

Modelagem Matemática de Sistemas Mecânicos

10 de março de 2008

Ricardo M. S. Rosa

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA, INSTITUTO DE MATEMÁTICA,
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, CAIXA POSTAL 68530 ILHA DO
FUNDÃO, RIO DE JANEIRO RJ 21945-970, BRASIL

Sumário

Capítulo 1. Introdução	5
Capítulo 2. Princípios básicos da Mecânica Clássica	7
1. O universo da mecânica clássica	7
2. Modelagem Newtoniana em referências inerciais	7
3. Forças de interação, forças externas e a terceira lei de Newton	9
4. Forças de interação entre partículas	9
5. Campos de força externos	10
Capítulo 3. Princípios da modelagem Lagrangiana	13
1. Modelagem Lagrangiana em referenciais inerciais	13
2. Forças conservativas	19
3. Campos conservativos	21
4. Princípio da menor ação de Hamilton	21
5. Vínculos holônomos	24
6. Vínculos holônomos e coordenadas generalizadas	26
7. Modelagem Lagrangiana de sistemas com vínculos	29
8. Sistemas com vínculos implícitos	32
9. Sistemas com vínculos implícitos e explícitos	36
10. Campos de força	38
Capítulo 4. Leis de conservação	39
1. Leis de conservação via leis de Newton	39
2. Leis de conservação via simetrias do Lagrangiano	44
Capítulo 5. Corpos rígidos	57
1. Representação do movimento de um corpo rígido	57
2. Energia cinética de um corpo rígido	60
3. O operador de inércia	64
4. Coordenadas generalizadas e problemas de corpos rígidos com simetria	66
5. Ângulos de Euler como coordenadas generalizadas	68
6. Quatérnios como coordenadas generalizadas	68
Capítulo 6. Sistemas Hamiltonianos	69
1. Obtendo o Hamiltoniano no caso de um grau de liberdade	69
2. Obtendo o Hamiltoniano no caso de vários graus de liberdade	71

3. Obtendo o Lagrangiano a partir do Hamiltoniano	73
4. Sistemas não-autônomos	74
5. Transformada de Legendre	75
Capítulo 7. Sistemas contínuos	77
1. Exemplos	77
2. Conservação de energia	80
Capítulo 8. Relatividade restrita	83
Referências Bibliográficas	85

CAPÍTULO 1

Introdução

CAPÍTULO 2

Princípios básicos da Mecânica Clássica

1. O universo da mecânica clássica

2. Modelagem Newtoniana em referências inerciais

A base da mecânica clássica é a formulação Newtoniana de um sistema formado por $n \in \mathbb{N}$ partículas de massa $m_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, cada uma sujeita a uma força $\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^3$ e cujas coordenadas espaciais são dadas por

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t)) \in \mathbb{R}^3,$$

em cada instante $t \in \mathbb{R}$. Em um referencial inercial, esse sistema satisfaz as equações diferenciais (segunda lei de Newton)

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

onde $\ddot{\mathbf{r}}_i$ indica a aceleração da i -ésima partícula, ou seja a segunda derivada do vetor posição $\mathbf{r}_i(t)$ em relação à variável temporal t . Essas equações são as *leis de movimento* do sistema.

A força \mathbf{F}_i em cada partícula pode depender do instante de tempo t e da posição das várias partículas, representando forças externas ao sistema e forças de interação entre a i -ésima partícula e as outras, de modo que em geral temos

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(t, \mathbf{r}),$$

onde

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$$

são as coordenadas do sistema, ou seja, um vetor de dimensão $3n$ com as coordenadas espaciais de todas as partículas.

Podemos escrever o sistema (2.1) na forma compacta

$$M\mathbf{r} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}), \quad (2.2)$$

onde

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$$

é uma representação das forças agindo no sistema (um vetor de dimensão $3n$ combinando as forças atuando nas diversas partículas) e M é uma matriz diagonal de massas (uma matriz diagonal de dimensões $3n \times 3n$ formada pelas massas de cada partícula, que podemos escrever na forma $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \dots, m_n, m_n, m_n)$, indicando os elementos da diagonal).

Exercícios

- 2.1.** Verifique que o sistema de um corpo de massa $m > 0$ em queda livre vertical ao longo do eixo z , dado na forma

$$\ddot{z} = -g,$$

onde $g > 0$ é a aceleração da gravidade próxima à superfície da Terra e z é a altura em relação ao solo, pode ser escrito na forma (2.1) com $i = 1$, $m_1 = m$, $\mathbf{r}_1 = (0, 0, z)$, $\mathbf{F}_1(t, \mathbf{r}) = (0, 0, -mg)$.

- 2.2.** Verifique que o sistema massa-mola horizontal sem amortecimento com uma massa $m > 0$ e uma mola harmônica com coeficiente de restituição $k > 0$, dado pela equação

$$m\ddot{x} = -kx,$$

onde x é o deslocamento em relação à posição de equilíbrio da mola, pode ser escrito na forma (2.1) com $i = 1$, $m_1 = m$, $\mathbf{r}_1 = (x, 0, 0)$ e $\mathbf{F}_1(t, \mathbf{r}) = (-kx, 0, 0)$.

- 2.3.** A força de atração gravitacional entre dois corpos celestes de massas $m_1, m_2 > 0$ tem magnitude $F = Gm_1m_2/r^2$, onde G é a constante gravitacional e r é a distância entre esses planetas. Sendo \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 a posição do centro de massa desses planetas em um referencial inercial, verifique que esse sistema de dois corpos celestes pode ser escrito na forma (2.1) com

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1(t, \mathbf{r}) &= -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}, \\ \mathbf{F}_2(t, \mathbf{r}) &= -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3},\end{aligned}$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana, $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

- 2.4.** Verifique o sistema de duas partículas de massas $m_1, m_2 > 0$ presas entre si por uma mola com coeficiente de restituição k e comprimento de equilíbrio ℓ_0 e sob a ação gravitacional próxima à superfície da Terra pode ser escrito na forma (2.1) com

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1(t, \mathbf{r}) &= k(\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\| - \ell_0) \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|} - m_1 \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_1, \\ \mathbf{F}_2(t, \mathbf{r}) &= k(\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| - \ell_0) \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} - m_2 \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_2,\end{aligned}$$

onde \mathbf{g} é o vetor aceleração da gravidade e $\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_i$ é o produto escalar entre os vetores \mathbf{g} e \mathbf{r}_i . No caso da coordenada z ser a altura em relação ao solo, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, mas a formula acima vale mesmo que o referencial esteja em outra posição.

3. Forças de interação, forças externas e a terceira lei de Newton

Nesta parte, vamos considerar um sistema de n partículas, com coordenadas

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$$

em um referencial inercial, onde $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3$ são as coordenadas espaciais de cada partícula, $i = 1, \dots, n$. Nesse sistema age um conjunto de forças

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}) = (\mathbf{F}_1(t, \mathbf{r}), \dots, \mathbf{F}_n(t, \mathbf{r})),$$

representando a combinação das forças agindo em cada partícula e dependendo da configuração geral do sistema.

Há vários tipos de força: gravitacional, elétrica, magnética, elásticas, etc. Podemos, no entanto, separar alguns tipos de força segundo a sua natureza. Algumas forças são “internas”, de interação entre as diversas partículas do sistema. Outras são “externas”, provenientes de um “campo de força”, gerado pela presença de partículas externas, correspondendo a uma situação aproximada em que as partículas consideradas no sistema não influenciam no movimento das partículas consideradas externas. Vamos ver alguns exemplos.

4. Forças de interação entre partículas

Há quatro forças fundamentais: fraca, forte, eletromagnética e gravitacional. O tratamento mais geral delas, no entanto, não é através de uma sistema finito de partículas pontuais, mas sim através de teorias de campo. Contudo, algumas situações podem ser bem aproximadas por um sistema discreto, como as que envolvem forças gravitacionais agindo entre partículas que se movem a velocidades bem inferiores à velocidade da luz, ou então entre partículas carregadas eletricamente.

Essas forças podem ser entre partículas elementares ou entre conjuntos de partículas, como no caso da atração gravitacional entre corpos celestes. Há também forças ditas macroscópicas e provenientes da ação das forças fundamentais em certos conjuntos de partículas tratados como um único objeto, como no caso de forças elásticas entre duas massas ligados por uma mola. Várias forças de ligações químicas também entram nessa categoria, como a força de van der Waals e forças de torção.

Mencionamos, a seguir, algumas dessas forças.

Força gravitacional entre dois corpos: Sejam $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbb{R}^3$ as coordenadas do centro de massa, em algum referencial inercial, de dois corpos com massa $m_1, m_2 > 0$, respectivamente. Cada corpo exerce uma força gravitacional no outro que depende das coordenadas dos dois corpos. Denotando $\mathbf{F}_{i,j}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ a força que o corpo j exerce no corpo i , para $i, j = 1, 2, i \neq j$, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{1,2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}, \\ \mathbf{F}_{2,1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3}.\end{aligned}$$

Força eletrostática entre dois corpos carregados: Sejam $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbb{R}^3$ as coordenadas do centro de massa, em algum referencial inercial, de dois corpos carregados eletricamente com cargas $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$, respectivamente. Cada corpo exerce uma força eletrostática no outro de acordo com a lei de Coulomb. Denotando $\mathbf{F}_{i,j}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ a força que o corpo j exerce no corpo i , para $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{1,2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= Cq_1q_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}, \\ \mathbf{F}_{2,1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= Cq_1q_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3}.\end{aligned}$$

Força elástica harmônica: Sejam $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbb{R}^3$ as coordenadas do centro de massa, em algum referencial inercial, de dois corpos com massa $m_1, m_2 > 0$, respectivamente. Suponha que esses dois corpos estejam ligados por uma mola harmônica de comprimento de equilíbrio $\ell > 0$ e coeficiente de restituição $k > 0$. Cada corpo sofre uma força de restituição proporcional ao deslocamento da mola em relação à posição de equilíbrio. Denotando por $\mathbf{F}_{i,j}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ a força exercida no corpo i pela mola que a liga ao corpo j , para $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{1,2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= -k(\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| - d) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}, \\ \mathbf{F}_{2,1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= -k(\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\| - d) \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}.\end{aligned}$$

Veremos posteriormente que todas essas forças são conservativas, provenientes de potenciais. A formulação via potencial é mais simples e deixaremos outras forças para serem escritas apenas na forma potencial, como forças em modelagem molecular, por exemplo.

5. Campos de força externos

No caso de forças gravitacionais, há situações em que um corpo é muito mais massivo que outro e a influência do menos massivo no mais massivo pode ser desprezada. Nesse caso, o sistema consiste apenas do menos massivo e a influência do mais massivo pode ser representada por um campo de forças externas. Mais precisamente, suponha, por exemplo, um objeto próximo à superfície da Terra. Considerando as coordenadas do objeto como $\mathbf{r} = (x, y, z)$, com a coordenada z perpendicular à superfície da Terra e com o sentido de crescimento indicando um afastamento da superfície, então a força gravitacional exercida pela Terra nesse corpo que assumimos de massa $m > 0$ é dada por

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g},$$

onde $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ e g é a aceleração gravitacional próxima à superfície da Terra. Observe que essa força pode ser escrita na forma

$$\mathbf{F} = m\mathbf{G}(\mathbf{r}),$$

onde

$$\mathbf{G} = \mathbf{g}$$

é chamado de campo gravitacional uniforme próximo à superfície da Terra.

A vantagem de escrever a força dessa forma é que se tivermos n objetos de massas m_1, \dots, m_n , então basta considerarmos o campo $\mathbf{G}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}$ de forma que a força gravitacional em cada objeto é dada por

$$\mathbf{F}_i = m_i\mathbf{G}.$$

Há vários tipos de campos de força, correspondentes ao tipo da força. De fato, podemos ter campos gravitacionais, campos elétricos, campos magnéticos, campos eletro-magnéticos, etc.

Campo gravitacional: Um campo de vetores $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{r})$ de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 pode ser interpretado como um campo gravitacional quando a força exercida por esse campo em uma partícula de massa $m > 0$ e posição $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ é dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\mathbf{G}(\mathbf{r}).$$

É claro que n partículas de massas m_i e coordenadas \mathbf{r}_i , $i = 1, \dots, n$, sofrem forças

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i) = m\mathbf{G}(\mathbf{r}_i),$$

respectivamente. Há vários casos particulares interessantes:

- (1) *Campo gravitacional uniforme:* Caso particular em que \mathbf{G} é constante, geralmente denotado $\mathbf{G}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}$, para algum vetor $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^3$ representando a aceleração gravitacional. No caso clássico em que $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e z representa a altura em relação à superfície da Terra, temos $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, onde g é a aceleração gravitacional próxima à superfície da Terra.
- (2) *Campo gravitacional de um corpo celeste:* Considerando um corpo de massa M e posição $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ em algum referencial inercial, o campo gravitacional gerado por esse corpo é dado por

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = -GM \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3}.$$

Considerando um corpo de massa m , a força exercida neste corpo por esse campo gravitacional é

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\mathbf{G}(\mathbf{r}).$$

Campo elétrico: De maneira análoga, um campo de vetores $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 pode ser interpretado como um campo elétrico quando a força exercida

por esse campo em uma partícula de carga $q > 0$ e posição $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ é dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Um capacitor de placa paralela, por exemplo, gera um campo elétrico uniforme semelhante ao campo gravitacional uniforme.

Campo magnético agindo em partículas carregadas eletricamente: Um campo magnético $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 exerce uma força em uma partícula carregada eletricamente que é de uma natureza um pouco mais complicada que às anteriores. Sendo q a carga elétrica, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ a posição, e $\dot{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^3$ a velocidade, então essa força é dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}).$$

Campos magnéticos uniformes aparecem, por exemplo, em aceleradores circulares de partícula, com o plano em que as partículas circulam sendo perpendicular ao campo magnético.

Campo eletromagnético: Um campo eletromagnético (\mathbf{E}, \mathbf{B}) age em uma partícula carregada eletricamente através de uma força que leva o nome de força de Lorentz e é dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)).$$

CAPÍTULO 3

Princípios da modelagem Lagrangiana

1. Modelagem Lagrangiana em referenciais inerciais

Vamos considerar agora o caso em que as forças no sistema são provenientes de um potencial, ou seja, $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n)$ é menos o gradiente de uma função escalar V :

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}) = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}(t, \mathbf{r}),$$

onde $\partial/\partial \mathbf{r}$ indica as derivadas parciais apenas em relação às coordenadas espaciais

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n),$$

lembrando que cada $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ tem três coordenadas, ou seja,

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_n} \right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \frac{\partial V}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}, \frac{\partial V}{\partial y_n}, \frac{\partial V}{\partial z_n} \right).$$

A força em cada partícula i tem a forma

$$\mathbf{F}_i(t, \mathbf{r}) = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}(t, \mathbf{r}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial V}{\partial y_i}, \frac{\partial V}{\partial z_i} \right).$$

Considere a energia cinética total do sistema como sendo a função escalar

$$K(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \|\dot{\mathbf{r}}_j\|^2, \quad (1.1)$$

e defina o *Lagrangiano* do sistema como sendo a função escalar

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = K(\dot{\mathbf{r}}) - V(t, \mathbf{r}). \quad (1.2)$$

As equações de Euler-Lagrange têm a forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0. \quad (1.3)$$

Esse sistema pode ser desmembrado em um sistema com equações para a posição de cada partícula:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

Cada equação dessa é na verdade um sistema de três equações, considerando-se que a posição de cada partícula é dada por três coordenadas, de modo que

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}, \frac{\partial L}{\partial y_i}, \frac{\partial L}{\partial z_i} \right),$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}, \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right).$$

Então temos o sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, & i = 1, \dots, n, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0, & i = 1, \dots, n, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} - \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0, & i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Como $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = K(\dot{\mathbf{r}}) - V(t, \mathbf{r})$ e $V(t, \mathbf{r})$ é independente de $\dot{\mathbf{r}}$, temos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \|\dot{\mathbf{r}}_j\|^2 \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \left(\frac{1}{2} m_i \|\dot{\mathbf{r}}_i\|^2 \right) = m_i \dot{\mathbf{r}}_i.$$

Com isso,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = \frac{d}{dt} m_i \dot{\mathbf{r}}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i.$$

Por outro lado, $K(\dot{\mathbf{r}})$ é independente de \mathbf{r} e, assim, usando a hipótese das forças serem potenciais,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}_i).$$

Portanto, as equações de Euler-Lagrange (1.4) coincidem com as equações de Newton (2.1) nesse caso de forças provenientes de potenciais.

Exercícios

- 1.1. Faça os detalhes dos passos acima, convencendo-se de que as equações de Euler-Lagrange (1.4) coincidem com as equações de Newton (2.1).
- 1.2. Considere um corpo de massa m e coordenadas $\mathbf{r} = (x, y, z)$ próximo à superfície da Terra, onde z indica a distância do objeto ao solo. A força gravitacional que age nessa partícula pode ser aproximada por $\mathbf{F} = (0, 0, -mg)$, onde g é a aceleração da gravidade próxima à superfície da Terra. Verifique que essa força é proveniente do potencial $V(x, y, z) = mgz$, escreva o Lagrangiano associado a esse problema e deduza as equações de Euler-Lagrange para o movimento desse corpo.

1.3. Verifique que as forças gravitacionais

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3},$$

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{r}) = -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3},$$

entre dois corpos celestes de massas $m_1, m_2 > 0$ e posições $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbb{R}^3$ são forças provenientes do potencial

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|},$$

ou seja, verifique que

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2.$$

1.4. Verifique que o sistema de dois corpos celestes de massas $m_1, m_2 > 0$ e posições $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbb{R}^3$ pode ser modelado via Lagrangiano

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = K(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}),$$

onde $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, $K(\dot{\mathbf{r}})$ é a energia cinética (1.1) do sistema e o potencial gravitacional é dado por

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}.$$

1.5. Verifique que o sistema de $n \in \mathbb{N}$ corpos celestes de massas $m_i > 0$ e posições $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, \dots, n$, pode ser modelado via Lagrangiano através do potencial gravitacional

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1,\dots,n \\ j \neq k}} \frac{Gm_jm_k}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k\|} = -\sum_{\substack{j,k=1,\dots,n \\ j < k}} \frac{Gm_jm_k}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k\|} = -\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \frac{Gm_jm_k}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k\|}.$$

1.6. Em relatividade restrita, as equações de movimento de uma partícula livre são dadas por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{1 - \frac{\|\dot{\mathbf{r}}\|^2}{c^2}}} \right) = 0,$$

onde c é a velocidade da luz e m é a massa de repouso da partícula. Mostre que essa equação pode ser deduzida através das equações de Euler-Lagrange para o Lagrangiano

$$L(\dot{\mathbf{r}}) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\|\dot{\mathbf{r}}\|^2}{c^2}}.$$

- 1.7.** Um referencial é dito inercial quando o tempo é homogêneo e o espaço é homogêneo e isotrópico, ou seja as suas propriedades métricas não dependem da posição no espaço (homogeneidade espacial), do instante de tempo (homogeneidade temporal) e da direção no espaço (isotropia). No caso de uma sistema mecânico de uma única partícula livre, isso se traduz na condição do Lagrangiano $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, ser invariante por translações (homogeneidade) no tempo e no espaço e invariante por rotações (isotropia) no espaço. Matematicamente, isso é expresso pelas condições

$$L(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}, t) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t),$$

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t + s) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t),$$

$$L(Q\mathbf{r}, Q\dot{\mathbf{r}}, t) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t),$$

para quaisquer $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^3$, $s \in \mathbb{R}$, $Q \in O(3)$, onde \mathbf{r}_0 representa uma translação qualquer no espaço, s uma translação qualquer no tempo, e Q é uma matriz ortogonal qualquer representando uma rotação e/ou uma reflexão arbitrária.

Deduza que um Lagrangiano $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ de uma única partícula, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, em um referencial inercial é necessariamente da forma

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = f(\|\dot{\mathbf{r}}\|^2),$$

para alguma função real f . (Basta mostrar que é apenas função de $\|\dot{\mathbf{r}}\|$, pois isso é equivalente a ser apenas função de $\|\dot{\mathbf{r}}\|^2$, que é uma forma que facilita contas posteriores.)

- 1.8.** No caso em que o Lagrangiano é da forma $L = L(\dot{\mathbf{r}})$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, com o operador segunda-derivada

$$\frac{\partial^2 L(\dot{\mathbf{r}})}{\partial \dot{\mathbf{r}}^2}$$

invertível para todo $\dot{\mathbf{r}}$ em um subconjunto denso de \mathbb{R}^3 , mostre que as únicas soluções das equações de Euler-Lagrange são com $\dot{\mathbf{r}}$ constante, portanto, com a partícula descrevendo necessariamente um movimento retilíneo uniforme.

