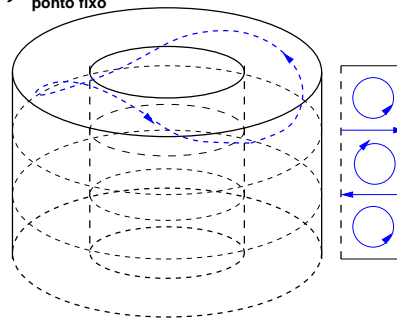
20

Couette-Taylor - Chossat-Iooss (1994): $\omega_e = 0, \omega_i > 0$

A) escoamento de Couette
ponto fixo



B) escoamento de Taylor
ponto fixo



C)

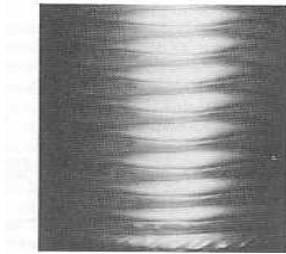


FIGURE I.4. Wavy vortex flow.

escoamento "wavy vortex"
órbita quasi-periódica (toro T^2)

D)

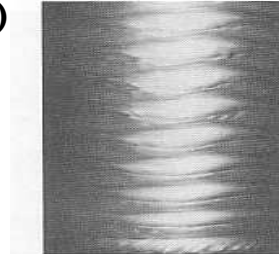


FIGURE I.5. Modulated waves.

ondas moduladas
órbita quasi-periódica (toro T^n)

Bifurcações Couette-Taylor - 2 parâmetros Reynolds

$$Re_i = \frac{r_i(r_e - r_i)\omega_i}{\nu}, \quad Re_e = \frac{r_e(r_e - r_i)\omega_e}{\nu}.$$

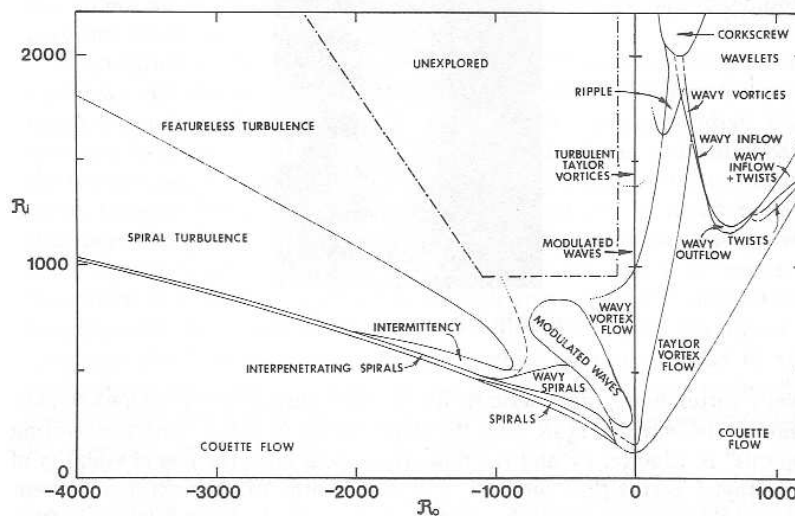
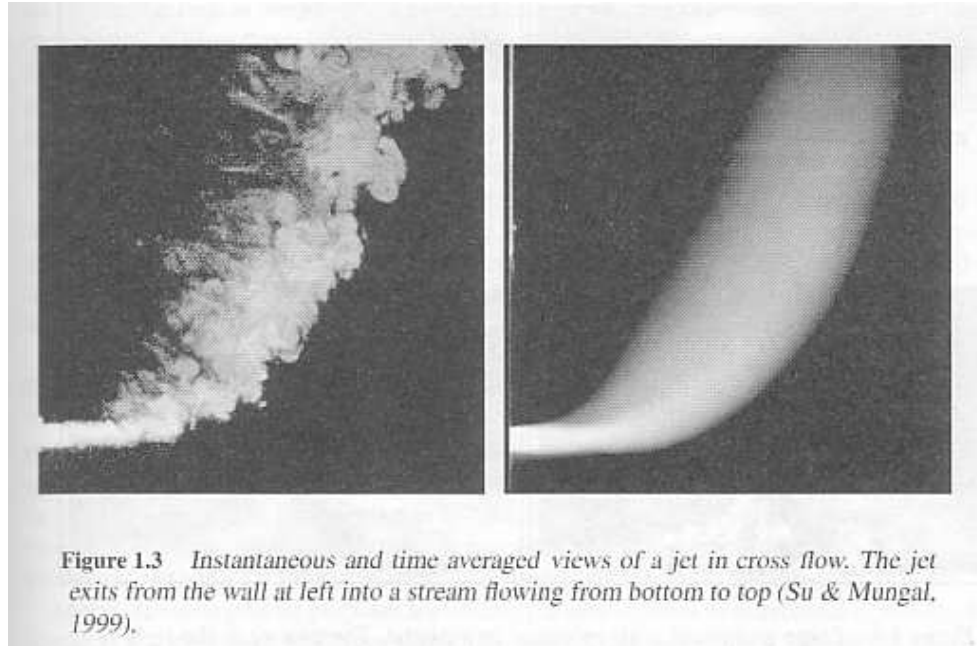


FIGURE I.2. Experimental stability diagram by [An-L-Sw].

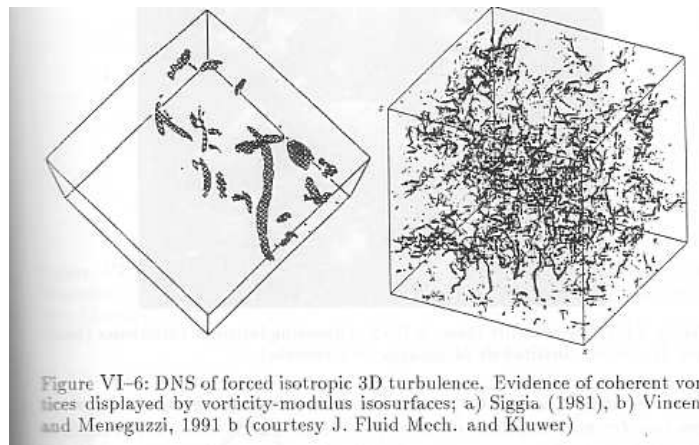
Escoamentos turbulentos: várias escalas presentes, se movendo de maneira imprevisível, mas bem comportadas em um sentido estatístico.



23

Estruturas coerentes e intermitência

- ▶ Estruturas coerentes: filamentos de vórtices com baixa dissipação de energia, diâmetro da ordem de ℓ_c , comprimento $\in (\ell_T, \ell_0)$.
- ▶ Universalidade questionada devido a variações intermitentes na dissipação de energia.



24

Mais estruturas coerentes

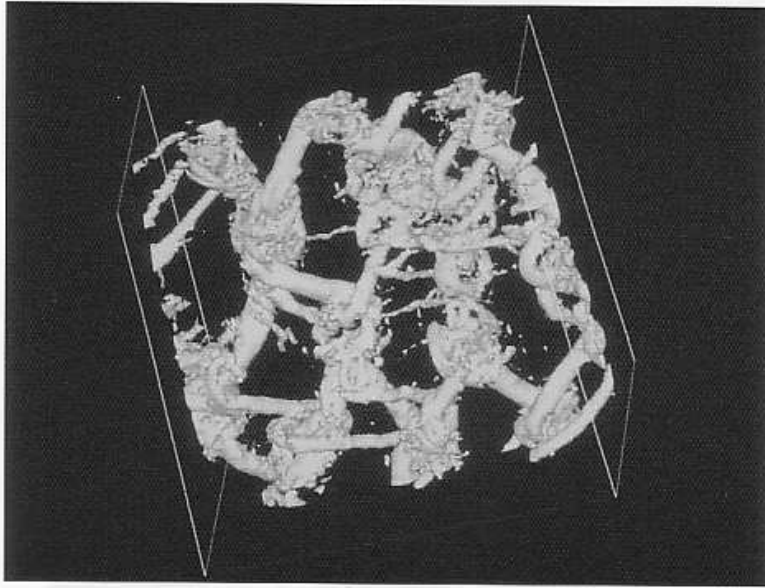


Plate 10: vorticity modulus in the LES of a temporal mixing layer; a) quasi two-dimensional random initial forcing; b) 3D isotropic forcing (courtesy J. Silvestrini, Grenoble).

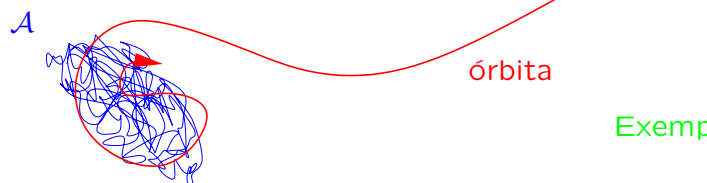
25

Atrator global

Exemplo 1



- Conjunto compacto \mathcal{A}
- Invariante: $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \forall t \in \mathbb{R}$
- Atrai todas as órbitas, uniformemente para condições iniciais limitadas

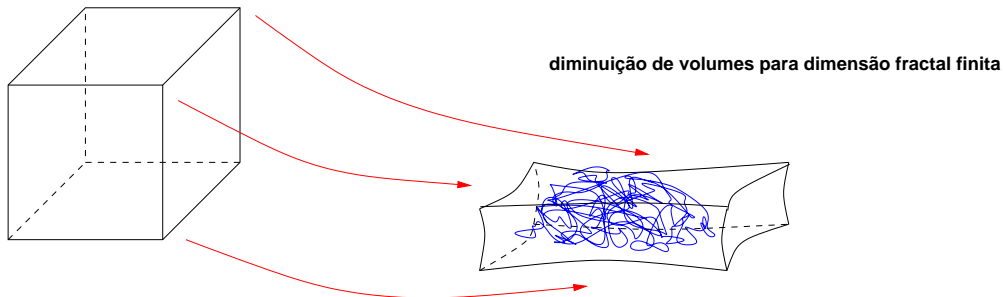


Exemplo 2

26

Dimensão do atrator global

- ▶ Sendo compacto, \mathcal{A} pode ser aproximado por subespaços afins de dimensão finita
- ▶ Na maioria dos casos, \mathcal{A} tem dimensão fractal finita
- ▶ Nesses casos, \mathcal{A} pode ser imerso em variedades euclidianas de dimensão finita
- ▶ Possibilidade de se obter sistemas finitos de EDOs com o mesmo comportamento assintótico



27

Dimensão do atrator das ENS

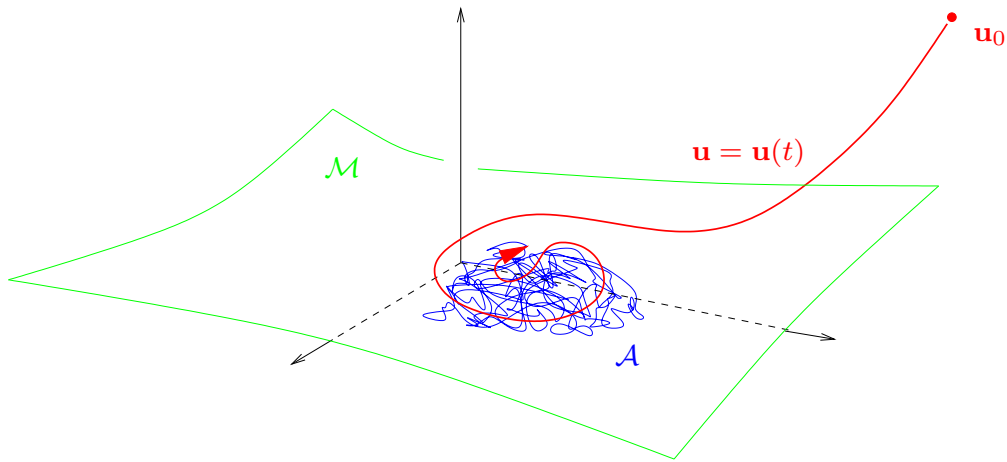
- ▶ $\dim_f \mathcal{A} \lesssim$ graus de liberdade Landau-Lifchitz
- ▶ ENS 2D periódico: $\dim_f \mathcal{A} \lesssim \left(\frac{\ell_0}{\ell_{\bar{\eta}}}\right)^2 \left(1 + \ln \left(\frac{\ell_0}{\ell_{\bar{\eta}}}\right)\right)^{1/3}$
- ▶ ENS 2D com aderência na fronteira: $\dim_f \mathcal{A} \lesssim \left(\frac{\ell_0}{\ell_{\bar{\epsilon}'}}\right)^2$
- ▶ ENS 3D, para conjuntos invariantes regulares \mathcal{V} :
 $\dim_f \mathcal{V} \lesssim \left(\frac{\ell_0}{\ell_{\bar{\epsilon}}}\right)^3$
- ▶ onde $\bar{\eta}$ e $\bar{\epsilon}'$ similares a

$$\bar{\epsilon} = \nu \limsup_{T \rightarrow \infty} \sup_{\mathbf{u}_0 \in \mathcal{V}} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \otimes \mathbf{u}(t, \mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} dt$$

28

Variedade inercial

- ▶ Variedade Lipschitz de dimensão finita
- ▶ Positivamente invariante, i.e. $S(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}, \forall t \geq 0$
- ▶ Atrai todas as órbitas exponencialmente e uniformemente para condições iniciais limitadas



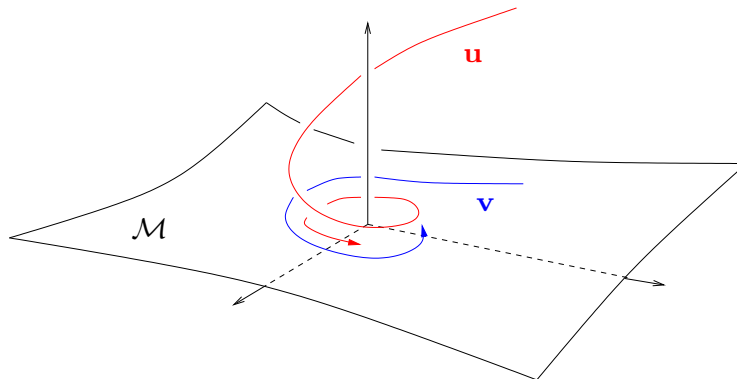
29

Completude assintótica de variedades inerciais

- ▶ Em geral, para toda solução $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, existe solução $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) \in \mathcal{M}$ com o mesmo comportamento assintótico

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)| = 0 \quad \text{e} \quad \omega(\mathbf{u}) = \omega(\mathbf{v})$$

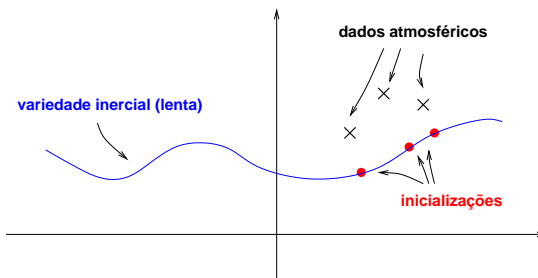
- ▶ Atração exponencial $\Rightarrow \mathcal{M}$ captura boa parte do comportamento transiente



30

Existência de variedades inerciais

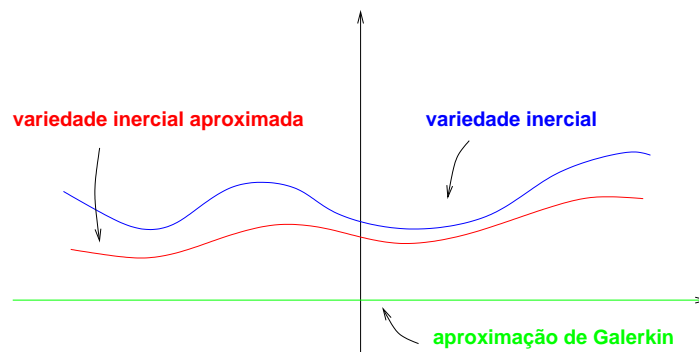
- ▶ Requer forte dissipação (contração uniforme de volumes)
- ▶ Existência demonstrada para várias equações em uma dimensão espacial e em casos especiais em 2D
- ▶ Em aberto para NSE 2D e 3D
- ▶ Transformada de Kwak ainda incompleta
- ▶ Relação com variedades lentas em meteorologia



31

Aproximação de variedades inerciais

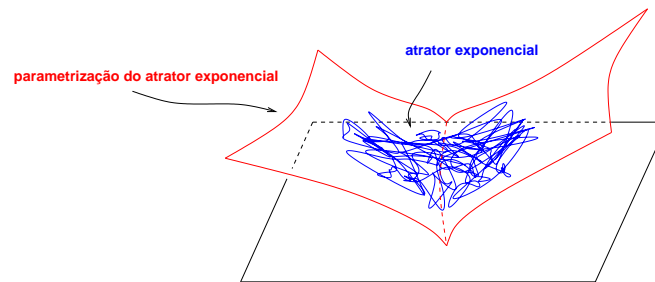
- ▶ Métodos numéricos mais precisos baseados em aproximações de variedades inerciais
- ▶ Eficiência depende da regularidade das soluções e do objetivo do estudo
- ▶ Adequado para estudos da dinâmica (e.g. captura de ligações heteroclínicas)



32

Atrator exponencial

- ▶ Intermediário entre atrator global e variedade inercial
- ▶ Aproxima exponencialmente as órbitas mas não é variedade euclidiana
- ▶ Existência para várias equações, inclusive ENS 2D
- ▶ Parametrização por mapeamentos Hölder-contínuos
- ▶ Resultados parciais sobre existência de sistemas de dimensão finita com dinâmica equivalente



33

Modos determinantes, nódulos determinantes, etc.

Sejam

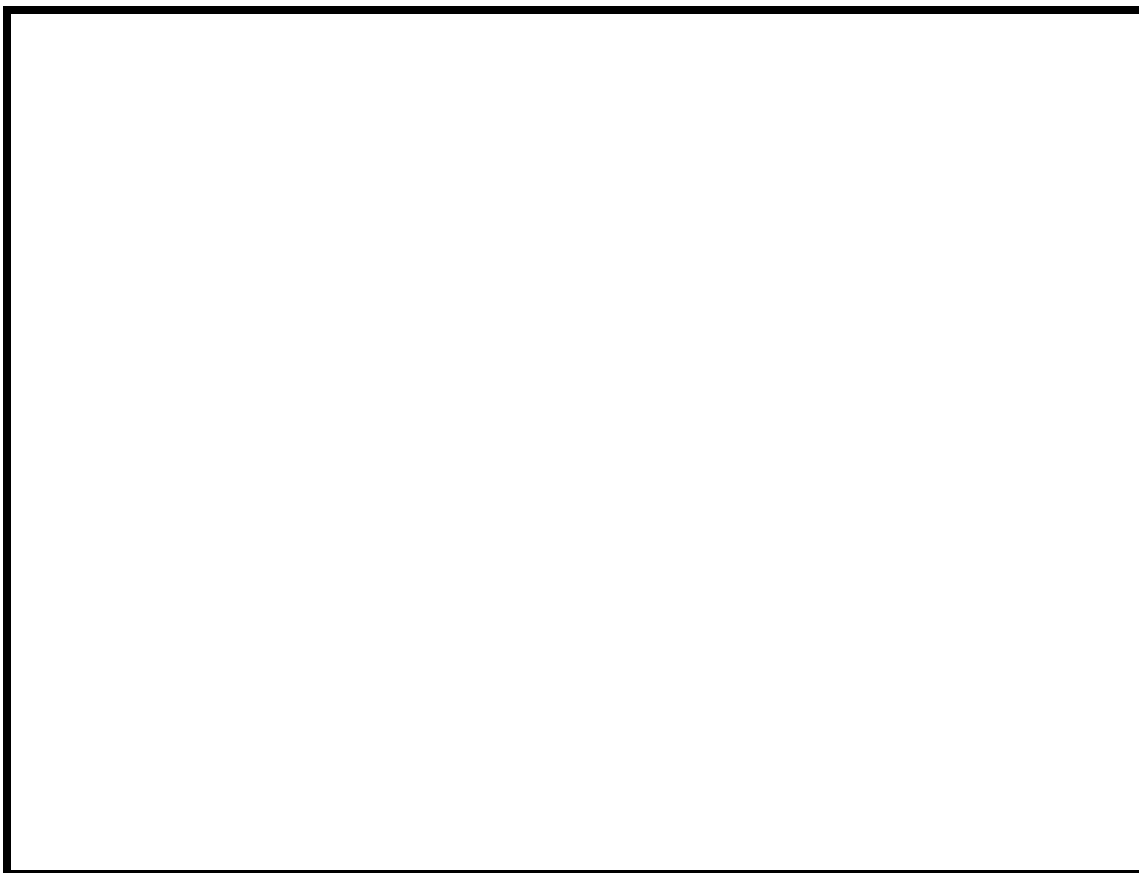
- ▶ H = espaço de fase
- ▶ X_n = espaço de dimensão finita
- ▶ $P : H \rightarrow X_n$ (Galerkin, diferenças finitas, etc.)

