HW2

1.2.3 ac, 1.2.11 ace, 1.2.13

1.3.7

2.1.15 ac

1.2.3

a.

$$
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\
1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$x_1 = -1 - x_2 - 3x_4 - x_5$

$x_2 = x_2$

$x_3 = 2 + x_4 - x_5$

$x_4 = x_4$

$x_5 = x_5$

$x_6 = 3$

x_2, x_4, x_5 are arbitrary

C.

$$
\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$x_1 = 1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 = -1 + s - 6t$

$x_2 = 1 + x_3 - x_5 = 1 + s - t$

$x_3 = x_3 = s$

$x_4 = x_5$

$x_5 = x_5 = x_4 = t$

$x_1 = \underbrace{1 - 2}\, + 2s - 2t - s - 3t - t$

$= -1 + s - 6t$

s and t are arbitrary

1.2.11

a.
$$\begin{matrix}1&1&2\\3&-1&1\\-1&3&4\end{matrix} \xrightarrow{\substack{R_2-3R_1\\R_3+R_1}} \begin{matrix}1&1&2\\0&-4&-5\\0&4&6\end{matrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}R_2} \begin{matrix}1&1&2\\0&1&\frac{5}{4}\\0&4&6\end{matrix} \xrightarrow{\substack{R_1-R_2\\R_3-4R_2}} \begin{matrix}1&0&\frac{3}{4}\\0&1&\frac{5}{4}\\0&0&-5\end{matrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}R_3} \begin{matrix}1&0&\frac{3}{4}\\0&1&5/4\\0&0&1\end{matrix} \xrightarrow{\substack{R_1-\frac{3}{4}R_3\\R_2-\frac{5}{4}R_3}} \boxed{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}$$

So Rank is $\boxed{3}$

c.
$$\begin{matrix}1&1&-1&3\\-1&4&5&-2\\1&6&3&4\end{matrix} \xrightarrow{\substack{R_2+R_1\\R_3-R_1}} \begin{matrix}1&1&-1&3\\0&5&4&1\\0&5&4&1\end{matrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \begin{matrix}1&1&-1&3\\0&1&\frac{4}{5}&1/5\\0&5&4&1\end{matrix}$$

$$\xrightarrow{R_1-R_2,\ R_3-5R_2}$$

$-\frac{5}{5}$ $-\frac{4}{5}$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{5} & \frac{14}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$\frac{15}{5} - \frac{1}{5}$

So Rank is $\boxed{2}$

e.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1-a & a^2+1 \\ 1 & 2-a & -1 & -2a^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{a}R_2]{R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1-a}{a} & a+\frac{1}{a} \\ 0 & -a & 0 & -2a \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 + aR_2]{R_1 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{a-2}{a} & -2a-\frac{2}{a} \\ 0 & 1 & \frac{1-a}{a} & a+\frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{1-a}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{a-2}{a} & -2a-\frac{2}{a} \\ 0 & 1 & \frac{1-a}{a} & a+\frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 - \frac{1-a}{a}R_3]{R_1 - \frac{a-2}{a}R_3} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-3a \\ 0 & 1 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \end{bmatrix}}$$

So Rank is $\boxed{3}$

1.2.13

$$\begin{bmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \end{bmatrix}$$

Swap R_2 and R_3

$-R_1+R_2+R_3 \to R_1$

$\frac{1}{2}R_1 \to R_1$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{bmatrix}$$

$R_2 - R_1 \to R_2$

$R_3 - R_1 \to R_2$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

1.3.7

a. infinte salutions

4 parameters

b. infinte salutions

5 parameters

c. infinite solutions

3 ~ 5 parameters

d. infinite solutions

3 ~ 5 parameters

2.1.15

$$\left(\left(A + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\right)^T\right)^T = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\right)^T$$

$$A + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

C.

$$\left(2A - 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)^T = 3A^T + \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$2A^T + \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} = 3A^T + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(2A - 3A)^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-A^T = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(A^T)^T = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$