Primeira Prova de Cálculo Infinitesimal II

Semestre 2016/2 - Prof. Ricardo M. S. Rosa

4 de novembro de 2016

Obs: Sejam claros nas suas repostas e façam as devidas justificativas. Boa sorte!

1ª Questão: (2 pontos) Um navio está em rota de colisão com um porto que está a $1000\,\mathtt{m}$ de distância, a uma velocidade de $9\,\mathtt{m/s}$, quando reverte as turbinas e começa a desacelerar segundo a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\alpha\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^{1/2},$$

onde $\alpha = (1/50)\,\mathtt{m}^{1/2}/\mathtt{s}^{3/2}$, t tem escala $\mathtt{s}$ de segundos, e x, $\mathtt{m}$ de metros. Sabendo que o navio não colide com o porto, determine quanto tempo decorre até o navio parar e a quantos metros do porto ele para.

2ª Questão: (2,5 pontos) Considere uma fonte de luz em um ponto (x_0, y_0, z_0), com $z_0 \geq 0$ e uma haste dada pelo segmento de reta que liga a origem a um ponto $\mathbf{H} = (0, 0, h)$, onde $h > 0$. A sombra da haste no plano $z = 0$, causada por essa fonte de luz, é um segmento de reta que liga a origem a um determinado ponto $(\xi, \eta, 0)$, com $-\infty \leq \xi, \eta \leq +\infty$. Encontre ξ e η em função de x_0, y_0, z_0 e h. Considerando, agora, que essa fonte de luz se move ao longo de um caminho definido por uma curva parametrizada $\boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, encontre condições em $\boldsymbol{\gamma}$ para que $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\xi(t), \eta(t), 0) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ seja uma curva parametrizada bem definida para todo $t \in I$ e seja continuamente diferenciável. Mostre, ainda, que o vetor velocidade de $\boldsymbol{\sigma}$ se anula em um determinado valor $t \in I$ se, e somente se, o vetor tangente de $\boldsymbol{\gamma}$ em t é um múltiplo do vetor que liga $\mathbf{H}$ a $\boldsymbol{\gamma}(t)$.

3ª Questão: (2,5 pontos) Considere uma curva $\boldsymbol{\gamma}$ no espaço $\mathbb{R}^3$ que pertence ao cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = a^2\}$, onde $a > 0$, e com a seguinte propriedade: em cada ponto $\mathbf{P}$ da curva, o ângulo entre o eixo y e o plano tangente ao cilindro em $\mathbf{P}$ é igual ao ângulo entre o eixo z e a reta tangente à curva em $\mathbf{P}$. Mostre que essa curva pode ser parametrizada por

$$\boldsymbol{\gamma}(\theta) = (a\cos\theta, a\,\mathrm{sen}\,\theta, c \pm a\ln(\mathrm{sen}\,\theta)),$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante e θ é um parâmetro que varia em intervalo contido em $(0, \pi)$.

4ª Questão: Seja $k : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não-negativa definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Fixe um $t_0 \in I$, considere uma primitiva $\theta : I \to \mathbb{R}$ qualquer de k e defina a curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, por

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \cos\theta(s)\,\mathrm{d}s, \quad y(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{sen}\,\theta(s)\,\mathrm{d}s, \qquad \forall t \in I.$$

(i) (1 ponto) Mostre que $\boldsymbol{\gamma}$ é uma curva duas vezes continuamente diferenciável e parametrizada pelo comprimento de arco.

(ii) (1 ponto) Mostre que a curvatura de $\boldsymbol{\gamma}$ é exatamente k.

(iii) (1 ponto) Dados um ponto qualquer $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ do plano e um vetor unitário $\mathbf{T}_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, modifique a definição de $\boldsymbol{\gamma}$ de forma a ainda ter uma curva duas vezes continuamente diferenciável, parametrizada pelo comprimento de arco, com curvatura k e tal que $\boldsymbol{\gamma}(t_0) = \mathbf{P}_0$ e $\boldsymbol{\gamma}'(t_0) = \mathbf{T}_0$.