Questões:

- ▶ $P\mathbf{u}(t) - P\mathbf{v}(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, implica em $\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t) \rightarrow 0$?
- ▶ P restrito ao atrator é bijetivo?

Relacionado com reconstrução de atratores.

34



35



36

Resultados recentes sobre as equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis

Ricardo M. S. Rosa
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
(IM-UFRJ)

I EBED
Escola Brasileira de Equações Diferenciais
9 a 13 de junho de 2003
IMECC - Unicamp

Aula 2 - 10 de junho

37

Resultados recentes sobre as equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis

Tópicos:

1. As equações de Navier-Stokes, equações correlatas e algumas questões fundamentais
2. Aspectos matemáticos das equações de Navier-Stokes
3. Teoria estatística convencional de turbulência
4. Soluções estatísticas das equações de Navier-Stokes
5. Aplicações das soluções estatísticas em turbulência

38

Equações de Navier-Stokes

- ▶ Região $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ocupada pelo fluido
- ▶ Variáveis espacial $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ e temporal $t \geq 0$
- ▶ Campo de velocidades $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$
- ▶ Pressão $p = p(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ e força de volume $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$
- ▶ Equações de Navier-Stokes (ENS) para um escoamento incompressível e homogêneo, viscosidade cinemática ν :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

39

Formulação matemática das ENS - Leray (1933,34)

Eliminar pressão, considerando espaços de divergente nulo, para obter equação de evolução envolvendo somente \mathbf{u} .

Se p e \mathbf{v} suaves, com $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ e condições apropriadas de contorno para \mathbf{v} (livre, aderência, periódica, etc.), então

$$\int_{\Omega} (\nabla p) \cdot \mathbf{v} \, dV = \int_{\Omega} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) \, dV + \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dS = 0$$

onde \mathbf{n} = normal exterior a Ω .

Portanto, o termo da pressão desaparece na formulação fraca e na formulação funcional, em espaços de divergente nulo.

40

Espaços de função básicos

- Condições naturais para o campo de velocidades (com condições apropriadas de contorno):

$$\int_{\Omega} |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \text{energia cinética finita}$$

$$\int_{\Omega} |\nabla \otimes \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} = \int_{\Omega} |\boldsymbol{\omega}|^2 d\mathbf{x} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \text{enstrofia finita}$$

onde $\nabla \otimes \mathbf{u} = (\partial_{x_i} u_j)_{i,j=1}^3$ e $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{curl} \, \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u}$.

- Espaços de partida:

$$\mathbb{L}^2(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \|\mathbf{u}\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < \infty \right\}$$

$$\mathbb{H}^1(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega), \|\mathbf{u}\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} |\nabla \otimes \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} < \infty \right\}$$

Espaços de divergente nulo

Partimos de funções suaves:

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{u} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)^3; \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \}$$

e definimos por completamento:

$$H = \text{fecho de } \mathcal{V} \text{ em } \mathbb{L}^2(\Omega),$$

$$V = \text{fecho de } \mathcal{V} \text{ em } \mathbb{H}^1(\Omega).$$

Em certos domínios regulares e limitados, é possível caracterizar melhor esses espaços.

Caracterização dos espaços em Ω limitado de classe \mathcal{C}^2

- Espaço de divergente em L^2 :

$$E = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega); \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(\Omega) \}$$

- Se $\mathbf{u} \in E$, então existe o traço $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, com

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, dV = - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \varphi \, dV + \int_{\partial\Omega} \varphi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

- Então

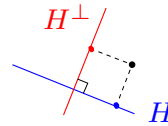
$$H = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega); \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \begin{array}{l} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \text{ ou} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \text{anti-periódico} \end{array} \right\}$$

$$V = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{H}^1(\Omega); \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \begin{array}{l} \mathbf{u} = 0, \text{ ou} \\ \mathbf{u} = \text{periódico} \end{array} \right\}$$

Decomposição de Leray-Helmholtz

- H é um subespaço vetorial fechado de \mathbb{L}^2

- Decomposição ortogonal $\mathbb{L}^2 = H \oplus H^\perp$
(Helmholtz: $\Omega = \mathbb{R}^3$, Leray: Ω mais geral)



$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

- p dado por problema de Neumann (aplicando $\nabla \cdot$):

$$\Delta p = \nabla \cdot \mathbf{v}, \text{ em } \Omega \quad \partial p / \partial \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \text{ em } \partial\Omega$$

- Ω aberto qualquer:

$$H^\perp = \{ \mathbf{w} \in \mathbb{L}^2(\Omega), \mathbf{w} = \nabla p, p \in L^2_{\text{loc}}(\Omega) \}$$

Projeção das equações de Navier-Stokes

- ▶ Projeção ortogonal $P_{LH} : \mathbb{L}^2 \rightarrow H$ e $Q_{LH} = I - P_{LH}$
- ▶ Decomposição das ENS (assumindo $P_{LH} \mathbf{f} = \mathbf{f}$):

$$\begin{cases} P_{LH} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p - \mathbf{f} \right) = 0 \\ Q_{LH} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p - \mathbf{f} \right) = 0 \end{cases}$$

- ▶ Então, como $P_{LH} \nabla p = 0$ e $Q_{LH} \partial_t \mathbf{u} = 0$,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + P_{LH}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu P_{LH} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f} & (\text{eq. evolução para } \mathbf{u}) \\ Q_{LH}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu Q_{LH} \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & (\text{eq. } p = p(\mathbf{u})) \end{cases}$$

45

Formulação funcional das ENS

- ▶ $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + P_{LH}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu P_{LH} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}$
- ▶ Operador de Stokes $A\mathbf{u} = -\nu P_{LH} \Delta \mathbf{u}$
- ▶ Termo inercial $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = P_{LH}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$
- ▶ Espaço dual $V \subset H \subset V'$:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \longrightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{V', V}.$$

- ▶ Temos $A : V \rightarrow V'$, $B : V \times V \rightarrow V'$ contínuos
- ▶ Forma funcional das ENS:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nu A\mathbf{u} + B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}$$

46

Formulação variacional (fraca) das ENS

- Multiplicar ENS por função teste \mathbf{v} de divergente nulo e suporte compacto em Ω e integrar em Ω :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0;$$

- Integrando por partes e usando que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} [((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}] \, d\mathbf{x} + \nu \int_{\Omega} \nabla \otimes \mathbf{u} : \nabla \otimes \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0;$$

- Ou, em notação compacta, e incluindo \mathbf{f} ,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Ortogonalidade do termo inercial

Obter estimativas de energia usando ortogonalidade do termo inercial:

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \, dV = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} v_j \, dV \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_j^2}{2} \right) \, dV = - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{v_j^2}{2} \, dV \\ &= - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \, dV = 0 \end{aligned}$$

Em particular,

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \quad \text{e} \quad b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}).$$

Desigualdade de energia para aproximação de Galerkin

- Via método de Galerkin, obter aproximações $\mathbf{u}^{(n)}$ em espaços de Galerkin V_n de dimensão finita,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V_n.$$

- Fazendo $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{(n)}$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}^{(n)}|^2 + \nu \|\mathbf{u}^{(n)}\|^2 = (\mathbf{f}, \mathbf{v})$$

- Usando Cauchy-Schwarz e Young no último termo,

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{u}^{(n)}|^2 + \nu \|\mathbf{u}^{(n)}\|^2 \leq \frac{1}{\nu \lambda_1} |\mathbf{f}|^2,$$

onde $\lambda_1 > 0$ primeiro autovalor do operador de Stokes

Estimativas globais

- Assumindo \mathbf{f} independente de t (ou $\mathbf{f} \in L^2(0, T; V')$),

$$|\mathbf{u}^{(n)}(t)|^2 \leq |\mathbf{u}_0|^2 e^{-\nu \lambda_1 t} + \frac{1}{\nu^2 \lambda_1^2} |\mathbf{f}|^2 (1 - e^{-\nu \lambda_1 t})$$

- Para a enstrofia,

$$\frac{\nu}{T} \int_0^T \|\mathbf{u}^{(n)}(t)\|^2 dt \leq \frac{1}{T} |\mathbf{u}_0|^2 + \frac{1}{\nu \lambda_1} |\mathbf{f}|^2$$

- Para a derivada temporal de $\mathbf{u}^{(n)}$, usando

$$-b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) \leq |\mathbf{u}|_{L^4}^2 \|\mathbf{v}\| \leq |\mathbf{u}|^{1/2} \|\mathbf{u}\|^{3/2} \|\mathbf{v}\|,$$

temos $\|B(\mathbf{u}, \mathbf{u})\|_{V'}^{4/3} \leq |\mathbf{u}|^{2/3} \|\mathbf{u}\|^2$, logo

$$\frac{1}{T} \int_0^T \|\partial_t \mathbf{u}^{(n)}(t)\|_{V'}^{4/3} dt \leq C$$

- Obtemos convergência (forte) em $L^2(0, T; H)$, suficiente para a passagem ao limite no termo bilinear.
- **Aubin (1963)**: Sejam $E_1 \subseteq E_2 \subset E_3$, E_1, E_3 reflexivos. Se $\{\mathbf{u}_n\}_n$ for limitado em $L^p(0, T; E_1)$ e $\{\mathbf{u}'_n\}_n$ limitado em $L^q(0, T; E_3)$, $p, q > 1$, então $\{\mathbf{u}_n\}$ é compacto em $L^p(0, T; E_2)$.
- **Temam (1983)**: Sejam $E_1 \subseteq E_2$ (não necessariamente reflexivos). Se $\{\mathbf{u}_n\}_n$ for limitado em $L^1(0, T; E_1)$ e em $L^p(0, T; E_2)$, $p > 1$, e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_n \int_0^{T-h} |\mathbf{u}_n(s+h) - \mathbf{u}_n(s)|_{E_2}^p ds = 0,$$

então $\{\mathbf{u}_n\}_n$ é compacto em $L^p(0, T; E_2)$.

- **Tartar (1999)**: $p = 1$ e “integral” $\leq M|h|^\theta$, $\theta > 0$.

Solução fraca de Leray-Hopf

Após a passagem ao limite, obtemos solução fraca:

- $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$;
- $\partial \mathbf{u} / \partial t \in L^{4/3}(0, T; V')$;
- $\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0, T]; H_w)$, onde H_w : topologia fraca;
- $\mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{u}_0$, em H , quando $t \rightarrow 0$;
- \mathbf{u} é solução das ENS no sentido fraco (e funcional)
- \mathbf{u} satisfaz a desigualdade de energia no sentido das distribuições em $(0, T)$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}(t)|^2 + \nu \|\mathbf{u}(t)\|^2 \leq (\mathbf{f}, \mathbf{u}(t))$$

Recuperação da pressão

- ▶ Defina $\mathbf{U}(t) = \int_0^t \mathbf{u}(s) \, ds$, $\beta(t) = \int_0^t B(\mathbf{u}(s), \mathbf{u}(s)) \, ds$ e $\mathbf{F}(t) = \int_0^t \mathbf{f}(s) \, ds$, todos pertencem a $\mathcal{C}(0, T; V')$.
- ▶ Da formulação fraca, para todo $\mathbf{v} \in V$ e todo $t \in [0, T]$, $\langle \mathbf{u}(t) - \nu \Delta \mathbf{U}(t) + \beta(t) - \mathbf{F}(t) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v} \rangle = 0$.
- ▶ Da versão para distribuições da caracterização de H^\perp , $\exists P(t) \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{L}^2(\Omega))$, com $-\nu \Delta \mathbf{U}(t) + \nabla P(t) = \mathbf{g}(t)$, onde $\mathbf{g}(t) = \mathbf{F}(t) - \beta(t) - \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}_0 \in \mathcal{C}(0, T; V')$.
- ▶ A derivada $p(t) = \partial P(t)/\partial t$ em \mathcal{D}' satisfaz (em \mathcal{D}')
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}.$$

53

Unicidade

A regularidade das soluções fracas não é suficiente para garantir a unicidade. Se \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 são soluções, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$ satisfaz

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nu A\mathbf{u} + B(\mathbf{u}, \mathbf{u}_2) + B(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}) = 0$$

Mas falta ortogonalidade, logo

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}|^2 + \nu \|\mathbf{u}\|^2 + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}) = 0.$$

Precisa de regularidade de pelo menos uma das soluções (soluções regulares são únicas na classe de soluções fracas).

Ladyzhenskaya (1969): Não unicidade de soluções fracas, mas com o domínio variando com t e com condições de contorno não homogêneas.

54

Regularidade

Para mais regularidade, estimar enstrofia (usando base de autovalores para a aproximação de Galerkin)

- Solução fraca satisfaz

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

- Tomando $\mathbf{v} = A\mathbf{u}^{(n)}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}^{(n)}, A\mathbf{u}^{(n)}) + b(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{u}^{(n)}, A\mathbf{u}^{(n)}) + a(\mathbf{u}^{(n)}, A\mathbf{u}^{(n)}) \\ = (\mathbf{f}, A\mathbf{u}^{(n)}), \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}^{(n)}\|^2 + \frac{\nu}{2} |A\mathbf{u}^{(n)}|^2 + b(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{u}^{(n)}, A\mathbf{u}^{(n)}) = \frac{1}{2} |\mathbf{f}|^2 \end{aligned}$$

55

- Para estimar o termo $b(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{u}^{(n)}, A\mathbf{u}^{(n)})$, fazemos

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{u}^{(n)}, A\mathbf{u}^{(n)})| &\leq |\mathbf{u}^{(n)}|_{L^6} |\nabla \otimes \mathbf{u}^{(n)}|_{L^3} |A\mathbf{u}^{(n)}| \\ &\leq \|\mathbf{u}^{(n)}\| \left(\|\mathbf{u}^{(n)}\|^{1/2} |A\mathbf{u}^{(n)}|^{1/2} \right) |A\mathbf{u}^{(n)}|^{1/2} \\ &\leq \|\mathbf{u}^{(n)}\|^{3/2} |A\mathbf{u}^{(n)}|^{3/2} \leq C \|\mathbf{u}^{(n)}\|^6 + \frac{\nu}{4} |A\mathbf{u}^{(n)}|^2. \end{aligned}$$

- Assim, $\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}^{(n)}\|^2 + \frac{\nu}{2} |A\mathbf{u}^{(n)}|^2 \leq C \|\mathbf{u}^{(n)}\|^6 + |\mathbf{f}|^2$.

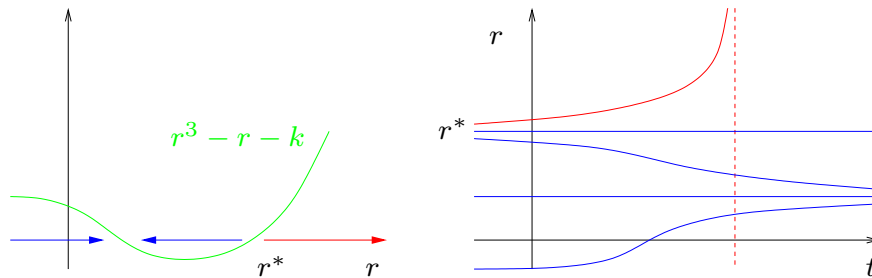
- Utilizando $\lambda_1 \|\mathbf{u}\|^2 \leq |A\mathbf{u}|^2$, chegamos a

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}^{(n)}\|^2 + \frac{\lambda_1 \nu}{2} \|\mathbf{u}^{(n)}\|^2 \leq C \|\mathbf{u}^{(n)}\|^6 + |\mathbf{f}|^2,$$

que é da forma $r' + r \leq r^3 + k$, para $r = \|\mathbf{u}^{(n)}\|^2$.

56

- A solução de $r' + r = r^3 + k$ **explode** em tempo finito, se $r > r^*$, e é **limitada**, se $0 \leq r \leq r^*$, onde r^* é a maior raiz de $r^3 - r + k$.



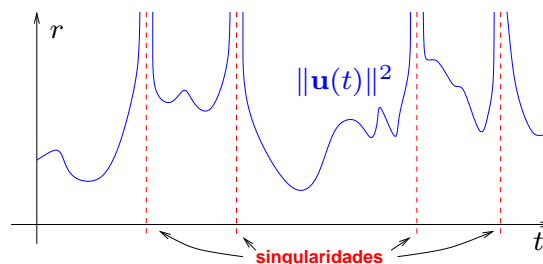
► **Conclusão:**

- existência de soluções regulares locais;
- existência de soluções regulares globais para forças externas e dados iniciais pequenos.

57

Singularidades no tempo

- As estimativas anteriores indicam a **possibilidade** de **explosão em tempo finito** de soluções regulares;
- Possibilidade de perda de regularidade das soluções fracas em certos instantes de tempo (**singularidades temporais** - a enstrofia (vorticidade total) deixa de ser limitada):



- Segundo Leray, essas singularidades estariam associadas a escoamentos turbulentos.

58

Estimativa da “quantidade” de singularidades temporais

- ▶ Considere solução fraca $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $t \geq 0$, e o conjunto de singularidades temporais $S = \{t \geq 0; \|\mathbf{u}(t)\| = \infty\}$;
- ▶ Como $\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^2 dt < \infty$, temos S de medida nula;
- ▶ Quão grande pode ser S ? Denso na reta? Discreto?
- ▶ S não é denso: pela existência local de soluções regulares, o conjunto de instantes regulares ($\|\mathbf{u}(t)\| < \infty$) é união de intervalos semi-abertos e de medida cheia.
- ▶ Como podemos medir o “tamanho” de S ?

59

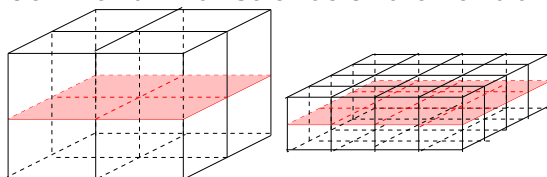
Dimensão de Hausdorff

- ▶ Quantificar o tamanho de S pela dimensão de Hausdorff
- ▶ Medida de dimensão D de Hausdorff de S

$$\mu_D(S) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \mu_{D,\epsilon}(S) = \sup_{\epsilon > 0} \mu_{D,\epsilon}(S),$$

$$\text{onde } \mu_{D,\epsilon} = \inf_{\cup_j (t_j^-, t_j^+) \supset S, |t_j^+ - t_j^-| \leq \epsilon} \sum_j (t_j^+ - t_j^-)^D;$$

- ▶ Dimensão de Hausdorff $\dim_H(S) = \inf\{D; \mu_D(S) = 0\}$;
- ▶ \dim_H pode ser definida em várias dimensões e coincide com a dimensão euclidiana de subvariedades euclidianas



cobertura: $\epsilon \mapsto \epsilon/2$
 n.º de “bolas”: $n_\epsilon \mapsto 2^d n_\epsilon$
 d = dimensão euclidiana
 $\mu_{D,\epsilon/2^j} = 2^{j(d-D)} \mu_{D,\epsilon}$

60

Estrutura das soluções fracas - Leray (1934)

- Seja $\mathbf{u}(t)$ solução fraca em $[0, T]$ e defina

$$R = [0, T] \setminus S = \{t \in [0, T]; \mathbf{u}(t) \in V\},$$

$$R_0 = \{t \in (0, T); \exists \varepsilon > 0, \mathbf{u}(t) \in \mathcal{C}((t - \varepsilon, t + \varepsilon), V)\}$$

- R_0 é aberto, logo $R_0 = \cup_{j \in \mathbb{N}} I_j$, com $I_j = (t_j^-, t_j^+)$ disjuntos.
- Para cada $t \in R$, temos $t \in R_0$ ou $t = t_j^-$ para algum j , logo $R \setminus R_0$ é enumerável.
- Como $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$, temos $|R| = T$, logo $|R_0| = T$, onde $|\cdot| =$ medida de Lebesgue
- Vamos estimar o comprimento de cada (t_j^-, t_j^+) ...

