Modelos dinámicos para “doblegar la curva”

Ramón Nartallo-Kaluarachchi

Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid

1

Primero, hay que definir las categorías del modelo:

$$N(t) = \text{la población a tiempo } t \tag{1}$$
$$S(t) = \text{los susceptibles a tiempo } t \tag{2}$$
$$I(t) = \text{los infectados a tiempo } t \tag{3}$$
$$R(t) = \text{los recuperados a tiempo } t \tag{4}$$

En palabras, el sistema es:

$$\begin{aligned} S' &= -\text{infectados} + \text{nacidos} - \text{muertos} \\ I' &= \text{infectados} - \text{recuperados} - \text{muertos} - \text{muertos de la pandemia} \\ R' &= \text{recuperados} - \text{muertos} \\ N' &= -\text{muertos} - \text{muertos de la pandemia} + \text{nacidos} \end{aligned}$$

Podemos derivar la siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dS}{dt} = -S(t)\beta(t)I(t) + \lambda(t)N(t) - \mu(t)S(t) \tag{5}$$
$$\frac{dI}{dt} = S(t)\beta(t)I(t) - \gamma I(t) - \mu(t)I(t) - \mu^*(t)I(t) \tag{6}$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I(t) - \mu(t)R(t) \tag{7}$$

Donde γ,β y λ están definido como en el problema. No es necesario, pero también vamos a utilizar:

$$\frac{dN}{dt} = -\mu(t)N(t) - \mu^*(t)I(t) + \lambda(t)N(t) \tag{8}$$

2

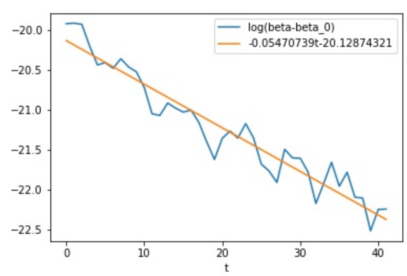
Usando el fichero de Excel (exportado a `.csv` y analizado usando un script de Python), podemos enumerar y trazar las funciones β_e y μ_e^*. Queremos aproximaciones de la forma:

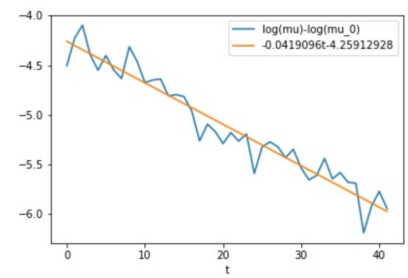
$$\beta(t) = \beta_0 + e^{at+b}$$
$$\mu^*(t) = \mu_0^* + e^{ct+d}$$

Reorganizando y tomando logaritmos, tenemos

$$\log(\beta(t) - \beta_0) = at + b \tag{9}$$
$$\log(\mu^*(t) - \mu_0^*) = ct + d \tag{10}$$

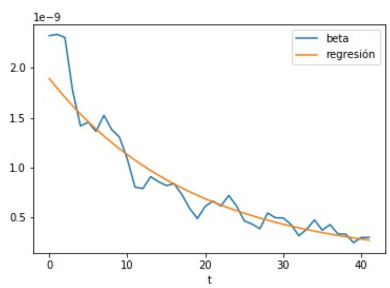
Esto nos dice que, las líneas de mejor ajuste a las trazas de $\log(\beta_e - \beta_0)$ y $\log(\mu_e^* - \mu_0^*)$, nos da las constantes a, b, c y d. Usando `numpy.polyfit(deg=1)`, podemos encontrar esta línea.

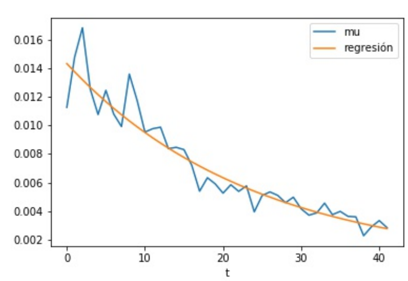




Los valores de las constantes son:

$$a = -0.05470739$$
$$b = -20.12874321$$
$$c = -0.0419096$$
$$d = -4.25912928$$





Para la tasa de defunciones, tenemos que proporcionar un modelo periódico de la forma,

$$\mu(t) = P + L\cos(\eta t + \epsilon) \tag{11}$$

Los datos nos dicen que, el máximo de la función se cumple el 4 de Febrero ($t = -45$) y el mínimo se cumple el 10 de Agosto ($t = 143$). Por estas razones, estamos buscando una función que cumple:

$$\begin{aligned}
\mu(-45) &= 3.62 \times 10^{-5} && \text{máx} \\
\mu(143) &= 2.53 \times 10^{-5} && \text{mín} \\
\mu(t+365) &= \mu(t)
\end{aligned}$$

