Lista 3 - Cálculo Infinitesimal II

Semestre 2016/2 - Prof. Ricardo M. S. Rosa

5 de dezembro de 2016

Obs: Sejam claros nas suas repostas e façam as devidas justificativas. Boa sorte!

1ª Questão: Considere o conjunto em $\mathbb{R}^2$ definido implicitamente pela equação $x^4 - 3x^2y^2 + y^6 = 0$. Ache o par de pontos desse conjunto cuja coordenada y é a maior possível.

2ª Questão: (Teorema espectral via multiplicadores de Lagrange) Seja $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma matriz simétrica em $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Assume que, para cada $j = 1, \ldots, n$, existem $\lambda_j \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^n$ tais que λ_j é o valor mínimo

$$\lambda_j = \min_{\|\mathbf{x}\|^2=1,\ \mathbf{x}\perp\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{j-1}} A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$$

e $\mathbf{x}_j$ é um ponto de mínimo correspondente (a existência desses mínimos, que não são únicos, segue do fato das funções consideradas serem contínuas e das regiões onde os mínimos estão sendo procurados serem exemplos do que chamamos de conjuntos compactos, visto que qualquer função contínua definida em um compacto possui pelo menos um máximo e um mínimo globais). Mostre que os λ_j são autovalores de A e os $\mathbf{x}_j$ são autovetores correspondentes, de tal forma que $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^n$ forma uma base ortonormal de autovetores de A, diagonalizando A.

3ª Questão: Ache $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que a função $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (x^3 - \alpha xy^2, \alpha x^2y - y^3)$ é conforme na região $(x, y) \neq (0, 0)$.

4ª Questão: Se $\mathbf{G} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{F} : \Omega' \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ são transformações conformes, com $\mathbf{G}(\Omega) \subset \Omega'$, é verdade que a transformação composta $\mathbf{H} = \mathbf{F} \circ \mathbf{G} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é conforme? Mostre ou dê um contra-exemplo.

5ª Questão: Seja S' a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$ menos o "polo norte", ou seja $S = \{(x, y, z);\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \neq 1\}$. Considere a projeção estereográfica $P : S' \to \mathbb{R}^2$ que leva um ponto (x, y, z) de S' no ponto (ξ, η) tal que $(\xi, \eta, 0)$ é a interseção do plano $z = 0$ com a reta que passa por (x, y, z) e o "polo norte" $(0, 0, 1)$.

(1) Mostre que P é dado por

$$P(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right), \quad (x, y, z) \in S'.$$

(2) Em cada ponto (x, y, z), considere o operador $DP(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$DP(x, y, z) = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_z & \eta_z \end{bmatrix},$$

onde $\xi = x/(1-z)$ e $\eta = y/(1-z)$. (O operador DP é a diferencial de P quando DP está restrito ao plano tangente a S' em (x, y, z) ou quando P é visto como operador definido em todo o conjunto $z \neq 1$.) Dados $(x, y, z) \in S'$

e um vetor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ tangente a S' em (x, y, z), mostre que

$$\|DP(x, y, z)\mathbf{u}\| = \frac{1}{1 - z}\|\mathbf{u}\|.$$

(3) Dados $(x, y, z) \in S'$ e dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tangentes a S' em (x, y, z), mostre que

$$DP(x, y, z)\mathbf{u} \cdot DP(x, y, z)\mathbf{v} = \frac{1}{(1 - z)^2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

(4) Deduza que a projeção estereográfica P é conforme, i.e. leva duas curvas em S' que se interceptam em um ponto em outras duas curvas em $\mathbb{R}^2$, preservando o ângulo entre elas no ponto de interseção.

6ª Questão: Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Se $z_0 \in \Omega$ é tal que $f'(z_0) \neq 0$, mostre que a função $g(z) = f(\bar{z})$ não é derivável em z_0.

7ª Questão: Escreva a expansão em série de Taylor da função $f(z) = e^{z^2}$ em torno da origem. Qual o raio de convergência dessa série?

8ª Questão: Dado um número complexo $z = re^{i\theta}$, $r \neq 0$, mostre que

$$\ln z = \ln r + i(\theta + 2n\pi) = \ln |z| + i \arg(z), \quad n \in \mathbb{Z},$$

onde $\arg(z) = \theta + 2n\pi$. O logaritmo complexo e a função argumento são funções multivaloradas. o valor principal do argumento, $\mathrm{Arg}(z) = \theta$, $-\pi < \theta \leq \pi$, nos leva ao valor principal do logaritmo complexo, $\mathrm{Ln}\, z = \ln |z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$. Mostre que o valor principal do logaritmo é uma função holomorfa no domínio aberto

$$\Omega = \{re^{i\theta},\ r > 0,\ -\pi < \theta < \pi\},$$

mas não é contínuo em todo o seu domínio de definição $\tilde{\Omega} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