61

- Da inequação $r' + r \leq r^3 + k$ para enstrofia $r = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2$ temos soluções definidas para

$$0 \leq t - t_0 < \alpha / (1 + r_0)^2, \quad r_0 = r(t_0), \quad \alpha > 0;$$

- Em cada intervalo maximal (t^-, t^+) de regularidade,
- $$t^+ - t \geq \frac{\alpha}{(1 + \|\mathbf{u}(t)\|^2)^2} \Rightarrow \frac{1}{(t^+ - t)^{1/2}} \leq \frac{(1 + \|\mathbf{u}(t)\|^2)}{\sqrt{\alpha}};$$

- Integrando no tempo:

$$(t^+ - t^-)^{1/2} = \int_{t^-}^{t^+} \frac{dt}{2(t^+ - t)^{1/2}} \leq \int_{t^-}^{t^+} \frac{1 + \|\mathbf{u}(t)\|^2}{2\sqrt{\alpha}} dt;$$

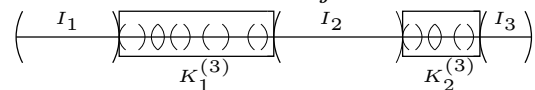
- Somando em todos os intervalos (Leray (1934)):

$$\sum_{\substack{\text{intervalos} \\ \text{regulares}}} (t_j^+ - t_j^-)^{1/2} \leq \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^2 dt < \infty;$$

62

Dimensão das singularidades em t - Scheffer (1976)

- ▶ Temos $S \subset [0, T] \setminus \bigcup_{j=1}^m I_j$, que escrevemos como união finita de intervalos fechados disjuntos $\bigcup_{j=1}^{k_m} K_j^{(m)}$.
- ▶ Se $I_j \cap K_n^{(m)} \neq \emptyset$ com $j > m$, então $I_j \subset K_n^{(m)}$, pois os extremos de $K_n^{(m)}$ são extremos de outros $I_{j'}$ e não podem estar no interior de I_j .



- ▶ Assim, $\bigcup_{n=1}^{k_m} K_j^{(m)} \subset \bigcup_{j>m} I_j$ e

$$\sum_{n=1}^{k_m} |K_n^{(m)}| \leq \sum_{j>m} |I_j|^{1/2} = \sum_{j>m} (t_j^+ - t_j^-)^{1/2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

- ▶ Como $\bigcup_{n=1}^{k_m} K_j^{(m)}$ é uma cobertura de S , temos da estimativa acima que $\mu_{1/2}(S) = 0$ e $\dim_H(S) \leq 1/2$.

63

Singularidades espaço-temporais - Scheffer (1976), Caffarelli, Khon, Nirenberg (1982), Lin (1998), ...

- ▶ Análise mais precisa no conjunto E de singularidades espaço-temporais (de “suitable weak solutions”): $\{(t^*, \mathbf{x}^*), \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \text{ ilimitado em vizinhanças de } (t^*, \mathbf{x}^*)\}$;
- ▶ $\exists \epsilon > 0, \limsup_{R \rightarrow 0} R^{-1} \int_{Q_R(t, \mathbf{x})} |\nabla \otimes \mathbf{u}|^2 < \epsilon \Rightarrow (t, \mathbf{x})$ regular;
- ▶ $\mathcal{P}_1(E) = 0$, onde \mathcal{P}_D é uma versão parabólica da medida de Hausdorff (com cilindros parabólicos $Q_\epsilon = I_{\epsilon^2} \times B_\epsilon$ ao invés de bolas);
- ▶ \nexists singularidade tipo folha de vórtice em nenhum instante de tempo (singularidade de dimensão dois);
- ▶ \nexists singularidade tipo vórtice pontual existindo em um intervalo de tempo (tb. dimensão dois devido a I_{ϵ^2}).



64

Suitable weak solutions

- Sohr e von Wahl (1986): Leray-Hopf solutions

$$p \in L^{5/3}(\mathbb{R}^3 \times (0, T)).$$

- Caffarelli, Kohn, Nirenberg (1982): \exists suitable weak solutions

$$p \in L^{5/4}(\Omega \times (0, T)) \quad \left(\text{de fato, } p \in L_t^{5/4} L_x^{5/3} \right).$$

- **F. H. Lin (1998) e Ladyzhenskaya e Seregin (1999):** \exists suitable weak solutions

$$p \in L^{3/2}((0, T) \times \Omega).$$

65

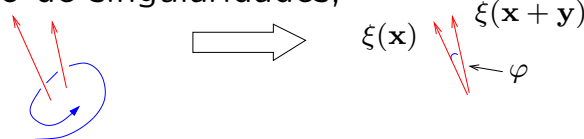
- Condições para a regularidade ou explosão foram obtidas e têm sido refinadas;
- Condições geométricas sobre o alinhamento de vórtices são particularmente interessantes:

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla - \nu \delta)|\boldsymbol{\omega}|^2 + \nu |\nabla \otimes \boldsymbol{\omega}|^2 = S \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \alpha |\boldsymbol{\omega}|^2,$$

$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{3}{4\pi} P.V. \int D(\mathbf{y}/|\mathbf{y}|, \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x} + \mathbf{y}), \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) |\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x} + \mathbf{y})| d\mathbf{y}/|\mathbf{y}|^3$$

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\omega}/|\boldsymbol{\omega}|, \quad D(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3) = (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_3) \det(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3), \quad \forall |\mathbf{s}_i| = 1;$$

- φ = ângulo entre $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ e $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$, então $|D| \leq |\sin \varphi|$ e ângulo local pequeno reduz α , associado ao crescimento de singularidades;



66

Resultados condicionais de regularidade

► **Constantin-Fefferman (1993):**

$$|\sin \varphi(\mathbf{y})| \leq c|\mathbf{y}| \text{ em } \Omega_{t,M} \Rightarrow \nexists \text{ explosão em } t = T.$$

$$\Omega_{t,M} = \{(t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega; |\boldsymbol{\omega}(t, \mathbf{x})| \geq M\}$$

► **Beirão da Veiga-Berselli (2002):**

$$|\sin \varphi(\mathbf{y})| \leq c|\mathbf{y}|^{1/2} \text{ em } \Omega_{t,M} \Rightarrow \nexists \text{ explosão em } t = T.$$

► **Ruzmaikina e Grujić (2003):** Para $q \geq 2$,

$$|\boldsymbol{\omega}|_{\mathbb{L}^q(\Omega)}^{q/(q-1)} \in L^1(0, T) \text{ e } |\sin \varphi(\mathbf{y})| \leq c|\mathbf{y}|^{1/q} \text{ em } \Omega_{t,M} \\ \Rightarrow \nexists \text{ explosão em } t = T.$$

67

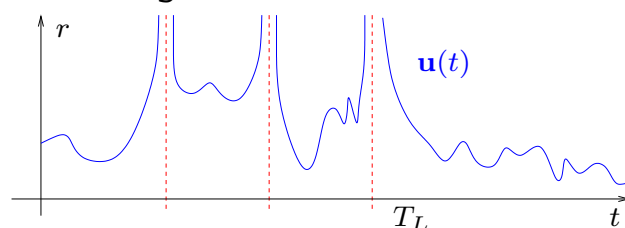
Regularidade eventual de Leray

► Considere o caso sem força externa, $\mathbf{f} = 0$;

► Nesse caso $2\nu \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^2 dt \leq |\mathbf{u}_0|^2, \quad \forall T > 0;$

► Então, $\liminf_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(t)\| = 0$, i.e. a solução assume valores arbitrariamente pequenos de enstrofia;

► Pelo resultado de regularidade global para dados iniciais com enstrofia suficientemente pequena, segue que a solução \mathbf{u} é regular a partir de algum tempo $t \geq T_L$ suficientemente grande.



68

Regularidade assintótica?

- ▶ Para $f \neq 0$, não há, necessariamente, regularidade eventual;
- ▶ Um possível resultado intermediário de regularidade é o conjunto ω -limite fraco ter enstropia limitada;
- ▶ Outro, mais fraco, seria o suporte de medidas invariantes (“soluções estatísticas” em 3D) ter enstropia limitada;
- ▶ Este último resultado tem relação com o esperado decaimento exponencial do espectro, na teoria estatística de turbulência, associado ao espectro de funções analíticas.

69

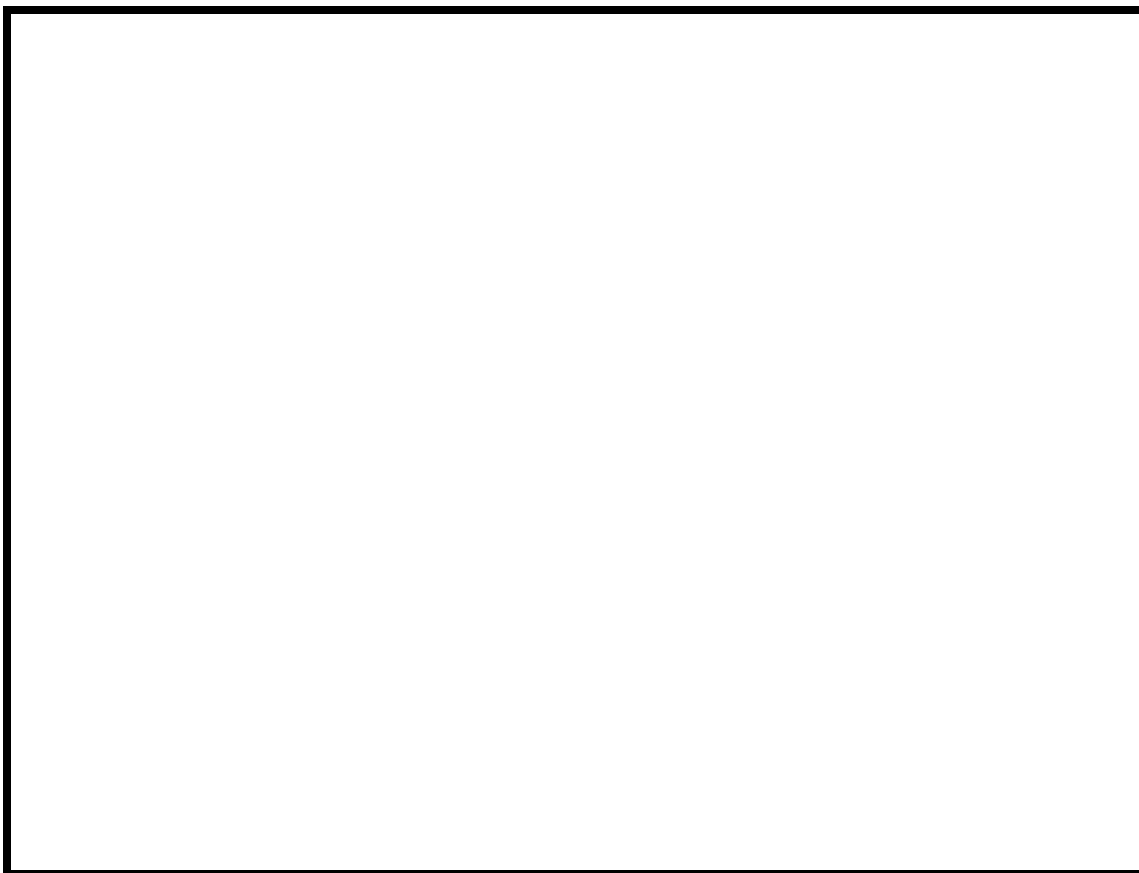
Atrator global fraco

- ▶ As estimativas a priori obtidas na teoria de existência das ENS são suficientes para mostrar a existência de um atrator global na topologia fraca:

$$\mathcal{A}_w = \{u_0 \in H; \exists \text{ solução global, } \sup_{t \in \mathbb{R}} |u(t)| < \infty, u(0) = u_0\};$$

- ▶ Pelas estimativas, \mathcal{A}_w é limitado em H e atrai todas as soluções na topologia fraca, uniformemente para condições iniciais limitadas.
- ▶ Se $\mathcal{A}_w \subset V$ (regularidade assintótica), então todas as soluções são atraídas na topologia forte.

70



71



72

Resultados recentes sobre as equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis

Ricardo M. S. Rosa
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
(IM-UFRJ)

I EBED
Escola Brasileira de Equações Diferenciais
9 a 13 de junho de 2003
IMECC - Unicamp

Aula 3 - 11 de junho

73

Resultados recentes sobre as equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis

Tópicos:

1. As equações de Navier-Stokes, equações correlatas e algumas questões fundamentais
2. Aspectos matemáticos das equações de Navier-Stokes
3. Teoria estatística convencional de turbulência
4. Soluções estatísticas das equações de Navier-Stokes
5. Aplicações das soluções estatísticas em turbulência

74

Teoria estatística convencional de turbulência

- ▶ Ordem e médias estatísticas
- ▶ Turbulência homogênea e isotrópica
- ▶ Espectro de energia
- ▶ Cascata de energia
- ▶ A teoria homogênea isotrópica local de Kolmogorov
- ▶ estruturas coerentes e intermitência
- ▶ Graus de liberdade
- ▶ Lei de dissipação de energia
- ▶ Número de Reynolds, lei de Moore e DNS
- ▶ Cascata de enstrofia e espectro de Kraichnan em 2D

75

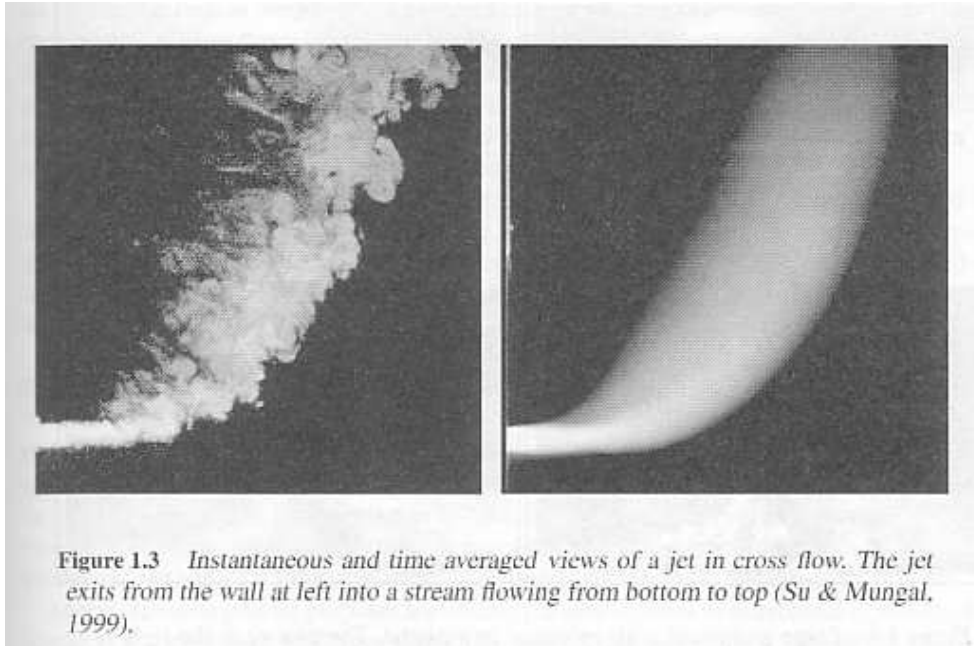
Equações de Navier-Stokes

- ▶ Região $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ocupada pelo fluido
- ▶ Variáveis espacial $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ e temporal $t \geq 0$
- ▶ Campo de velocidades $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$
- ▶ Pressão $p = p(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ e força de volume $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$
- ▶ Equações de Navier-Stokes (ENS) para um escoamento incompressível e homogêneo, viscosidade cinemática ν :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

76

Escoamentos turbulentos: várias escalas presentes, se movendo de maneira imprevisível, mas bem comportadas em um sentido estatístico.

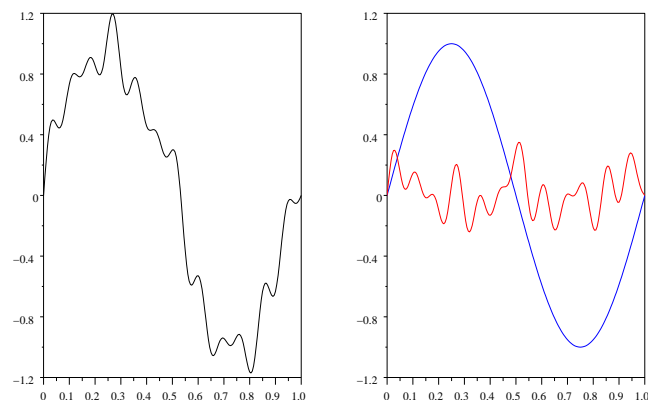


77

Reynolds (1895):

Decomposição do escoamento em

escoamento médio + flutuações



Escoamento médio previsível?

78

Tipos de média:

$$\text{Média temporal: } \mathbf{U}(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) dt$$

$$\text{Média amostral: } \mathbf{U}(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{u}^{(n)}(t, \mathbf{x})$$

$$\text{Média espacial: } \mathbf{U}(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{u}(t, \mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}^{(n)})$$

Hipótese ergódica: Os valores médios independem do tipo de média considerada, inspirada em mecânica estatística.

Reynolds (1895): Operação formal de média, satisfazendo propriedades de linearidade.

79

Quantidades médias - notação

$$\overline{\varphi(\mathbf{u})} \text{ ou } \langle \varphi(\mathbf{u}) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi(\mathbf{u}^{(n)})$$

onde $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ e $\varphi = \varphi(\mathbf{u})$.

Exemplos:

$$\overline{u_1}(t, \mathbf{x}), \quad \langle u_1(t, \mathbf{x}) \rangle, \quad \frac{\rho_0}{2} \langle |\mathbf{u}(t, \mathbf{x})|^2 \rangle$$

Linearidade:

$$\overline{\frac{\partial u_3}{\partial x_2}} = \frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_2}, \quad \left\langle \int_{\Omega} \mathbf{u}(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right\rangle = \int_{\Omega} \langle \mathbf{u}(t, \mathbf{y}) \rangle d\mathbf{y},$$

$$\text{mas } \langle u_1(\mathbf{x}) u_2(\mathbf{y}) \rangle \neq \langle u_1(\mathbf{x}) \rangle \langle u_2(\mathbf{y}) \rangle$$

80

► **Escoamento médio**

$$U(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{u}^{(n)}(t, \mathbf{x})$$

► **Energia cinética média** por unidade de massa:

$$e(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle |\mathbf{u}(t, \mathbf{x})|^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} |\mathbf{u}^{(n)}(t, \mathbf{x})|^2$$

► **Razão de dissipação** viscosa de energia por unidade de tempo e unidade de massa:

$$\epsilon(t, \mathbf{x}) = \nu \langle |\nabla \otimes \mathbf{u}(t, \mathbf{x})|^2 \rangle = \frac{\nu}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_j} \right)^2$$

81

Equação de energia

► Equações de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

► Multiplicando as ENS por \mathbf{u} e integrando no domínio:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{ENS}) \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0$$

► Usando condição de incompressibilidade e mult. por ρ_0 :

$$\frac{d}{dt} \overbrace{\frac{\rho_0}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2}^{\text{energia cinética}} + \overbrace{\nu \rho_0 \int_{\Omega} |\nabla \otimes \mathbf{u}|^2}^{\text{dissipação de energia}} + \left(\text{termos no bordo} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{termos de} \\ \text{produção} \\ \text{de energia} \end{array} \right)$$

82

Equações de Reynolds para o escoamento médio

- ▶ Equações de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

- ▶ Substituindo $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$ e tomando a média:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \nabla P = -\nabla \cdot \overline{(\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}')}, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0.$$

- ▶ $\rho_0 \overline{(\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}')} = \rho_0 \overline{(\mathbf{u}'_i \mathbf{u}'_j)}_{i,j=1}^3 = \text{tensor de Reynolds}.$

83

Escoamentos turbulentos médios

Em canais:



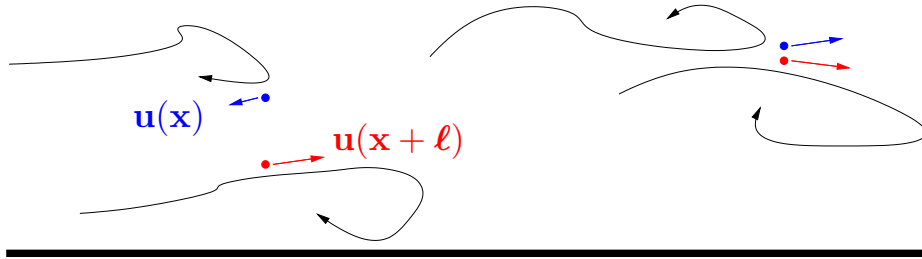
Várias camadas com diferentes perfis de velocidade média (simplificação do tensor de Reynolds via simetrias, análise dimensional, argumentos fenomenológicos, ...)