Pero esto es imposible. Por ser un onda coseno, las distancia entre el máximo y el mínimo tiene que ser la mitad del período. Por eso, nuestro función no va a cumplir todo esto perfectamente, pero va a ser cercana. El período del coseno es 2π, y sabemos para una función periódica, tenemos que

$$f(x) \text{ con período de } p$$
$$f(kx) \text{ con período de } p/k$$

Esto nos dice que, $\eta = \frac{2\pi}{365}$. El período de nuestra función es 365, así que, la distancia entre el máximo y el mínimo tiene que ser 182.5. Queremos que nuestro modelo se ajuste a los datos lo mejor posible, por eso, debemos calcular el siguiente,

$$\begin{aligned}
143 + 45 &= 188 \\
188 - 182.5 &= 5.5 \\
5.5/2 &= 2.75 \\
-45 + 2.75 &= \textbf{-42.25} \\
143 - 2.75 &= \mathbf{141.25}
\end{aligned}$$

El máximo de nuestra función debe ser a $t = -42.25$ y el mínimo a $t = 141.25$. Esto nos dice que

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \frac{45 - 2.75}{365} \cdot 2\pi \\
&= 0.727300217064
\end{aligned}$$

La distancia vertical entre el máximo y el mínimo de la función coseno es 2. Necesitamos proporcionar esto para que la distancia sea 1.09×10^{-5}. Esto nos dice que,

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1.09 \times 10^{-5}}{2} \\
&= 0.545 \times 10^{-5}
\end{aligned}$$

Trivialmente, tenemos que mover la curva hacía arriba, y entonces, $P = 3.075 \times 10^{-5}$. El modelo es,

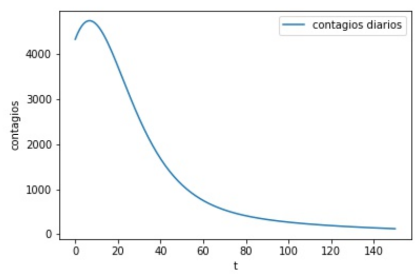
$$\mu(t) = 3.075 \times 10^{-5} + (0.545 \times 10^{-5}) \cos(\frac{2\pi}{365}t + 0.727300217064) \tag{12}$$

Nota

A pesar de mis grandes esfuerzos, no pude hacer que el modelo funcionara con el parámetro de tasa de natalidad. Arruinaría completamente mis resultados y no podría entender el error. Solo para la siguiente sección, la predicción se realiza utilizando el mismo modelo pero omitiendo la tasa de natalidad. Espero que esto sea aceptable.

Usando el paquete `scipy.integrate` y la función `odeint()`, integré numéricamente el sistema, produciendo listas de valores que representan la función en momentos de tiempo. Para calcular el número total de de infectados, queremos introducir una función $C(t)$ que representa el numero de casos nuevos diarios. Podemos aproximar esta función usando:

$$C(t) = S(t)I(t)\beta(t) \tag{13}$$



Ahora tenemos que hacer la suma de todos las días en el intervalo.

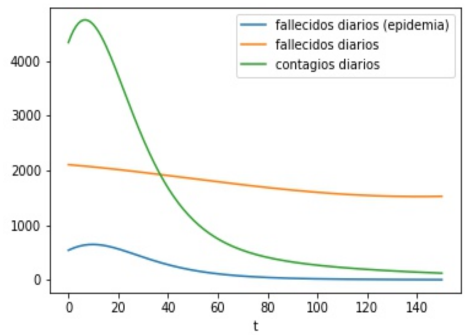
a) El número total de personas que se habrán infectado en el periodo [0, 150] es 192301

Hacemos el mismo para los fallecidos con dos funciones, $F(t)$, los fallecidos por el virus cada día, y $D(t)$, los fallecidos por otros razones cada día:

$$F(t) = \mu^*(t)I(t) \tag{14}$$

$$D(t) = \mu(t)N(t) \tag{15}$$

b) El número de fallecidos a causa de la epidemia en el periodo [0, 150] es 27260 y el número de fallecidos en total en el mismo periodo es 262525.