- 1.9.** Considere dois Lagrangianos que diferem apenas por um termo que é uma derivada temporal de uma função que depende apenas do tempo e das coordenadas das partículas, i.e.

$$\tilde{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \frac{d}{dt}G(\mathbf{r}, t).$$

Mostre que as equações de Euler-Lagrange associadas aos dois Lagrangianos são idênticas. (Dica: desenvolva, usando a regra da cadeia e derivadas parciais, a derivada temporal do termo $G(\mathbf{r}, t)$, com $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.)

- 1.10.** Considere a energia cinética

$$K(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{r}}\|^2,$$

de uma partícula com coordenadas $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, em um certo referencial inercial. Seja $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^3$ fixo e considere a mudança de variáveis para um referencial se movendo uniformemente com velocidade \mathbf{v}_0 em relação ao referencial original, i.e. as coordenadas $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}(t)$ da partícula nesse novo sistema são dadas por

$$\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{v}_0 t.$$

Escreva a energia cinética do sistema nesse novo referencial, i.e. $\tilde{K}(\dot{\tilde{\mathbf{r}}}) \stackrel{\text{def}}{=} K(\dot{\mathbf{r}}) = K(\dot{\tilde{\mathbf{r}}} + \mathbf{v}_0)$. Mostre que K e \tilde{K} diferem apenas por um termo que é uma derivada temporal de uma outra função. Mais precisamente, mostre que

$$K(\dot{\tilde{\mathbf{r}}} + \mathbf{v}_0) = K(\dot{\tilde{\mathbf{r}}}) + \frac{d}{dt}G_{\mathbf{v}_0}(\tilde{\mathbf{r}}, t)$$

para alguma função $G_{\mathbf{v}_0}(\tilde{\mathbf{r}}, t)$ de $\tilde{\mathbf{r}}$ e t , que depende também do parâmetro \mathbf{v}_0 .

1.11. A mudança de coordenadas no espaço-tempo

$$(\mathbf{r}, t) \rightarrow (\tilde{\mathbf{r}}, t) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t, t)$$

é conhecida como transformação de Galileu e está intimamente ligada ao princípio da inércia. Vimos, de fato, no exercício anterior, que sob uma transformação de Galileu, a energia cinética se altera apenas pela adição de um termo que é uma derivada temporal de uma função das coordenadas do sistema. Com isso, pelo exercício 5, as equações de Euler-Lagrange de uma partícula livre não se alteram segundo uma transformação de Galileu.

O presente exercício visa complementar essas idéias, considerando o movimento de uma única partícula em um referencial inercial representada por um Lagrangiano $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, cujas equações de Euler-Lagrange são invariantes por transformações de Galileu, o que significa dizer que

$$L(\tilde{\mathbf{r}}, \dot{\tilde{\mathbf{r}}}, t) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \frac{d}{dt}G(\mathbf{r}, t)$$

para um referencial $(\tilde{\mathbf{r}}, t)$ em relação ao qual o referencial original (\mathbf{r}, t) se move com uma velocidade constante $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^3$ arbitrária mas fixa, e para alguma função escalar $G(\mathbf{r}, t)$. Isso pode ser escrito mais explicitamente na forma

$$L(\mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t, \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{v}_0, t) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \frac{\partial G}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{r}, t),$$

para todo $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^3$.

Mostre que sob essa invariância esse Lagrangiano é necessariamente a energia cinética da partícula, a menos de um termo que é uma derivada temporal das coordenadas da partícula.

Mais precisamente, note que pelo exercício 7 o Lagrangiano de uma partícula livre em um referencial inercial tem necessariamente a forma

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = f(\|\dot{\mathbf{r}}\|^2),$$

para alguma função escalar f , e mostre, então, que a primeira derivada de f tem que ser constante. O dobro dessa constante pode ser tomado como sendo a massa da partícula nas unidades de medida do sistema de coordenadas escolhidas. (Dica: após substituir o Lagrangiano por $f(\|\dot{\mathbf{r}}\|^2)$, substitua também \mathbf{v}_0 por $\varepsilon \mathbf{v}_0$, com \mathbf{v}_0 fixo, faça a expansão em série de Taylor em relação a ε e verifique que o termo de primeira ordem dessa expansão é linear em $\dot{\mathbf{r}}$ se e somente se a primeira derivada de f é constante.

- 1.12.** No exercício 11, é pedido para mostrar que um Lagrangiano cujas equações de Euler-Lagrange são invariantes por transformações de Galileu tem necessariamente a forma

$$L(\dot{\mathbf{r}}) = \alpha + \beta \|\dot{\mathbf{r}}\|^2.$$

A constante α não altera as equações e pode ser tomada como sendo zero. A constante β deve apenas ser diferente de zero para que as equações de Euler-Lagrange não sejam uma trivialidade.

Considerando, agora, o Princípio da Menor Ação, verifique que para as equações de Euler-Lagrange representarem um mínimo da ação então necessariamente β tem que ser positivo. O dobro dessa constante é definido como sendo a massa do sistema.

Observe que nesse argumento, a existência de uma constante representando o que chamamos de massa do sistema aparece não como uma hipótese mas como consequência do Princípio da Menor Ação e da definição de referenciais inerciais.

Repare ainda que o valor dessa massa é irrelevante para o movimento no caso de uma única partícula livre. O valor dela só se torna relevante em relação a outras partículas e com a presença de campos de força.

- 1.13.** Considere um Lagrangiano $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$. Faça a mudança de variáveis $t = \tau \tilde{t}$, $\mathbf{r} = \mu \tilde{\mathbf{r}}$, fisicamente representando mudanças nas escalas de tempo e espaço. Considerando $\dot{\tilde{\mathbf{r}}}$ como a derivada temporal de $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/\mu$ em relação a nova variável temporal $\tilde{t} = t/\tau$, temos

$$\dot{\tilde{\mathbf{r}}} = \frac{d}{d\tilde{t}} \frac{\mathbf{r}}{\mu} = \frac{\tau}{\mu} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\tau}{\mu} \dot{\mathbf{r}}.$$

Considere agora o novo Lagrangiano

$$\tilde{L}(\tilde{\mathbf{r}}, \dot{\tilde{\mathbf{r}}}, s) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = L(\mu \tilde{\mathbf{r}}, \frac{\mu}{\tau} \dot{\tilde{\mathbf{r}}}, \tau s).$$

Observe que

$$\frac{d}{d\tilde{t}} = \tau \frac{d}{dt}, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{r}}} = \mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \quad \frac{\partial}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{r}}}} = \frac{\mu}{\tau} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}}.$$

Mostre que as equações de Euler-Lagrange associadas aos dois Lagrangianos são equivalentes, diferindo apenas por um fator multiplicativo. Mais precisamente, mostre que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{r}}}}(\tilde{\mathbf{r}}, \dot{\tilde{\mathbf{r}}}, \tilde{t}) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{\mathbf{r}}}(\tilde{\mathbf{r}}, \dot{\tilde{\mathbf{r}}}, \tilde{t}) = \mu \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \right).$$

Logo, se $\mathbf{r}(t)$ é solução do sistema com Lagrangiano $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$, então $\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{t}) = \mathbf{r}(\tilde{t}/\mu)/\mu$ é solução do sistema com o Lagrangiano $\tilde{L}(\tilde{\mathbf{r}}, \dot{\tilde{\mathbf{r}}}, \tilde{t})$. Ache ainda a relação entre os momentos $p = \partial L / \partial \dot{\mathbf{r}}$ e $\tilde{p} = \partial \tilde{L} / \partial \dot{\tilde{\mathbf{r}}}$. Finalmente, no caso em que $p = m\dot{\mathbf{r}}$ e $\tilde{p} = \tilde{m}\dot{\tilde{\mathbf{r}}}$, ache a relação entre as massas m e \tilde{m} nessas duas escalas.

2. Forças conservativas

Vimos acima que a modelagem Lagrangiana depende das forças serem provenientes de um potencial, ou seja, a força

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n)$$

é menos o gradiente de uma função escalar V :

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}) = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}(t, \mathbf{r}),$$

onde $\partial/\partial \mathbf{r}$ indica as derivadas apenas em relação às coordenadas espaciais

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n),$$

lembrando que cada $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ tem três coordenadas. A função $V(t, \mathbf{r})$ é chamada de *potencial* da força $\mathbf{F}(t, \mathbf{r})$.

Uma força proveniente de um potencial é dita *conservativa*, pois a energia total do sistema correspondente é conservada ao longo de cada movimento.

Vejamos alguns tipos de forças conservativas:

Força gravitacional uniforme: que age em uma partícula de massa m na forma $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, onde $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^3$ é um vetor constante. Se aplica ao caso de uma partícula da massa m sob a ação da gravidade próximo à superfície da Terra. No caso de um sistema de referência xyz onde z indica a "altura", ou seja, o eixo perpendicular à superfície da Terra, então $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, onde g é a aceleração da gravidade próximo à superfície da Terra. O vetor \mathbf{g} pode assumir outra forma em relação a outros referenciais inerciais, como por exemplo um referencial inclinado ou onde z tem o sentido contrário, indicando profundidade. O potencial correspondente tem a forma $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$, onde $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ é a posição da partícula. No caso de um conjunto de n partículas com coordenadas $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ sob a ação desse campo, temos $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}) = (m_1\mathbf{g}, \dots, m_n\mathbf{g})$, onde m_1, \dots, m_n são as massas das n partículas. O potencial correspondente é $\mathbf{V}(t, \mathbf{r}) = -m_1\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_1 - \dots - m_n\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_n$, onde $\mathbf{r} =$

$(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$. Observe que essas expressões são independentes das coordenadas inerciais escolhidas para representar cada \mathbf{r}_i .

Força de restituição de uma mola harmônica: Age em duas partículas ligadas por uma mola harmônica. A mola possui um comprimento de equilíbrio $\ell_0 > 0$ e um coeficiente de restituição $k > 0$. Se \mathbf{r}_i , $i = 1, 2$, são as coordenadas das duas partículas, a força agindo na partícula i pela mola ligada à partícula j é dada por

$$\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}) = k(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| - \ell_0) \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}.$$

onde $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Mais uma vez, essa representação independe do sistema inercial de coordenadas. O potencial correspondente é

$$V_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}k(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| - \ell_0)^2.$$

No caso de um sistema com várias molas, cada uma ligando um certo par de partículas, basta somar os potenciais de cada mola para obter o potencial total. Mas cuidado para não contar o potencial duas vezes ao fazer o somatório duplo $\sum_{i \neq j}$; o certo é fazer $\sum_{i < j}$, ou então dividir o potencial V_{ij} por dois e somá-lo duas vezes, com $i < j$ e com $i > j$.

Força gravitacional universal: Essa força age entre dois corpos celestes de massas $m_1, m_2 > 0$ e posições $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$. A força de atração gravitacional que a partícula j exerce na partícula i é dada por

$$\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}) = -Gm_i m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3}.$$

O potencial correspondente é

$$V_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}.$$

No caso de vários corpos celestes, basta somar o potencial para cada par de corpos, com a mesma ressalva feita no caso de várias molas harmônicas, para evitar contar cada potencial duas vezes.

Força elétrica: Essa força age entre dois corpos carregados eletricamente. Considerando corpos com cargas $q_1, q_2 \neq 0$ e posições $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, a força elétrica que a partícula j exerce na partícula i é dada por

$$\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3},$$

onde ϵ_0 é a constante de permissividade do meio. O potencial correspondente é

$$V_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}.$$

No caso de várias partículas carregadas eletricamente, basta somar o potencial para cada par de cargas, com a mesma ressalva feita nos casos anteriores, para evitar contar cada potencial duas vezes.

Exercícios

- 2.1.** Verifique que uma força $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_x, F_y, F_z) \in \mathbb{R}^3$ de um sistema de uma partícula com coordenadas $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é conservativo se e somente se o rotacional de $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ se anula para todo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, i.e.

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = (0, 0, 0), \quad \forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3.$$

- 2.2.** Verifique que uma força $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^3$ de um sistema de uma partícula com coordenadas $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ é conservativo se e somente se o trabalho

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

ao longo de qualquer caminho fechado γ (i.e. γ é uma curva parametrizada por uma trajetória $\mathbf{r} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(t_1)$.)

- 2.3.** Escreva o potencial gravitacional uniforme em um referencial inclinado de uma ângulo α , apropriado para o movimento de uma partícula deslizando sobre um plano inclinado próximo à superfície da Terra.
- 2.4.** Escreva o potencial associado a três molas harmônicas, ligando em série três partículas no espaço, como em um triângulo, e onde cada mola tem um coeficiente de restituição k_i e um comprimento de equilíbrio ℓ_i , $i = 1, 2, 3$.
- 2.5.** Mostre que se as forças entre duas partículas atuam na direção que une essas duas partículas, têm sentidos contrários, têm a mesma magnitude e essa magnitude dependente apenas da distância entre essas duas partículas, então essas forças são conservativas. Mais precisamente, assuma que $\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r})$ tem a forma

$$\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}) = -\varphi(\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|) \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|},$$

onde $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, e mostre que o potencial é dado por

$$V_{ij}(\mathbf{r}) = \psi(\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|),$$

onde ψ é uma primitiva qualquer de φ , i.e. $\psi'(r) = \varphi(r)$, para todo $r > 0$.

3. Campos conservativos

4. Princípio da menor ação de Hamilton

As equações de Euler-Lagrange aparecem do princípio da menor ação.

Enquanto na modelagem Newtoniana um *sistema* é definido pelas massas das partículas e o conjunto de forças que agem em cada partícula, na modelagem Lagrangiana, um *sistema* é definido função Lagrangiana. A Lagrangiana depende das

posições e velocidades das partículas e do instante de tempo e contém as informações necessárias sobre as massas e as forças.

Dada uma Lagrangiana $L = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$, a *ação* ao longo de um caminho \mathbf{r} é definida pela integral

$$S(\mathbf{r}) = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) dt.$$

O *princípio da menor ação* afirma que a trajetória que um sistema percorre saindo de uma posição $\mathbf{r}(t_0)$, no instante t_0 , e indo até uma posição $\mathbf{r}(t_1)$, em um instante subsequente t_1 é dado pelo mínimo da ação ao longo de todos os caminhos possíveis, i.e.

$$S(\mathbf{r}) = \min_{\mathbf{r}^* \in \mathcal{V}} S(\mathbf{r}^*),$$

onde o mínimo é tomado em relação a todos os possíveis caminhos ligando $\mathbf{r}(t_0)$ a $\mathbf{r}(t_1)$ durante esse intervalo de tempo, i.e.

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(t_0, t_1, \mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}(t_1)) = \{\mathbf{r}^* = \mathbf{r}^*(t); t_0 \leq t \leq t_1, \mathbf{r}^*(t_0) = \mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}^*(t_1) = \mathbf{r}(t_1)\}.$$

Escrevendo $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{w}$, podemos considerar o conjunto

$$\mathcal{W}(t_0, t_1) = \{\mathbf{w} = \mathbf{w}(t); t_0 \leq t \leq t_1, \mathbf{w}(t_0) = 0, \mathbf{w}(t_1) = 0\},$$

logo

$$\mathcal{V} = \mathbf{r} + \mathcal{W},$$

e o problema de minimização pode ser escrito como

$$\mathcal{S}(\mathbf{r}) = \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}} \mathcal{S}(\mathbf{r} + \mathbf{w}),$$

Assim como no Cálculo de Várias Variáveis, um ponto de mínimo de $\mathcal{S}(\mathbf{r})$ é um ponto crítico e a sua derivada, em algum sentido, se anula. A expressão nas equações de Euler-Lagrange são, essencialmente, o gradiente de $\mathcal{S}(\mathbf{r})$, e essas equações representam a condição desse gradiente se anular. Assim, resolvendo as equações de Euler-Lagrange, estamos encontrando um ponto crítico da ação, que pode, em particular, ser um ponto de mínimo, dependendo da forma da ação.

Dada uma função $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, usando expansão em série de Taylor do Lagrangiano em torno do ponto \mathbf{r} e utilizando integração por partes, temos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{S}(\mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{w}) - \mathcal{S}(\mathbf{r})}{\varepsilon} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \right) \mathbf{w}(t) dt.$$

Esta expressão é a derivada direcional de $\mathcal{S}(\mathbf{r})$ no “ponto” \mathbf{r} e na “direção” \mathbf{w} . Em Análise Funcional e no Cálculo das Variações, essa derivada leva o nome de *derivada de Gâteaux*.

Para \mathbf{r} ser um ponto crítico, a derivada de Gâteaux de \mathcal{S} em \mathbf{r} na direção \mathbf{w} deve se anular para todas as direções possíveis $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$. Isso ocorre se e somente se

a expressão entre parênteses na derivada de Gâteaux se anula em todos os instantes $t \in [t_1, t_2]$, o que nos leva às equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0,$$

para o ponto crítico \mathbf{r} . Pelo princípio da menor ação, a trajetória percorrida pelo sistema físico definido por um certo Lagrangiano deve satisfazer as equações de Euler-Lagrange correspondentes.

Exercícios

- 4.1.** Faça a expansão em série de Taylor de $L(\mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{w}, \dot{\mathbf{r}} + \varepsilon \dot{\mathbf{w}}, t)$ no "ponto" $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, na direção em $(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})$ até a primeira ordem em ε , i.e. desprezando os termos envolvendo ε^p , com $p \geq 2$.
- 4.2.** Usando integração por partes e a expansão em série de Taylor do exercício acima mostre que

$$\frac{\mathcal{S}(\mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{w}) - \mathcal{S}(\mathbf{r})}{\varepsilon} = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \right) \mathbf{w}(t) dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

onde $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ representam os termos de ordem maior ou igual a dois em ε desprezados na expansão de Taylor. Conclua que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{S}(\mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{w}) - \mathcal{S}(\mathbf{r})}{\varepsilon} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \right) \mathbf{w}(t) dt.$$

- 4.3.** O *Lema Fundamental do Cálculo das Variações* diz que se uma função contínua $f : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$\int_{t_0}^{t_1} g(t) w(t) dt = 0,$$

para toda $w : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com $w(t_0) = w(t_1) = 0$, então $f(t) = 0$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Mostre esse resultado.

- 4.4.** Se $L = L(u, \dot{u}, \ddot{u})$, $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$, ache a derivada de Gâteaux de L no "ponto" \mathbf{r} e na direção \mathbf{w} , i.e. ache $g : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (S(u + \varepsilon w) - S(u)) = \int_{t_0}^{t_1} g(t) w(t) dt,$$

para todo $w : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ com $w(t_0) = w(t_1) = w'(t_0) = w'(t_1) = 0$, onde

$$S(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(u, \dot{u}, \ddot{u}) dt.$$

- 4.5.** Considere dois Lagrangianos que diferem apenas por um termo que é uma derivada temporal de uma função que depende apenas do tempo e das coordenadas das partículas, i.e.

$$\tilde{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \frac{d}{dt}G(\mathbf{r}, t).$$

Vimos anteriormente que as equações de Euler-Lagrange associadas aos dois Lagrangianos são idênticas. Uma forma mais elegante e simples de ver isso é através da ação. Mostre que

$$\tilde{S}(\mathbf{r}) = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) dt = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) dt + G(\mathbf{r}(t_2), t_2) - G(\mathbf{r}(t_1), t_1).$$

Portanto, mantendo os extremos fixos, a variação da ação associada a $\tilde{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ coincide com a variação da ação associada a $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$, o que implica nas equações de Euler-Lagrange correspondentes serem idênticas.

5. Vínculos holônomos

As leis de movimento são sistemas de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Assim, em geral, o movimento das partículas está determinado pelas leis de movimento e pelos dados iniciais do sistema, que vêm a ser as coordenadas espaciais da posição e da velocidade de cada partícula. Dessa maneira, o sistema está restrito a percorrer um certo caminho determinado por essas leis de movimento. Essa é uma restrição dinâmica, pois está determinada pelas leis de movimento. Mas a configuração inicial está livre para assumir qualquer valor.

Há outros tipos de restrições que limitam as possíveis configurações do sistema independentemente das equações de movimento. Por exemplo, no movimento de um pêndulo planar, com uma haste de comprimento ℓ e com uma das extremidades presa a um certo ponto P , o movimento da extremidade livre da haste está restrito a uma circunferência de raio ℓ e centro em P . Esta não é uma restrição dinâmica, é uma restrição imposta independentemente das leis de movimento e das forças externas que atuam no sistema. Restrições desse tipo levam o nome especial de *vínculos*.

No caso do pêndulo planar, considerando o ponto P como a origem do sistema de referências e considerando o plano de movimento como sendo o plano yz , o vínculo pode ser dado implicitamente pelas equações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2, \\ x = 0. \end{cases}$$

Como a segunda equação determina que $x = 0$, podemos omitir x na primeira equação e escrever o vínculo na forma equivalente

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = \ell^2, \\ x = 0. \end{cases}$$

Na realidade, o problema do pêndulo é composto por uma quantidade enorme de átomos ligados por forças atômicas e subatômicas, onde as restrições são de fato dinâmicas. Mas macroscopicamente, podemos considerar a haste rígida e a restrição como sendo uma imposição física, ou seja, um vínculo, conforme descrito acima.