Analogamente para outras geometrias (tubos, etc.)

84

Correlações e métodos estatísticos - Taylor (1921,35)

Correlações (de 2 pontos): $\langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} + \ell) \rangle$



- ▶ $u^{(n)}(x+l)$ e $u^{(n)}(x)$ apontam frequentemente na mesma direção e mesmo sentido $\Rightarrow \langle u_i(x)u_i(x+l) \rangle > 0$ e as velocidades estão correlacionadas.
- ▶ $u^{(n)}(x+l)$ e $u^{(n)}(x)$ apontam em direções arbitrariamente diferentes $\Rightarrow \langle u_i(x)u_i(x+l) \rangle = 0$ e as velocidades não estão correlacionadas.

85

Turbulência homogênea - Taylor (1935)

Em certos escoamentos, correlações são *homogêneas*:

$\langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} + \ell) \rangle =$ função apenas de ℓ , independe de \mathbf{x}

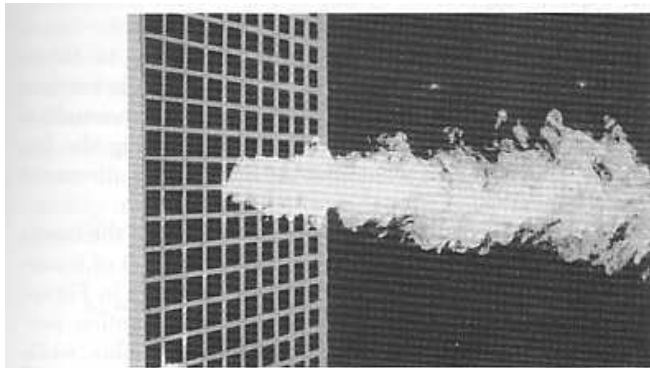


Figure I-3: turbulence created in a wind tunnel behind a grid. Here turbulence fills the whole apparatus, and a localized source of smoke has been placed on the grid to visualize the development of turbulence (picture by J.L. Balint, M. Ayrault and J.P. Schon, Ecole Centrale de Lyon; from Lesieur (1982), courtesy "La Recherche")

86

Comprimento de Taylor (1921,1935)

Correlação lateral de segunda ordem normalizada:

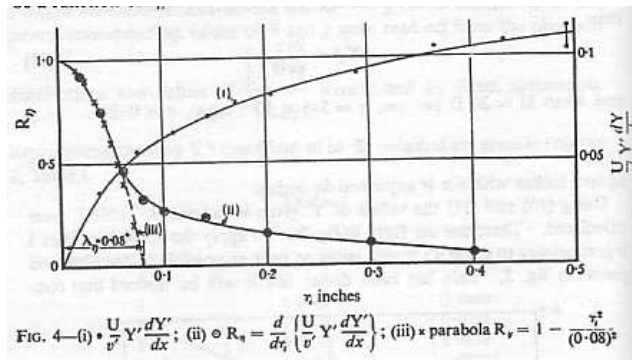
$$g(\ell) = \frac{\langle u_1(\mathbf{x})u_1(\mathbf{x} + \ell\mathbf{e}_2) \rangle}{\langle u_1(\mathbf{x})^2 \rangle}, \quad \ell \in \mathbb{R}.$$

- ▶ $g(0) = 1$
- ▶ Homogeneidade implica em $g(-\ell) = g(\ell)$, logo $g'(0) = g'''(0) = \dots = 0$.
- ▶ $g(\ell) = 1 - \left(\frac{\ell}{\ell_T}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\ell}{\ell_T}\right)^4\right)$
- ▶ $\ell_T =$ comprimento de Taylor
- ▶ $\frac{1}{\ell_T^2} = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{1 - g(\ell)}{\ell^2} = \frac{1}{2}g''(0) = \frac{1}{2} \frac{\langle \left(\frac{\partial u_1(\mathbf{x})}{\partial x_2}\right)^2 \rangle}{\langle u_1(\mathbf{x})^2 \rangle}$

87

Comprimento de Taylor - verificação experimental

$$g(\ell) = \frac{\langle u_1(\mathbf{x})u_1(\mathbf{x} + \ell\mathbf{e}_2) \rangle}{\langle u_1(\mathbf{x})^2 \rangle} = 1 - \left(\frac{\ell}{\ell_T}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\ell}{\ell_T}\right)^4\right)$$



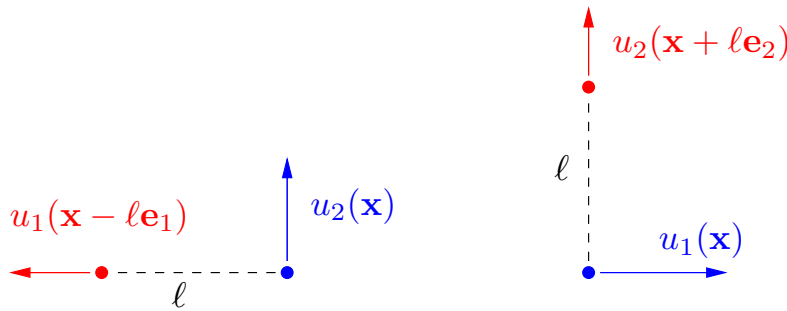
$\ell_T =$ “comprimento médio dos menores turbilhões responsáveis pela dissipação de energia pela viscosidade”

88

Turbulência homogênea isotrópica - Taylor (1935)

Em certos escoamentos turbulentos, em particular quando o escoamento médio é desprezível, as correlações são homogêneas e *isotrópicas* no espaço, isto é independentes de translações e rotações do conjunto de pontos.

$$\langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \rangle = \begin{cases} \text{função apenas do módulo } \ell = |\boldsymbol{\ell}|, \\ \text{independe de } \mathbf{x} \text{ e da direção } \frac{\boldsymbol{\ell}}{|\boldsymbol{\ell}|} \end{cases}$$



89

Consequências da isotropia

Kármán e Howarth (1937): em escoamentos homogêneos isotrópicos, correlações de segunda ordem podem ser escritas em termos de apenas uma correlação

$$\left(\frac{\langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) \rangle}{\langle u(\mathbf{x})^2 \rangle} \right)_{i,j=1}^3 = \frac{f(\ell) - g(\ell)}{\ell^2} \ell \otimes \ell + g(\ell) \delta_{i,j},$$

onde

$$f(\ell) = \frac{\langle u_1(\mathbf{x})u_1(\mathbf{x} + \ell \mathbf{e}_1) \rangle}{\langle u(\mathbf{x})^2 \rangle}, \quad g(\ell) = \frac{\langle u_1(\mathbf{x})u_1(\mathbf{x} + \ell \mathbf{e}_2) \rangle}{\langle u(\mathbf{x})^2 \rangle}$$

e, da condição de incompressibilidade,

$$f(\ell) + \frac{\ell}{2} f'(\ell) = g(\ell).$$

Verificado experimentalmente por Taylor (1937).

90

Espectro de energia e correlações - Taylor (1938)

- Traço do tensor de correlações

$$\text{Tr } R(\ell) = R_{11}(\ell) + R_{22}(\ell) + R_{33}(\ell), \quad R_{ij} = \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \ell) \rangle$$

- Transformada de Fourier $Q(\boldsymbol{\kappa})$ de $\text{Tr } R(\ell)$

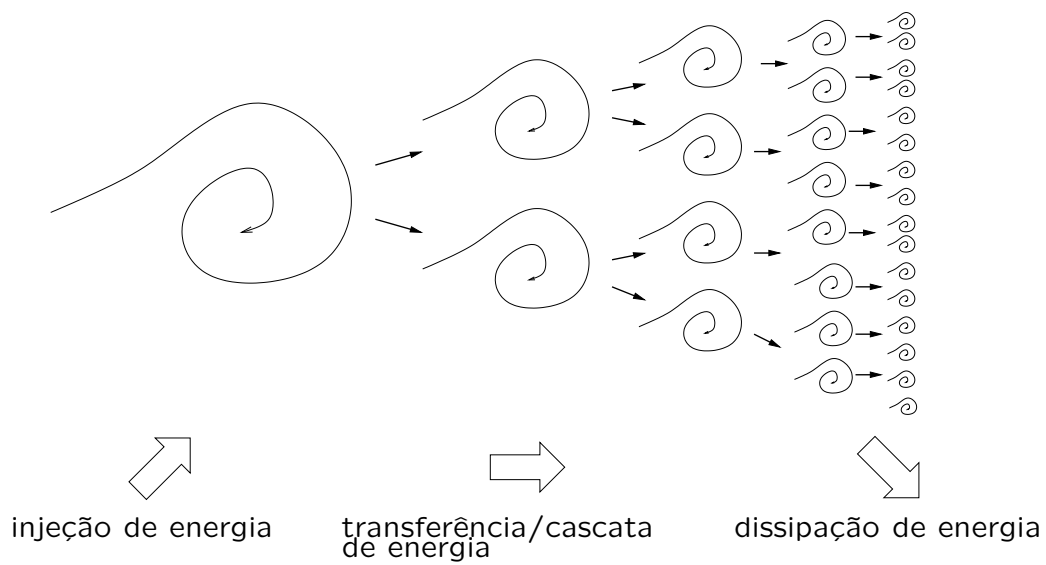
$$\text{Tr } R(\ell) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} Q(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{\kappa}} d\boldsymbol{\kappa}$$

- *Espectro de energia* (segundo Batchelor (1953))

$$S(\kappa) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{|\boldsymbol{\kappa}|=\kappa} Q(\boldsymbol{\kappa}) d\Sigma(\boldsymbol{\kappa})$$
$$\Rightarrow e = \frac{1}{2} \langle |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr } R(0) = \int_0^\infty S(\kappa) d\kappa$$

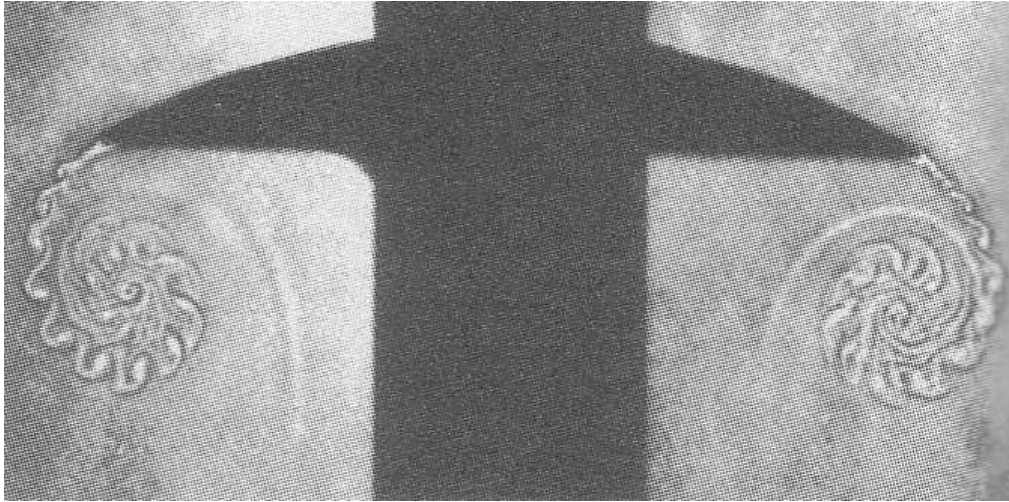
91

Cascata de energia - Richardson (1922)



92

Transferência de energia/enstrofia



93

Número de Reynolds

- ▶ Escala de comprimento: L
- ▶ Escala de velocidade: U
- ▶ Dimensão física do termo inercial: $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \sim \frac{U^2}{L}$
- ▶ Dimensão física do termo viscoso: $\nu \Delta \mathbf{u} \sim \frac{\nu U}{L^2}$
- ▶ Razão entre os dois termos:

$$\text{Re} = \frac{\text{inercial}}{\text{viscoso}} = \frac{LU}{\nu}$$

- ▶ $\text{Re} \gg 1 \Rightarrow$ termo inercial domina (grandes escalas)
- ▶ $\text{Re} \ll 1 \Rightarrow$ viscosidade domina (pequenas escalas)

94

Teoria de Kolmogorov

- ▶ Produção de energia nas grandes escalas $\ell \sim \ell_0$
- ▶ No **intervalo de equilíbrio**, $\ell \ll \ell_0$, o escoamento tem um comportamento universal, independente das características de produção de energia e dependentes apenas de ν e ϵ . O escoamento “perde a memória” das grandes escalas, devido à cascata turbulenta de energia.
- ▶ A viscosidade se torna importante apenas a partir de escalas muito menores, da ordem do **comprimento de Kolmogorov**, $\ell_\epsilon = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$.
- ▶ No **intervalo inercial**, $\ell_0 \gg \ell \gg \ell_\epsilon$, a viscosidade é desprezível em relação às forças de inércia (cinéticas), com o espectro de energia $S(\kappa) \sim \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}$.

95

Teoria de turbulência homogênea isotrópica local - Kolmogorov (1941)

- ▶ Correlações de *diferenças* de velocidades são homogêneas e isotrópicas no espaço e em equilíbrio estatístico (homogêneas) no tempo.
- ▶ Homogeneidade $\Rightarrow \epsilon = \frac{\nu}{2} \langle |\nabla \otimes \mathbf{u}(t, \mathbf{x})|^2 \rangle$ independe de t, x .
- ▶ **1ª hipótese de similaridade:** correlações dependem apenas de ϵ e ν (nas escalas suficientemente menores que as de produção de energia, ℓ_0)
- ▶ **2ª hipótese de similaridade:** Há um subintervalo de escalas no qual as correlações dependem apenas de ϵ

96

Comprimento de Kolmogorov (1941)

É o comprimento ℓ_ϵ para o qual os efeitos de viscosidade e inércia são comparáveis e significativos.

Pela transformação $\ell' = \ell/\lambda$, $t' = t/\tau$, temos

$$\nu' = \frac{\tau}{\lambda^2} \nu, \quad \epsilon' = \frac{\tau^3}{\lambda^2} \epsilon.$$
$$\epsilon' = 1 \Rightarrow \tau = \left(\frac{\lambda^2}{\epsilon} \right)^{1/3}, \quad \nu' = 1 \Rightarrow \tau = \frac{\lambda^2}{\nu}, \quad \frac{\epsilon'}{\nu'} = \frac{\tau^2 \epsilon}{\nu} = \frac{\lambda^4 \epsilon}{\nu^3},$$

Portanto, ϵ'/ν' diminui com λ^4 e

$$\begin{aligned} \nu' \sim 1 \sim \epsilon' &\iff \lambda \sim \ell_\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \\ \nu' \ll \epsilon' \sim 1 &\iff \lambda \gg \ell_\epsilon \\ \epsilon' \ll \nu' \sim 1 &\iff \lambda \ll \ell_\epsilon. \end{aligned}$$

97

A lei de potência 2/3 de Kolmogorov (1941)

Pela segunda hipótese de similaridade, as correlações para $\ell_\epsilon \ll \ell \ll \ell_0$ só dependem de ϵ .

$$S_2(\ell) = \left\langle \left((\mathbf{u}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \frac{\boldsymbol{\ell}}{|\boldsymbol{\ell}|} \right)^2 \right\rangle = g(\ell, \epsilon).$$

Pela similaridade, $S'_2(\ell') = g(\ell', \epsilon')$, logo

$$\frac{\tau^2}{\lambda^2} S_2(\ell) = g\left(\frac{\ell}{\lambda}, \frac{\tau^3}{\lambda^2} \epsilon\right).$$

Tomando

$$\begin{aligned} \frac{\ell}{\lambda} &= 1, & \frac{\tau^3}{\lambda^2} \epsilon &= 1, \\ \implies S_2(\ell) &= g(1, 1) \frac{\lambda^2}{\tau^2} = g(1, 1) \frac{\ell^2}{(\ell^{2/3}/\epsilon^{1/3})^2} = \text{const. } (\epsilon \ell)^{2/3}. \end{aligned}$$

98

O espectro $-5/3$ de Kolmogorov

- ▶ $S(\kappa)$ = espectro de energia \Rightarrow dimensão = $\frac{L^3}{T}$
- ▶ ϵ = razão de dissipação de energia no tempo = $\frac{L^2}{T^3}$
- ▶ Hipótese de similaridade $\Rightarrow S(\kappa)$ depende de ϵ e κ (no intervalo inercial)
- ▶ Intervalo inercial: $\kappa_0 \ll \kappa \ll \kappa_\epsilon$, $\kappa_0 = \ell_0^{-1}$, $\kappa_\epsilon = \ell_\epsilon^{-1}$
- ▶ Análise dimensional \Rightarrow

$$S(\kappa) = \text{const. } \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}, \quad \kappa_0 \ll \kappa \ll \kappa_\epsilon$$

99

Espectro de energia - mecanismo de Oboukhov (1941)

- ▶ Energia cinética média para os turbilhões de comprimento $\ell = 1/\kappa$:

$$e_\kappa = S(\kappa)\kappa$$

- ▶ Tempo característico para esses turbilhões:

$$\tau_\kappa = (S(\kappa)\kappa^3)^{1/2}$$

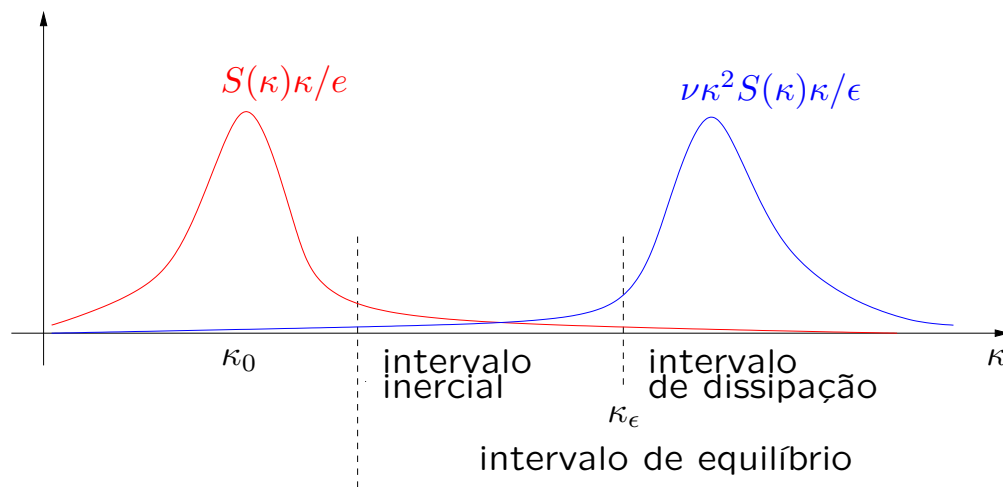
- ▶ No intervalo inercial, energia cinética é transferida para as escalas menores, à razão temporal da ordem da razão de dissipação de energia: $\frac{e_\kappa}{\tau_\kappa} \sim \epsilon$

- ▶ Logo, $\frac{S(\kappa)\kappa}{(S(\kappa)\kappa^3)^{1/2}} \sim \epsilon \quad \Rightarrow \quad S(\kappa) \sim \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}$

100

Diagrama da teoria de Kolmogorov

Os espectros de energia e de dissipação de energia



101

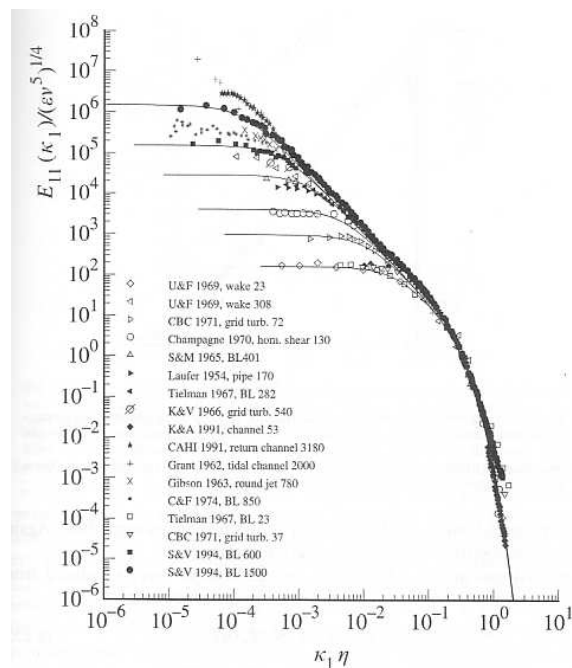


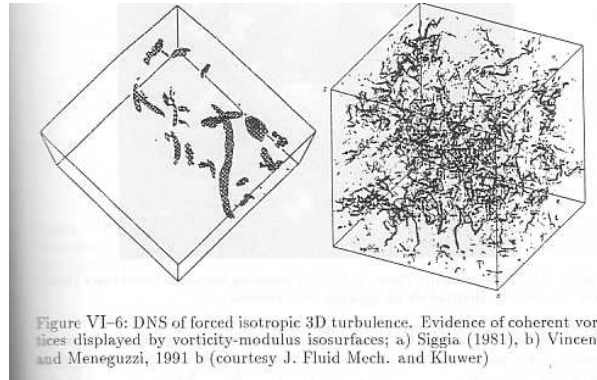
Fig. 6.14. Measurements of one-dimensional longitudinal velocity spectra (symbols), and model spectra (Eq. (6.246)) for $R_\lambda = 30, 70, 130, 300, 600$, and $1,500$ (lines). The experimental data are taken from Saddoughi and Veeravalli (1994) where references to the various experiments are given. For each experiment, the final number in the key is the value of R_λ .