La razón entre el número de defunciones por la epidemia y el número de personas que se han infectado en el periodo [0, 150] se calcula usando:

$$r = 100 \cdot \frac{\Sigma_t F(t)}{\Sigma_t C(t)} \tag{16}$$

c) La razón es 14.175949155115807

Usando `numpy.var(N)` calculamos la variación de la población,
d) La variación es 6742264208.212912

3

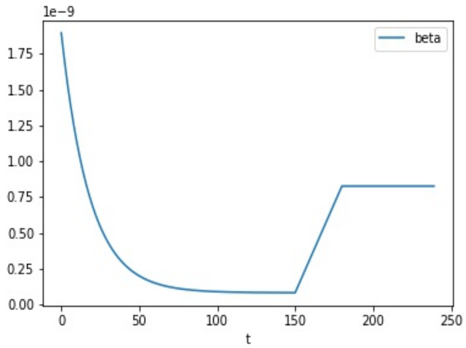
Primero, tenemos que definir $\beta(t)$ y $\mu(t)$ para $t > 150$. Entre $150 \leq t \leq 180$, es lineal con gradientes,

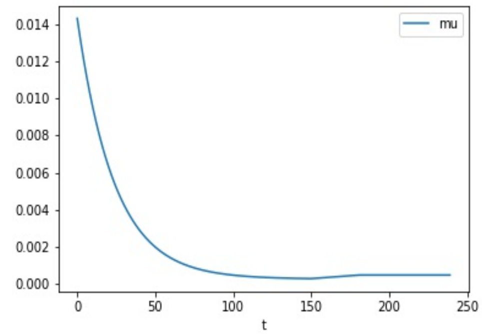
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10\beta_0 - \beta(150)}{30} \qquad \text{para } \beta$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\mu_0^* - \mu^*(150)}{30} \qquad \text{para } \mu$$

Y con intercepciones,

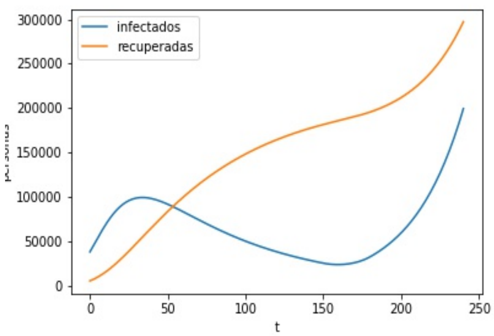
$$c_\beta = 6\beta(150) - 50\beta_0$$
$$c_\mu = 6\mu^*(150) - 10\mu_0$$

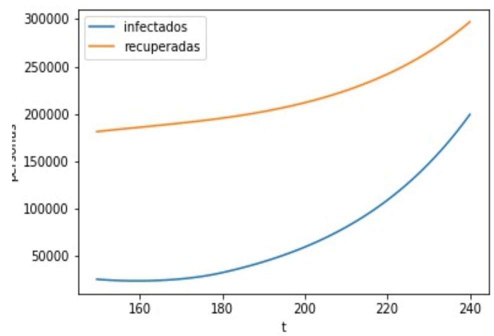
Y después son constantes,



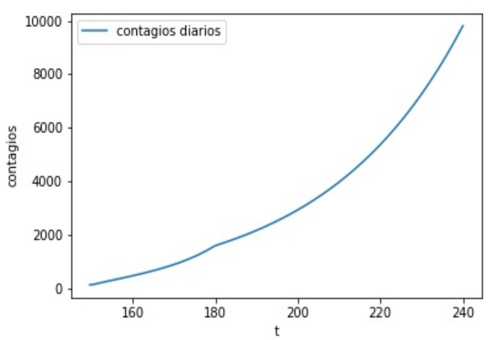


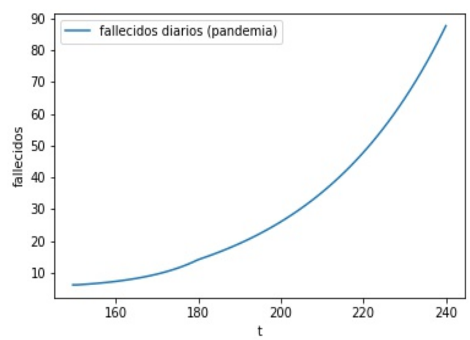
Usando el misma modelo que antes, y las mismas relaciones, pero con las nuevas β y μ^*, podemos extender nuestro modelo hasta $t = 240$.





