简单粗暴微积分

雷瑞祺

最后更新: November 4, 2021

Contents

1 函数与极限

本章涉及了高等数学中基本的玩具.

1.1 函数的初等性态

研究函数性质的几个角度

- 奇偶性
- 周期性
- 单调性
- 有界性

1.2 一些新玩具

1.2.1 等式

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$

1.2.2 不等式

(Cauchy-Schwartz不等式) 对任意$a_i, b_i \in \mathbf{R}$, 有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

1.2.3 三角函数

余切 $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}, \{x \mid x \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$

正割 $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}, \{x \mid x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$

余割 $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}, \{x \mid x \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$

1.2.4 反三角函数

1.2.5 双曲函数

定义

双曲正弦函数 $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, D = \mathbf{R}$

双曲余弦函数 $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, D = \mathbf{R}$

双曲正切函数 $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, D = \mathbf{R}$

双曲余切函数 $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, D = \mathbf{R}$

反双曲正弦 $\operatorname{arcsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), D = \mathbf{R}$

反双曲余弦 $\operatorname{arcch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), D = [1, +\infty)$

反双曲正切 $\operatorname{arcth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}, D = (-1, 1)$

性质

- $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
- $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$
- $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$
- $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$
- $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$

1.3 数列的极限

1.3.1 定义

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当$n > N$时, 恒有$|x_n - a| < \varepsilon$成立.

1.3.2 性质

极限的唯一性 若数列$\{x_n\}$收敛, 则它的极限唯一.

收敛数列的有界性 若数列$\{x_n\}$收敛, 则$\{x_n\}$有界.

收敛数列的保序性 设有数列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 且自某一项起, 有$x_n \le y_n$, 则$a \le b$.

子列的收敛性 数列$\{x_n\}$收敛于a的充分必要条件是$\{x_n\}$的任一子列都收敛, 且都收敛于a.

1.4 函数的极限

1.5 求极限的方法

1.5.1 按玩法常用程度排序

1. 极限的四则运算, 极限的复合运算
2. 初等函数的连续性, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
3. 特殊极限
4. 等价无穷小(相乘除)
5. 夹逼定理
6. 有界量×无穷小=无穷小
7. 单调有界(证明)
8. 其它: 分子有理化

1.6 极限的定义

1.6.1 一系列等价无穷小

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)\ (x \to 0)$$
$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x\ (x \to 0)$$
$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}\ (x \to 0)$$

1.7 函数的连续性与间断点

连续的定义

2 The Second Chapter