Espectro de energia

102

Estruturas coerentes e intermitência

- Universalidade questionada devido a variações intermitentes na dissipação de energia ϵ
- Estruturas coerentes: filamentos de vórtices com baixa dissipação de energia, diâmetro da ordem do comprimento de Kolmogorov e comprimento variando entre comprimento de Taylor e escala integral.



103

Intermitência, leis de potência e lei -4/5

- Via análise dimensional ou similaridade:

$$S_p(\ell) = \left\langle \left((\mathbf{u}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \frac{\boldsymbol{\ell}}{|\boldsymbol{\ell}|} \right)^p \right\rangle \sim (\epsilon \ell)^{p/3}.$$

- Intermitência \Rightarrow diferentes dissipações locais ϵ_j
- Então, para a correlação longitudinal 2-pts de ordem p :

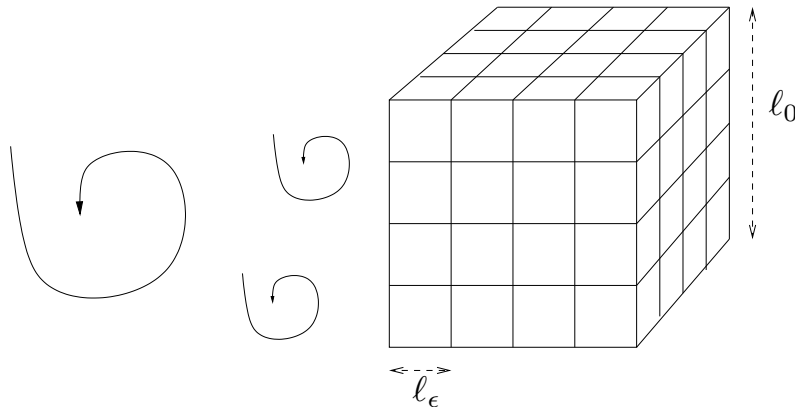
$$S_p(\ell) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J S_p^{(j)}(\ell) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J (\epsilon_j \ell)^{p/3} \neq \left(\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \epsilon_j \ell \right)^{p/3} = (\epsilon \ell)^{p/3},$$

exceto quando $p = 3$, que é o único valor para o qual Kolmogorov obteve uma lei de potência sem usar similaridade (lei -4/5 de Kolmogorov): $S_3(\ell) = -\frac{4}{5}\epsilon\ell$

104

Graus de liberdade - Landau e Lifchitz (1971)

- ▶ Teoria de Kolmogorov: escalas $\ell \ll \ell_\epsilon$ são dominadas pela dissipação e irrelevantes para o movimento
- ▶ Basta representarmos as escalas de ordem até ℓ_ϵ
- ▶ Basta uma malha de espaçamento $\sim \ell_0/\ell_\epsilon$
- ▶ Graus de liberdade: $(\ell_0/\ell_\epsilon)^3$



105

Lei de dissipação de energia

- ▶ Comprimento típico das grandes escalas: ℓ_0
- ▶ Velocidade típica das grandes escalas: U_0
- ▶ Energia cinética das grandes escalas: $e_0 = U_0^2/2$
- ▶ Tempo de circulação das grandes escalas: $\tau_0 = \ell_0/U_0$
- ▶ Razão de dissipação de energia:

$$\epsilon \sim \frac{e_0}{\tau_0} \Rightarrow \epsilon \sim \frac{U_0^3}{\ell_0} \text{ (lei de dissipação de energia)}$$

- ▶ Mais precisamente, lei considerada para a velocidade turbulenta $U'_0 = \langle u_1(\mathbf{x})^2 \rangle^{1/2}$ e a escala integral

$$\ell'_0 = \frac{1}{\langle u_1^2 \rangle} \int_0^\infty \langle u_1(\mathbf{x}) u_1(\mathbf{x} + \ell \mathbf{e}_1) \rangle d\ell$$

106

Graus de liberdade em termos do número de Reynolds

- ▶ Número de Reynolds das grandes escalas: $Re = \ell_0 U_0 / \nu$
- ▶ Comprimento de Kolmogorov: $\ell_\epsilon = (\nu^3 / \epsilon)^{1/4}$
- ▶ Lei de dissipação de energia: $\epsilon \sim U_0^3 / \ell_0$
- ▶ Logo, $\ell_0 / \ell_\epsilon \sim Re^{3/4}$
- ▶ Graus de liberdade:

$$N \sim \left(\frac{\ell_0}{\ell_\epsilon} \right)^3 \sim Re^{9/4}$$

107

Exemplos de números de Reynolds de escoamentos

- ▶ Túnel de vento $\ell_0 \sim 2m$, $U_0 \sim 5m/s$, $\nu \sim 10^{-5}m^2/s$

$$\Rightarrow Re \sim 10^6, \quad N \sim 10^{13}, \quad \ell_\epsilon \sim 0.1mm$$

- ▶ Escoamentos geofísicos $\ell_0 \sim 10000km$, $U_0 \sim 100km/h$,

$$\Rightarrow Re \sim 10^{12}, \quad N \sim 10^{27}, \quad \ell_\epsilon \sim 1cm$$

Obs: estimativas aproximadas, pois não estamos considerando a escala integral e a intensidade turbulenta.

108

Número de Reynolds e CFD

- ▶ Para a representação espacial apropriada do escoamento: $N \sim \text{Re}^{9/4}$ graus de liberdade.
- ▶ Para escoamentos periódicos 3D (via fft): $N \ln N$ operações de ponto flutuante (flop) por iteração.
- ▶ Como a escala de tempo dos menores turbilhões é $\tau_\epsilon = (\ell_\epsilon^2/\nu)^{1/3} = (\nu/\epsilon)^2$, precisamos (usando $\epsilon \sim U_0/\ell_0$), de $\tau_0/\tau_\epsilon = (\ell_0 U_0/\nu)^{1/2} = \text{Re}^{1/2}$ iterações para integração em um ciclo de circulação das grandes escalas, logo $N^{11/9} \ln N \sim \text{Re}^{11/4} \ln \text{Re}$ flop para cada ciclo.
- ▶ Com os supercomputadores teraflop (10^{12} flop/s), podemos chegar a aproximadamente $\text{Re} \sim 10^4$.
- ▶ Para escoamentos com simetria: $\text{Re} \sim 10^5, 10^6$.

109

- ▶ **Lei de Moore:** performance $\times 1.58$ por ano.
- ▶ Mudanças na arquitetura: performance $\times 1.82$ por ano.

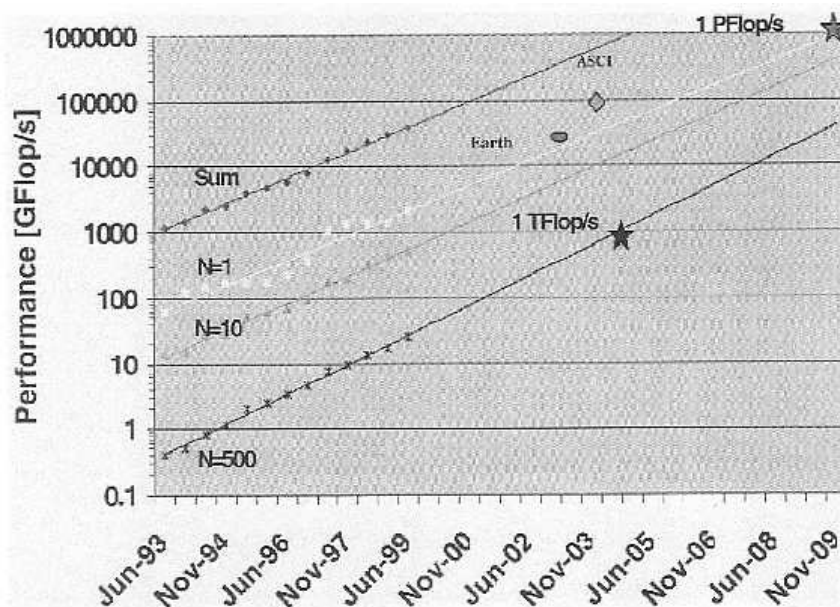
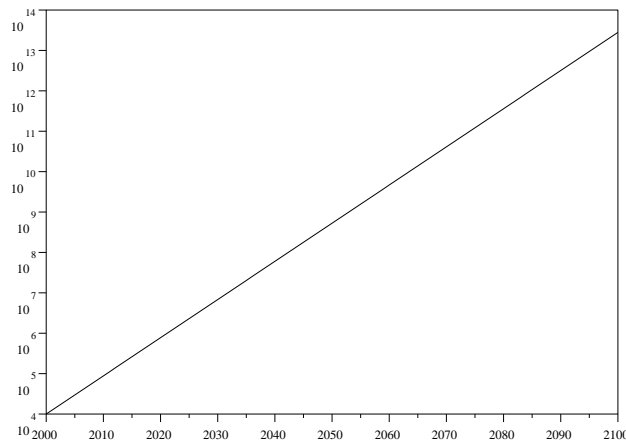


Figure 3. Extrapolation from recent performance growth rates seen in the Top500.

110

Previsão para DNS: $Re = 10^{13}$ em 2100?

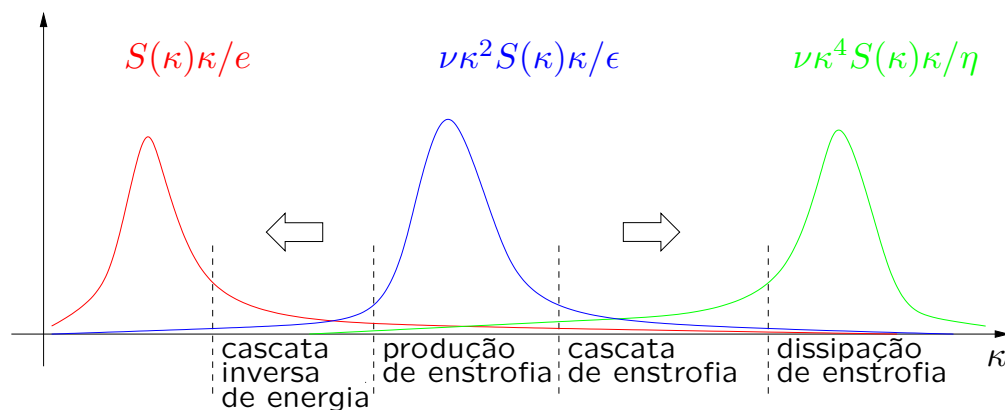
- ▶ Para simulação DNS homogênea: $P \sim Re^3$ flop/s.
- ▶ Como a “performance” $P \sim Re^{4/11}$ se multiplica por 1.82 por ano, temos Re se multiplica por $(1.82)^{4/11} \approx 1.243$.



111

Turbulência em duas dimensões

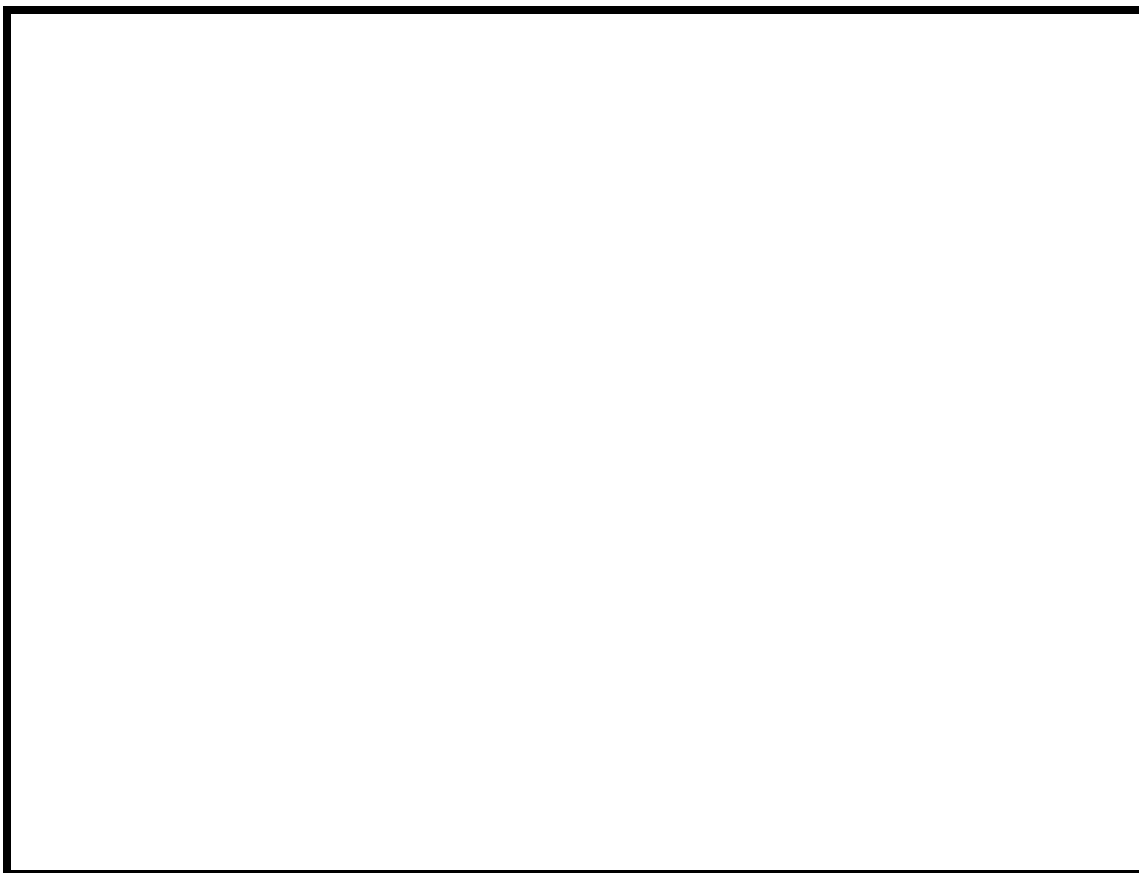
- ▶ Conservação de enstrofia: $\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\omega(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$
- ▶ Cascata de enstrofia para as escalas menores
- ▶ Cascata inversa de energia para as escalas maiores



112

O espectro de Kraichnan (1967)

- ▶ Injeção de enstrofia nas escalas $\kappa \sim \kappa_f$
- ▶ Razão de dissipação de enstrofia η
- ▶ Comprimento de Kraichnan $\kappa_\eta = (\eta/\nu^3)^{1/6}$
- ▶ Dissipação de enstrofia nas escalas $\kappa \gtrsim \kappa_\eta$
- ▶ Cascata de enstrofia em $\kappa_f \ll \kappa \ll \kappa_\eta$
- ▶ Espectro de Kraichnan $S(\kappa) \sim \eta^{2/3} \kappa^{-3}$ em $\kappa_f \ll \kappa \ll \kappa_\eta$
- ▶ Cascata inversa de energia em $\kappa_0 \ll \kappa \ll \kappa_f$
- ▶ Espectro de Kolmogorov $S(\kappa) \sim \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}$ em $\kappa_0 \ll \kappa \ll \kappa_f$



115



116

Resultados recentes sobre as equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis

Ricardo M. S. Rosa
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
(IM-UFRJ)

I EBED
Escola Brasileira de Equações Diferenciais
9 a 13 de junho de 2003
IMECC - Unicamp

Aula 4 - 12 de junho

117

Resultados recentes sobre as equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis

Tópicos:

1. As equações de Navier-Stokes, equações correlatas e algumas questões fundamentais
2. Aspectos matemáticos das equações de Navier-Stokes
3. Teoria estatística convencional de turbulência
4. **Soluções estatísticas das equações de Navier-Stokes**
5. Aplicações das soluções estatísticas em turbulência

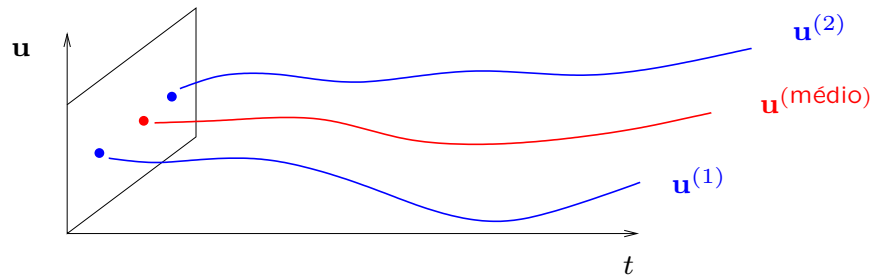
118

Formalização do conceito de média amostral

- ▶ As médias amostrais são definidas a partir de N escoamentos $\mathbf{u}^{(n)}(t, \mathbf{x})$, $n = 1, \dots, N$:

$$\langle \varphi(\mathbf{u}) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi(\mathbf{u}^{(n)})$$

- ▶ Em termos probabilísticos: N escoamentos considerados, cada um com peso $1/N$.



