Cálculo Infinitesimal II - Prova 2 - 2016. Prof. Flávio Dickstein.

1^a **Questão** - Sejam $f(x,y) = e^{xy}\cos(x+y)$, $g(t) = (t+t^2, t-t^2)$ e $h(t) = f(g(t))$. Calcule $h'(1)$

(i) construindo explicitamente h e derivando a função;

(ii) usando a Regra da Cadeia, sem construir h.

Resolução:

(i) $h(t) = f(g(t)) = e^{(t+t^2)(t-t^2)}\cos(t+t^2+t-t^2) = e^{t^2-t^4}\cos 2t$. Derivando, temos $h'(t) = e^{t^2-t^4}(2t-4t^3)\cos 2t - e^{t^2-t^4}\text{sen } 2t$. Assim, $h'(1) = -2\cos 2 - 2\text{sen } 2$.

(ii) Seja $g(t) = (x(t), y(t)) = (t+t^2, t-t^2)$. Pela Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t)).g'(t) = \frac{\partial}{\partial x}f(g(t))x'(t) + \frac{\partial}{\partial y}f(g(t))y'(t).$$

No nosso caso, $x'(t) = 1+2t$, $y'(t) = 1-2t$, de modo que $g(1) = (2,0)$, $x'(1) = 3$ e $y'(1) = -1$. Além disso,

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = e^{xy}(y\cos(x+y) - \text{sen }(x+y)),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = e^{xy}(x\cos(x+y) - \text{sen }(x+y)).$$

Então,

$$h'(1) = \frac{\partial}{\partial x}f((2,0))x'(1) + \frac{\partial}{\partial y}f((2,0))y'(1) =$$
$$-3\text{sen } 2 - (2\cos 2 - \text{sen } 2) = -2\cos 2 - 2\text{sen } 2.$$

2^a **Questão** - Determine todos os planos tangentes à superfície $z = x^3 + 3xy^2$ que sejam paralelos ao plano $z - 3x = 2$.

Resolução:

O plano $z - 3x = 2$ tem como normal $N_1 = (-3,0,1)$. A superfície $z = x^3 + 3xy^2$ tem como normal $N_2 = (3x^2+3y^2, 6xy, -1)$. Para que as normais sejam paralelas, é preciso que $N_1 = -N_2$. Logo, $x^2 + y^2 = 1$ e $xy = 0$. Portanto, ou $x = 0$ ou $y = 0$. Mas, $x = 0 \Longrightarrow y = \pm 1$ e $y = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$. Calculando os z's correspondentes, obtemos 4 pontos: (0,1,0), (0,-1,0), (1,0,1) e (-1,0,-1). Os planos são, respectivamente, $z - 3x = 0$, $z - 3x = 0$, $z - 3x = -2$ e $z - 3x = 2$. (Tem um plano que tangencia a superfície em dois pontos.)

3^a **Questão -** Seja $f(x,y) = e^{xy}(x^2+y^2)$.

(i) Mostre que $(1,-1)$ e $(-1,1)$ são os únicos pontos críticos de f.

(ii) Determine se estes pontos críticos são máximos, mínimos ou pontos de sela.

Resolução:

(i) Se (x,y) é ponto crítico, então

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = e^{xy}(y(x^2+y^2)+2x) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = e^{xy}(x(x^2+y^2)+2y) = 0.$$

Somando as duas, obtemos $(x+y)(x^2+y^2)+2(x+y)=0$, ou seja, $(x+y)(x^2+y^2+2)=0$. Portanto, $x=-y$. Substituindo isto na primeira equação, vemos que $2y^3-2y=0 \Longrightarrow y(y^2-1)=0$. Logo, ou $y=0$, ou $y=1$ ou $y=-1$. Os pontos críticos são (0,0), (1,-1) e (-1,1).

(ii) Calculemos a segunda derivada:

$$\frac{\partial^2}{\partial_{xx}} f(x,y) = e^{xy}(y^2(x^2+y^2)+2xy+2xy^2+2),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial_{yy}} f(x,y) = e^{xy}(x^2(x^2+y^2)+2xy+2yx^2+2),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial_{xy}} f(x,y) = e^{xy}(xy(x^2+y^2)+2x^2+x^2+3y^2) = e^{xy}(x^2+y^2)(xy+3).$$

No ponto (0,0),

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como det H>0 e $2>0$, trata-se de um ponto de mínimo.

Em (1,-1) e em (-1,1),

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 4e^{-1} \\ 4e^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Como det H<0, trata-se de ponto sela.