Restrições mais gerais podem envolver sistemas de equações e/ou desigualdades envolvendo as posições \mathbf{r}_i e as velocidades $\dot{\mathbf{r}}_i$ das várias partículas. Por exemplo, uma partícula representando uma bola quicando sobre uma superfície plana horizontal possui o vínculo

$$z \geq 0,$$

considerando a superfície rígida ao longo do eixo $z = 0$.

Um pêndulo planar restrito a oscilar paralelamente ao plano yz e onde uma das extremidades está presa a um “carrinho” que se move com velocidade constante v ao longo do eixo x , transversal ao seu plano de oscilação, pode ser descrito pela posição $\mathbf{r} = (x, y, z)$ da extremidade livre da haste, com as restrições

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = \ell^2, \\ \dot{x} = v. \end{cases}$$

Vimos acima vínculos que são igualdades ou desigualdades e envolvendo as posições e as velocidades das partículas. Mas no que se segue, vamos considerar apenas os chamados vínculos holônomos, que são os que podem ser escritos através de equações envolvendo apenas as posições \mathbf{r}_i das partículas, ou seja, sem desigualdades e sem depender intrinsecamente das derivadas $\dot{\mathbf{r}}_i$. Matematicamente, podemos escrever vínculos holônomos na forma geral de r equações escalares

$$\Phi_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0, \quad k = 1, \dots, r,$$

onde cada vínculo é dado pela curva de nível zero de uma função $\Phi_k : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Em forma vetorial, podemos considerar $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_r) : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^r$, de modo o sistema de r restrições escalares se escreve como uma única equação vetorial com valores em \mathbb{R}^r :

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = 0.$$

No caso do pêndulo planar, temos $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = 2$, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ e

$$\Phi_1(x, y, z) = y^2 + z^2, \quad \Phi_2(x, y, z) = x.$$

O caso da bola quicando sobre uma superfície não é de um vínculo holônomo e não será considerado. Mas o caso do pêndulo se movendo transversalmente ao plano de oscilação, apesar de não estar na forma de um vínculo holônomo, pode ser reescrito como tal. De fato, a condição $\dot{x} = v$ pode ser integrada para dar a relação $x = vt$, assumindo a posição inicial como sendo $x = 0$. Assim, nesse caso, podemos escrever $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = 2$, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ e

$$\Phi_1(x, y, z) = y^2 + z^2, \quad \Phi_2(x, y, z, t) = xt.$$

Observe que nesse caso a restrição aparece explicitamente com a variável temporal t .

Exercícios

- 5.1. Verifique que o problema de um corpo em queda livre vertical pode ser escrito com os vínculos $x = 0$ e $y = 0$.
- 5.2. Escreva a equação de vínculo de uma partícula deslizando em um plano inclinado normal ao vetor $\mathbf{n} = (a, b, c)$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, e passando pela origem.
- 5.3. Escreva as equações de vínculo de um sistema tipo pêndulo formado por duas partículas presas por uma haste de comprimento ℓ em que uma das partículas está restrita a uma superfície de equação $z = h(x, y)$. Ignore a colisão entre a outra partícula e a superfície, ou seja, a outra partícula pode atravessar a superfície (caso contrário teríamos um vínculo não-holônomo).
- 5.4. Escreva as equações de vínculo de um sistema semelhante ao do item anterior, com a diferença de que ao invés de uma haste rígida ligando as partículas temos uma mola.
- 5.5. Escreva as equações de vínculo na forma holônoma de um sistema tipo pêndulo com uma haste de comprimento ℓ e onde uma das extremidades da haste é acelerada ao longo do eixo y com aceleração constante a .
- 5.6. Um sistema de dois corpos celestes está restrito a um movimento planar. Escolhendo esse plano como sendo o plano xy , escreva as equações de vínculo para esse sistema.

6. Vínculos holônomos e coordenadas generalizadas

Os vínculos restringem os movimentos possíveis de um sistema e, com isso, reduzem o número de “graus de liberdade” do mesmo. O número de graus de liberdade do sistema é o número de coordenadas necessárias para representar as posições de todas as partículas do sistema. Em um sistema de n partículas sem vínculo, o número de graus de liberdade é $3n$, pois para cada partícula precisamos de três coordenadas para determinar a sua posição. Em um sistema com vínculos, esse número é menor. Por exemplo, no caso de um pêndulo planar, temos dois vínculos e, com isso, ao invés de três graus de liberdade, temos apenas um, sendo necessário saber apenas o ângulo que o pêndulo faz com o eixo vertical para determinar todas as outras três coordenadas. Podemos escrever isso explicitamente através das relações

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \ell \sin \theta, \\ z = -\ell \cos \theta. \end{cases}$$

Observe que nessa forma escolhemos o ângulo θ como sendo o ângulo entre o vetor $(0, 0, -1)$ e o vetor posição da extremidade livre, no sentido anti-horário. Isso foi escolhido de forma a tornar o ângulo $\theta = 0$ correspondendo à posição de equilíbrio $(x, y, z) = (0, 0, -\ell)$, no caso de considerarmos a atração gravitacional ao longo do

eixo z e no sentido contrário ao de crescimento de z . Logo, z representa a “altura” da extremidade livre do pêndulo.

De outra forma, podemos escrever

$$(x, y, z) = (0, \ell \sin \theta, -\ell \cos \theta).$$

Nesse caso, chamamos θ de “coordenada generalizada” do sistema.

Em muitos casos, as coordenadas de um sistema de n partículas com n_0 vínculos podem ser escritas explicitamente em termos da variável temporal t e de $d = n - n_0$ *coordenadas generalizadas* q_1, \dots, q_d , ou seja

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_d, t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Para isso, os vínculos têm que ser, em particular, independentes.

De fato, podemos escrever três vínculos para o sistema do pêndulo planar,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2, \\ y^2 + z^2 = \ell^2, \\ x = 0. \end{cases}$$

mas é óbvio que eles são redundantes. Podemos pegar quaisquer duas equações dessas três que continuamos com os mesmo vínculos. Dessa forma, se tivermos r vínculos “independentes”, então em geral podemos escrever as coordenadas das partículas do sistema em termos de $d = 3n - r$ coordenadas generalizadas. Escondido nessa afirmação está o Teorema da Função Implícita, que dá condições para escrevermos as $3n$ coordenadas em função de apenas d coordenadas. Mas lembrem-se que esse teorema é local, ou seja as condições do teorema só dão uma representação desse tipo localmente, próximo a um ponto onde a diferencial da função de vínculo Φ em relação a certas r coordenadas é inversível. Mas não vamos nos preocupar com essas condições. Trataremos de exemplos em que essa representação pode ser dada globalmente e de maneira natural em termos de certas coordenadas generalizadas, como em coordenadas polares, esféricas, cilíndricas ou apenas algumas das coordenadas cartesianas, como no caso de uma partícula restrita a uma superfície $z = h(x, y)$.

Em certos casos, pode ser natural tratar alguns vínculos de forma explícita e outros de forma implícita.

Por exemplo, o pêndulo girante é um sistema em que um pêndulo é forçado a girar com velocidade angular constante ω em torno de um eixo vertical passando pelo ponto onde fica a extremidade fixa da haste. Usando coordenadas esféricas para determinar a posição $\mathbf{r} = (x, y, z)$ da extremidade livre da haste, temos, explicitamente, as condições

$$\begin{cases} x = \ell \sin \varphi \cos \theta, \\ y = \ell \sin \varphi \sin \theta, \\ z = -\ell \cos \varphi. \end{cases}$$

observe que dessa forma a extremidade fixa da haste está na origem do sistema e o ângulo φ representa o ângulo o eixo $-z$ e o vetor posição \mathbf{r} , de modo que $\varphi = 0$

corresponde ao ponto de equilíbrio $\mathbf{r} = (0, 0, -\ell)$ do pêndulo. Mas a representação acima não leva em consideração ainda a condição do pêndulo girar com velocidade angular constante ω em torno do eixo vertical z . Isso pode ser expresso através do vínculo

$$\dot{\theta} = \omega.$$

Temos, assim, coordenadas generalizadas θ e φ , com a representação

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta, \varphi) = (\ell \sin \varphi \cos \theta, \ell \sin \varphi \sin \theta, -\ell \cos \varphi),$$

com o vínculo

$$\dot{\theta} = \omega.$$

Esse vínculo não está na forma holônoma, mas pode ser transformado em vínculo holônomo escrevendo-o como

$$\theta = \omega t,$$

e considerando $\theta = 0$ como representando a situação no instante inicial. Assim, podemos reduzir ainda mais o sistema, a um único grau de liberdade, com coordenada generalizada φ , escrevendo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi, t) = (\ell \sin \varphi \cos(\omega t), \ell \sin \varphi \sin(\omega t), -\ell \cos \varphi).$$

Exercícios

- 6.1.** Considere um sistema de pêndulo duplo planar, com hastes de comprimento $\ell_1, \ell_2 > 0$. Use como coordenadas generalizadas os ângulos θ_1 e θ_2 que cada pêndulo faz com o eixo vertical, a partir da posição de equilíbrio com os pêndulos “para baixo” e crescendo no sentido anti-horário. Escreva as coordenadas \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 de cada pêndulo em termos de θ_1 e θ_2 .
- 6.2.** Generalize a questão anterior para o caso de n pêndulos de comprimento $\ell_1, \dots, \ell_n > 0$ e massas $m_1, \dots, m_n > 0$.
- 6.3.** Considere um objeto preso a uma mola onde a outra extremidade da mola está presa à origem de um sistema de coordenadas xyz . Considere apenas movimentos planares da mola, com o objeto restrito ao plano yz . Use como coordenadas generalizadas o comprimento r da mola e o ângulo θ que o vetor posição do objeto faz com o eixo $-z$, no sentido anti-horário. Escreva as coordenadas da posição do objeto em termos de r e θ .
- 6.4.** Escolha duas variáveis generalizadas apropriadas para representar o sistema de um pêndulo de comprimento ℓ onde uma das extremidades da haste está restrita à circunferência de raio $a > 0$ no plano xy e centro na origem do eixo xyz e a outra extremidade está restrita a oscilar no plano perpendicular à reta que liga a origem a extremidade restrita à circunferência.

7. Modelagem Lagrangiana de sistemas com vínculos

A grande vantagem da modelagem Lagrangiano é o tratamento de sistemas com vínculos. Nessa modelagem, não é necessário achar as forças de tensão que mantêm os vínculos. As forças de vínculo aparecem naturalmente.

Assim, se os vínculos podem ser escritos explicitamente em termos de coordenadas generalizadas, ou seja, se a posição \mathbf{r}_i de cada partícula pode ser escrita em termos da variável temporal e de d coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_d ,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_d, t),$$

então podemos escrever o Lagrangiano em termos da variável temporal t , das coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_d e das suas velocidades generalizadas $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_d$,

$$L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

onde $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_d)$ e $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_d)$. As equações de Euler-Lagrange para esse Lagrangiano são equações de segunda ordem para as coordenadas generalizadas \mathbf{q} :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0. \quad (7.1)$$

Este é um sistema de d equações de segunda ordem,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{\partial L}{\partial q_k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0, \quad k = 1, \dots, d. \quad (7.2)$$

No caso do Lagrangiano do sistema sem vínculos ter a forma

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = K(\dot{\mathbf{r}}) - V(t, \mathbf{r}),$$

então, para o sistema com vínculos, basta substituir \mathbf{r} por $\mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$, em função de \mathbf{q} , e usar a regra da cadeia para substituir $\dot{\mathbf{r}}$ por

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(\mathbf{q}, t) = D_{\mathbf{q}} \mathbf{r}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \partial_t \mathbf{r}(\mathbf{q}, t),$$

onde $\partial_t \mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$ indica simplesmente a derivada parcial de $\mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$ em relação a segunda variável, t , e $D_{\mathbf{q}} \mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$ indica o operador diferencial das derivadas parciais de $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ em relação às variáveis $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_d)$. Observe que esse operador diferencial é um operador de \mathbb{R}^d em \mathbb{R}^{3n} .

Assim,

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = K(D_{\mathbf{q}} \mathbf{r}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \partial_t \mathbf{r}(\mathbf{q}, t)) - V(t, \mathbf{r}(\mathbf{q}, t)).$$

Por exemplo, no caso do pêndulo planar, temos um grau de liberdade, $d = 1$, com a coordenada generalizada $q_1 = \theta$, e a posição $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ dada em termos de θ pela relação

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta) = (0, \ell \sin \theta, -\ell \cos \theta).$$

Assim, a velocidade se escreve em termos de θ e $\dot{\theta}$ como

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} (0, \ell \sin \theta, -\ell \cos \theta) = (0, \ell \dot{\theta} \cos \theta, \ell \dot{\theta} \sin \theta).$$

E a energia cinética é dada por

$$\frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \ell^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

Em geral, a energia cinética pode depender da própria coordenada generalizada, no caso θ , mas nesse caso em particular, a dependência em θ desaparece e a energia cinética depende apenas de $\dot{\theta}$:

$$K(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

A energia potencial é mgz , com $z = -mg \cos \theta$, ou seja,

$$V(\theta) = -mg\ell \cos \theta.$$

Assim, o Lagrangiano toma a forma

$$L(\theta, \dot{\theta}) = K(\dot{\theta}) - V(\theta) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell \cos \theta.$$

Para achar as equações de Euler-Lagrange associadas a esse Lagrangiano, calculamos as derivadas

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta}L(\theta, \dot{\theta}) &= -mg\ell \sin \theta, \\ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}L(\theta, \dot{\theta}) &= m\ell^2\dot{\theta}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}L(\theta, \dot{\theta}) &= m\ell^2\ddot{\theta}.\end{aligned}$$

Logo, as equações de Euler-Lagrange para o sistema tomam a forma

$$m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta = 0.$$

Essa equação é equivalente à equação obtida pela segunda lei de Newton, onde fazemos a decomposição da força gravitacional em uma componente tangencial ao movimento, cancelando a parte normal com a força de tensão na haste, e que leva à equação

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta.$$

Exercícios

- 7.1.** Verifique que o problema de um corpo de massa m e altura z em queda livre vertical próximo a superfície da Terra pode ser modelado via equações de Euler-Lagrange com o Lagrangiano

$$L(z, \dot{z}) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz,$$

onde $V(z) = mgz$ é o potencial da força gravitacional próximo à superfície da Terra. Mais precisamente, considere z como coordenada generalizada, obtenha o Lagrangiano acima em termos dessa coordenada generalizada e

mostre que as equações de Euler-Lagrange para esse Lagrangiano coincidem com as equações de Newton para esse problema.

- 7.2.** Da mesma forma, verifique que o sistema massa-mola horizontal com um corpo de massa $m > 0$ e uma mola harmônica com coeficiente de restituição $k > 0$ pode ser modelado através do Lagrangiano

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2,$$

onde $V(x) = kx^2/2$ é o potencial da mola harmônica.

- 7.3.** Ache a equação de movimento para o problema do pêndulo girante tratado na seção 6.
- 7.4.** Considere um problema em que uma partícula de massa m_1 está pendurada por um fio de tal forma que ela está restrita a um movimento vertical ao longo do eixo z . Imagine que há uma mesa no plano xy e que o fio passa através da mesa por um buraco localizado na origem. A outra ponta do fio está presa a uma partícula de massa m_2 que está restrita a se movimentar no plano xy . O comprimento do fio é ℓ . Use coordenadas polares para representar a posição da segunda partícula, de modo que

$$\mathbf{r}_2 = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0),$$

de tal forma que a primeira partícula está localizada em

$$\mathbf{r}_1 = (0, 0, r - \ell),$$

assumindo que $r \leq \ell$, caso contrário, em termos físicos, a primeira partícula teria atravessado o buraco da mesa e se encontraria em cima da mesa e fora do eixo z .

Usando (r, θ) como coordenadas generalizadas, encontre o Lagrangiano desse sistema e as equações de movimento correspondentes.

Em seguida, encontre para cada raio $R < \ell$, uma velocidade angular ω tal que a primeira partícula se mantém em equilíbrio, i.e. encontre ω tal que $(r(t), \theta(t)) = (R, \omega t)$ é uma solução do sistema.

- 7.5.** Considere uma partícula de massa m se movendo sobre a curva $z = h(y)$, $x = 0$ e sob a atração gravitacional uniforme ao longo de z e no sentido contrário ao de crescimento de z (ou seja, z é uma “altura”). Podemos considerar y como uma coordenada generalizada. Escreva o Lagrangiano $L = L(y, \dot{y})$ desse sistema com vínculo e ache a equação de Euler-Lagrange associada a esse sistema.
- 7.6.** Considere uma partícula de massa m se movendo sobre uma superfície $z = h(x, y)$ e sob a ação gravitacional ao longo do eixo z e contrária ao sentido de crescimento de z . Tomando x e y como coordenadas generalizadas, escreva o Lagrangiano $L(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ e as equações de Euler-Lagrange correspondentes.
- 7.7.** Considere duas partículas de massas m_1 e m_2 se movendo ao longo de uma curva convexa $z = h(y)$, $x = 0$, sob a ação gravitacional ao longo da “altura”

z e unidas por uma mola de harmônica com coeficiente de restituição k e comprimento de equilíbrio ℓ_0 . Use como coordenadas generalizadas as coordenadas y_1 e y_2 de cada partícula. Ache o Lagrangiano $L(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2)$ desse sistema e escreva as equações de Euler-Lagrange desse sistema.

- 7.8.** Considere um sistema de pêndulo duplo planar, com hastes de comprimento $\ell_1, \ell_2 > 0$ e massas $m_1, m_2 > 0$, sob a ação da gravidade próxima à superfície da Terra. Use como coordenadas generalizadas os ângulos θ_1 e θ_2 que cada pêndulo faz com o eixo vertical, a partir da posição de equilíbrio com os pêndulos “para baixo” e crescendo no sentido anti-horário. Ache o Lagrangiano desse sistema e as equações de Euler-Lagrange correspondentes.
- 7.9.** Generalize a questão anterior para o caso de n pêndulos de comprimento $\ell_1, \dots, \ell_n > 0$ e massas $m_1, \dots, m_n > 0$.
- 7.10.** Considere um objeto de massa $m > 0$ preso a uma mola harmônica com coeficiente de restituição $k > 0$ e comprimento de equilíbrio ℓ_0 , onde a outra extremidade da mola está presa à origem de um sistema de coordenadas xyz . Considere apenas movimentos planares da mola, com a massa restrita ao plano yz . Use como coordenadas generalizadas o comprimento r da mola e o ângulo θ que o vetor posição da massa faz com o eixo $-z$, no sentido anti-horário. Escreva o Lagrangiano desse sistema e as equações de Euler-Lagrange correspondentes.
- 7.11.** Considere dois Lagrangianos que diferem apenas por um termo que é uma derivada temporal de uma função que depende apenas do tempo e das coordenadas generalizadas, i.e.

$$\tilde{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{d}{dt}G(\mathbf{q}, t).$$

Mostre que as equações de Euler-Lagrange associadas aos dois Lagrangianos são idênticas.

8. Sistemas com vínculos implícitos

Às vezes não é tão óbvio ou não é necessário escrever os vínculos de maneira explícita. É possível trabalhar com eles de maneira implícita, baseado no método de multiplicadores de Lagrange.

Considerando um sistema de $n \in \mathbb{N}$ partículas com posições $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ e com $n_0 \in \mathbb{N}$, $1 \leq n_0 < n$, vínculos implícitos representados pelas equações

$$\Phi_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0, \quad k = 1, \dots, n_0.$$

temos um sistema com $d = n - n_0$ graus de liberdade. Mas não vamos reduzir o sistema explicitamente em termos de d coordenadas generalizadas. Vamos trabalhar com os vínculos de maneira implícita.