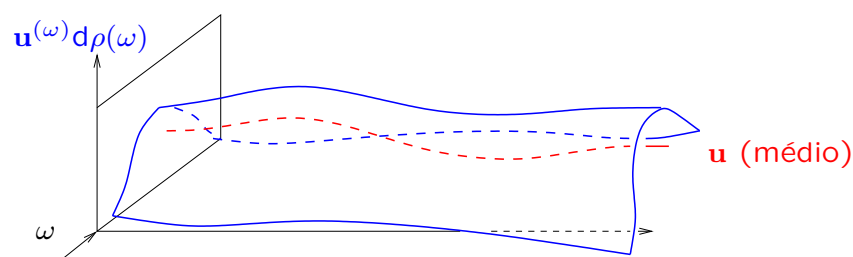
119

- ▶ Mais geralmente: podemos ter escoamentos com pesos diferentes θ_n , com $\sum_n \theta_n = 1$,

$$\langle \varphi(\mathbf{u}) \rangle = \sum_{n=1}^N \varphi(\mathbf{u}^{(n)}) \theta_n$$

- ▶ Ou uma infinidade de escoamentos $\mathbf{u}^{(\omega)}$, com densidade de probabilidade $d\rho(\omega)$,

$$\langle \varphi(\mathbf{u}) \rangle = \int \varphi(\mathbf{u}^{(\omega)}) d\rho(\omega)$$



120

- ▶ Podemos usar probabilidades $\rho = \rho(\omega)$ em um espaço de probabilidades $(\mathcal{P}, \Sigma, \rho)$ e considerar variáveis aleatórias $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\omega)$ para representar os possíveis escoamentos.
- ▶ Ou podemos usar medidas de probabilidade μ em algum espaço “natural” para escoamentos, e.g. H da teoria de Leray:

$$\langle \varphi(\mathbf{u}) \rangle = \int_H \varphi(\mathbf{v}) \, d\mu(\mathbf{v}).$$

Nesse caso, \mathbf{v} é uma variável de integração e, na verdade, $\langle \varphi(\mathbf{u}) \rangle = \langle \varphi \rangle$, com \mathbf{u} “virtual” (φ é função do escoamento, representado por \mathbf{u}).

- ▶ Em termos de espaço de probabilidade, temos $\mathcal{P} = H$, $\Sigma =$ borelianos de H e $\mu =$ medida de probabilidade de Borel em H .

121

Medidas relevantes

- ▶ As medidas μ podem depender do tempo ($\mu = \mu_t$, e.g. turbulência em decaimento), ou não (turbulência estatisticamente estacionária)
- ▶ As informações estatísticas do escoamento estão contidas em μ . Os *momentos generalizados*, são as expressões

$$\langle \varphi(\mathbf{u}) \rangle = \int_H \varphi(\mathbf{v}) \, d\mu(\mathbf{v})$$

de onde podemos tirar os momentos clássicos, para funções polinomiais apropriadas, e.g. $\varphi(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle)^k$.

- ▶ Quais são as medidas relevantes para um escoamento?
- ▶ Equação para μ ou μ_t ?

122

Evolução de medidas em sistemas dinâmicos

- Se $\mathbf{u}' = \mathbf{F}(\mathbf{u})$ gera sistema dinâmico $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, dada uma distribuição inicial μ_0 de condições iniciais, é natural que a evolução dessa distribuição seja dada por

$$\mu_t = S(t)\mu_0, \quad \text{i.e.} \quad \mu_t(\mathcal{E}) = \mu_0(S(t)^{-1}\mathcal{E}),$$

- Assim, para os momentos generalizados ($\mathbf{v} = S(t)\mathbf{w}$):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_H \varphi(\mathbf{v}) d\mu_t(\mathbf{v}) &= \frac{d}{dt} \int_H \varphi(S(t)\mathbf{w}) d\mu_0(\mathbf{w}) \\ &= \int_H \varphi'(S(t)\mathbf{w}) \circ \frac{d}{dt} S(t)\mathbf{w} d\mu_0(\mathbf{w}) \\ &= \int_H \langle \mathbf{F}(S(t)\mathbf{w}), \varphi'(S(t)\mathbf{w}) \rangle_{V',V} d\mu_0(\mathbf{w}) \\ &= \int_H \langle \mathbf{F}(\mathbf{v}), \varphi'(\mathbf{v}) \rangle_{V',V} d\mu_t(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

123

Outra dedução para a evolução dos momentos

- Se pensarmos na média amostral de N escoamentos com peso, os momentos generalizados $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \varphi(\mathbf{u}(t)) \rangle &= \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N \theta_n \varphi(\mathbf{u}^{(n)}(t)) = \sum_{n=1}^N \theta_n \frac{d}{dt} \varphi(\mathbf{u}^{(n)}(t)) \\ &= \sum_{n=1}^N \theta_n \varphi'(\mathbf{u}^{(n)}(t)) \circ \frac{d}{dt} \mathbf{u}^{(n)}(t) \\ &= \sum_{n=1}^N \theta_n \varphi'(\mathbf{u}^{(n)}(t)) \circ \mathbf{F}(\mathbf{u}^{(n)}(t)) \\ &= \sum_{n=1}^N \theta_n \langle \mathbf{F}(\mathbf{u}^{(n)}(t)), \varphi'(\mathbf{u}^{(n)}(t)) \rangle_{V',V}. \end{aligned}$$

124

- Em termos de medida de probabilidade em H , podemos escrever

$$\mu_t = \sum_{n=1}^N \theta_n \delta_{\mathbf{u}^{(n)}(t)},$$

onde $\delta_{\mathbf{u}}$ = medida de Dirac em \mathbf{u} . Dessa forma,

$$\langle \varphi(\mathbf{u}(t)) \rangle = \sum_{n=1}^N \theta_n \varphi(\mathbf{u}^{(n)}(t)) = \int_H \varphi(\mathbf{v}) \, d\mu_t(\mathbf{v})$$

- Assim, podemos reescrever a equação anterior:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N \theta_n \varphi(\mathbf{u}^{(n)}(t)) &= \sum_{n=1}^N \theta_n \left(\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(n)}(t)), \varphi'(\mathbf{u}^{(n)}(t)) \right) \\ \text{como } \frac{d}{dt} \int_H \varphi(\mathbf{v}) \, d\mu_t(\mathbf{v}) &= \int_H (\mathbf{F}(\mathbf{v}), \varphi'(\mathbf{v})) \, d\mu_t(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

125

- A formulação obtida elimina a dependência explícita na solução das ENS, introduzindo uma variável de integração \mathbf{v} e a incógnita μ_t :

$$\frac{d}{dt} \int_H \varphi(\mathbf{v}) \, d\mu_t(\mathbf{v}) = \int_H (\mathbf{F}(\mathbf{v}), \varphi'(\mathbf{v})) \, d\mu_t(\mathbf{v})$$

- Essa equação para μ_t é em termos dos momentos generalizados (a regra para medidas) e é linear(!) em μ_t
- Equação do tipo Liouville da mecânica estatística e pode ser chamada de *equação de Liouville-Foias-Prodi* ou *equação de Navier-Stokes estatística*
- O termo $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} - \nu A\mathbf{u} - B(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ “mora” no espaço dual V' , logo só os momentos com $\varphi'(\mathbf{v})$ em V podem ser considerados

126

Funções teste “cilíndricas”

- ▶ Na equação dos momentos generalizados,

$$\frac{d}{dt} \int_H \Phi(\mathbf{v}) d\mu_t(\mathbf{v}) = \int_H (\mathbf{F}(\mathbf{v}), \Phi'(\mathbf{v})) d\mu_t(\mathbf{v})$$

serão consideradas funções cilíndricas $\Phi : H \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$\Phi(\mathbf{u}) = \phi((\mathbf{u}, \mathbf{g}_1), \dots, (\mathbf{u}, \mathbf{g}_k)),$$

onde $k \in \mathbb{N}$, $\phi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^k)$, $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_k \in V$.

- ▶ A diferencial Φ' em H tem a forma

$$\Phi'(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^k \partial_j \phi((\mathbf{u}, \mathbf{g}_1), \dots, (\mathbf{u}, \mathbf{g}_k)) \mathbf{g}_j,$$

com $\Phi'(\mathbf{u}) \in V$, pois $\mathbf{g}_j \in V$.

127

Soluções estatísticas das ENS - Foias (1972)

Família $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ de medidas de probabilidade de Borel:

- ▶ $[0, \infty) \ni t \mapsto \int_H \varphi(\mathbf{v}) d\mu_t(\mathbf{v})$ contínuo, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_{\text{bdd}}(H_w)$
- ▶ $t \mapsto \int_H |\mathbf{v}|^2 d\mu_t(\mathbf{v})$ em $L^\infty(0, \infty)$ e contínuo em $t = 0$
- ▶ $t \mapsto \int_H \|\mathbf{v}\|^2 d\mu_t(\mathbf{v})$ em $L^1_{\text{loc}}(0, \infty)$
- ▶ Inequação de energia no sentido das distribuições em $(0, \infty)$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_H |\mathbf{v}|^2 d\mu_t(\mathbf{v}) + \nu \int_H \|\mathbf{v}\|^2 d\mu_t(\mathbf{v}) \leq \int_H (\mathbf{f}, \mathbf{v}) d\mu_t(\mathbf{v});$$

- ▶ Satisfaz as ENS estatísticas no sentido das distribuições em $(0, \infty)$, para toda função teste Φ .

128

Inequação de energia “em níveis” .

A inequação de energia anterior parece natural, mas uma outra inequação, mais precisa e útil, pode ser exigida:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_H \psi(|\mathbf{u}|^2) d\mu_t(\mathbf{u}) + \nu \int_H \psi'(|\mathbf{u}|^2) \|\mathbf{v}\|^2 d\mu_t(\mathbf{v}) \\ \leq \int_H \psi'(|\mathbf{u}|^2) (\mathbf{f}, \mathbf{v}) d\mu_t(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

para todo $\psi \in \mathcal{C}^1([0, \infty))$, $0 \leq \psi'(r) \leq c < \infty$.

Segue da inequação correspondente para sols. individuais:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \psi(|\mathbf{u}|^2) = \frac{1}{2} \psi'(|\mathbf{u}|^2) \frac{d}{dt} |\mathbf{u}|^2 \leq \psi'(|\mathbf{u}|^2) ((\mathbf{f}, \mathbf{u}) - \nu \|\mathbf{u}\|^2).$$

Soluções estatísticas sentido Vishik-Fursikov (1977)

- ▶ Seja $\mathcal{X}_T(R) = \mathcal{C}([0, T]; B_H(R)_w)$ (esp. métrico completo)
- ▶ Seja $\mathcal{U}_T(R) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{X}(R); \mathbf{u}(\cdot)$ solução fraca em $[0, T]\}$ (subconjunto compacto de $\mathcal{X}_T(R)$).
- ▶ Uma solução estatística de Vishik-Fursikov é uma medida de probabilidade μ em $\mathcal{U}_T(R)$.
- ▶ Pela continuidade das soluções em H_w , podemos aplicar Teorema da Representação de Kakutani-Riesz e obter solução estatística de Foias-Prodi:

$$\int_{\mathcal{U}(R)} \varphi(\mathbf{u}(t)) d\mu(\mathbf{u}) = \int_H \varphi(\mathbf{v}) d\mu_t(\mathbf{u}).$$

para todo $\varphi \in \mathcal{C}(H_w)$. ($\varphi(\mathbf{u}(t)) = \varphi \circ \delta_t(\mathbf{u})$.)

Existência de soluções estatísticas

Dada uma medida de Borel de probabilidade μ_0 em H , com energia cinética média finita $\int_H |\mathbf{v}|^2 d\mu_0(\mathbf{v}) < \infty$

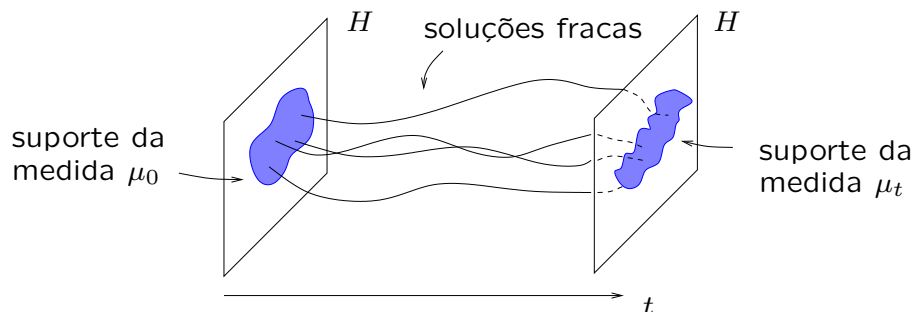
(μ_0 representando a distribuição de probabilidades do campo inicial de velocidades)

- **Foias (1972), Foias-Prodi (1976), Vishik-Fursikov (1977):** Existência via método de Galerkin, passando ao limite as medidas definidas por $\mu_t^{(n)}(E) = \mu_0(S^{(n)}(-t)E)$, para qualquer boreliano $E \subset H$, onde $\{S^{(n)}(t)\}_{t \geq 0}$ é o operador solução associado à aproximação de Galerkin
- **Foias, Manley, Rosa, Temam (2001):** Ou via Teorema de Krein-Milman...

131

Existência via Teorema de Krein-Milman

- Aproximar μ_0 por combinação convexa de pontos extremos, que são deltas de Dirac $\delta_{\mathbf{u}_0^{(n)}}$, $n = 1, \dots, N$.
- Considerar aproximações $\mu_t^{(N)}$ definidas como as combinações convexas das deltas de Dirac $\delta_{\mathbf{u}^{(n)}(t)}$, nas soluções fracas correspondentes das ENS, e passar ao limite quando $N \rightarrow \infty$



132

Aproximação da medida inicial via Krein-Milman

- ▶ (K-M): Sejam $K \subset X =$ espaço vetorial topológico localmente convexo. Seja $E =$ pontos extremos de K . Então os fechos convexos coincidem: $\overline{\text{co}}E = \overline{\text{co}}K$.
- ▶ Seja $\mathcal{M}_0(R_0) = \{\text{medidas de probabilidade em } B_H(R_0)\}$.
- ▶ $\mathcal{M}_0(R_0)$ limitado fechado convexo em lctvs $\mathcal{C}(B_H(R_0)_w)'$.
- ▶ Extremos de $\mathcal{M}_0(R_0)$ são deltas $\delta_{\mathbf{u}_0}$, com $\mathbf{u}_0 \in B_H(R_0)$.
- ▶ Dado μ_0 em $\mathcal{M}_0(R_0)$, existem $\mu_{0n} \in \mathcal{M}_0(R_0)$,

$$\mu_{0n} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{J(n)} \theta_j^{(n)} \delta_{\mathbf{u}_{0j}^{(n)}} \xrightarrow{*} \mu_0, \quad \text{em } \mathcal{M}_0(R_0),$$

com $J(n) \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u}_{0j}^{(n)} \in B_H(R_0)$, $\theta_j^{(n)} \in (0, 1]$, e $\sum_{j=1}^{J(n)} \theta_j^{(n)} = 1$.

133

Soluções estatísticas aproximadas

- ▶ Para cada condição inicial $\mathbf{u}_{0j}^{(n)}$, considere uma solução fraca $\mathbf{u}_j^{(n)} = \mathbf{u}_j^{(n)}(t)$ com $\mathbf{u}_j^{(n)}(0) = \mathbf{u}_{0j}^{(n)}$.
- ▶ Cada solução fraca $\mathbf{u}_j^{(n)}$ pertence a $\mathcal{U}_T(R_0)$ e define uma medida de probabilidade $\delta_{\mathbf{u}_j^{(n)}}$ em $\mathcal{M}_T(R_0)$.
- ▶ Como $\mathcal{M}_T(R_0)$ é convexo, temos que

$$\mu_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1 \dots J(n)} \theta_j^{(n)} \delta_{\mathbf{u}_j^{(n)}} \text{ pertence a } \mathcal{M}_T(R_0).$$

- ▶ Como $\mathcal{M}_T(R_0)$ é compacto (fraco-estrela), temos

$$\mu_{n'} \xrightarrow{*} \mu, \text{ com } \mu \in \mathcal{M}_T(R_0),$$

com $\mu =$ solução estatística de V-F e $\{\mu_t\}_t$ de F-P.

134

Observações

- ▶ Demonstração acima (e definição de Vishik-Fursikov) válida para medida inicial de suporte limitado em H . Caso geral tem que trabalhar mais um pouco.
- ▶ As soluções estatísticas acima são importantes para o tratamento de turbulência dependente do tempo, como turbulência em decaimento.
- ▶ Versão estacionária útil para turbulência em equilíbrio estatístico no tempo (estacionária).
- ▶ Para o tratamento de turbulência homogênea, pode-se usar o caso periódico.
- ▶ Para o tratamento de turbulência homogênea isotrópica é necessário considerar o caso ilimitado, i.e. $\Omega = \mathbb{R}^3$.

135

Soluções estatísticas homogêneas em \mathbb{R}^3

- ▶ Soluções estatísticas homogêneas tem energia infinita (caso contrário a energia decairia no infinito e a homogeneidade não seria válida).
- ▶ **Vishik-Fursikov (1978):** Considerar soluções individuais das ENS em \mathbb{R}^3 em espaços com peso e energia infinita. Dificuldade: perde ortogonalidade do termo bilinear.
- ▶ **Foias-Temam (1980):** Aproximar pelo caso periódico e passar ao limite nas soluções estatísticas com o período $L \rightarrow \infty$ (Passagem ao limite delicada, usando teorema de representação em $L^1(0, T; X)'$, teorema de compactificação de Čech-Stone, etc.)

136

Soluções estatísticas homogêneas em \mathbb{R}^3

- ▶ Energia e enstrofia médias são definidas localmente:

$$e(\mu) = \frac{1}{2} \int_H \frac{1}{|Q|} \int_Q |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \, d\mu(\mathbf{u}),$$

$$E(\mu) = \frac{1}{2} \int_H \frac{1}{|Q|} \int_Q |\nabla \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \, d\mu(\mathbf{u}),$$

independentes de Q pois μ é homogênea.

- ▶ Desigualdade de energia: $e(\mu_t) + \nu \int_0^t E(\mu_s) \, ds \leq e(\mu_0)$.
- ▶ Define-se soluções auto-semelhantes $\{\mu_t^{\nu, \epsilon}\}_t$ em ν, ϵ satisfazendo leis de potência. São caracterizadas por soluções estatísticas estacionárias de

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} - \frac{1}{2} \mathbf{v} - \frac{1}{2} (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} + \nabla q = 0$$

Existência de solução com ω -limite não trivial???

137

Solução estatística estacionária

Medida de probabilidade de Borel μ em H , satisfazendo

- ▶ Energia cinética média finita: $\int_H |\mathbf{v}|^2 \, d\mu(\mathbf{v}) < \infty$
- ▶ Enstrofia média finita: $\int_H \|\mathbf{v}\|^2 \, d\mu(\mathbf{v}) < \infty$
- ▶ Inequação de energia

$$\int_{\{e_1 \leq \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 < e_2\}} \{\nu \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{f}, \mathbf{v})\} \, d\mu(\mathbf{v}) \leq 0,$$

para todos os níveis de energia $0 \leq e_1 \leq e_2 \leq \infty$

- ▶ Equação de NS estatística estacionária:

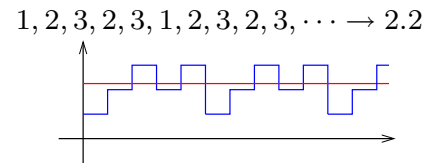
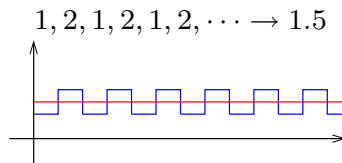
$$\int_H (\mathbf{F}(\mathbf{v}), \Phi'(\mathbf{v})) \, d\mu(\mathbf{v}) = 0,$$

para as funções teste.

138

Limite generalizado de Banach

- ▶ Para o tratamento das médias temporais e para evitar a hipótese ergódica, utilizamos o *limite generalizado de Banach*, que estende, via Teorema de Hahn-Banach, o conceito de limite para qualquer função limitada (é um funcional linear no espaço vet. das funções limitadas)
- ▶ Limite generalizado não satisfaz propriedade do limite de produto ser o produto dos limites e não é único
- ▶ Para funções periódicas, é a média dos valores assumidos, ponderada pelo número de vezes assumido



139

Soluções estatísticas estacionárias e médias temporais

- ▶ Seja $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t), t \geq 0$, solução fraca e seja $\varphi \in \mathcal{C}(H_w)$.