9ª Questão: Mostre que se $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa e $\gamma : [t_0, t_1] \to \Omega$ é um caminho em Ω, então

$$f(\gamma(t_1)) - f(\gamma(t_0)) = \int_\gamma f'(z)\, \mathrm{d}z.$$

10ª Questão: Considere o caminho fechado $\gamma : [0, 3] \to \mathbb{C}$, no plano complexo, definido por $\gamma(t) = t + it$, $0 \leq t \leq 1$, $\gamma(t) = 2 - t + i$, $1 \leq t \leq 2$, $\gamma(t) = i(3 - t)$, $2 \leq t \leq 3$. Prove diretamente que $\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 0$ para qualquer função holomorfa definida em uma região que contém a curva fechada γ e o seu interior.

11ª Questão: (Winding number)

(1) Considere o caminho $\gamma_0 = re^{i\theta(t)}$, $0 \leq t \leq 1$, com $\theta : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $r > 0$, e calcule explicitamente a integral a seguir, mostrando que

$$\int_{\gamma_0} \frac{1}{z}\, \mathrm{d}z = \theta(1) - \theta(0).$$

(2) Considere agora o caminho $\gamma_1 = r(t)e^{i\theta}$, $r : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $r(t) > 0$, e $\theta \in \mathbb{R}$ e calcule explicitamente que

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\, \mathrm{d}z = \ln r(1) - \ln r(0).$$

(3) Considere, finalmente, um caminho fechado qualquer que não passa pela origem. Mesmo não sendo dado explicitamente dessa forma, podemos assumir que existem $r, \theta : [0,1] \to \mathbb{R}$, com $r(t) > 0$, $r(1) = r(0)$ e $\theta(1) = \theta(0) + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, tais que $\gamma = r(t)e^{i\theta(t)}$, $0 \leq t \leq 1$, com n indicando o número de voltas que γ dá em torno da origem. Considere as curvas $\gamma_0 = e^{ei\theta(1-t)}$, $\gamma_1(t) = r(t)e^{i\theta(0)}$ e $\gamma_2(t) = r(2-t)e^{i\theta(1)}$ e mostre que a curva $\tilde{\gamma} = \gamma + \gamma_2 + \gamma_0 + \gamma_1$ é uma curva fechada cujo interior não contém a origem e, portanto, está no domínio de holomorfia da função $1/z$. Deduza, então, que

$$\int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 0.$$

(4) Usando o resultado do item anterior, mostre que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = n.$$

A integral à esquerda é chamada de *winding number* da curva γ e indica o número de curvas que γ dá em torno da origem, podendo ser usada sem conhecermos γ explicitamente na forma polar. Observe que $n \in \mathbb{Z}$ e, com isso, o winding number pode ser positivo ou negativo, dependendo da orientação. Essa ideia pode ser generalizada para o número de voltas em torno de um ponto qualquer z_0 fora da curva, bastando mudar o integrando para $(z - z_0)^{-1}$.

12ª Questão: (Teorema de Liouville) Considere uma função inteira $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e suponha que f seja limitada em $\mathbb{C}$, i.e. existe $M \geq 0$ tal que $|f(\zeta)| \leq M$, $\forall \zeta \in \mathbb{C}$. Usando a fórmula de Cauchy para a derivada

$$f'(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\partial B_R(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta,$$

onde $\partial B_R(z)$ é a circunferência de raio $R > 0$ qualquer em torno de z, estime a integral em função de M e R, faça $R \to \infty$ e mostre que $f'(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, e f é constante.

13ª Questão: (Teorema fundamental da álgebra) Considere um polinômio complexo $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, onde $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, com $a_0 \neq 0$.

(1) Mostre que para $R > 0$ suficientemente grande,

$$|p(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n, \quad \forall z \in \mathbb{C},\ |z| \geq R.$$

(2) Mostre, agora, que se p não tem raiz complexa, então $f(z) = 1/p(z)$ é uma função inteira limitada.

(3) Aplique o Teorema de Liouville e o resultado do item anterior para deduzir que, se p não é constante, então p tem pelo menos uma raiz complexa.

(4) Se p tem uma raiz z_1, desenvolva a expressão $p(z) = p(z - z_1 + z_1)$ e mostre que ela pode ser escrita da forma $p(z) = (z - z_1)q(z) + p(z_1) = (z - z_1)q(z)$, onde $q = q(z)$ é um polinômio complexo de grau $n - 1$. Repetindo esse processo, se necessário, obtemos n raízes complexas $z_1, \ldots, z_n$ de p, possivelmente repetidas de acordo com as suas multiplicidades, o que nos leva à expressão

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$$