Podemos estimar cuando $C(t)$ supera a 5000 y $F(t)$ supera a 50

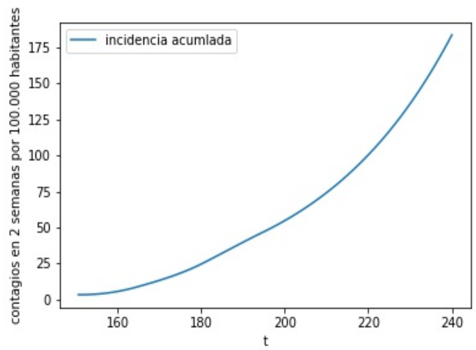




Los contagios supera 5000 el día 218 que es el 24 de Octubre y los fallecidos supera 50 el día 222 que es el 28 de Octubre.

Definimos la incidencia acumulada, $j(t)$, por,

$$j(t) = \frac{\Sigma_{t-14}^{t} C(t)}{N(t)} \cdot 100.000$$



La incidencia supera a 50 el día 197 que es el 3 de Octubre y supera a 100 el día 219 que es el 25 de Octubre.

El número de personas que han fallecido entre $180 \le t \le 240$ es 2454. El número de personas que se han infectado entre este periodo es 275342.

4

Tenemos que derivar un modelo nuevo que incluye los casos asintomáticos. Como antes, empezamos en palabras;

$$\begin{aligned}
S' &= -(\text{inf por un inf}) - (\text{inf por un asin}) - (\text{asin por un inf}) - (\text{asin por un asin}) + (\text{nacidos}) - (\text{fallecidos})\\
I' &= (\text{inf por un inf}) + (\text{inf por un asin}) - (\text{fallecidos por el virus}) - (\text{fallecidos}) - (\text{inf recuperados})\\
R' &= (\text{inf recuperados}) + (\text{asin recuperados}) - (\text{fallecidos})\\
A' &= (\text{asin por un inf}) + (\text{asin por un asin}) - (\text{asin recuperados}) - (\text{fallecidos})\\
N' &= (\text{fallecidos}) - (\text{fallecidos por el virus}) + (\text{nacidos})
\end{aligned}$$

Esto nos dice que el sistema es,

$$S' = -SI\beta_1 - SI\beta_2 - SA\beta_3 - SA\beta_4 + \lambda N - \mu S \tag{17}$$
$$I' = SI\beta_1 + SA\beta_3 - \gamma I - \mu I - \mu^* I \tag{18}$$
$$R' = \gamma I + \gamma^* A - \mu R \tag{19}$$
$$A' = SI\beta_2 + SA\beta_4 - \gamma^* A - \mu A \tag{20}$$
$$N' = -\mu N - \mu^* I + \lambda N \tag{21}$$

Usando las mismas relaciones que antes, podemos calcular:

a) El número de personas que fallecerán por la epidemia en los siguientes 60 días es 207
b) El número de personas que enfermarán en los siguientes 60 días 225417 y el porcentaje de las mismas que enfermará al ser contagiadas por un asintomático es 33.33%
c) Estimamos que en los siguientes 60 días, 69 personas hayan fallecido y estaban infectadas por un asintomático

Por la ultima parte, implementamos una red de rastreo para bajar β_i, y hacemos las mismas pruebas otra vez. Con la red de rastreo, estimamos que:

a) El número de personas que fallecerán por la epidemia en los siguientes 60 días es 86
b) El número de personas que enfermarán en los siguientes 60 días 35046 y el porcentaje de las mismas que enfermará al ser contagiadas por un asintomático es 9.09%
c) Estimamos que en los siguientes 60 días, 8 personas hayan fallecido y estaban infectadas por un asintomático

Nota

Github: `https://github.com/rnartallo/Modelos-dinamicos-para-doblegar-la-curva-`