Caso o sistema sem os r vínculos implícitos tenha o Lagrangiano

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t),$$

então, para o sistema com os vínculos implícitos, consideramos o novo Lagrangiano

$$L_{\Phi}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\boldsymbol{\lambda}}, t) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \Phi(\mathbf{r}, t),$$

nas novas $3n + r$ coordenadas

$$(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}) = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \lambda_1, \dots, \lambda_r),$$

onde

$$\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_r).$$

As equações de Euler-Lagrange para esse novo Lagrangiano são

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{\Phi}}{\partial(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\boldsymbol{\lambda}})}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\boldsymbol{\lambda}}) - \frac{\partial L_{\Phi}}{\partial(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda})}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\boldsymbol{\lambda}}) = 0.$$

Mas como L_{Φ} na verdade não depende explicitamente de $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ e a dependência em $\boldsymbol{\lambda}$ é linear, essas equações podem ser reduzidas à seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \boldsymbol{\lambda} \cdot D_{\mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}, t). \\ \Phi(\mathbf{r}, t) = 0. \end{cases} \quad (8.1)$$

Na equação acima, $\boldsymbol{\lambda}$ é um vetor de r coordenadas e $D_{\mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}, t)$ é a matriz $r \times 3n$ das derivas parciais de $\Phi(\mathbf{r}, t) = (\Phi_1, \dots, \Phi_r)$ em relação a $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$, e o produto $\boldsymbol{\lambda} \cdot D_{\mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}, t)$ é para ser entendido como o vetor de d coordenadas formadas pelo produto escalar entre $\boldsymbol{\lambda}$ e cada coluna dessa matriz. Lembrem-se que as $3n$ colunas dessa matriz são as derivadas parciais do vetor $\Phi(\mathbf{r}, t)$ em relação às coordenadas $(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$ de \mathbf{r} , enquanto que as suas r linhas são os gradientes $\partial \Phi_k / \partial \mathbf{r}$.

Interpretando

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$$

como o momento do sistema e

$$\mathbf{F} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \boldsymbol{\lambda} \cdot D_{\mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}, t)$$

como as forças atuando no sistema, podemos interpretar o termo

$$\mathbf{F}_{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \cdot D_{\mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}, t)$$

como representando as tensões, ou forças de vínculo do sistema (provenientes dos vínculos implícitos $\Phi = 0$), enquanto que

$$\mathbf{F}_0 = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$$

são as forças aplicadas independentes dos vínculos implícitos.

Observe que em cada instante de tempo t , o conjunto

$$\mathcal{M}_{\Phi} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3n}; \Phi(\mathbf{r}, t) = 0\}$$

forma uma “superfície” de dimensão d no espaço \mathbb{R}^{3n} ; é a “superfície de nível zero” de $\Phi(\cdot, t)$. Por sua vez, o vetor $\boldsymbol{\lambda} \cdot D_{\mathbf{r}}\Phi(\mathbf{r}, t)$ pode ser reinterpretado como uma combinação linear dos gradientes $\partial\Phi_k/\partial\mathbf{r}$, $k = 1, \dots, r$, i.e.

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot D_{\mathbf{r}}\Phi(\mathbf{r}, t) = \lambda_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{r}, t) + \dots + \lambda_r \frac{\partial\Phi_r}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{r}, t).$$

Esses gradientes geram o espaço “normal” à “superfície” de nível zero de $\Phi(\cdot, t)$, em cada instante de tempo t . As tensões, ou forças de vínculo, são, então, normais à superfície à qual o movimento está restrito, e são forças necessárias para manter o movimento nessa superfície.

Exercícios

8.1. Obtenha o sistema

$$\begin{cases} x = 0, \\ \ddot{y} = \frac{bcg}{b^2 + c^2}, \\ z = \frac{d - by}{c}, \end{cases}$$

para o movimento de uma partícula de massa m e centro de massa $\mathbf{r} = (x, y, z)$ deslizando sobre a reta de equações $by + cz = d$, $x = 0$, com $c \neq 0$, $b, d \in \mathbb{R}$, a partir das equações de Euler-Lagrange do sistema com vínculo implícito representado pelo Lagrangiano

$$L_{\Phi}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz + \lambda_1 x + \lambda_2(by + cz - d),$$

onde $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ é o vetor de multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos

$$\Phi(x, y, z) = 0,$$

onde

$$\Phi(x, y, z) = (\Phi_1(x, y, z), \Phi_2(x, y, z)) = (x, by + cz - d).$$

8.2. Obter as equações diferenciais de segunda ordem para x e y associado ao deslizamento de uma partícula sobre o plano $ax + by + cz = d$, com $c \neq 0$, $a, b, d \in \mathbb{R}$, a partir do método de multiplicadores de Lagrange, ou seja, tratando esses vínculos implicitamente, de maneira semelhante ao exercício 1.

8.3. Considere o problema do movimento de uma partícula sobre uma curva $z = h(y)$, $x = 0$, sob a ação da gravidade com aceleração uniforme $(0, 0, -g)$. Esse problema foi tratado no exercício 5 da seção 7. Obtenhas a mesma equação para y mas desta vez tratando os vínculos de maneira implícita.

8.4. Vimos que as equações (8.1) podem ser interpretadas na forma

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_{\boldsymbol{\lambda}}$$

onde \mathbf{p} é o momento generalizado do sistema, \mathbf{F}_0 são as forças aplicadas independentes dos vínculos e \mathbf{F}_λ são as tensões relacionadas às forças de vínculo. Essas tensões são da forma

$$\mathbf{F}_\lambda = \boldsymbol{\lambda} \cdot D_{\mathbf{r}}\Phi(\mathbf{r}, t),$$

indicando que elas são normais à superfície.

O termo $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(t)$ varia ao longo do movimento e está diretamente associado à magnitude das forças de tensão. Quando $\boldsymbol{\lambda} = 0$, as tensões são nulas e o momento \mathbf{p} e as forças \mathbf{F}_0 estão em equilíbrio. Em um problema em que uma partícula desliza sobre uma superfície, as tensões são perpendiculares à superfície e naturalmente apontam para cima, contrabalançando a componente normal da força da gravidade. O momento t_0 em que essas tensões se anulam, i.e. $\boldsymbol{\lambda}(t_0) = 0$, é um possível momento de descolamento da partícula da superfície. Esse descolamento ocorre no caso em que $\boldsymbol{\lambda}$ troca de sentido ao passar pelo instante t_0 . A partir desse momento, o modelo passa a não ser mais válido, pois as tensões teriam o mesmo sentido que a força da gravidade. O modelo real associado a esse problema é o caso de uma partícula deslizando entre duas superfícies superpostas, onde em certos momentos a partícula está sendo pressionada contra a superfície inferior e em outros momentos, contra a superfície superior, dependendo do sentido de $\boldsymbol{\lambda}$. Mas no caso de apenas uma superfície, onde a partícula se apóia, ela se descola da superfície quando o $\boldsymbol{\lambda}$ troca de sentido, tornando o vínculo inválido, invalidando também o modelo baseado nesse vínculo; a partir desse momento, a partícula sofre apenas a ação da gravidade, até cair e tocar de novo na superfície.

Em um exemplo prático, considere uma partícula deslizando sobre uma superfície de gráfico $z = h(y)$. Para simplificar, vamos assumir que $x = 0$ e, na verdade, o movimento é sobre uma curva, como no exercício 3. Então temos dois vínculos, com dois multiplicadores de Lagrange, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$. O vínculo associado a $x = 0$ é trivial e o multiplicador de Lagrange correspondente é nulo, digamos $\lambda_1 = 0$. O multiplicador de Lagrange λ_2 associado ao vínculo $z - h(y) = 0$ é, em geral, não nulo. Como

$$\nabla_{(y,z)}(z - h(y)) = (-h'(y), 1),$$

vemos que esse vetor normal à superfície aponta “para cima”, pois a sua componente z é positiva. Assim, a partícula se mantém apoiada na superfície enquanto λ_2 for positivo, indicando que a força de tensão aponta “para cima”, contrabalançando o peso do objeto. O descolamento ocorre no instante a partir do qual λ_2 passa a ser negativo. Assumindo que h seja duas vezes continuamente diferenciável, mostre o fato natural de que o descolamento só pode ocorrer em um ponto y onde a curvatura é negativa, ou seja $h''(y) < 0$.

- 8.5.** Utilizando o resultado do exercício 4, considere $h(y)$ duas vezes continuamente diferenciável e com uma certa forma de rampa, dada por

$$h(y) = -ay \text{ para } y \leq 0, \text{ com } h''(y) < 0 \text{ para } y > 0,$$

e observe que o descolamento não pode ocorrer em $y = 0$, apenas em algum ponto $y > 0$. Ou seja, a inclinação obtida pela partícula no momento do descolamento é sempre inferior à inclinação da rampa!

- 8.6.** Considere ainda o problema de uma partícula de massa m deslizando sobre a curva $z = h(y)$, $x = 0$, tratado no exercício 4. Suponha que a curva seja uma parábola com concavidade para cima ($h'' > 0$ e $h''' = 0$). Mostre que força normal é máxima no ponto de mínimo da parábola. (Tome cuidado com o fato de que a magnitude da força normal não é apenas λ , pois o vetor gradiente $\nabla\Phi(y, z) = (-h'(y), 1)$ à superfície $\Phi(y, z) = z - h(y)$ nem sempre é unitário.)

9. Sistemas com vínculos implícitos e explícitos

Em vários casos, pode ser prático escrever apenas parte dos vínculos de maneira implícita e a outra parte, explícita, ou seja

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q'_d, t), \quad i = 1, \dots, n,$$

em $d' \in \mathbb{N}$ coordenadas generalizadas q_1, \dots, q'_d , com certos vínculos implícitos nessas coordenadas generalizadas, i.e.

$$\Phi_k(q_1, \dots, q'_d, t) = 0, \quad k = 1, \dots, r'.$$

Nesse caso, assumindo os vínculos independentes, o número de graus de liberdade do sistema é $d = d' - r'$.

Caso o sistema com os vínculos explícitos mas sem os r' vínculos implícitos tenha o Lagrangiano

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

então, para o sistema com os vínculos implícitos, consideramos o novo Lagrangiano

$$L_{\Phi}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\boldsymbol{\lambda}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}, t),$$

nas novas coordenadas

$$(\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}) = (q_1, \dots, q_{d'}, \lambda_1, \dots, \lambda_{r'}),$$

onde

$$\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_1, \dots, \Phi_{r'}).$$

As equações de Euler-Lagrange para esse novo Lagrangiano são

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{\Phi}}{\partial(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\boldsymbol{\lambda}})}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\boldsymbol{\lambda}}) - \frac{\partial L_{\Phi}}{\partial(\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda})}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\boldsymbol{\lambda}}) = 0.$$

Mais uma vez, como L_Φ não depende explicitamente de $\dot{\lambda}$ e a dependência em λ é linear, essas equações podem ser reduzidas à forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \lambda \cdot D_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q}, t). \\ \Phi(\mathbf{q}, t) = 0. \end{cases} \quad (9.1)$$

Analogamente, o produto $\lambda \cdot D_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q}, t)$ é o o vetor de d' coordenadas formadas pelo produto escalar entre λ e cada coluna $\partial_{q_j} \Phi(\mathbf{q}, t)$ dessa matriz.

Exercícios

- 9.1.** Considere novamente o problema em que uma partícula de massa m_1 está pendurada por um fio de comprimento ℓ de tal forma que ela está restrita a um movimento vertical ao longo do eixo z e com uma mesa no plano xy com um buraco na origem por onde passa o fio, que tem na sua outra ponta uma partícula de massa m_2 que está restrita a se movimentar no plano xy . Use coordenadas polares para representar a posição da segunda partícula, de modo que

$$\mathbf{r}_2 = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0),$$

e use a distância h da primeira partícula à mesa, de tal forma que

$$\mathbf{r}_1 = (0, 0, -h).$$

Nesse caso, tratamos o fio como uma restrição implícita, dada por

$$\Phi(r, h) = r + h = \ell,$$

com $0 \leq r, h < \ell$ por razões físicas.

Usando (r, θ, h) como coordenadas generalizadas e utilizando um multiplicador de Lagrange λ associado à essa restrição implícita, encontre o Lagrangiano $L_\Phi(r, \theta, h, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{h})$ desse sistema.

Encontre as equações de Euler-Lagrange para esse sistema e, em seguida, elimine λ do sistema para obter as equações de movimento em (r, θ) como no exercício 7.4.

Finalmente, resolva para λ em função apenas de r e $\dot{\theta}$ e deduza que a tensão no fio é dada por

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (r \dot{\theta}^2 + g).$$

Para que a primeira partícula se mantenha em equilíbrio, a tensão deve compensar o peso, ou seja, $T = m_2 g$. Use essas duas informações para obter a relação entre ω e R para que o sistema se mantenha em equilíbrio, com a segunda partícula girando com velocidade angular $\dot{\theta} = \omega$ a uma distância $r = R$ da origem. Compare esse resultado com o resultado correspondente obtido no exercício 7.4 de outra maneira.

10. Campos de força

Escrever sobre campos de força. Escrever sobre campos conservativos. Escrever especificamente sobre campos gravitacionais, campos elétricos, campos magnéticos e campos eletromagnéticos.

CAPÍTULO 4

Leis de conservação

1. Leis de conservação via leis de Newton

Nesta parte, vamos considerar um sistema de n partículas, com coordenadas

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$$

em um referencial inercial, onde $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3$ são as coordenadas espaciais de cada partícula, $i = 1, \dots, n$. Nesse sistema age um conjunto de forças

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}) = (\mathbf{F}_1(t, \mathbf{r}), \dots, \mathbf{F}_n(t, \mathbf{r})),$$

representando a combinação das forças agindo em cada partícula e dependendo da configuração geral do sistema. Pela segunda lei de Newton, temos

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i(t, \mathbf{r}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Vamos considerar uma separação das forças entre forças internas, de interação entre partículas, e forças externas,

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{F}^{(i)}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}^{(e)}(t, \mathbf{r}).$$

onde as forças internas são assumidas agindo entre pares de partículas e independentes explicitamente do tempo. Mais precisamente, a força interna $\mathbf{F}_i^{(i)}(\mathbf{r})$ agindo na partícula i é suposta como sendo um somatório de forças de interação com cada uma das outras partículas:

$$\mathbf{F}_i^{(i)}(\mathbf{r}) = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j).$$

Consideramos, ainda, dois casos de sistemas, satisfazendo diferentes versões da terceira lei de Newton, de ação e reação:

Forma fraca da terceira lei de Newton: As forças de interação entre duas partículas agem, em cada uma delas, com a mesma intensidade e em sentidos contrários:

$$\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = -\mathbf{F}_{ji}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i).$$

Forma forte da terceira lei de Newton: As forças de interação entre duas partículas agem, em cada uma delas, com a mesma intensidade, em sentidos contrários e na direção que une essas duas partículas,

$$\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = -\varphi(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}, \quad \varphi_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \varphi_{ji}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i).$$

Não assumimos nada de especial em relação à força externa, mas em geral ela depende apenas da posição da partícula em questão, ou seja $\mathbf{F}_i^{(e)} = \mathbf{F}_i^{(e)}(\mathbf{r}_i, t)$.

A terceira lei de Newton é relevante para a conservação dos momentos linear e angular do sistema. Para a conservação de energia, fazemos a hipótese de que as forças são conservativas, i.e. provenientes de um potencial $V(t, \mathbf{r})$:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}(t, \mathbf{r}), \quad i = 1, \dots, n.$$

1.1. Conservação de momento linear. O *momento linear total* $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3$ do sistema é definido pela somatório do momento linear $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ de todas as partículas:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i.$$

Definindo

$$\mathbf{C}_M = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i$$

como o *centro de massa* do sistema, onde

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

é a *massa total* do sistema, observe o momento linear total do sistema é igual ao momento linear de uma partícula de massa m localizada no centro de massa:

$$\mathbf{P} = m \dot{\mathbf{C}}_M,$$

como se o sistema estivesse todo concentrado no centro de massa.

Somando as equações de movimento de todas as partículas obtemos

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_T,$$

onde

$$\mathbf{F}_T(t, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i(t, \mathbf{r})$$

é a força total exercida no sistema. Essa força total pode ser separada em força total interna e força total externa:

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{F}_T^{(i)} + \mathbf{F}_T^{(e)}, \quad \mathbf{F}_T^{(i)}(t, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(i)}, \quad \mathbf{F}_T^{(e)}(t, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(e)}$$

O momento linear é conservado no caso em que as duas condições a seguir são satisfeitas:

- (i) As forças internas satisfazem a forma fraca da terceira lei de Newton; e
- (iii) O força externa total é nula.

Sob essas condições,

$$\dot{\mathbf{P}} = 0.$$

e o momento angular é constante ao longo do movimento, igual a um vetor fixo $\mathbf{P}_0 \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0, \quad \forall t.$$

1.2. Conservação de momento angular. O momento angular se refere a uma rotação em relação a algum ponto dado. É uma “quantidade de movimento” em torno desse ponto.

O *momento angular total* do sistema em torno de um certo ponto \mathbf{r}_0 é o somatório do momento angular $m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \dot{\mathbf{r}}_i$ de todas as partículas:

$$\mathbf{L}_{\mathbf{r}_0} = \sum_{i=1}^n m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{p}_i.$$

Utilizando as leis de movimento de Newton, podemos mostrar que

$$\dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{r}_0} = -\dot{\mathbf{r}}_0 \times \mathbf{P} + \mathbf{N}_{\mathbf{r}_0},$$

onde

$$\mathbf{N}_{\mathbf{r}_0} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_i$$

é o torque exercido pelas forças em relação ao ponto \mathbf{r}_0 . Esse torque pode ser separado em torque interno e externo, relativo à separação das forças entre internas e externas:

$$\mathbf{N}_{\mathbf{r}_0} = \mathbf{N}_{\mathbf{r}_0}^{(i)} + \mathbf{N}_{\mathbf{r}_0}^{(e)}, \quad \mathbf{N}_{\mathbf{r}_0}^{(i)} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_i^{(i)}, \quad \mathbf{N}_{\mathbf{r}_0}^{(e)} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_i^{(e)}.$$

O momento angular é conservado no caso em que as três condições a seguir são satisfeitas:

- (i) O ponto de referência \mathbf{r}_0 está fixo ou é o centro de massa;
- (ii) As forças internas satisfazem a forma forte da terceira lei de Newton; e
- (iii) O torque externo total é nulo.

Sob essas condições,

$$\dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{r}_0} = 0.$$

e o momento angular é constante ao longo do movimento.

1.3. Conservação de energia. Considere, agora, o caso em que as forças são autônomas e conservativas, i.e. provenientes de um potencial $V = V(\mathbf{r})$ independente do tempo:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{r}), \quad i = 1, \dots, n.$$

A energia total do sistema é a soma da energia cinética com a energia potencial:

$$E(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = K(\dot{\mathbf{r}}) + V(\mathbf{r}),$$

onde

$$K(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|\dot{\mathbf{r}}_i\|^2$$

é a energia cinética total do sistema.

Ao longo do movimento, a energia cinética varia de acordo com a equação

$$\dot{K} = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i.$$

No caso de forças autônomas conservativas, temos

$$\dot{K} = - \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{r}) = - \frac{d}{dt} V(\mathbf{r}),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}(K + V) = 0$$

e a energia total $E = K + V$ é conservada.

Exercícios

1.1. Mostre que

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_T,$$

i.e. para cada solução $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ das equações de Newton do sistema, vale

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) = \mathbf{F}_T(t, \mathbf{r}(t)).$$

1.2. Assumindo a forma fraca da terceira lei de Newton, mostre que

$$\mathbf{F}_T^{(i)} = 0, \quad \mathbf{F}_T = \mathbf{F}_T^{(e)},$$

i.e. o somatório das forças internas é nulo, pois a terceira lei de Newton faz com que as forças agindo em cada par de partículas se anulem, e com isso a força total é igual à força externa total.

1.3. No caso em que não há forças externas atuando no sistema e as forças internas satisfazem a forma fraca da terceira lei de Newton, conclua que o momento linear total é conservado ao longo do movimento, i.e. para cada solução $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_n(t))$ do sistema, o momento linear correspondente é constante, igual a um vetor fixo $\mathbf{P}_0 \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0, \quad \forall t.$$

1.4. Mostre que

$$\frac{d\mathbf{L}_{\mathbf{r}_0}}{dt} = -\dot{\mathbf{r}}_0 \times \mathbf{P} + \mathbf{N}_{\mathbf{r}_0}.$$

- 1.5.** Mostre que no caso em que o ponto de referência \mathbf{r}_0 está fixo, i.e. não variar com o tempo, ou esse ponto de referência é o centro de massa do sistema, $\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{C}_M(t)$, então o termo $\dot{\mathbf{r}}_0 \times \mathbf{P}$ é nulo e a equação do momento angular total em relação a \mathbf{r}_0 se reduz a

$$\frac{d\mathbf{L}_{\mathbf{r}_0}}{dt} = \mathbf{N}_{\mathbf{r}_0}.$$

- 1.6.** Mostre que se a forma forte da terceira lei de Newton vale para um sistema de forças \mathbf{F} , então o torque interno total é nulo:

$$\mathbf{N}_{\mathbf{r}_0}^{(i)} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_i^{(i)} = 0.$$

- 1.7.** Conclua que se o ponto de referência \mathbf{r}_0 está fixo ou é centro de massa do sistema, vale a forma forte da terceira lei de Newton, e o torque externo total é nulo, então o momento angular total é conservado:

$$\dot{\mathbf{L}}_{\mathbf{r}_0} = 0.$$

- 1.8.** Mostre que o momento angular em relação à origem para o movimento de uma partícula de massa m em um movimento circular de raio r e período T em torno da origem de um eixo inercial xyz e restrito ao plano xy é dado pelo vetor constante

$$\mathbf{L} = mr^2(0, 0, \omega),$$

onde $\omega = 2\pi/T$ é a frequência de oscilação.

