

Geração de Malhas

Trabalho 01

Rafael Umino Nakanishi

1 Objetivo

O objetivo desse trabalho foi implementar o método de diferenças finitas para a Equação do calor (Eq. 1) para $t \geq 0$ e raio constante ($r = 1$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad (1)$$

no domínio $\Omega = \{(\theta, \phi) : \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2; 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$ com as condições de contorno:

$$\begin{cases} u(\pi/4, \phi, t) = 10 \\ u(\pi/2, \phi, t) = 0 \\ u(\theta, \phi, 0) = 1 \end{cases}$$

2 Resolução do problema

2.1 Laplaciano

Para a resolução do problema foi necessário realizar a discretização do Laplaciano para coordenadas esféricas:

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \quad (2)$$

E desenvolvendo a Equação 2, encontramos:

$$\Delta f = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \quad (3)$$

Além disso, no caso do problema descrito, pelo fato de ρ ser constante ($\rho = 1$), podemos descartar as derivadas parciais com relação a ρ :

$$\Delta f = \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \quad (4)$$

2.2 Discretização

Como observado anteriormente, o problema proposto foi expandido a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \quad (5)$$

Para a resolução computacional, é necessário discretizar o problema. Utilizaremos a discretização por diferenças finitas apresentado em [2]:

$$a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad (6)$$

$$a_i \left(\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} \right) + b_i \left(\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} \right) + c_i U_i = f_i \quad (7)$$

E para a da regra da cadeia, presente na equação 5, discretizamos da seguinte forma:

$$(ku')'(x_i) \approx \frac{1}{h^2} \left[k_{i-1/2} U_{i-1} - (k_{i-1/2} + k_{i+1/2}) U_i + k_{i+1/2} U_{i+1} \right] \quad (8)$$

E obtemos, então, a seguinte discretização para o problema 5:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sin^2 \phi} \left(\frac{U_{i-1,j} - U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2} \right) + \frac{1}{h^2 \sin \phi} \left(\sin \phi_{i-1/2} U_{i,j-1} - \right. \\ \left. - \left(\sin \phi_{j-1/2} - \sin \phi_{i+1/2} \right) U_{i,j} + \sin \phi_{i+1/2} U_{i,j+1} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Desse modo temos um problema de equação diferencial ordinária, que pode ser encontrada em [1]. Para resolução de tal problema, utilizaremos o método de Euler pra resolução de EDO's. A discretização do problema pode ser dada como:

$$\begin{aligned} U^{n+1} = U^n + h \left[\frac{1}{\sin^2 \phi} \left(\frac{U_{i-1,j}^n - U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n}{h^2} \right) + \frac{1}{h^2 \sin \phi} \left(\sin \phi_{i-1/2} U_{i,j-1}^n - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\sin \phi_{j-1/2} - \sin \phi_{i+1/2} \right) U_{i,j}^n + \sin \phi_{i+1/2} U_{i,j+1}^n \right) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

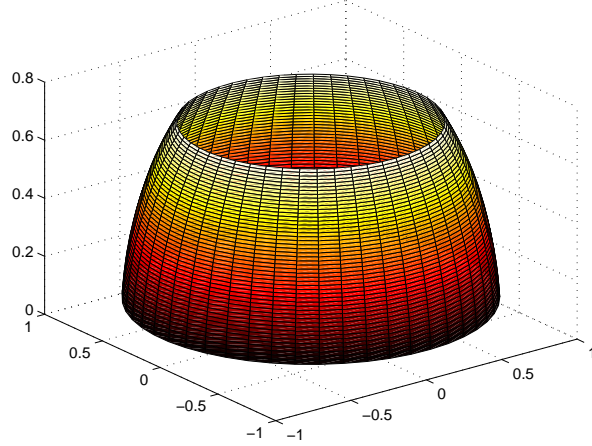


Figura 1: Domínio da aplicação

3 Resultados

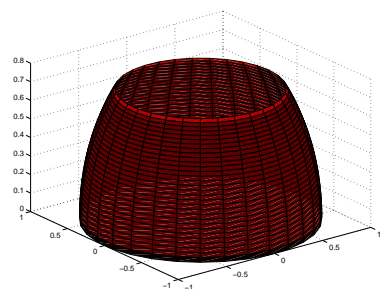
É possível observar pelo domínio da aplicação (Fig. 1) e pelas condições de borda que a propagação do calor ocorre apenas na direção de ϕ , ou seja, sentido longitudinal. Além disso, como as variações de θ ocorrem latitudinalmente, é possível observar na malha, que a discretização

$$\frac{U_{i-1,j} - U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2}$$

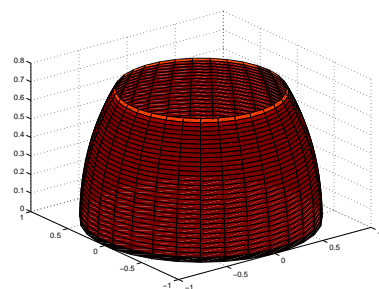
resulta em zero, uma vez que os valores em i são iguais, pela formulação do problema. Tal fato é comprovado ao se observar as simulações apresentadas no conjunto de Figuras 2.

Referências

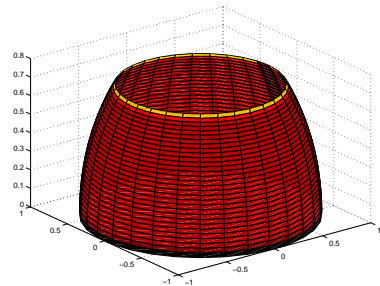
- [1] BURDEN, R. L., FAIRES, J. D., AND TASKS, A. *Análise numérica*. Cengage Learning, 2008. pg. 246-247.
- [2] LEVEQUE, R. J. *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*. Siam, 2007. pg. 35-36.



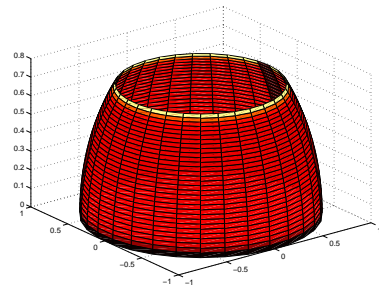
(a) 10 segundos



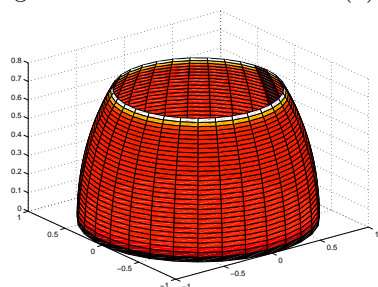
(b) 20 segundos



(c) 30 segundos



(d) 40 segundos



(e) 50 segundos

Figura 2: Temperatura ao longo do tempo. Cores mais claras indicam maiores temperaturas