简单粗暴高等数学

雷瑞祺

最后更新: November 3, 2021

Contents

1 函数与极限

本章涉及了高等数学中基本的玩具.

1.1 一些新玩具

1.1.1 等式

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$

1.1.2 不等式

(Cauchy-Schwartz不等式) 对任意$a_i, b_i \in \mathbf{R}$, 有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

1.1.3 三角函数

余切 $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}, \{x \mid x \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$

正割 $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}, \{x \mid x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$

余割 $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}, \{x \mid x \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$

1.1.4 反三角函数

1.1.5 双曲函数

定义

双曲正弦函数 $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, D = \mathbf{R}$

双曲余弦函数 $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, D = \mathbf{R}$

双曲正切函数 $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, D = \mathbf{R}$

双曲余切函数 $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, D = \mathbf{R}$

反双曲正弦 $\operatorname{arcsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), D = \mathbf{R}$

反双曲余弦 $\operatorname{arcch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), D = [1, +\infty)$

反双曲正切 $\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, D = (-1, 1)$

性质

- $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
- $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$
- $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$
- $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$
- $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$

1.2 求极限的方法

1.2.1 按玩法常用程度排序

1. 极限的四则运算, 极限的复合运算
2. 初等函数的连续性, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
3. 特殊极限
4. 等价无穷小(相乘除)
5. 夹逼定理
6. 有界量×无穷小=无穷小
7. 单调有界(证明)
8. 其它: 分子有理化

1.2.2 一系列等价无穷小

$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$
$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$
$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

2 The Second Chapter