- 1.9.** Mostre que a energia cinética satisfaz

$$\dot{K} = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{F}_i.$$

- 1.10.** No caso de uma partícula de massa m e posição $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ satisfazendo a equação de Newton $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r})$, mostre que a variação da energia cinética entre dois instantes t_1 e t_2 é dada por

$$K_2 - K_1 = W_{12},$$

onde $K_k = K(\dot{\mathbf{r}}(t_k))$ é a energia cinética no instante t_k , $k = 1, 2$, e W_{12} é o *trabalho* realizado para deslocar essa partícula da posição $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ até a posição $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$ através do caminho γ parametrizado por $t \mapsto \mathbf{r}(\cdot)$:

$$W_{12} = \int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt.$$

- 1.11.** Mostre que no caso conservativo,

$$W_{12} = -V_2 + V_1,$$

onde $V_i = V(\mathbf{r}(t_k))$, $k = 1, 2$ e, portanto, o trabalho W_{12} independe do caminho percorrido entre $\mathbf{r}(t_1)$ e $\mathbf{r}(t_2)$.

Lembre-se que em geral uma integral de linha depende do caminho ligando esses dois pontos. No caso de caminhos satisfazendo as equações de movimento de Newton, essa integral de linha, que é o trabalho, não depende completamente do caminho, apenas das energias cinéticas iniciais e finais (pois $W_{12} = K_2 - K_1$ como vimos antes, independente das forças serem conservativas ou não). A energia cinética depende da velocidade e é claro que segue das equações diferenciais de segunda ordem que regem o movimento, que a posição e a velocidade iniciais determinam unicamente o caminho (assumindo certas condições de regularidade nas funções representando as forças), mas no entanto a energia cinética é função da norma do vetor velocidade, sem indicação da direção, portanto a energia cinética inicial não determina unicamente o caminho e, com isso, o trabalho pode, em geral, depender do caminho.

No caso de forças potenciais, o resultado acima diz que o trabalho é independente do caminho que liga dois pontos, dependendo apenas desses pontos.

- 1.12.** No caso de um sistema de partículas, a variação da energia cinética total é dada pelo trabalho total:

$$K_2 - K_1 = W_{12},$$

onde

$$K_k = K(\dot{\mathbf{r}}(t_k)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|\dot{\mathbf{r}}_i(t_k)\|^2, \quad k = 1, 2,$$

é a energia cinética total do sistema nos instantes t_k , e

$$W_{12} = \int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i(t) dt$$

é o trabalho total realizado para deslocar o sistema da configuração no instante t_1 até a configuração no instante t_2 , e onde γ é o caminho, no espaço \mathbb{R}^{3n} , percorrido pelo conjunto das partículas entre os instantes t_1 e t_2 , parametrizado por $t \rightarrow \mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_n(t))$.

2. Leis de conservação via simetrias do Lagrangiano

Vamos agora considerar as leis de conservação a partir do Lagrangiano. Isso tem vantagens e desvantagens. Uma desvantagem é que nesse caso estamos restritos a problemas com forças conservativas. A grande vantagem é o tratamento facilitado de problemas com vínculos.

Vamos considerar Lagrangianos sem vínculos, do tipo

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t),$$

nas coordenadas espaciais $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ de n partículas, e Lagrangianos com vínculos,

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

escrito explicitamente em termos de coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_d)$.

As equações de movimento de Euler-Lagrange nos dão respectivamente

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0.$$

e

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0.$$

2.1. Conservação de momento linear. No caso sem vínculos, temos as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0.$$

No caso clássico em que $L = K - V$, o termo

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t).$$

coincide com o momento no sentido clássico, e a equação de movimento pode ser escrita como

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t).$$

Note que está é uma equação no espaço \mathbb{R}^{3n} , onde “mora” $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$. Isso pode ser escrito na forma de n equações em \mathbb{R}^3 , uma para cada partícula:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t).$$

O momento total do sistema é o somatório dos momentos individuais,

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i,$$

que é um elemento de \mathbb{R}^3 . A evolução do momento total pode ser escrita como

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t).$$

Para a conservação de momento linear total, \mathbf{P} deve ser constante em \mathbb{R}^3 ao longo do tempo. Isso quer dizer que cada coordenada dele deve ser constante. Isso pode ser escrito através da relação

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_k = \text{constante},$$

para cada $k = 1, 2, 3$, onde $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ formam a base canônica de \mathbb{R}^3 . Mais geralmente, podemos escrever a conservação de momento na forma

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{h} = \text{constante},$$

para qualquer vetor $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$ fixo. Para que isso seja verdade, devemos ter

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{h} = 0.$$

Observe que isso pode ser escrito na forma

$$\left. \frac{d}{ds} L(\mathbf{r} + s\mathbf{h}^n, \dot{\mathbf{r}}, t) \right|_{s=0} = 0,$$

onde $\mathbf{h}^n = (\mathbf{h}, \dots, \mathbf{h}) \in \mathbb{R}^{3n}$. Em outras palavras, a derivada direcional de $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ na direção $(\mathbf{h}^n, 0, 0)$ em $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ deve ser nula. Isso acontece quando o Lagrangiano $L(\mathbf{r} + s\mathbf{h}^n, \dot{\mathbf{r}}, t)$ é constante em s , ou seja, é constante quando fazemos uma translação de cada \mathbf{r}_i na direção \mathbf{h} , na forma $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + s\mathbf{h}^n$.

Se o Lagrangiano for invariante por translações de \mathbf{r}_i em qualquer direção, então o momento linear total é conservado.

Pode acontecer do Lagrangiano ser invariante por translações em apenas algumas direções, como no caso de um corpo em queda livre, tomando z como a direção perpendicular à superfície da Terra, de tal modo que o Lagrangiano é invariante por translações em x e y , mas não em z .

No caso de um Lagrangiano de um sistema com vínculos, escrito em coordenadas generalizadas

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

pode também acontecer de ele ser invariante por translações em apenas algumas das coordenadas generalizadas, ou seja, apenas na direção de um certo vetor $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q} + s\mathbf{h}$. Nesse caso, o momento generalizado conjugado a essas direções é conservado:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{h} = \text{constante},$$

onde

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

2.2. Grupos de simetria no espaço. As translações acima são exemplos de grupos de transformações. Um grupo de transformações é uma família de transformações parametrizada por um parâmetro pertencente a um grupo no sentido algébrico. Para explicar melhor isso, vamos relembrar o que é um grupo algébrico.

Um conjunto \mathcal{G} é um *grupo* quando está munido de uma operação $\oplus : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ com as propriedades i) de associatividade, $(g_1 \oplus g_2) \oplus g_3 = g_1 \oplus (g_2 \oplus g_3)$, para quaisquer $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{G}$; ii) existe um elemento neutro e tal que $g \oplus e = e \oplus g = g$ para todo $g \in \mathcal{G}$; e iii) para cada $g \in \mathcal{G}$ existe um elemento inverso \tilde{g} tal que $\tilde{g} \oplus g = g \oplus \tilde{g} = 0$.

Esse grupo é chamado comutativo, ou abeliano, quando iv) a operação é comutativa, $g_1 \oplus g_2 = g_2 \oplus g_1$, para quaisquer $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$. É comum explicitarmos a operação na definição de grupo escrevendo-o na forma (\mathcal{G}, \oplus) .

O exemplo de grupo comutativo que mais nos interessa é o de \mathbb{R} munido da operação de adição.

Voltando à definição de grupo de transformações, vamos nos restringir a grupos comutativos. Um *grupo de transformações* em um conjunto X é uma família $\{G_g\}_{g \in \mathcal{G}}$ de transformações $G_g : X \rightarrow X$ em X , parametrizada por um parâmetro g pertencente a algum grupo comutativo \mathcal{G} e satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $G_e = \text{identidade em } X$, onde e é o elemento identidade de \mathcal{G} ;
- (ii) $G_{g_1 \oplus g_2} = G_{g_1} \circ G_{g_2}$, para quaisquer $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$.

O nosso interesse é particularmente no caso $(\mathcal{G}, \oplus) = (\mathbb{R}, +)$, em que o grupo é simplesmente o conjunto dos números reais munido da operação de adição.

A translação das coordenadas generalizadas $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^d$ na direção de um vetor dado $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ pode ser colocada nesse contexto de grupo de transformações definindo

$$G_s(\mathbf{q}) = \mathbf{q} + s\mathbf{h}, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

No caso geral, denotando $\mathbf{q}_s = G_s(\mathbf{q})$, uma trajetória $\mathbf{q}(t)$ é transformada, para cada $s \in \mathcal{G}$, em uma trajetória $\mathbf{q}_s(t) = G_s(\mathbf{q}(t))$, cujo vetor velocidade é dado por

$$\dot{\mathbf{q}}_s = \frac{d}{dt}G_s(\mathbf{q}(t)) = D_{\mathbf{q}}G_s(\mathbf{q}(t))\dot{\mathbf{q}}(t).$$

onde $D_{\mathbf{q}}G_s(\mathbf{q})$ é o operador diferencial da transformação $\mathbf{q} \mapsto G_s(\mathbf{q})$.

No caso particular da translação, em que $G_s(\mathbf{q}) = \mathbf{h} + s\mathbf{h}$, temos simplesmente

$$\dot{\mathbf{q}}_s = \dot{\mathbf{q}},$$

pois para cada $s \in \mathbb{R}$, o vetor $s\mathbf{h}$ é constante em relação ao tempo. De outra maneira, temos, no caso da translação, que $D_{\mathbf{q}}G_s(\mathbf{q})$ é o operador identidade, logo

$$\dot{\mathbf{q}}_s = D_{\mathbf{q}}G_s(\mathbf{q}(t))\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}.$$

2.3. Simetrias espaciais do Lagrangiano. Vários sistemas físicos tem certas propriedades de simetria que podem ser identificadas através de simetrias do Lagrangiano, no sentido do Lagrangiano ser invariante por certos grupos de transformação.

Podemos pensar nessa terminologia de simetria fazendo uma analogia a simetria naturalmente associada a objetos invariantes por reflexão em relação a um plano, por exemplo, que pode ser considerado como um grupo de transformações formado por apenas dois elementos $\mathcal{G} = \{1, -1\}$, munido da operação de multiplicação, com $G_1 = \text{identidade}$, $G_{-1} = \text{reflexão em relação ao plano em questão}$. O conjunto de pontos de forma um objeto com essa simetria e invariante por aplicações das transformações G_1 e G_{-1} nesse grupo.

No caso em que o Lagrangiano é invariante por translações temos a transformação das variáveis $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ em $(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s, t) = (\mathbf{q} + s\mathbf{h}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, de tal forma que o Lagrangiano

não se altera:

$$L(\mathbf{q} + s\mathbf{h}, \mathbf{q}, t) = L(\mathbf{q}, \mathbf{h}, t), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Isso pode ser escrito na forma de invariância pelo grupo de transformações $\{G_s\}_{s \in \mathbb{R}}$, como

$$L(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \text{constante em } s \in \mathbb{R}.$$

onde $\mathbf{q}_s = G_s(\mathbf{q})$ e $\dot{\mathbf{q}}_s = dG_s(\mathbf{q})/dt$. A lei de conservação de momento linear sai do fato de que

$$\frac{d}{ds}L(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s, t) = 0, \quad \text{em } s = 0.$$

Essa derivada em relação ao parâmetro s é nula para todo s , mas nos interessa apenas o caso em que $s = 0$.

Mais geralmente, quando um Lagrangiano $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ satisfaz

$$L(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s, t), \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

para um grupo qualquer de transformações $\{G_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ na coordenadas \mathbf{q} , dizemos que esse Lagrangiano é invariante por esse grupo de transformações.

Nesse caso, a derivada em relação a s se anula,

$$\frac{d}{ds}L(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s, t) = 0,$$

o que nos dará uma certa lei de conservação. Mais explicitamente, temos

$$\frac{d}{ds}L(G_s(\mathbf{q}), \frac{d}{dt}G_s(\mathbf{q}), t) = 0.$$

Efetuada essa derivação, usando a regra da cadeia, e, em seguida, tomando $s = 0$, obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{d}{ds}G_s(\mathbf{q}) \Big|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{d}{ds} \frac{d}{dt}G_s(\mathbf{q}) \Big|_{s=0} = 0.$$

Como

$$\frac{d}{ds} \frac{d}{dt}G_s(\mathbf{q}) = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds}G_s(\mathbf{q})$$

e, pelas equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

obtemos

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right) \cdot \frac{d}{ds}G_s(\mathbf{q}) \Big|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \left(\frac{d}{dt} \frac{d}{ds}G_s(\mathbf{q}) \Big|_{s=0} \right) = 0.$$

Observe agora que essa expressão é uma derivada de um produto escalar, derivada esta que é, então, nula:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{d}{ds}G_s(\mathbf{q}) \Big|_{s=0} \right) = 0.$$

Portanto, esse produto escalar é constante,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{d}{ds} G_s(\mathbf{q}) \Big|_{s=0} = \text{constante}.$$

Denotando

$$\mathbf{a}(\mathbf{q}) = \frac{d}{ds} G_s(\mathbf{q}) \Big|_{s=0},$$

vemos que

$$J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{q}) = \text{constante em } t.$$

Lembrando a definição de momento generalizado

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

vemos que essa quantidade conservada pode ser escrita como

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{q}).$$

No caso de um sistema autônomo, em que $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ não depende explicitamente de t , temos a quantidade conservada escrita como

$$J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{q}) = \text{constante em } t.$$

2.4. Conservação de momento angular. Para a análise do momento angular, vamos considerar grupos de transformações associados a rotações no espaço. O grupo de rotações arbitrárias no espaço não é comutativo, mas podemos nos restringir a um certo subgrupo de rotações, formado por rotações em torno de um eixo fixo, que é comutativo. Mais precisamente, dado um vetor unitário $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$, vamos considerar o conjunto de rotações de um ângulo $\theta \in \mathbb{R}$ em torno do eixo gerado por $\boldsymbol{\omega}$ e no sentido da “regra da mão direita” com o polegar apontado no sentido de $\boldsymbol{\omega}$. Denotemos essa rotação por $R_{\boldsymbol{\omega}}(\theta)$. Podemos escrever essa rotação explicitamente na forma

$$R_{\boldsymbol{\omega}}(\theta)\mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} + \cos \theta (\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}) + \sin \theta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

para um vetor qualquer $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$.

Temos, assim, o grupo de transformações $\{R_{\boldsymbol{\omega}}(\theta)\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ em \mathbb{R}^3 . Observe que, por uma questão de interpretação física, o parâmetro que denotamos anteriormente por s está sendo denotado agora por θ .

No caso de um sistema de n partículas com coordenadas $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$, podemos considerar o grupo de transformações que roda cada coordenada \mathbf{r}_i de um ângulo θ em relação a $\boldsymbol{\omega}$, i.e.

$$R_{\boldsymbol{\omega}}^n(\theta)\mathbf{r} = (R_{\boldsymbol{\omega}}(\theta)\mathbf{r}_1, \dots, R_{\boldsymbol{\omega}}(\theta)\mathbf{r}_n), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Caso um Lagrangiano $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ seja invariante por $\{R_{\boldsymbol{\omega}}^n(\theta)\}_{\theta \in \mathbb{R}}$, i.e.

$$L(R_{\boldsymbol{\omega}}^n(\theta)\mathbf{r}, \frac{d}{dt} R_{\boldsymbol{\omega}}^n(\theta)\mathbf{q}) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad \forall \theta \in \mathbb{R},$$

então a quantidade

$$J(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r})$$

é conservada, onde

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \left. \frac{d}{d\theta} R_{\boldsymbol{\omega}}^n(\theta) \mathbf{r} \right|_{\theta=0}$$

Como

$$\frac{d}{d\theta} R_{\boldsymbol{\omega}}^n(\theta) \mathbf{r} = \left(\frac{d}{d\theta} R_{\boldsymbol{\omega}}(\theta) \mathbf{r}_1, \dots, \frac{d}{d\theta} R_{\boldsymbol{\omega}}(\theta) \mathbf{r}_n \right)$$

e

$$\frac{d}{d\theta} R_{\boldsymbol{\omega}}(\theta) \mathbf{r}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i,$$

temos que

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1, \dots, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n).$$

Como

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_1}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \dots, \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_n}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \right) = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n),$$

então

$$J(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i).$$

Usando a identidade vetorial $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$ temos que

$$J(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \right) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_0$$

que é a componente na direção $\boldsymbol{\omega}$ do momento angular \mathbf{L}_0 em relação à origem.

Quando o Lagrangiano é invariante por rotações em torno de qualquer eixo $\boldsymbol{\omega}$, então o vetor momento angular total

$$\mathbf{L}_0 = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

é conservado.

Fizemos isso para rotações em torno de eixos passando pela origem. É possível aplicar essas idéias para deduzir que, nos casos apropriados, o vetor momento angular em relação ao centro de massa também é conservado.

2.5. Conservação de energia. Deduzimos a conservação de energia a partir das equações de Newton no caso de forças autônomas conservativas e sem vínculo. Nesse caso, o Lagrangiano também é independente do tempo. Podemos interpretar essa independência em relação ao tempo como uma simetria em relação a translações temporais. Dessa simetria, segue uma lei de conservação correspondente. Nesse caso, sem vínculos, temos a lei de conservação de energia. Mas o raciocínio também se aplica a Lagrangianos com vínculo, desde que o Lagrangiano seja independente do tempo. Nesse caso, porém, nem sempre a quantidade conservada é exatamente a energia total, dada pela energia cinética mais a energia potencial.

Consideremos primeiro um Lagrangiano qualquer

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

em coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_d)$.

Derivando o Lagrangiano em relação ao tempo, ao longo de uma solução do sistema, obtemos

$$\frac{d}{dt}L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial t}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

Das equações de Euler-Lagrange, temos que

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

logo

$$\frac{d}{dt}L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial t}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

Observe que os dois primeiros termos do lado direito são uma derivada temporal de um produto escalar

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \ddot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} \right).$$

Reordenando os termos, obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right) = -\frac{\partial L}{\partial t}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

Definindo

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

podemos escrever

$$\frac{d}{dt}h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = -\frac{\partial L}{\partial t}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

Agora, no caso em que o Lagrangiano não depende explicitamente da variável temporal t , a derivada que aparece no lado direito da expressão acima é nula, enquanto

que $h = h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ fica sendo apenas função de \mathbf{q} e $\dot{\mathbf{q}}$:

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

Nesse caso, obtemos

$$\frac{d}{dt}h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0,$$

e, portanto, essa quantidade é conservada:

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \text{constante em } t.$$

Nesse caso de um Lagrangiano independente de t , essa quantidade conservada $h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ é chamada de *integral de Jacobi*.

No caso de um sistema sem vínculos com Lagrangiano

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = K(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}),$$

a integral de Jacobi coincide com a energia total do sistema

$$h(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = 2K(\dot{\mathbf{r}}) - (K(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r})) = K(\dot{\mathbf{r}}) + V(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}).$$

Em alguns casos de sistemas com vínculos, a integral de Jacobi ainda coincide com a energia total, mas este não é o caso geral.

Exercícios

- 2.1.** Mostre que quando a energia cinética depende apenas da velocidade generalizada, i.e. $K = K(\dot{\mathbf{q}})$, então K é invariante por translações de $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ em qualquer direção $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$. Se, ainda, $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = K(\dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}, t)$ e $V(\mathbf{q}, t)$ é invariante por translações em uma determinada direção $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$, então a projeção do momento generalizado $\mathbf{p} = \partial L / \partial \dot{\mathbf{q}}$ na direção de \mathbf{h} é constante, i.e. $\mathbf{p} \cdot \mathbf{h}$ = independe de t .
- 2.2.** Considere um sistema sem vínculos, $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = K(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r})$ de duas partículas $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ cujo potencial depende apenas das posição relativa entre essas partículas, i.e $V = V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Mostre que $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ é invariante por translações de ambas as partículas em qualquer direção $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$, $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mapsto (\mathbf{r}_1 + s\mathbf{h}, \mathbf{r}_2 + s\mathbf{h})$. Conclua que o momento total $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ é conservado, onde $\mathbf{p}_k = \partial L / \partial \dot{\mathbf{r}}_k$.
- 2.3.** Generalize o problema anterior para o caso de n partículas, onde o potencial depende apenas das posições relativas entre pares de partículas.
- 2.4.** Considere agora um problema de n partículas com r vínculos e onde os vínculos são tratados implicitamente, $\Phi(\mathbf{r}) = 0$, onde $\Phi : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^r$. Podemos tratar esse sistema através do Lagrangiano

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\lambda}) = K(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \Phi(\mathbf{r}),$$

onde $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^r$. Suponha que tanto $V(\mathbf{r})$ como $\Phi(\mathbf{r})$ dependem apenas das posições relativas entre pares de partículas. Conclua que o momento total

$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i$ é conservado, onde $\mathbf{p}_i = \partial L / \partial \dot{\mathbf{r}}_i$. (Pode ser útil começar com o caso mais simples de $n = 2$ e $r = 1$.)