- ▶ Então $\varphi(\mathbf{u}(t))$ é limitado em $t \geq 0$, assim como

$$(0, \infty) \ni T \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\mathbf{u}(t)) dt.$$

- ▶ O limite generalizado existe e define funcional linear positivo em $\mathcal{C}(H_w)$, com H_w localmente compacto:

$$\varphi \mapsto \text{Lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\mathbf{u}(t)) dt.$$

- ▶ Teorema da Representação de Kakutani-Riesz: existe medida de Borel $\mu = \mu_{\mathbf{u}}$ em H_w tal que

$$\text{Lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\mathbf{u}(t)) dt = \int_H \varphi(\mathbf{v}) d\mu_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}).$$

140

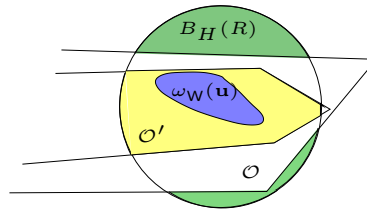
Suporte de solução estatística de média temporal

- ▶ Seja $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ solução fraca e SSS associada $\mu_{\mathbf{u}}$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\mathbf{u}(t)) dt = \int_H \varphi(\mathbf{v}) d\mu(\mathbf{v}).$$

- ▶ Seja $\omega_{\mathbf{W}}(\mathbf{u})$ conjunto limite (fraco) de \mathbf{u} em $H_{\mathbf{W}}$.
- ▶ Então $\text{supp}(\mu_{\mathbf{u}}) \subset \omega_{\mathbf{W}}(\mathbf{u})$. De fato...
- ▶ $\exists R > 0$, $\omega_{\mathbf{W}}(\mathbf{u}) \subset B_H(R)$ (limitado)
- ▶ $B_H(R)_{\mathbf{W}}$ Hausdorff compacto, então podemos separar o fracamente fechado $\omega_{\mathbf{W}}(\mathbf{u})$ do fracamente fechado $B_H(R)_{\mathbf{W}} \setminus \mathcal{O}$, onde \mathcal{O} é vizinhança fraca de $\omega_{\mathbf{W}}(\mathbf{u})$, com outro aberto fraco \mathcal{O}' entre eles.

141



- ▶ Lema de Urysohn $\Rightarrow \exists \varphi : B_H(R)_{\mathbf{W}} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuo, com $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi|_{\overline{\mathcal{O}'}} \subset B_H(R)_{\mathbf{W}} \equiv 1$ e $\varphi|_{B_H(R)_{\mathbf{W}} \setminus \mathcal{O}} \equiv 0$.
- ▶ Como $\omega_{\mathbf{W}}(\mathbf{u})$ atrai $\mathbf{u}(t)$ fracamente, temos $\mathbf{u}(t) \subset \mathcal{O}'$ para $t \geq T$ grande. Além disso, $\varphi \geq 0$ sempre, com $\varphi = 1$ em $\mathcal{O}' \subset B_H(R)_{\mathbf{W}}$, logo

$$\mu(\mathcal{O}) \geq \mu(\mathcal{O}') \geq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\mathbf{u}(t)) dt = \dots = 1.$$
- ▶ Como \mathcal{O} é aberto fraco arbitrário contendo $\omega_{\mathbf{W}}(\mathbf{u})$ e μ é regular, temos $\mu(\omega_{\mathbf{W}}(\mathbf{u})) = \inf\{\mu(\mathcal{O})\} = 1$, e como $\omega_{\mathbf{W}}(\mathbf{u})$ é fechado, temos $\text{supp}(\mu) \subset \omega_{\mathbf{W}}(\mathbf{u})$

142

Teoremas de topologia

- ▶ **Urysohn:** $A, B \subset X$ fechados disjuntos em $X = \text{esp. top. normal}$. Então, $\exists f : X \mapsto \mathbb{R}$ contínuo tq. $0 \leq f(x) \leq 1$, $f(A) = 0$, $f(B) = 1$.
- ▶ **Tietze:** $A \subset X$ fechado em $X = \text{esp. top. normal}$; $f : A \mapsto \mathbb{R}$ contínuo limitado. Então \exists extensão $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua limitada, $F(x) = f(x)$ em A , e $\sup_{x \in X} |F(x)| = \sup_{x \in A} |f(x)|$.
- ▶ **Čech-Stone:** $X = \text{esp. top. completamente regular}$ (pontos são fechados e $\forall A = \{x_0\}, B \subset X$ fechados disjuntos, $\exists \varphi$ como em Urysohn), então X é homeomorfo a subconjunto denso de um espaço de Hausdorff compacto \check{X} tq. \forall função contínua limitada em X possui extensão única para uma fç cont. em \check{X} .

143

Turbulência em equilíbrio estatístico

- ▶ Médias amostrais associadas a escoamentos turbulentos em equilíbrio estatístico (no tempo, i.e. estatisticamente estacionária) são interpretadas como médias em relação a soluções estatísticas estacionárias
- ▶ As soluções estatísticas estacionárias das ENS colocam as médias amostrais em um contexto rigoroso
- ▶ A partir desse conceito, são considerados rigorosamente os conceitos da teoria estatística convencional de turbulência.
- ▶ As soluções estatísticas estacionárias (em particular as obtidas via médias temporais) não são necessariamente únicas (as médias temporais podem depender da solução fraca - não há prova de ergodicidade).

144

Algumas questões em andamento

- ▶ Regularização assintótica: mais regularidade para as soluções estatísticas estacionárias?
- ▶ Limites de Euler e de alta rotação das sol. estatísticas.
- ▶ Medidas físicas (tipo SRB), entropia, etc.
- ▶ Teoria convencional de turbulência em vários contextos, ENS, ENS com rotação, Bénard, eqs. quasi-geostróficas, etc.
- ▶ Controle ótimo estatístico.
- ▶ Existência de soluções estatísticas homogêneas auto-semelhantes.

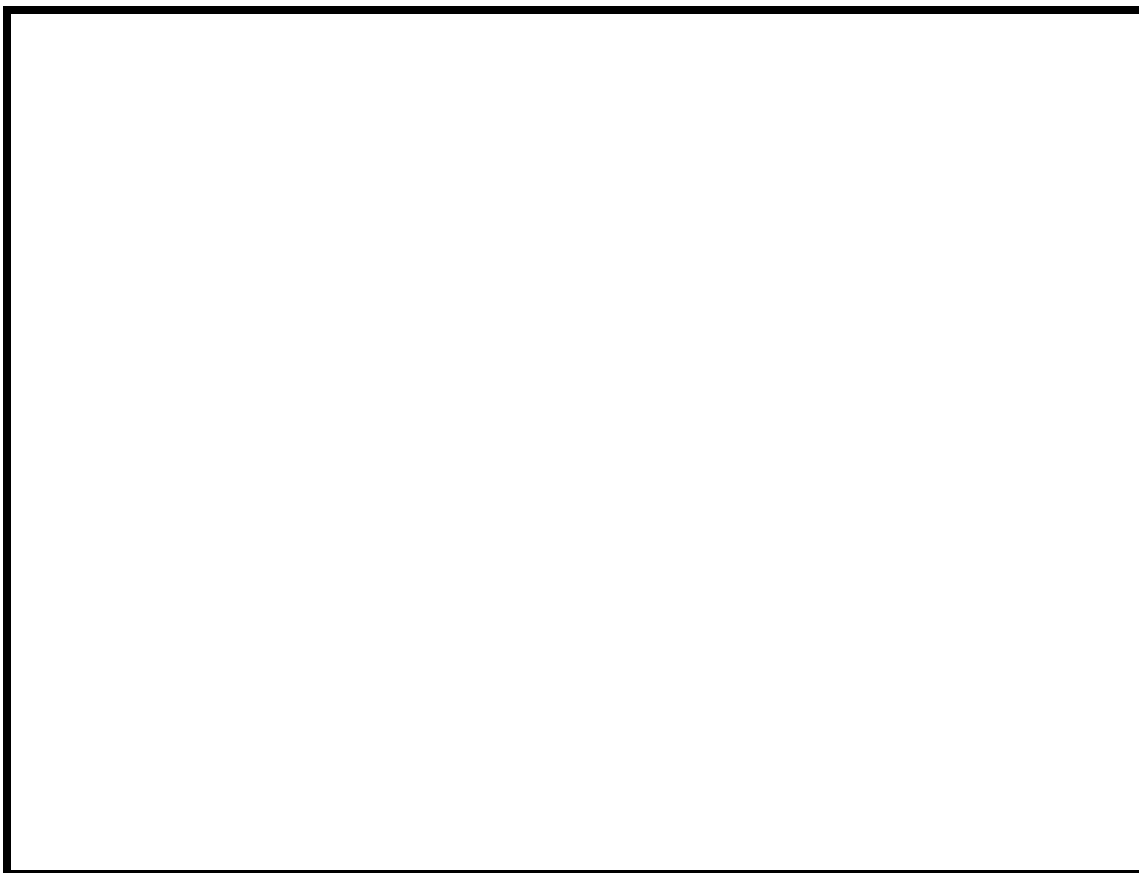
145

Por vir

Com o conceito de solução estatística, iremos definir e estudar rigorosamente quantidades e relações físicas relevantes em turbulência:

- ▶ Equações de Reynolds e de fluxo de energia.
- ▶ fluxo de energia entre escalas e cascata de energia.
- ▶ Lei de dissipação de energia.
- ▶ Relação entre números de onda de Kolmogorov, de Taylor e número de Reynolds.
- ▶ Similares em 2D, incluindo condições para a existência do espectro de Kraichnan em 2D.
- ▶ Sol. estatísticas auto-semelhantes e leis de potência.

146



147



148

Resultados recentes sobre as equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis

Ricardo M. S. Rosa
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
(IM-UFRJ)

I EBED
Escola Brasileira de Equações Diferenciais
9 a 13 de junho de 2003
IMECC - Unicamp

Aula 5 - 13 de junho

149

Resultados recentes sobre as equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis

Tópicos:

1. As equações de Navier-Stokes, equações correlatas e algumas questões fundamentais
2. Aspectos matemáticos das equações de Navier-Stokes
3. Teoria estatística convencional de turbulência
4. Soluções estatísticas das equações de Navier-Stokes
5. **Aplicações das soluções estatísticas em turbulência**

150

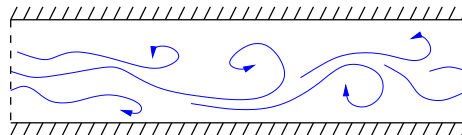
Aplicações em turbulência

- ▶ **Constantin, Foias, Manley (1994):** Condições para a existência do espectro de Kraichnan em turbulência forçada.
- ▶ **Bercovici, Constantin, Foias, Manley (1995):** Decaimento exponencial do espectro de potência.
- ▶ **Foias, Manley, Rosa, Temam (2001a,b,c), Rosa (2002):** Cascata de energia e confirmação parcial de estimativas heurísticas em 3D.
- ▶ **Foias, Jolly, Manley, Rosa (2002,2003):** Em 2D: cascata de enstrofia, confirmação parcial de estimativas heurísticas, condições para existência de espectro de Kraichnan, redução na dimensão do atrator para escoamentos turbulentos com espectro de Kraichnan.

151

Equações de Navier-Stokes

- ▶ Domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$, aberto, limitado
- ▶ Condições de aderência com fronteira rígida, periódicas, ou combinação delas, como em um canal periódico:



- ▶ Equações de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

- ▶ Formulação funcional, com $\mathbf{f} \in V'$:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nu A\mathbf{u} + B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}.$$

152

Solução estatística estacionária

Medida de probabilidade de Borel μ em H , satisfazendo

- ▶ Energia cinética média finita: $\int_H |\mathbf{v}|^2 d\mu(\mathbf{v}) < \infty$
- ▶ Enstrofia média finita: $\int_H \|\mathbf{v}\|^2 d\mu(\mathbf{v}) < \infty$
- ▶ Inequação de energia

$$\int_{\{e_1 \leq \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 < e_2\}} \{\nu \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{f}, \mathbf{v})\} d\mu(\mathbf{v}) \leq 0,$$

para todos os níveis de energia $0 \leq e_1 \leq e_2 \leq \infty$

- ▶ Equação de NS estatística estacionária:

$$\int_H (\mathbf{F}(\mathbf{v}), \Phi'(\mathbf{v})) d\mu(\mathbf{v}) = 0,$$

para as funções teste cilíndricas Φ .

153

Funções teste “cilíndricas”

- ▶ Na equação dos momentos generalizados,

$$\frac{d}{dt} \int_H \Phi(\mathbf{v}) d\mu_t(\mathbf{v}) = \int_H (\mathbf{F}(\mathbf{v}), \Phi'(\mathbf{v})) d\mu_t(\mathbf{v})$$

são consideradas funções cilíndricas $\Phi : H \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$\Phi(\mathbf{u}) = \phi((\mathbf{u}, \mathbf{g}_1), \dots, (\mathbf{u}, \mathbf{g}_k)),$$

onde $k \in \mathbb{N}$, $\phi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^k)$, $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_k \in V$.

- ▶ A diferencial Φ' em H tem a forma

$$\Phi'(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^k \partial_j \phi((\mathbf{u}, \mathbf{g}_1), \dots, (\mathbf{u}, \mathbf{g}_k)) \mathbf{g}_j,$$

com $\Phi'(\mathbf{u}) \in V$, pois $\mathbf{g}_j \in V$.

154

As equações médias de Reynolds - versão fraca

- ▶ As soluções estatísticas estacionárias satisfazem

$$\int_H \langle \mathbf{F}(\mathbf{v}), \Phi'(\mathbf{v}) \rangle_{V',V} d\mu(\mathbf{v}) \quad (\forall \Phi \text{ teste})$$

- ▶ Tomando $\Phi(\mathbf{u}) = \psi((\mathbf{u}, \mathbf{w}))$, onde $\mathbf{w} \in V$ e ψ é \mathcal{C}^1 e de suporte compacto, temos

$$\int_H \psi'((\mathbf{u}, \mathbf{w})) \langle \mathbf{f} - \nu A\mathbf{v} - B(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_{V',V} d\mu(\mathbf{v}) = 0.$$

- ▶ Fazendo, $\psi' \rightarrow 1$, obtemos

$$\langle \langle \mathbf{f} - \nu A\mathbf{v} - B(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_{V',V} \rangle = 0,$$

que é a versão fraca das equações médias de Reynolds.

O escoamento médio e outras quantidades médias

- ▶ Até agora, as médias que fazem sentido são as de momentos escalares $\varphi : H_W \rightarrow \mathbb{R}$, contínuos e limitados
- ▶ Pela regularidade de μ (suporte limitado em H e de enstrofia finita), as médias podem ser estendidas para

$$|\varphi(\mathbf{u})| \leq C(|\mathbf{u}|)(1 + \nu^{-2} \kappa_0^{-1} \|\mathbf{u}\|^2), \quad \forall \mathbf{u} \in V,$$

- ▶ Por dualidade, podemos definir as médias do campo de velocidades, $\langle \mathbf{u} \rangle$, do termo bilinear, $\langle B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \rangle$, etc.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} \rangle, \mathbf{w} &= \int_H (\mathbf{v}, \mathbf{w}) d\mu(\mathbf{v}), \\ \langle B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \rangle, \mathbf{w} &= \int_H (B(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \mathbf{w}) d\mu(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

As equações médias de Reynolds - versão funcional

- Da versão fraca, obtemos a versão funcional,

$$\begin{aligned} \langle \langle \mathbf{f} - \nu A\mathbf{v} - B(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_{V', V} \rangle &= 0, \\ \implies \nu A\langle \mathbf{u} \rangle + \langle B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \rangle &= \mathbf{f} \quad (\text{em } V') \end{aligned}$$

com $\langle \mathbf{u} \rangle \in V$, $\langle B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \rangle \in D(A^{-3/8})$, para $\mathbf{f} \in V'$.

- A versão clássica pode, então, ser recuperada:

$$-\nu \Delta \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \nabla P = \mathbf{f} - \nabla \cdot \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0.$$

onde $\mathbf{U} = \langle \mathbf{u} \rangle$ e $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{U}$.

- Equação de Hopf (para a função característica de μ - transformada de Fourier $\hat{\mu}$) segue, também, rigorosa.

Números característicos

- Comprimento macroscópico $\ell_0 > 0$ dado (tipicamente da ordem de $\lambda_1^{-1/2}$, com número de onda $\kappa_0 = 1/\ell_0$)
- ρ_0 = densidade de massa (uniforme) do fluido
- unidade de massa $\rho_0 \ell_0^3 = \rho_0 / \kappa_0^3$
- Energia cinética média por unidade de massa

$$e = \frac{\kappa_0^3}{2} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle$$

- Razão média de dissipação de energia por unidade de tempo, por unidade de massa

$$\epsilon = \nu \kappa_0^3 \langle \|\mathbf{u}\|^2 \rangle$$

Mais números característicos

- ▶ Velocidade média característica (r.m.s) $U = 2e^{1/2}$
- ▶ Número de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{\ell_0 U}{\nu} = \frac{\kappa_0^{1/2} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle^{1/2}}{\nu}$$

- ▶ Número de onda de Kolmogorov $\kappa_\epsilon = (\epsilon/\nu^3)^{1/4}$
- ▶ Número de onda de Taylor

$$\kappa_\tau = \left(\frac{\langle \|\mathbf{u}\|^2 \rangle}{\langle |\mathbf{u}|^2 \rangle} \right)^{1/2} = \left(\frac{\epsilon}{2\nu e} \right)^{1/2}$$

Não exatamente o número de Taylor original, $\kappa_T = 1/\ell_T$, mas assumindo homogeneidade e isotropia, $\kappa_\tau = \sqrt{15}\kappa_T$

159

Decomposição espectral do escoamento

- ▶ Para as equações de fluxo de energia, precisamos decompor o escoamento em diferentes escalas.
- ▶ Decomposição espectral em autofunções do operador de Stokes,

$$A\mathbf{w}_j = \lambda_j \mathbf{w}_j, \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \rightarrow \infty.$$

então

$$\mathbf{u} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \mathbf{w}_j.$$

160

Decomposição em número de onda

- ▶ Para cada autovalor λ , que tem dimensão $1/L^2$, onde $L = \text{comprimento}$, associamos número de onda $\kappa = \lambda^{1/2}$.
- ▶ Para cada número de onda κ , a componente \mathbf{u}_κ com esse número de onda é

$$\mathbf{u}_\kappa = \sum_{\lambda_j = \kappa^2} \alpha_j \mathbf{w}_j$$

- ▶ E o componente $\mathbf{u}_{\kappa', \kappa''}$ com os números de onda $(\kappa', \kappa'']$:

$$\mathbf{u}_{\kappa', \kappa''} = \sum_{\kappa' < \kappa \leq \kappa''} \mathbf{u}_\kappa$$

Equações de fluxo médio de energia

- ▶ Analogamente ao feito para a equação de Reynolds, de

$$\int_H \langle \mathbf{F}(\mathbf{u}), \Phi'(\mathbf{u}) \rangle_{V', V} d\mu(\mathbf{u})$$

fazendo $\Phi'(\mathbf{u}) \rightarrow \mathbf{u}_{\kappa, \kappa'}$,

$$\int_H \{ (\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\kappa', \kappa''}) - \nu \|\mathbf{u}_{\kappa', \kappa''}\|^2 - b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{\kappa', \kappa''}) \} d\mu(\mathbf{u}) = 0$$

- ▶ Logo, para todo $0 \leq \kappa' < \kappa'' < \infty$, e multiplicando por κ_0^3 para interpretação física:

$$\nu \kappa_0^3 \langle \|\mathbf{u}_{\kappa', \kappa''}\|^2 \rangle + \kappa_0^3 \langle b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{\kappa', \kappa''}) \rangle = \kappa_0^3 \langle (\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\kappa', \kappa''}) \rangle.$$

Equação de fluxo de energia nos modos $(\kappa', \kappa'']$, $\kappa'' < \infty$

Fluxo de energia cinética

- Escrevendo $\mathbf{u}_{\kappa',\kappa''} = \mathbf{u}_{\kappa',\infty} - \mathbf{u}_{\kappa'',\infty}$, temos

$$-b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{\kappa',\kappa''}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{\kappa',\infty}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{\kappa'',\infty})$$

- O termo $\epsilon_{\kappa}(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} -\kappa_0^3 b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{\kappa,\infty})$ representa o fluxo por unidade de tempo de quantidade de energia cinética por unidade de massa transferida, pelos efeitos de inércia (advecção), para os modos altos $\mathbf{u}_{\kappa,\infty}$.
- Interpretação pela equação determinística:

$$\frac{d}{dt} \overbrace{\frac{\kappa_0^3}{2} |\mathbf{u}_{\kappa',\kappa''}|^2}^{\text{energ. cinética}} = - \overbrace{\nu \kappa_0^3 \|\mathbf{u}_{\kappa',\kappa''}\|^2}^{\text{dissipação}} + \overbrace{\kappa_0^3 (\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\kappa',\kappa''})}^{\text{injeção}} + \overbrace{\epsilon_{\kappa'}(\mathbf{u}) - \epsilon_{\kappa''}(\mathbf{u})}^{\text{convecção}}.$$

163

Equações de fluxo médio de energia - modos finitos

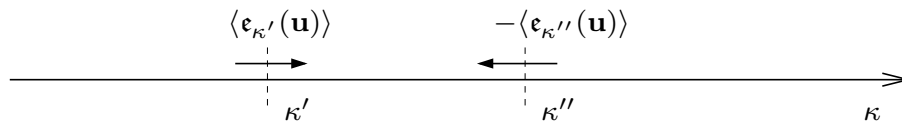
- Pela condição de ortogonalidade $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$, temos

$$\langle \epsilon_{\kappa}(\mathbf{u}) \rangle = -\kappa_0^3 b(\mathbf{u}_{0,\kappa}, \mathbf{u}_{0,\kappa}, \mathbf{u}_{\kappa,\infty}) + \kappa_0^3 b(\mathbf{u}_{\kappa,\infty}, \mathbf{u}_{\kappa,\infty}, \mathbf{u}_{0,\kappa}).$$

identificando a contribuição dos modos altos e baixos no fluxo.

- A equação de fluxo médio de energia toma a forma

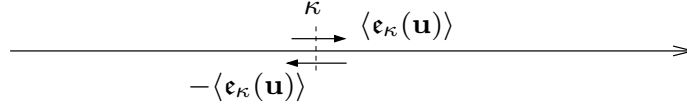
$$\nu \kappa_0^3 \langle \|\mathbf{u}_{\kappa',\kappa''}\|^2 \rangle = \kappa_0^3 \langle (\mathbf{f}_{\kappa',\kappa''}, \mathbf{u}_{\kappa',\kappa''}) \rangle + \langle \epsilon_{\kappa'}(\mathbf{u}) \rangle - \langle \epsilon_{\kappa''}(\mathbf{u}) \rangle.$$



164

- No caso $\kappa' = 0$ and $\kappa'' = \kappa$,

$$\nu\kappa_0^3\langle\|\mathbf{u}_{0,\kappa}\|^2\rangle = \kappa_0^3\langle(\mathbf{f}_{0,\kappa}, \mathbf{u}_{0,\kappa})\rangle - \langle\mathbf{e}_\kappa(\mathbf{u})\rangle$$



- Subtraindo da desigualdade de energia total,

$$\nu\kappa_0^3\langle\|\mathbf{u}\|^2\rangle \leq \kappa_0^3\langle(\mathbf{f}, \mathbf{u})\rangle, \quad \text{obtemos}$$

$$\nu\kappa_0^3\langle\|\mathbf{u}_{\kappa,\infty}\|^2\rangle \leq \kappa_0^3\langle(\mathbf{f}_{\kappa,\infty}, \mathbf{u}_{\kappa,\infty})\rangle + \langle\mathbf{e}_\kappa(\mathbf{u})\rangle.$$

que estende eq. para $\kappa'' = \infty$, mas com desigualdade (possível “vazamento” de energia cinética para $\kappa'' = \infty$ devido à potencial falta de regularidade da solução estatística, similar a potencial perda de regularidade das soluções fracas)

Fluxo de energia restrito

- Os seguintes limites existem (MCT e LDCT)

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \langle\|\mathbf{u}_{0,\kappa}\|^2\rangle = \langle\|\mathbf{u}\|^2\rangle, \quad \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \langle(\mathbf{f}_{0,\kappa}, \mathbf{u}_{0,\kappa})\rangle = \langle(\mathbf{f}, \mathbf{u})\rangle.$$

- Defina

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{e}(\mathbf{u})\rangle_\infty &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \langle\mathbf{e}_\kappa(\mathbf{u})\rangle \\ &= \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \{ \kappa_0^3\langle(\mathbf{f}_{0,\kappa}, \mathbf{u}_{0,\kappa})\rangle - \nu\kappa_0^3\langle\|\mathbf{u}_{0,\kappa}\|^2\rangle \} \\ &= \kappa_0^3\langle(\mathbf{f}, \mathbf{u})\rangle - \nu\kappa_0^3\langle\|\mathbf{u}\|^2\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

- E defina o fluxo de energia restrito:

$$\mathbf{e}_\kappa^*(\mathbf{u}) = \mathbf{e}_\kappa(\mathbf{u}) - \langle\mathbf{e}(\mathbf{u})\rangle_\infty.$$

Equação de fluxo de energia “com modos altos”

- ▶ Da equação do fluxo de energia para $\kappa'' < \infty$,

$$\nu \kappa_0^3 \langle \|\mathbf{u}_{\kappa', \kappa''}\|^2 \rangle = \kappa_0^3 \langle (\mathbf{f}_{\kappa', \kappa''}, \mathbf{u}_{\kappa', \kappa''}) \rangle + \langle \mathbf{e}_{\kappa'}(\mathbf{u}) \rangle - \langle \mathbf{e}_{\kappa''}(\mathbf{u}) \rangle$$

- ▶ Tomando $\kappa' = \kappa$ e fazendo $\kappa'' \rightarrow \infty$:

$$\nu \kappa_0^3 \langle \|\mathbf{u}_{\kappa, \infty}\|^2 \rangle = \kappa_0^3 \langle (\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\kappa, \infty}) \rangle + \langle \mathbf{e}_{\kappa}^*(\mathbf{u}) \rangle.$$

Sem “vazamento” de energia para infinito.

- ▶ Para soluções estatísticas regulares (e.g. suporte limitado em V , como as provenientes de limites generalizados de médias temporais de soluções regulares globais), $\langle \mathbf{e}(\mathbf{u}) \rangle_{\infty} = 0$ e $\langle \mathbf{e}_{\kappa}^*(\mathbf{u}) \rangle = \langle \mathbf{e}_{\kappa}(\mathbf{u}) \rangle$.

167

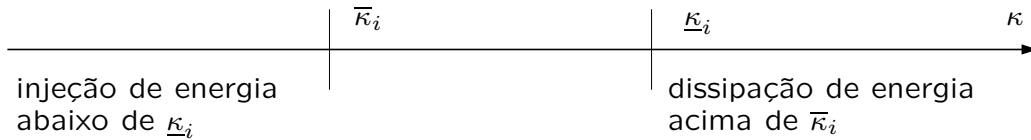
Cascata de energia

- ▶ Como

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \kappa_0^3 \langle (\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\kappa, \infty}) \rangle = 0, \quad \lim_{\kappa \rightarrow 0} \nu \kappa_0^3 \langle \|\mathbf{u}_{\kappa, \infty}\|^2 \rangle = \nu \kappa_0^3 \langle \|\mathbf{u}\|^2 \rangle = \epsilon,$$

podemos definir números de onda $\underline{\kappa}_i$ e $\overline{\kappa}_i$ como o menor e, respectivamente, o maior, tais que

$$|\kappa_0^3 \langle (\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\kappa, \infty}) \rangle| \ll \epsilon, \quad \forall \kappa \geq \underline{\kappa}_i, \quad \text{e} \quad \nu \kappa_0^3 \langle \|\mathbf{u}_{\overline{\kappa}_i, \infty}\|^2 \rangle \approx \epsilon,$$



- ▶ Em geral nada garante que $\underline{\kappa}_i < \overline{\kappa}_i$, mas esta é a hipótese fundamental na Teoria de Kolmogorov.

168

Quantificando ≪

- Podemos quantificar as relações anteriores com a ajuda de um parâmetro adimensional δ representando a ordem de precisão nas relações (e.g. 0.01, 10^{-10} , ...).

- Assim, $\bar{\kappa}_i$ é o maior número de onda tal que

$$\nu \kappa_0^3 \langle \|\mathbf{u}_{\bar{\kappa}_i, \infty}\|^2 \rangle \geq (1 - \delta)\epsilon,$$

- E $\underline{\kappa}_i$ é o menor número de onda tal que

$$|\kappa_0^3 \langle (\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\kappa, \infty}) \rangle| \leq \delta \epsilon, \quad \forall \kappa \geq \underline{\kappa}_i.$$

Cascata de energia

- Uma base para a teoria de Kolmogorov é a separação entre as escalas de injeção e de dissipação de energia

- Se $\underline{\kappa}_i < \bar{\kappa}_i$, então para $\underline{\kappa}_i \leq \kappa \leq \bar{\kappa}_i$, segue de

$$\nu \kappa_0^3 \langle \|\mathbf{u}_{\kappa, \infty}\|^2 \rangle = \kappa_0^3 \langle (\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\kappa, \infty}) \rangle + \langle \mathbf{e}_{\kappa}^*(\mathbf{u}) \rangle,$$

$$\text{que } \langle \mathbf{e}_{\kappa}^*(\mathbf{u}) \rangle = \nu \kappa_0^3 \langle \|\mathbf{u}_{\kappa, \infty}\|^2 \rangle - \kappa_0^3 \langle (\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\kappa, \infty}) \rangle \begin{cases} \geq (1 - 2\delta)\epsilon, \\ \leq (1 + \delta)\epsilon. \end{cases}$$

- Logo, $-\delta \leq 1 - \frac{\langle \mathbf{e}_{\kappa}^*(\mathbf{u}) \rangle}{\epsilon} \leq 2\delta$. ou seja, no intervalo $[\underline{\kappa}_i, \bar{\kappa}_i]$,

$$\langle \mathbf{e}_{\kappa}^*(\mathbf{u}) \rangle \approx \epsilon \quad (\text{cascata de energia}).$$

- Quanto maior $[\underline{\kappa}_i, \bar{\kappa}_i]$, mais significativa a cascata

Condições suficientes para existência da cascata

- Para qualquer número de onda $\kappa > 0$,

$$\nu \kappa_0^3 \langle \|\mathbf{u}_{0,\kappa}\|^2 \rangle \leq \nu \kappa_0^3 \kappa^2 \langle |\mathbf{u}_{0,\kappa}|^2 \rangle \leq \nu \kappa_0^3 \kappa^2 \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle \leq \left(\frac{\kappa}{\kappa_\tau} \right)^2 \epsilon.$$

Se $\kappa^2 \ll \kappa_\tau^2$, então $\nu \kappa_0^3 \langle \|\mathbf{u}_{0,\kappa}\|^2 \rangle \ll \epsilon$, logo, $\bar{\kappa}_i \geq \delta^{1/2} \kappa_\tau$.

- Se $\kappa_\tau^2 \gg \underline{\kappa}_i^2$, então $\bar{\kappa}_i \geq \underline{\kappa}_i$, com um pequeno intervalo de cascata
- Se $\kappa_\tau \gg \underline{\kappa}_i$, então $\delta \geq \underline{\kappa}_i / \kappa_\tau$, e $\bar{\kappa}_i \geq \underline{\kappa}_i^{1/2} \kappa_\tau^{1/2}$, e uma cascata existe com $\bar{\kappa}_i^2 \gg \underline{\kappa}_i^2$.
- Se $\kappa_\tau^{2/3} \gg \underline{\kappa}_i^{2/3}$, então $\delta \geq \underline{\kappa}_i^{2/3} / \kappa_\tau^{2/3}$, logo $\bar{\kappa}_i \geq \underline{\kappa}_i^{1/3} \kappa_\tau^{2/3}$, e uma ampla cascata de energia existe, com $\bar{\kappa}_i \gg \underline{\kappa}_i$.

Confirmação parcial de estimativas heurísticas

- Para \mathbf{f} em V , considere o número de onda característico

$$\kappa_f = (|A^{1/2} \mathbf{f}| / |A^{-1/2} \mathbf{f}|)^{1/2}$$

- Para $\kappa_f \leq C \kappa_0$, e para Reynolds suficientemente grande,

$$\epsilon \leq c \kappa_0 U^3, \quad \kappa_\epsilon \leq c \kappa_0 \text{Re}^{3/4}, \quad \kappa_\tau \leq c \kappa_0^{1/3} \kappa_\epsilon^{2/3}, \quad \kappa_\tau \leq c \kappa_0 \text{Re}^{1/2},$$

confirmando parcialmente (e com quantidades definidas de maneira precisa) as estimativas heurísticas da teoria de Kolmogorov:

$$\epsilon \sim \kappa_0 U^3, \quad \frac{\kappa_\epsilon}{\kappa_0} \sim \text{Re}^{3/4}, \quad \kappa_\tau \sim \kappa_0^{1/3} \kappa_\epsilon^{2/3}, \quad \frac{\kappa_\tau}{\kappa_0} \sim \text{Re}^{1/2}.$$

Equação de Reynolds com \mathbf{f} em V

- Se $\mathbf{f} \in V$, então

$$-\nu A\langle \mathbf{u} \rangle + \langle B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \rangle = \mathbf{f}$$

vale em $D(A^{-1/3})$.

- Multiplicando por $A^{-1}\mathbf{f}$,

$$\begin{aligned} |A^{-1/2}\mathbf{f}|^2 &= \nu(\langle \mathbf{u} \rangle, \mathbf{f}) + (\langle B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \rangle, A^{-1}\mathbf{f}) \\ &\leq \nu|\langle \mathbf{u} \rangle||\mathbf{f}| - \langle b(\mathbf{u}, A^{-1}\mathbf{f}, \mathbf{u}) \rangle \\ &\leq \nu\kappa_f \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle^{1/2} |A^{-1/2}\mathbf{f}| + c\kappa_f^{3/2} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle |A^{-1/2}\mathbf{f}|, \end{aligned}$$

onde $\kappa_f \stackrel{\text{def}}{=} (|A^{1/2}\mathbf{f}|/|A^{-1/2}\mathbf{f}|)^{1/2}$.

- Então $|A^{-1/2}\mathbf{f}| \leq \nu\kappa_f \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle^{1/2} + c\kappa_f^{3/2} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle$.

Lei de dissipação de energia

- Temos a lei para a razão de dissipação de energia

$$\begin{aligned} \epsilon &= \nu\kappa_0^3 \langle \|\mathbf{u}\|^2 \rangle = \kappa_0^3 \langle (\mathbf{f}, \mathbf{u}) \rangle \leq \kappa_0^3 |\mathbf{f}| |\langle \mathbf{u} \rangle| \\ &\leq \kappa_0^3 \kappa_f |A^{-1/2}\mathbf{f}| \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle^{1/2} \\ &\leq \nu\kappa_0^3 \kappa_f^2 \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle + c\kappa_0^3 \kappa_f^{5/2} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle^{3/2} \\ &\leq C(\text{Re}, \kappa_0/\kappa_f) \left(\frac{\kappa_f}{\kappa_0} \right)^{5/2} \kappa_0 U^3, \end{aligned}$$

onde $C(\text{Re}, \kappa_0/\kappa_f) = c + \text{Re}^{-1}(\kappa_0/\kappa_f)^{1/2}$

- Segue, também, para o número de Kolmogorov,

$$\kappa_\epsilon = \left(\frac{\epsilon}{\nu^3} \right)^{1/4} \leq C(\text{Re}, \kappa_0/\kappa_f)^{1/4} \left(\frac{\kappa_f}{\kappa_0} \right)^{5/8} \kappa_0 \text{Re}^{3/4}.$$

- ▶ Em 3D, transferência inversa de energia das escalas de injeção para as escalas maiores também pode ser provada
- ▶ Em 2D, condições similares para a existência de cascata direta de enstrofia e de cascata inversa de energia
- ▶ Em 2D, o número de onda que faz o papel do de Taylor é

$$\kappa_\sigma = \left(\frac{\langle |A\mathbf{u}|^2 \rangle}{\langle \|\mathbf{u}\|^2 \rangle} \right)^{1/2} = \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2}$$

- ▶ Equação de fluxo de enstrofia em 2D:

$$\nu \langle |A\mathbf{u}_{\kappa', \kappa''}|^2 \rangle = \langle (\mathbf{f}_{\kappa', \kappa''}, A\mathbf{u}_{\kappa', \kappa''}) \rangle + \langle \mathfrak{E}_{\kappa'}(\mathbf{u}) \rangle - \langle \mathfrak{E}_{\kappa''}(\mathbf{u}) \rangle,$$

para $\kappa_0 \leq \kappa' < \kappa'' \leq \infty$,

Transferência de enstrofia × transferência de energia

- ▶ Em 2D, pode-se mostrar que a transferência de energia para os modos mais altos é muito mais “fraca” que a de enstrofia, justificando a existência da cascata de enstrofia ao invés da de energia
- ▶ De fato, temos

$$\frac{\kappa_\tau^2}{\kappa_\sigma^2} = \frac{\langle \|\mathbf{u}\|^2 \rangle^2}{\langle |\mathbf{u}|^2 \rangle \langle |A\mathbf{u}|^2 \rangle} \leq \frac{\langle |\mathbf{u}| |A\mathbf{u}| \rangle^2}{\langle |\mathbf{u}|^2 \rangle \langle |A\mathbf{u}|^2 \rangle} \leq 1.$$

e para $\bar{\kappa}_f \leq \kappa \ll \kappa_\sigma$,

$$\frac{1 - \frac{\kappa_0^2 \langle \mathfrak{E}_\kappa(\mathbf{u}) \rangle}{\eta}}{1 - \frac{\kappa_0^2 \langle \mathfrak{E}_\kappa(\mathbf{u}) \rangle}{\epsilon}} = \frac{\epsilon \eta - \kappa_0^2 \langle \mathfrak{E}_\kappa(\mathbf{u}) \rangle}{\eta \epsilon - \kappa_0^2 \langle \mathfrak{E}_\kappa(\mathbf{u}) \rangle} = \frac{1}{\kappa_\sigma^2} \frac{\langle |A\mathbf{u}_{\kappa_0, \kappa}|^2 \rangle}{\langle \|\mathbf{u}_{\kappa_0, \kappa}\|^2 \rangle} \leq \frac{\kappa^2}{\kappa_\sigma^2} \ll 1.$$

onde $\bar{\kappa}_f$ é o maior número de onda em f.

Condições para a cascata de enstrofia

- Em 2D, vale

$$\kappa_{\sigma}^2 = \frac{r_+ \kappa_+^2 - r_- \kappa_-^2}{r_+ - r_-},$$

$$r_+ = \kappa_0^2 \sum_{\kappa > 0} \langle (\mathbf{f}_{\kappa}, \mathbf{u}_{\kappa}) \rangle^+, \quad r_- = \kappa_0^2 \sum_{\kappa > 0} \langle (\mathbf{f}_{\kappa}, \mathbf{u}_{\kappa}) \rangle^-,$$

$$\kappa_+^2 = \frac{\kappa_0^2 \sum_{\kappa > 0} \kappa^2 \langle (\mathbf{f}_{\kappa}, \mathbf{u}_{\kappa}) \rangle^+}{r_+}, \quad \kappa_-^2 = \frac{\kappa_0^2 \sum_{\kappa > 0} \kappa^2 \langle (\mathbf{f}_{\kappa}, \mathbf{u}_{\kappa}) \rangle^-}{r_-},$$

- Se $r_- = 0$, é possível mostrar que $\kappa_{\sigma}^2 \lesssim \underline{\kappa}_i^2$,
comprometendo a cascata de enstrofia