- 2.5. Verifique que o potencial gravitacional entre corpos celestes e o potencial harmônico de uma mola ligando duas massas dependem apenas da posição relativa entre esses objetos.
- 2.6. Escreva a equação do pêndulo no espaço em termos das coordenadas generalizadas θ e φ que descrevem os ângulos relativos à representação da massa do pêndulo em coordenadas esféricas, onde nesse caso $\varphi = 0$ indica a posição de equilíbrio para baixo do pêndulo. Veja se o Lagrangiano é independente de θ e/ou φ e se os momentos p_θ e p_φ conjugados a esses ângulos são conservados ou não.
- 2.7. Verifique que em um sistema de dois corpos celestes, sob a ação da gravidade entre eles, o momento total é conservado. Idem para o caso de n corpos celestes.
- 2.8. Verifique que o potencial gravitacional uniforme de uma partícula de massa m próxima a superfície da Terra não é invariante por translações ao longo do eixo transversal à superfície da Terra mas é invariante por translações nas duas direções paralelas à superfície da Terra (aproximações válidas localmente, considerando a Terra plana). Conclua que um sistema de duas massas presas por uma mola harmônica e sujeitas a esse potencial gravitacional não tem o seu momento total conservado, mas pelo menos os momentos nas direções paralelas à superfície da Terra são conservados.
- 2.9. Verifique que
 - (i) Os conjuntos \mathbb{C} , \mathbb{R} , \mathbb{Q} e \mathbb{Z} são grupos comutativos quando munidos da operação de adição;
 - (ii) Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, os conjuntos \mathbb{C}^n , \mathbb{R}^n , \mathbb{Q}^n e \mathbb{Z}^n são grupos comutativos quando munidos da operação de adição vetorial;
 - (iii) Os conjuntos de matrizes de mesma dimensão munidos da operação de adição de matrizes são grupos comutativos;
 - (iv) Os conjuntos $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ munidos da operação de multiplicação são grupos comutativos;
 - (v) O conjunto das matrizes ortogonais 2×2 munido da operação de multiplicação de matrizes é um grupo comutativo;
 - (vi) Os conjuntos das matrizes quadradas de mesma dimensão e invertíveis munidos da operação de multiplicação de matrizes são grupos não-comutativos;
 - (vii) O conjunto de matrizes ortogonais de dimensão $n > 2$ munidos da operação de multiplicação de matrizes é um grupo não-comutativo.
- 2.10. Considere um grupo de transformações $\{G_g\}_{g \in \mathcal{G}}$ em um conjunto X , onde \mathcal{G} é um grupo comutativo. Mostre que $\{G_g\}_{g \in \mathcal{G}}$ também é um grupo comutativo no sentido algébrico quando munido da operação de composição, ou seja $G_{g_1} \oplus G_{g_2}$ é a transformação em X definida por $(G_{g_1} \oplus G_{g_2})(x) = G_{g_1}(G_{g_2}(x))$,

para todo $x \in X$. Uma outra maneira de definir um grupo de transformações em um conjunto X é como um subconjunto das transformações em X que forma um grupo comutativo quando munido da operação de composição de transformações.

- 2.11.** No caso de um Lagrangiano $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ invariante por um grupo de transformações $\{G_s\}_{s \in \mathbb{R}}$, verifique as contas que levam a

$$J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{q}) = \text{constante em } t.$$

- 2.12.** No caso da translação $G_s(\mathbf{q}) = \mathbf{q} + s\mathbf{h}$, note que $\mathbf{a}(\mathbf{q}) = \mathbf{h}$ e, portanto, a lei de conservação correspondente é

$$J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{h} = \text{constante},$$

que dá exatamente a conservação do momento generalizado na direção do vetor \mathbf{h} :

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{h} = \text{constante}.$$

- 2.13.** Considere um Lagrangiano $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ e um vínculo escrito na forma implícita $\Phi(\mathbf{r}) = 0$. Suponha que ambos sejam invariantes por um grupo de transformações $\{G_s\}_{s \in \mathbb{R}}$, i.e. $L(\mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{r}}_s) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ e $\Phi(\mathbf{r}_s) = \Phi(\mathbf{r})$, para todo $s \in \mathbb{R}$, onde $\mathbf{r}_s = G_s(\mathbf{r})$ e $\dot{\mathbf{r}}_s = dG_s(\mathbf{r})/dt$. Considere o Lagrangiano $L_\Phi(\mathbf{r}, \lambda, \dot{\mathbf{r}})$ do sistema com vínculo implícito. Mostre que nesse caso também vale a lei de conservação

$$J(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \text{constante em } t,$$

onde $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = dG_s(\mathbf{r})/ds$, como antes.

- 2.14.** Considere um Lagrangiano $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ e uma transformação continuamente diferenciável G na variável \mathbf{r} , com $DG(\mathbf{r})$ invertível para todo \mathbf{r} (uma tal G é chamada de difeomorfismo), levando a um novo sistema de coordenadas $\tilde{\mathbf{r}}$ dado por $\mathbf{r} = G(\tilde{\mathbf{r}})$. Mostre que se $\mathbf{r}(t)$ é uma solução do sistema associado a esse Lagrangiano, então $\tilde{\mathbf{r}}(t)$ dado por $\mathbf{r}(t) = G(\tilde{\mathbf{r}}(t))$ é solução do sistema associado ao Lagrangiano $\tilde{L}(\tilde{\mathbf{r}}, \dot{\tilde{\mathbf{r}}}, t) \stackrel{\text{def}}{=} L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = L(G(\tilde{\mathbf{r}}), dG(\tilde{\mathbf{r}})/dt, t)$.
- 2.15.** Considere um Lagrangiano $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ e uma transformação invertível G na variável \mathbf{r} com $DG(\mathbf{r})$ invertível para todo \mathbf{r} . Suponha que o Lagrangiano é invariante por essa transformação, i.e. $\tilde{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \stackrel{\text{def}}{=} L(G(\mathbf{r}), dG(\mathbf{r})/dt, t) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$. Mostre que se $\mathbf{r}(t)$ é uma solução do sistema associado ao Lagrangiano $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$, então $\tilde{\mathbf{r}}(t) = G^{-1}(\mathbf{r}(t))$ também é solução do sistema associado a esse mesmo Lagrangiano $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$. (Cuidado; apesar de $\tilde{L}(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}, t) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$, as equações de Euler-Lagrange correspondentes são diferentes e é nesse ponto que entra a hipótese de G ser invertível.)

2.16. Mostre que dado um vetor unitário $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ e um vetor qualquer \mathbf{r} que não seja colinear a $\boldsymbol{\omega}$, os conjunto de vetores

$$\left\{ \frac{\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}}{\|\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}\|}, \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}{\|\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}\|}, \boldsymbol{\omega} \right\}$$

forma uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 . Chamando essa base de ϵ , observe que \mathbf{r} pode ser representado nessa base simplesmente por

$$[\mathbf{r}]_\epsilon = (\|\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}\|, 0, \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}).$$

Nesse base, também podemos representar o operador rotação $R_\omega(\theta)$ por

$$[R_\omega(\theta)]_\epsilon = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$[R_\omega(\theta)\mathbf{r}]_\epsilon = [R_\omega(\theta)]_\epsilon [\mathbf{r}]_\epsilon = (\cos \theta \|\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}\|, \sin \theta \|\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}\|, \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}).$$

Conclua finalmente que, de fato,

$$R_\omega(\theta)\mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} + \cos \theta (\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}) + \sin \theta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

2.17. Mostre que

$$\frac{d}{d\theta} R_\omega(\theta)\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

2.18. Considere um sistema sem vínculos de n partículas e com um potencial de forças que depende apenas da distância relativa entre pares de partículas (não apenas da posição relativa, mas da norma desse vetor posição, que é a distância). Mostre o Lagrangiano de um tal sistema é invariante por rotações em torno de qualquer eixo.

2.19. Considere um pêndulo não-planar, onde a extremidade livre pode se deslocar em uma esfera de raio ℓ e centro na origem em um certo sistema de referências xyz , e sob a ação de uma força gravitacional uniforme ao longo do eixo z . Escreva o Lagrangiano $L_\Phi(\mathbf{r}, \lambda, \dot{\mathbf{r}})$ nas coordenadas $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e com um multiplicador de Lagrange λ associado ao vínculo implícito $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \ell_0^2 = 0$. Mostre que esse Lagrangiano é invariante por rotações em torno do eixo z mas não é invariante em torno de nenhum outro eixo.

2.20. Ache a integral de Jacobi nos seguintes casos e verifique se ela coincide com a energia total.

- (i) Corpo em queda livre sob a atração gravitacional uniforme perto da superfície da Terra;
- (ii) Pêndulo planar;
- (iii) Pêndulo girante;
- (iii) Sistema massa-mola harmônica unidimensional;

- (iv) Sistema massa-mola harmônica planar sob a ação gravitacional uniforme;
- (v) Sistema planar de dois corpos celestes sob a atração gravitacional;
- (vi) Um corpo de massa m deslizando sobre uma curva $z = h(x)$, $y = 0$, sob a atração gravitacional uniforme $\mathbf{F} = (0, 0, -mg)$.

2.21. Considere o sistema de três corpos planar restrito, utilizando coordenadas polares em um sistema de coordenadas girante. Mais precisamente, temos dois corpos celestes T e L com massas M_T e M_L , e com L em órbita circular em torno de T . Colocando T no centro de referência e o a órbita circular no plano xy , temos as coordenadas de cada um deles dadas por $\mathbf{r}_T = (0, 0, 0)$ e $\mathbf{r}_L = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), 0)$, onde R é o raio da órbita e ω é a frequência de oscilação da órbita ($2\pi/\text{período}$). O terceiro corpo é um “satélite”, no sentido de ter uma massa $m \ll M_T, M_L$, desprezível em relação à massa dos outros dois corpos, portanto não influenciando o movimento deles. Além disso, assumimos que esse terceiro corpo se movimento no mesmo plano da órbita de L em torno de T . Como coordenadas generalizadas, podemos utilizar as coordenadas polares (r, θ) , onde θ indica o ângulo entre o vetor posição \mathbf{r} do satélite e o vetor posição \mathbf{r}_L do corpo L . O referencial (r, θ) não é inercial. O referencial “girante” $(x', y') = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ também não é inercial. mas no referencial inercial xyz podemos escrever a posição do satélite em termos das coordenadas generalizadas (r, θ) através de $\mathbf{r} = (r \cos(\theta + \omega t), r \sin(\theta + \omega t))$.

- (i) Escreva o Lagrangiano $L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$ desse sistema;
- (ii) Ache os momentos generalizados p_r e p_θ e verifique se eles são conservados ou não;
- (iii) Ache a integral de Jacobi e diga se ela é invariante ou não.
- (iv) Verifique se a integral de Jacobi coincide com a energia total (cinética + potencial) do sistema.

CAPÍTULO 5

Corpos rígidos

1. Representação do movimento de um corpo rígido

O movimento de um corpo rígido pode ser representado pela posição fixa de suas partículas em relação a um certo referencial que se move junto com o corpo e através dos movimentos de translação e rotação desse referencial.

Digamos que o corpo rígido seja composto de n partículas de massa $m_i > 0$ e coordenadas \mathbf{r}_i em relação a um referencial euclidiano $x'y'z'$. Seja $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ a posição da origem do referencial $x'y'z'$ e suponha que este referencial esteja posicionado em relação ao referencial xyz de acordo com uma rotação $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, após a translação por \mathbf{r}_0 , ou seja, suponha que a posição \mathbf{r}_i de cada partícula seja dada no referencial xyz através da relação

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + R\mathbf{r}_i.$$

O movimento de cada partícula em relação ao eixo xyz pode ser representado pelo movimento do eixo $x'y'z'$ de acordo com a variação da origem, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$, e da rotação $R = R(t)$, relativas ao eixo xyz , ou seja

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_0(t) + R(t)\mathbf{r}_i,$$

com a posição relativa \mathbf{r}_i independente de t .

A massa total do corpo rígido é dada por

$$m = \sum_{i=1}^n m_i,$$

enquanto que o seu centro de massa é dado em termos de $\mathbf{r}_0(t)$ e $R(t)$ por

$$\mathbf{C}_M(t) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_0(t) + R(t)\mathbf{r}_i) = \mathbf{r}_0(t) + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i R(t)\mathbf{r}_i.$$

Em várias situações, é conveniente escolher \mathbf{r}_0 como o centro de massa do sistema, como veremos posteriormente.

Podemos também considerar o centro de massa relativo ao referencial $x'y'z'$ do corpo rígido, ou seja,

$$\mathbf{C}_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i,$$

que independente de t . Com isso, podemos escrever

$$\mathbf{C}_M(t) = \mathbf{r}_0(t) + R(t)\mathbf{C}_0.$$

Podemos, também, considerar o caso em que o corpo é considerado contínuo, preenchendo uma região $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^3$, com uma densidade de massa $d\rho(\mathbf{r})$. Nesse caso, a massa total pode ser escrita como

$$m = \int_{\mathcal{R}} d\rho(\mathbf{r}),$$

com o centro de massa relativo ao corpo dado por

$$\mathbf{C}_0 = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{r} d\rho(\mathbf{r}).$$

A representação acima, com uma densidade de massa $d\rho$, serve para vários formatos de corpo rígido. Em casos mais específico, podemos explicitar a dimensão do corpo e considerar a densidade de massa como sendo uma densidade unidimensional, bidimensional ou tridimensional, dependendo do corpo. Mais especificamente, podemos considerar uma função $\rho(\mathbf{r})$ representando a densidade de massa por unidade de comprimento $d\mathbf{r}^1$ ou unidade de área $d\mathbf{r}^2$ ou unidade de volume $d\mathbf{r}^3$, com

$$m = \int_{\mathcal{R}} \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}^d, \quad \mathbf{C}_0 = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}^d.$$

É possível, ainda, considerar um corpo formado por várias partes de dimensões diferentes.

Em certos casos específicos, podemos omitir o índice d da dimensão do objeto, ou, ainda, representá-lo por elementos de linha $d\ell(\mathbf{r})$, de superfície $dS(\mathbf{r})$, ou de volume $dV(\mathbf{r})$ ou $d\mathbf{r}$.

Exercícios

1.1. Encontre a massa total m e o centro de massa \mathbf{C}_0 , relativo ao referencial $x'y'z'$ do corpo, dos seguintes corpos rígidos

- (a) Um corpo formado por três partículas de massa $m_0 > 0$ e posições relativas

$$\mathbf{r}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{r}_2 = (0, 0, 1) \quad \mathbf{r}_3 = (-1, 0, 0),$$

interligados por hastes de massa desprezível.

- (b) Um corpo formado por quatro partículas de massa $m_0 > 0$ e posições relativas

$$\mathbf{r}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{r}_2 = (0, 1, 0) \quad \mathbf{r}_3 = (-1, 0, 0), \quad \mathbf{r}_4 = (0, 0, 1),$$

interligados por hastes de massa desprezível.

(c) Um corpo formado por quatro partículas de posições relativas

$$\mathbf{r}_1 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{r}_2 = (-1, 1, 0) \quad \mathbf{r}_3 = (-1, -1, 0), \quad \mathbf{r}_4 = (1, -1, 0),$$

com massas

$$m_1 = 6m_0, \quad m_2 = 4m_0, \quad m_3 = 2m_0, \quad m_4 = 4m_0,$$

interligados por hastes de massa desprezível.

(d) Um barra homogênea

$$\mathcal{R} = [0, 1] \times \{0\} \times \{0\} = \{(x, 0, 0); 0 \leq x \leq 1\}$$

com densidade linear de massa constante $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 > 0$.

(e) Um barra não-homogênea

$$\mathcal{R} = \{0\} \times [0, L] \times \{0\} = \{(0, y, 0); 0 \leq y \leq L\}$$

com densidade linear de massa

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \frac{y(L-y)}{L^2}, \quad \mathbf{r} = (0, y, 0), \quad y \in [0, L].$$

onde $\rho_0, L > 0$.

(f) Uma placa homogênea

$$\mathcal{R} = [0, L_x] \times [0, L_y] \times \{0\} = \{(x, y, 0); 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y\},$$

com densidade de massa constante $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0$, onde $L_x, L_y, \rho_0 > 0$.

(g) Uma placa não-homogênea

$$\mathcal{R} = [0, L_x] \times [0, L_y] \times \{0\} = \{(x, y, 0); 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y\},$$

com densidade de massa

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 x^2, \quad \mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathcal{R},$$

onde $L_x, L_y, \rho_0 > 0$.

(h) Um disco homogêneo

$$\mathcal{R} = \{(x, y, 0); (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq L^2\}$$

com densidade de massa $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0$, onde $x_0, y_0, L, \rho_0 > 0$.

(i) Um disco não-homogêneo

$$\mathcal{R} = \{(x, y, 0); x^2 + y^2 \leq L^2\}$$

com densidade de massa

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \frac{L^2 - x^2 - y^2}{L^2}, \quad \mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathcal{R},$$

onde $L, \rho_0 > 0$.

(j) Um disco não-homogêneo

$$\mathcal{R} = \{(x, y, 0); x^2 + y^2 \leq L^2\}$$

com densidade de massa

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \frac{x^2}{L^2}, \quad \mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathcal{R},$$

onde $L, \rho_0 > 0$.

(k) Uma esfera homogênea

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

com densidade de massa $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 > 0$.

(l) Uma pirâmide homogênea

(m) Um cubo não-homogêneo

(n) Um cilindro não-homogêneo

(o) Uma bola homogênea

2. Energia cinética de um corpo rígido

A energia cinética de um corpo rígido é dada pela energia cinética do conjunto das partículas que formam o corpo, ou seja

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|\dot{\mathbf{r}}_i(t)\|^2.$$

Como

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_0(t) + R(t)\mathbf{r}_i,$$

podemos calcular a derivada temporal dessas expressões e escrever a energia cinética em termos da variação de $\mathbf{r}_0(t)$ e $R(t)$.

Como $R(t)$ é uma rotação, temos que a sua inversa é dada pela sua transposta, i.e. $R(t)^{-1} = R(t)^{\text{tr}}$. Podemos escrever isso na forma

$$R(t)R(t)^{\text{tr}} = \text{Id},$$

onde Id é a matriz identidade em \mathbb{R}^3 . Como a matriz identidade não depende de t , temos

$$\frac{d}{dt}(R(t)R(t)^{\text{tr}}) = 0.$$

Como esses operadores são lineares, temos

$$\frac{dR(t)}{dt}R(t)^{\text{tr}} + R(t)\frac{dR(t)^{\text{tr}}}{dt} = 0$$

Como a derivação também é uma operação linear, podemos escrever

$$\frac{dR(t)}{dt}R(t)^{\text{tr}} + R(t)\left(\frac{dR(t)}{dt}\right)^{\text{tr}} = 0$$

e, ainda,

$$\frac{dR(t)}{dt}R(t)^{\text{tr}} + \left(\frac{dR(t)}{dt}R(t)^{\text{tr}} \right)^{\text{tr}} = 0.$$

Logo,

$$\left(\frac{dR(t)}{dt}R(t)^{\text{tr}} \right)^{\text{tr}} = -\frac{dR(t)}{dt}R(t)^{\text{tr}},$$

o que mostra que

$$A(t) = \frac{dR(t)}{dt}R(t)^{\text{tr}}$$

é uma matriz anti-simétrica. Podemos escrever

$$\frac{dR(t)}{dt} = A(t)R(t).$$

Com toda matriz anti-simétrica pode ser escrita como uma multiplicação vetorial por um certo vetor, podemos escrever, ainda,

$$\frac{dR(t)}{dt} = \boldsymbol{\omega}(t) \times R(t)$$

ou seja, para qualquer vetor fixo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\frac{d}{dt}R(t)\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}(t) \times R(t)\mathbf{r}.$$

Assim, podemos escrever a velocidade de cada partícula do corpo rígido como

$$\dot{\mathbf{r}}_i(t) = \dot{\mathbf{r}}_0(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times R(t)\mathbf{r}_i.$$

Para simplificar a notação, vamos omitir a dependência temporal e escrever apenas

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{r}_i.$$

A norma ao quadrado de cada vetor velocidade é dada por

$$\|\dot{\mathbf{r}}_i\|^2 = \|\dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{r}_i\|^2 = \|\dot{\mathbf{r}}_0\|^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{r}_i) + \|\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{r}_i\|^2.$$

Substituindo isso na fórmula para a energia cinética, obtemos

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\|\dot{\mathbf{r}}_0\|^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{r}_i) + \|\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{r}_i\|^2).$$

Como

$$\sum_{i=1}^n m_i R\mathbf{r}_i = mR\mathbf{C}_0,$$

onde m é a massa total do corpo rígido e \mathbf{C}_0 é o centro de massa relativo ao referencial do corpo, segue que

$$K = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{r}}_0\|^2 + m\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{C}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{r}_i\|^2. \quad (2.1)$$

Usando que $\mathbf{C}_M = \mathbf{r}_0 + R\mathbf{C}_0$, podemos escrever a posição de cada partícula como

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{C}_M + R(\mathbf{r}_i - \mathbf{C}_0)$$

e deduzir, de forma semelhante, que

$$K = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{C}}_M\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i\|\boldsymbol{\omega} \times (R(\mathbf{r}_i - \mathbf{C}_0))\|^2. \quad (2.2)$$

O primeiro termo acima representa a energia cinética de translação do corpo, enquanto que o segundo representa a energia cinética de rotação.

No caso particular em que a origem \mathbf{r}_0 do referencial do corpo coincide com o centro de massa \mathbf{C}_M nesse mesmo referencial, temos $\mathbf{C}_0 = 0$, e a expressão para a energia cinética fica reduzida a

$$K = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{r}}_0\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i\|\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{r}_i\|^2. \quad (2.3)$$

Essa expressão pode ser deduzida tanto de (2.2) quanto de (2.1).

Em outro caso particular, em que \mathbf{r}_0 é um ponto fixo no referencial inercial xyz , e não necessariamente localizada no centro de massa do corpo, temos $\dot{\mathbf{r}}_0 = 0$, e os dois primeiros termos em (2.1) são nulos, nos dando simplesmente

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i\|\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{r}_i\|^2. \quad (2.4)$$

O último termo pode ser reescrito através da relação

$$\|\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{r}_i\|^2 = (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{r}_i)$$

Usando a identidade vetorial $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$, temos

$$\|\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{r}_i\|^2 = (R\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{r}_i)) \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Definindo o operador linear $I_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ por

$$I_i\boldsymbol{\omega} = m_i R\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{r}_i),$$

podemos escrever

$$m_i\|\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{r}_i\|^2 = I_i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Assim, a energia cinética de rotação da i -ésima partícula em torno do ponto de referência \mathbf{r}_0 é

$$\frac{1}{2}I_i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

A energia cinética total do corpo pode ser reescrita na forma

$$K = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{r}}_0\|^2 + m\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{C}_0) + \frac{1}{2}I\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega},$$

onde

$$I = \sum_{i=1}^n I_i$$

é o chamado *operador de inércia*. Mais explicitamente,

$$I(t)\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i R(t) \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega}(t) \times R(t) \mathbf{r}_i).$$

Usando a identidade vetorial $(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})) = \|\mathbf{a}\|^2 \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a}$, podemos escrever

$$I_i \boldsymbol{\omega} = m_i (\|R \mathbf{r}_i\|^2 \boldsymbol{\omega} - (R \mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) R \mathbf{r}_i)$$

e

$$I \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^n m_i (\|R \mathbf{r}_i\|^2 \boldsymbol{\omega} - (R \mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) R \mathbf{r}_i).$$

Exercícios

- 2.1.** Sejam $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ duas funções continuamente diferenciáveis de $t \in \mathbb{R}$ com valores $A(t), B(t)$ no espaço das matrizes reais $n \times n$, com $n \in \mathbb{N}$. Mostre, que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A(t)B(t)) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\frac{A(t+\tau)B(t+\tau) - A(t)B(t)}{\tau} \right) \\ &= \frac{dA(t)}{dt} B(t) + A(t) \frac{dB(t)}{dt}. \end{aligned}$$

- 2.2.** Seja $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ uma matriz anti-simétrica, i.e. $A^{\text{tr}} = -A$. Mostre que existe um vetor $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$A \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

para todo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$.

- 2.3.** Deduza a expressão (2.2) para a energia cinética de um corpo rígido.
- 2.4.** Na base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de \mathbb{R}^3 , onde $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$, o operador de inércia tem a representação $I(t) = (a_{k,l}(t))_{k,l=1}^3$, onde

$$a_{kl}(t) = I(t) \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l.$$

Considerando $R(0) = \text{Id}$, a identidade em \mathbb{R}^3 , temos

$$a_{kl}(0) = \sum_{i=1}^n m_i (\|\mathbf{r}_i\|^2 (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l) - (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{e}_k) (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{e}_l)).$$

No caso contínuo, temos

$$a_{kl}(0) = \int_{\mathcal{R}} (\|\mathbf{r}\|^2 (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_l)) d\rho(\mathbf{r}).$$

Calcule os coeficientes $a_{ij}(0)$ para os corpos considerados em cada um dos casos da seção anterior.

3. O operador de inércia

Definimos acima o operador de inércia

$$I\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^n m_i (\|\mathbf{R}\mathbf{r}_i\|^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{R}\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{R}\mathbf{r}_i).$$

Este é um operador simétrico, i.e. $I^{tr} = I$. Podemos ver isso calculando os elementos $\{a_{ij}\}$ da base e mostrando que $a_{ij} = a_{ji}$, ou então utilizando o produto escalar e mostrando que

$$I\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}' = I\boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{\omega},$$

para quaisquer dois vetores $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}' \in \mathbb{R}^3$. E como $I = \sum_{i=1}^n I_i$, basta mostrar essa propriedade para cada operador I_i .

O operador de inércia é, ainda, não-negativo, i.e.

$$I_i \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \geq 0,$$

para qualquer $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$. Isso segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|,$$

válida para quaisquer vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

Dessa forma, o operador de inércia tem uma base ortonormal de autovetores com autovalores não-negativos. Uma particularidade desse operador é que os autovalores independem de t e os autovetores correspondentes “giram” de acordo com a rotação $R(t)$. Mais precisamente, se $\boldsymbol{\omega}_j$ é um autovetor associado a um autovalor I_j do operador de inércia com $R = 0$, i.e.

$$I\boldsymbol{\omega}_j = I_j \boldsymbol{\omega}_j,$$

onde

$$I\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^n m_i (\|\mathbf{r}_i\|^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i),$$

e $I_j \geq 0$, então

$$I(t)R(t)\boldsymbol{\omega}_j = I_j R(t)\boldsymbol{\omega}_j, \quad (3.1)$$

para todo t .

Como os autovalores do operador de inércia são reais e não-negativos, podemos ordená-los em ordem decrescente

$$I_1 \geq I_2 \geq I_3 \geq 0.$$

Eles são também independentes de t e são chamados de *momentos principais de inércia*. Os autoespaços associados são chamados de *eixos principais de inércia*. Os eixos principais de inércia podem não ser únicos, caso dois ou mais autovalores sejam iguais.

Simetrias no corpo do objeto ajudam a identificar geometricamente alguns ou todos os eixos principais de inércia. Por exemplo, se o objeto for simétrico em relação a algum plano, então o eixo perpendicular a esse plano de simetria é um eixo principal de inércia e os outros dois eixos principais pertencem a esse mesmo plano. Se o objeto for simétrico em relação a um eixo, então esse eixo de simetria é um eixo principal de inércia e os outros dois eixos principais de inércia são perpendiculares ao eixo de simetria.

Escrevendo $\boldsymbol{\omega}(t)$ na base de autovetores de $I(t)$, com coordenadas $\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)$, podemos escrever a energia cinética como

$$K = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{r}}_0\|^2 + I_1\omega_1(t)^2 + I_2\omega_2(t)^2 + I_3\omega_3(t)^2,$$

no caso em que \mathbf{r}_0 coincide com o centro de massa do sistema.

Exercícios

3.1. Mostre que cada operador I_i é simétrico, i.e.

$$I_i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}' = I_i\boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{\omega},$$

para quaisquer dois vetores $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}' \in \mathbb{R}^3$.

3.2. Utilize a desigualdade de Cauchy-Schwarz para mostrar que cada I_i é não-negativo, i.e.

$$I_i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \geq 0,$$

para qualquer $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$.

3.3. Use que $\|R\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}\|$ e $R\mathbf{r} \cdot R\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}$ para quaisquer $\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ e qualquer operador ortogonal R para mostrar (3.1) acima.

3.4. Ache os momentos principais de inércia e os eixos principais de inércia dos exemplos tratados na primeira seção desse capítulo.

3.5. O momento de inércia em torno de um eixo gerado por um vetor unitário $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ é dado por

$$I\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}.$$

Dado um vetor qualquer $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, a distância desse vetor ao eixo gerado por \mathbf{e} é dado por

$$\text{dist}_{\mathbf{e}}(\mathbf{r}) = \sqrt{\|\mathbf{r}\|^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})^2}.$$

Observe que podemos escrever

$$I\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = \sum_{i=1}^n m_i \text{dist}_{\mathbf{e}}(\mathbf{r}_i)^2,$$

no caso discreto, e

$$I\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = \int_{\mathcal{R}} \text{dist}_{\mathbf{e}}(\mathbf{r})^2 d\rho(\mathbf{r}),$$

no caso contínuo.

- 3.6.** Seja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ uma base de \mathbb{R}_3 . Mostre que se um objeto for simétrico em relação ao plano gerado por $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, então $a_{1l} = I\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_l = 0$ para $l = 2, 3$ e conclua que o eixo perpendicular a esse plano de simetria, ou seja, \mathbf{e}_1 , é um eixo principal de inércia, enquanto que os outros dois eixos principais de inércia pertencem a esse mesmo plano, ou seja, ao plano gerado por $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.
- 3.7.** Mostre que se um objeto for simétrico em relação a um eixo, então esse eixo de simetria é um eixo principal de inércia e os outros dois eixos principais de inércia são perpendiculares ao eixo de simetria.

4. Coordenadas generalizadas e problemas de corpos rígidos com simetria

Para aplicar o princípio da menor ação, é necessário escrever o Lagrangiano, em particular a energia cinética, em termos de coordenadas generalizadas \mathbf{q} e as velocidades generalizadas $\dot{\mathbf{q}}$ correspondentes. Vimos acima como escrever a energia cinética de um corpo rígido em termos de um operador de rotação $R(t)$ e do vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}(t)$. Faz-se necessário, então, escrever a rotação em termos de coordenadas generalizadas,

$$R = R(\mathbf{q}),$$

e o vetor velocidade angular em termos de \mathbf{q} e $\dot{\mathbf{q}}$,

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

Por exemplo, considere um disco de raio $r > 0$ e massa $m > 0$. O operador de inércia em relação ao centro de massa tem os momentos principais de inércia dados por

$$I_1 = \frac{mr^2}{2}, \quad I_2 = I_3 = \frac{mr^2}{4},$$

onde o eixo principal de inércia associado a I_1 é perpendicular ao plano do disco. Suponha que esse disco gire apenas em torno desse eixo principal, ao longo da reta $y = -z$, $x = 0$. Na base formada pelos eixos principais de inércia, o vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ é tal que $\omega_2 = \omega_3 = 0$. A energia cinética desse sistema é dada por

$$K = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{r}}_0\|^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2,$$

onde \mathbf{r}_0 é o centro de massa do disco. Podemos usar a coordenada y do ponto de contato entre o disco e a reta como coordenada generalizada e escrever a posição do centro de massa do disco como

$$\mathbf{r}_0 = \left(0, y + r\frac{\sqrt{2}}{2}, -y + r\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

de modo que

$$\|\dot{\mathbf{r}}_0\|^2 = 2\dot{y}^2.$$

Além disso, temos a condição de vínculo de rolamento sem deslizamento, dada por

$$\sqrt{2}\dot{y} = -r\omega_1,$$

onde o sinal negativo vem da escolha do sentido de rotação. No cálculo da energia cinética, esse sinal é irrelevante, pois ω_1 aparece elevado ao quadrado. Temos, assim, a energia cinética

$$K(\dot{y}) = \frac{3}{2}m\dot{y}^2.$$

A energia potencial pode ser escrita como mgh , onde h é a coordenada z do centro de massa, logo

$$V(y) = mg \left(-y + r \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Assim, o Lagrangiano é dado por

$$L(y, \dot{y}) = \frac{3}{2}m\dot{y}^2 - mg \left(-y + r \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

E a equação de Euler-Lagrange é

$$3m\ddot{y} - mg = 0,$$

ou seja

$$\ddot{y} = \frac{g}{3}.$$

Na coordenada $z = -y$, podemos escrever,

$$\ddot{z} = -\frac{g}{3}.$$

Exercícios

- 4.1. Considere um cilindro de raio $r > 0$, comprimento $h > 0$ e densidade de massa constante igual a $\rho_0 > 0$. Suponha que esse cilindro role em um plano inclinado $z = -ay$, com o seu eixo paralelo ao eixo x . Considere uma variável $q \in \mathbb{R}$ como coordenada generalizada de modo que $(x, y, z) = (0, q, -q)$ é o ponto de contato do cilindro com o plano e $(x, y, z) = (0, q + r \sin \alpha, -q + r \cos \alpha)$, onde $\alpha = \tan a$, é o centro de massa do cilindro. Considerando θ como o ângulo de rotação do cilindro em torno do seu eixo, use o vínculo de rolamento dado por $\sqrt{2}\dot{q} = r\dot{\theta}$ para escrever o Lagrangiano $L(q, \dot{q})$ em função apenas da coordenada generalizada q e a velocidade generalizada \dot{q} . Em seguida, encontre a equação de Euler-Lagrange correspondente.
- 4.2. Considere uma barra de comprimento $\ell > 0$ e massa $m > 0$ girando horizontalmente em torno do seu centro de massa. Mais precisamente, considere o centro de massa fixo na origem do sistema xyz e suponha que a barra se mantenha no plano xy , girando em torno do eixo z . Seja θ o ângulo que a barra faz com o eixo x , ou seja, em cada instante de tempo, θ é tal que a barra ocupa

o segmento de reta $\{(x, y, z); x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = 0, |r| \leq \ell/2\}$. Escreva a energia cinética em termos da velocidade generalizada $\dot{\theta}$.

- 4.3.** Refaça o problema feito em sala de um cilindro de raio $r > 0$, comprimento $h > 0$ e densidade de massa constante igual a $\rho_0 > 0$ rolando no interior de um tubo de seção circular de raio $R > r$. Utilize a condição de rolamento sem deslizamento dada por $r\dot{\varphi} = (R - r)\dot{\theta}$, onde θ é a variação angular do centro de massa do cilindro em relação ao centro da seção circular de raio R e φ é o ângulo de rotação do cilindro em torno do seu eixo principal.
- 4.4.** Considere dois discos de mesmo raio $r > 0$ e mesma densidade de massa constante igual a $\rho_0 > 0$. Suponha que os dois discos rolem sobre o eixo y (ou seja, com o centro dos cilindros em $(0, y, r)$, $y \in \mathbb{R}$) e que os seus centros de massa estejam ligados por uma mola harmônica com comprimento de equilíbrio $\ell > 0$ e coeficiente de restituição $k > 0$. Sendo y_1, y_2 as coordenadas no eixo y do centro de massa dos cilindros e θ_1, θ_2 os ângulos de rotação dos cilindros, use os vínculos de rolamento $\dot{y}_1 = r\dot{\theta}_1$, $\dot{y}_2 = r\dot{\theta}_2$ para escrever o Lagrangiano do sistema na forma $L(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2)$.

5. Ângulos de Euler como coordenadas generalizadas

Exercícios

- 5.1.** Relembre a definição dos ângulos de Euler conforme feito em sala de aula e escreva o vetor velocidade angular no referencial do corpo em termos dos ângulos de Euler.
- 5.2.** Escreva, agora, o vetor velocidade angular em um referencial inercial em termos dos ângulos de Euler

6. Quatérnios como coordenadas generalizadas

CAPÍTULO 6

Sistemas Hamiltonianos

1. Obtendo o Hamiltoniano no caso de um grau de liberdade

As equações de Euler-Lagrange formam um sistema de equações de segunda ordem. Em várias situações, pode ser útil trabalhar com um sistema de equações de primeira ordem. Vamos ver neste capítulo como transformar as equações de Euler-Lagrange em um sistema de equações de primeira ordem na forma de um sistema hamiltoniano.

Um sistema hamiltoniano bidimensional é da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y), \end{cases}$$

onde $H = H(x, y)$ é o *Hamiltoniano* do sistema. Em um sistema dessa forma, a hamiltoniana é conservada ao longo do movimento, ou seja, dada uma solução $(x(t), y(t))$ do sistema, temos

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right) + \frac{\partial H}{\partial y}\left(-\frac{\partial H}{\partial x}\right) = 0.$$

É sabido, também, que em vários exemplos o hamiltoniano é essencialmente a energia total do sistema.

Dessa forma, partindo de uma formulação Lagrangiana de um problema com um grau de liberdade, onde conhecemos o Lagrangiano $L(q, \dot{q})$, é natural procurarmos o Hamiltoniano como sendo a integral de Jacobi do sistema, que é uma quantidade conservada, nesse caso de invariância temporal do Lagrangiano.

A integral de Jacobi tem a forma

$$h(q, \dot{q}) = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) - L(q, \dot{q}).$$

Considerando o momento generalizado

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q})$$

como uma nova variável, no lugar da velocidade generalizada \dot{q} , procuramos inverter a relação acima e escrever \dot{q} em função de q e p :

$$\dot{q} = V(q, p).$$

Assim, escrevemos o *Hamiltoniano*

$$H(q, p) = pV(q, p) - L(q, V(q, p)).$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) &= V(q, p) + p \frac{\partial V}{\partial p}(q, p) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, V(q, p)) \frac{\partial V}{\partial p}(q, p) \\ &= \dot{q} + p \frac{\partial V}{\partial p}(q, p) - p \frac{\partial V}{\partial p}(q, p) = \dot{q}. \end{aligned}$$

e, usando as equações de Euler-Lagrange,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q}(q, p) &= p \frac{\partial V}{\partial q}(q, p) - \frac{\partial L}{\partial q}(q, V(q, p)) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, V(q, p)) \frac{\partial V}{\partial q}(q, p) \\ &= p \frac{\partial V}{\partial q}(q, p) - \frac{\partial L}{\partial q}(q, V(q, p)) - p \frac{\partial V}{\partial q}(q, p) = -\frac{\partial L}{\partial q}(q, V(q, p)) \\ &= -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, V(q, p)) = -\frac{d}{dt} p = -\dot{p}. \end{aligned}$$

Logo, temos o sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p), \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p). \end{cases}$$

Esse sistema é também chamado de equações de Hamilton.

Como exemplo, vamos considerar o Lagrangiano associado ao pêndulo planar,

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + m g \ell \cos \theta.$$

Seja

$$\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}(\theta, \dot{\theta}) = m \ell^2 \dot{\theta}$$

o momento conjugado à coordenada generalizada θ , que nesse caso é o momento angular do sistema. Invertendo essa relação, temos

$$\dot{\theta} = V(\psi) = \frac{1}{m \ell^2} \psi.$$

A integral de Jacobi é

$$h(\theta, \dot{\theta}) = \dot{\theta} \psi - L(\theta, \dot{\theta}).$$

Substituindo $\dot{\theta}$ por $V(\psi) = \psi/m\ell^2$, obtemos o Hamiltoniano

$$H(\theta, \psi) = \frac{1}{2m\ell^2}\psi^2 - mg\ell \cos \theta.$$

E as equações de Hamilton tomam a forma

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{1}{m\ell^2}\psi, \\ \dot{\psi} = -mg\ell \sin \theta. \end{cases}$$

Exercícios

1.1. Ache o Hamiltoniano e as equações de Hamilton nos seguintes casos

(a) Corpo em queda livre, com Lagrangiano dado por

$$L(h, \dot{h}) = \frac{1}{2}m\dot{h}^2 + mgh,$$

onde $m, g > 0$.

(b) Corpo deslizando em um plano inclinado, com Lagrangiano

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \sec^2 \alpha + mgx \tan \alpha,$$

onde $m, g > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) Sistema massa-mola, com Lagrangiano

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2,$$

com $m, k > 0$.

1.2. Ache o Hamiltoniano no caso de um pêndulo girante, cujo Lagrangiano é

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\varphi}^2 + \omega \sin^2 \varphi) + mg\ell \cos \varphi,$$

onde $m, g, \ell > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, e verifique que as equações de Hamilton desse sistema tomam a forma

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{1}{m\ell^2}\psi, \\ \dot{\psi} = 2\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - -mg\ell \sin \varphi. \end{cases}$$

2. Obtendo o Hamiltoniano no caso de vários graus de liberdade

A idéia é a mesma. A partir de um Lagrangiano

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

de um sistema com coordenadas generalizadas $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, temos a integral de Jacobi

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

onde

$$\mathbf{p} = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

é o momento generalizado do sistema. Em certos casos, podemos inverter a relação acima e escrever a velocidade generalizada em termos do momento generalizado (e das coordenadas generalizadas),

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}(\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

Assim, o Hamiltoniano é dado por

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - L(\mathbf{q}, \mathbf{V}(\mathbf{q}, \mathbf{p})).$$

Como no caso de um grau de liberdade, temos o sistema Hamiltoniano (ou equações de Hamilton)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \dots, \frac{\partial H}{\partial p_d}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right), \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left(\frac{\partial H}{\partial q_1}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \dots, \frac{\partial H}{\partial q_d}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right). \end{aligned}$$

Exercícios

- 2.1.** Verifique, nesse caso de vários graus de liberdade, que as soluções da equações de Euler-Lagrange de um Lagrangiano $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ satisfazem as equações de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \end{cases}$$

para o Hamiltoniano $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ correspondente.

- 2.2.** Considere o problema de três corpos planar restrito circular, em que um corpo celeste L com massa $M_L > 0$ gira em movimento circular com frequência constante $\omega > 0$ em torno de um outro corpo celeste T de massa $M_T > 0$, e um satélite de massa $m \ll M_L, M_T$ muito menor que a dos dois corpos se movimenta sob a atração gravitacional desses corpos. Considerando um referencial girante centrado em T e acompanhando a rotação de L em torno de T , o Lagrangiano para o movimento do satélite pode ser escrito na forma polar

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2(\omega + \dot{\theta})^2 + G\frac{mM_T}{r} + G\frac{mM_L}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR}}.$$

Obtenha o Hamiltoniano desse sistema e verifique que o sistema hamiltoniano associado pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{p_r}{m}, \\ \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} - \omega, \\ \dot{p}_r = \frac{p_\theta}{r} - G\frac{mM_T}{r^2} - 2G(r-R)\frac{mM_L}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR}}, \\ \dot{p}_\theta = 0, \end{cases}$$

onde p_r e p_θ são os momentos conjugados às coordenadas generalizadas r e θ , respectivamente.

- 2.3.** Ache o Hamiltoniano e as equações de Hamilton de um problema de dois pêndulos co-planares com a mesma massa $m > 0$ e hastes de mesmo comprimento $\ell > 0$.

3. Obtendo o Lagrangiano a partir do Hamiltoniano

Dado um Lagrangiano $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, vimos como obter o Hamiltoniano associado a partir da relação

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}(\mathbf{q}, \mathbf{p}),$$

onde $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ é solução de

$$\mathbf{p} = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

De maneira inversa, podemos obter o Lagrangiano a partir de um Hamiltoniano $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ reescrevendo a relação acima na forma

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

onde $\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ é solução da primeira equação do sistema Hamiltoniano,

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

No caso do pêndulo planar, vimos que o Hamiltoniano é

$$H(\theta, \psi) = \frac{1}{2m\ell^2}\psi^2 - mg\ell \cos \theta.$$

A velocidade angular é dada pela primeira equação de Hamilton,

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial \psi}(\theta, \psi) = \frac{1}{m\ell^2}\psi,$$

cujas inversas nos dá o momento angular em termos da velocidade angular:

$$\psi = m\ell^2\dot{\theta}.$$

Substituindo essa relação na fórmula para o Lagrangiano a partir do Hamiltoniano, obtemos

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \dot{\theta}\psi - H(\theta, \psi) = m\ell^2\dot{\theta}^2 - \left(\frac{1}{2m\ell^2}(m\ell^2\dot{\theta})^2 - mg\ell \cos \theta \right) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell \cos \theta,$$

recuperando, assim, o Lagrangiano desse sistema.

Exercícios

- 3.1.** Nos problemas das seções anteriores, faça o caminho inverso, obtendo o Lagrangiano a partir do Hamiltoniano, conforme descrito acima.

4. Sistemas não-autônomos

Mesmo no caso não-autônomo, em que o Lagrangiano depende também da variável temporal, i.e.

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

podemos obter um sistema na forma Hamiltoniana,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \end{cases}$$

com a diferença que agora o Hamiltoniano também depende da variável temporal, sendo da forma

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t).$$

É fundamental notar que nesse caso o Hamiltoniano não é conservado, e a sua variação temporal ao longo de uma solução é dada por

$$\frac{d}{dt}H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) = \frac{\partial H}{\partial t}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t).$$

As relações entre o Lagrangiano e o Hamiltoniano são como no caso autônomo.

Exercícios

- 4.1.** Mostre, nesse caso não-autônomo, que o Hamiltoniano obtido da relação

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad \dot{\mathbf{q}} = V(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t),$$

onde $\dot{\mathbf{q}} = V(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ é solução de

$$\mathbf{p} = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

leva as equações de Euler-Lagrange no sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \end{cases}$$

4.2. Mostre que nesse caso não-autônomo o Hamiltoniano satisfaz

$$\frac{d}{dt}H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) = \frac{\partial H}{\partial t}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t).$$

4.3. Mostre o Lagrangiano $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ associado a um Hamiltoniano $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ pode ser recuperado através das relações

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

onde $\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ é solução da primeira equação do sistema Hamiltoniano,

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

4.4. Considere o Lagrangiano

$$L(\theta, \dot{\theta}, t) = m\ell\omega\dot{\theta} \cos \omega t \cos \theta + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell \cos \theta$$

associado a um pêndulo planar cuja haste fixa está sujeita a um movimento periódico com frequência $\omega \in \mathbb{R}$. Obtenha o Hamiltoniano correspondente.

5. Transformada de Legendre

Vamos considerar o caso de apenas um grau de liberdade, para simplificar, ou seja, com $\mathbf{q} = q \in \mathbb{R}$, $\dot{\mathbf{q}} = \dot{q}$ e $\mathbf{p} = p = \partial L(q, \dot{q}) / \partial \dot{q}$.

Observe que considerando q como um parâmetro e esquecendo por um momento a dependência do Lagrangiano e do Hamiltoniano em q , a transformação entre essas funções pode ser escrita na forma

$$H(p) = pq - L(\dot{q}), \quad \text{onde } \dot{q} = \dot{q}(p) \text{ é a inversa de } p = \frac{\partial L(\dot{q})}{\partial \dot{q}}.$$

Trocando a notação, podemos escrever a seguinte transformação:

$$g^*(s) = sr - g(r), \quad \text{onde } r = r(s) \text{ é a inversa de } s = g'(r).$$

Essa transformação está bem definida para $s \in \mathbb{R}$ desde que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja diferenciável e $g' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja invertível.

Note, agora, que formalmente essa transformação pode ser escrita na forma

$$g^*(s) = \max_{r \in \mathbb{R}} \{sr - g(r)\}.$$

De fato, o máximo, sob certas condições, é atingido quando

$$\frac{\partial}{\partial r} \{sr - g(r)\} = s - g'(r) = 0,$$

ou seja, quando r é tal que $s = g'(r)$. No caso em que esse máximo existe e é único, isso define a função $r = r(s)$ que é inversa de g' .

Por outro lado, para essa última definição fazer sentido, não é necessário nem que g seja diferenciável.

Podemos assumir que g é contínua e coerciva, onde coerciva significa dizer que

$$\frac{g(r)}{|r|} \rightarrow \infty, \quad \text{quando } |r| \rightarrow \infty.$$

A coercividade implica em $sr - g(r)$ ser limitada superiormente em relação a r , para cada $s \in \mathbb{R}$ fixo e, com isso, que o supremo de $sr - g(r)$ em r é limitado. E a continuidade implica que esse supremo é um máximo.

A operação acima que leva g em g^* é chamada de Transformada de Legendre. O Hamiltoniano é, em certo sentido, a transformada de Legendre do Lagrangiano. E vice-versa.

Vamos ver condições para que g^* seja contínua e coerciva e, com isso, que a transformada de Legendre possa ser aplicada em g^* , nos dando uma função g^{**} . Vamos ver, em seguida, que g^{**} concide com g .

Exercícios

5.1. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e coerciva e considere a sua transformada de Legendre

$$g^*(s) = \max_{r \in \mathbb{R}} \{sr - g(r)\}.$$

- (1) Mostre que $g^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está bem definida.
- (2) Mostre que g^* é contínua em \mathbb{R} .
- (3) Mostre que g^* é coerciva.
- (4) Mostre que se g^* é convexa.
- (5) Mostre que a segunda transformada de Legendre de g ,

$$g^{**}(r) = \max_{s \in \mathbb{R}} \{rs - g^*(s)\},$$

está bem definida.

- (6) Mostre que se g é estritamente convexa, então a segunda transformada de Legendre de g coincide com a função original, ou seja, $g^{**} = g$.
- (7) Suponha que g seja continuamente diferenciável e com $g' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ invertível. Mostre que g^* pode ser escrito na forma

$$g^*(s) = sr(s) - g(r(s)),$$

para todo $s \in \mathbb{R}$, onde $r(s)$ é o único número real r tal que $s = g'(r)$.

CAPÍTULO 7

Sistemas contínuos

1. Exemplos

Exercícios

- 1.1.** Considere uma cadeia linear de $n + 1$ partículas de massa $m = \mu\ell$ e unidas por uma mola de comprimento de equilíbrio ℓ e coeficiente de restauração $k = \lambda/\ell$. Escrevendo a posição de cada partícula como $\mathbf{r}_i = (i\ell + q_i, 0, 0)$, $i = 0, \dots, n$, onde $\mathbf{q} = (q_i)_{i=0, \dots, n}$ são as coordenadas generalizadas indicando o deslocamento de cada partícula da posição de equilíbrio. Escreva o Lagrangian $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ do sistema discreto e passe ao limite quando $\ell \rightarrow 0$ e $n \rightarrow \infty$, com $\ell n \rightarrow L$, para algum $L > 0$, para obter um Lagrangiano contínuo $L(q, q_x, q_t)$, com $q = q(x, t)$, $0 \leq x \leq L$, $t \in \mathbb{R}$, da forma

$$L(q, q_x, q_t) = \int_0^L \mathcal{L}(q, q_x, q_t) dx, \quad \mathcal{L}(q, q_x, q_t) = \frac{1}{2}\mu q_t^2 - \frac{1}{2}\lambda q_x^2.$$

Obtenha, em seguida, as equações de Euler-Lagrange para $q = q(x, t)$, ou seja

$$\mu q_{tt} = \lambda q_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L, t \in \mathbb{R}.$$

Considere, ainda, as equações de Euler-Lagrange para q_0 e q_n , a saber

$$\mu\ell\ddot{q}_0 = \lambda\frac{q_1 - q_0}{\ell}, \quad \mu\ell\ddot{q}_n = -\lambda\frac{q_n - q_{n-1}}{\ell}$$

e passe ao limite para obter as condições de contorno

$$q_x(0) = q_x(L) = 0.$$

- 1.2.** Considere, agora, uma cadeia de partículas ligadas por molas mas vibrando apenas transversalmente, ou seja, as partículas assumem posições $\mathbf{r}_i = (i\ell, 0, q_i)$, com as coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = (q_i)_{i=0, \dots, n}$. O potencial de cada mola é dado por

$$V_{i,i-1}(q_i, q_{i-1}) = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\ell} (\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}\| - \ell) = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\ell} \left(\sqrt{\ell^2 + (q_i - q_{i-1})^2} - \ell \right)^2.$$

Para pequenas vibrações transversais, podemos aproximar esse potencial por

$$\tilde{V}_{i,i-1}(q_i, q_{i-1}) = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\ell} (q_i - q_{i-1})^2.$$

Considere ainda o potencial gravitacional de cada partícula,

$$V_i(q_i) = \mu \ell g q_i.$$

Escreva o Lagrangiano $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ do sistema discreto e passe ao limite ($\ell \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $n\ell \rightarrow L$), para achar a densidade do Lagrangiano, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, q_x, q_t)$, $q = q(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, do sistema contínuo. Ache ainda a equação de Euler-Lagrange para $q(x, t)$.

- 1.3.** Considere uma cadeia “vertical” de partículas ligadas por molas e vibrando longitudinalmente, de forma que as partículas assumem posições $\mathbf{r}_i = (0, 0, -i\ell - q_i)$. Assumimos, dessa vez, que a “primeira” partícula está fixa na origem, $\mathbf{r}_0 = (0, 0, 0)$, de modo que apenas consideramos $\mathbf{q} = (q_i)_{i=1, \dots, n}$ como coordenadas generalizadas (começamos com $i = 1$). Escreva a densidade do Lagrangiano do sistema contínuo limite e obtenha as equações de Euler-Lagrange, junto com as condições de contorno:

$$\mu q_{tt} = \lambda q_{zz} + \mu g, \quad 0 \leq z \leq L, \quad t \in \mathbb{R}, \quad q(0, t) = 0, \quad q_z(L, t) = 0,$$

onde $q = q(z, t)$, $0 \leq z \leq L$, $t \in \mathbb{R}$. Observe que estamos aproximando $i\ell \rightarrow z$, de maneira que o “eixo z ” no problema limite aponta “para baixo” (caso contrário teríamos $-L \leq z \leq 0$ e $-\mu g$ na equação, o que também estaria certo, apenas com outra interpretação).

- 1.4.** Considere uma cadeia de pêndulos de massa $m = \mu \ell$ e comprimento a ligados horizontalmente por molas com comprimento de equilíbrio ℓ e coeficiente de restauração $k = \lambda/\ell$. Considerando os ângulos θ_i de cada pêndulo como coordenadas generalizadas, podemos escrever a posição de cada partícula como $\mathbf{r}_i = (i\ell + a \sin \theta_i, 0, -a \cos \theta_i)$. Considerando a energia potencial

$$-\mu \ell g a \cos \theta_i$$

de cada partícula $i = 0, \dots, n$ e aproximando a energia potencial de cada mola por

$$\frac{1}{2} \frac{\lambda a}{\ell} (\theta_i - \theta_{i-1})^2$$

passe ao limite para obter a densidade do Lagrangiano

$$\mathcal{L}(\theta, \theta_x, \theta_t) = \frac{1}{2} a^2 \mu \theta_t^2 - \frac{1}{2} a^2 \lambda \theta_x^2 + \mu g a \cos \theta,$$

onde $\theta = \theta(x, t)$.

- 1.5.** Considere um conjunto de partículas na forma de uma malha, dadas pelas coordenadas

$$\mathbf{r}_{i,j} = (i\ell, j\ell, u_{i,j}), \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

Considere cada partícula ligada a cada uma de suas quatro partículas vizinhas mais próximas, de tal forma que a energia potencial desse conjunto de molas

é dada por

$$\frac{1}{2}\lambda \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} ((u_{i,j} - u_{i-1,j})^2 + (u_{i,j} - u_{i,j-1})^2).$$

(O parâmetro λ é chamado de *módulo de Young* e se relaciona com o coeficiente de elasticidade k da mola através da fórmula $k = \lambda S/\ell$, onde S é a área da seção da mola transversal ao esticamento e ℓ é o comprimento da mola na direção longitudinal ao esticamento.)

Considere, ainda, o potencial gravitacional do conjunto de partículas,

$$\mu \ell g \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} u_{i,j}.$$

Passe ao limite quando $\ell \rightarrow 0$ para achar a densidade do Lagrangiano na forma

$$\mathcal{L}(u, u_x, u_y, u_t) = \frac{1}{2}\mu u_t^2 - \frac{1}{2}\lambda(u_x^2 + u_y^2) - \mu g u.$$

- 1.6.** Considerando o princípio da menor ação, em que as equações de Euler-Lagrange estão associadas aos pontos críticos do ação

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\dots) dt,$$

onde o Lagrangiano $L(\dots)$ é dado em termos de uma densidade do Lagrangiano $\mathcal{L}(\dots)$ em uma região Ω , com

$$L(\dots) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\dots),$$

encontre as equações de Euler-Lagrange nos casos abaixo em termos das derivadas parciais da densidade do Lagrangiano.

- (1) Densidade $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, q_t)$, com $q = q(x, t)$, $x \in \Omega = \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.
- (2) Densidade $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, q_x, q_t)$, com $q = q(x, t)$, $x \in \Omega = \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.
- (3) Densidade $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, x_s, x_t, s)$, com $x = x(s, t)$, $s \in \Omega = \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.
- (4) Densidade $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, q_x, q_t, x, t)$, com $q = q(x, t)$, $x \in \Omega = \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.
- (5) Densidade $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u, u_x, u_t, u_{tt})$, com $u = u(x, t)$, $x \in \Omega = \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.
- (6) Densidade $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, q_x, q_y, q_t)$, com $q = q(x, y, t)$, $(x, y) \in \Omega = \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$.
- (7) Densidade $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, q_x, q_{yy}, q_{zz}, q_t)$, com $q = q(x, y, z, t)$, $(x, y, z) \in \Omega = \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$.
- (8) Densidade $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, q_t)$, com $q = q(x, t)$, $x \in \Omega = \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.
- (9) Densidade $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u, v, u_x, v_x, u_t, v_t)$, com $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$, $x \in \Omega = \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

- 1.7.** Ache as equações de Euler-Lagrange nos seguintes casos:

- (1) (Equação de Klein-Gordon) Densidade do Lagrangiano dada por

$$\mathcal{L}(\varphi, \varphi_x, \varphi_t) = \frac{1}{2}\mu \varphi_t^2 - \frac{1}{2}\lambda \varphi_x^2 - \frac{1}{2}\mu \gamma \varphi,$$

onde $\varphi = \varphi(x, t)$, $x \in \Omega = \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

(2) (Equação de sine-Gordon) Densidade do Lagrangiano dada por

$$\mathcal{L}(\varphi, \varphi_x, \varphi_t) = \frac{1}{2}\mu\varphi_t^2 - \frac{1}{2}\lambda\varphi_x^2 - \frac{1}{2}\mu\gamma(1 - \cos \varphi),$$

onde $\varphi = \varphi(x, t)$, $x \in \Omega = \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

(3) (equação de Korteweg-de Vries) Densidade do Lagrangiano dada por

$$\mathcal{L}(\varphi, \varphi_x, \varphi_{xx}, \varphi_t) = \frac{1}{2}\varphi_x\varphi_t + \frac{1}{6}\alpha\varphi_x^3 - \frac{1}{2}\nu\varphi_{xx}^2,$$

onde $\varphi = \varphi(x, t)$, $x \in \Omega = \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. A equação de Korteweg-de Vries é, na verdade, a equação para $\psi = \varphi_x$.

(4) (Pequenas oscilações de uma membrana) Densidade do Lagrangiano dada por

$$\mathcal{L}(u, u_x, u_y, u_t) = \frac{1}{2}\mu u_t^2 - \frac{1}{2}\lambda(u_x^2 + u_y^2) - \mu g u,$$

onde $u = u(x, y, t)$, $(x, y) \in \Omega = \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$.

(5) (Pequenas vibrações acústicas) Densidade do Lagrangiano dada por

$$\mathcal{L}(u, u_x, u_y, u_z, u_t) = \frac{1}{2}\mu u_t^2 - \frac{1}{2}\lambda(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) - \mu g u,$$

onde $u = u(x, y, z, t)$, $(x, y, z) \in \Omega = \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Conservação de energia

Exercícios

2.1. Considere um sistema contínuo com densidade de Lagrangiano $\mathcal{L}(q, q_x, q_t)$ em um intervalo $\Omega = [0, L]$, com condições de contorno $q(0, t) = 0$, $q(L, t) = 0$. Mostre que

$$h = \int_0^L \left(q_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_t} - \mathcal{L} \right) dx$$

é uma quantidade conservada do sistema.

2.2. Considere um sistema contínuo com densidade de Lagrangiano $\mathcal{L}(q, q_x, q_t)$ em um intervalo $\Omega = [0, L]$, com condições de contorno tais que $q(0, t) = 1$ e $\partial \mathcal{L} / \partial q_t|_{x=L} = 0$. Mostre que

$$h = \int_0^L \left(q_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_t} - \mathcal{L} \right) dx$$

é uma quantidade conservada do sistema.

- 2.3.** Considere um sistema contínuo com densidade de Lagrangiano $\mathcal{L}(u, u_x, u_y, u_t)$ em uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com condições de contorno $q(x, y, t) = 0$ para $(x, y) \in \partial\Omega$ (onde $\partial\Omega$ indica o bordo de Ω). Mostre que

$$h = \int_{\Omega} \left(q_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_t} - \mathcal{L} \right) dx dy$$

é uma quantidade conservada do sistema.

- 2.4.** Ache as respectivas quantidades conservadas dos sistemas tratados na seção anterior, assumindo condições de contorno apropriadas.

CAPÍTULO 8

Relatividade restrita

Referências Bibliográficas

- [1] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics (Graduate Texts in Mathematics Vol. 60)*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2000.
- [2] F. Gantmacher, *Lectures in Analytical Mechanics*, Mir Publishers, Moscow, 1970.
- [3] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Philippines, 1980.
- [4] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Third Edition, Course of Theoretical Physics, Volume 1, Elsevier Science Ltd., Oxford, 1976.
- [5] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica*, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004.