Vorlesung Digitale Signalverarbeitung

Fast-Fourier-Transformation

Inhalt

- Warum wird die FFT gebraucht?
- Zusammenhang der Transformationen
- Was ist DFT?
- Was ist die FFT?

Einführung: Fast Fourier Transform (FFT)

- Numerisch effiziente Methode zur Berechnung einer diskreten Fouriertransformation (sog. DFT, später)

- Geht zurück auf Gauß (1805) und Cooley & Tukey (1965)

- Aufwand zur Berechnung der DFT für Signal der Länge N:
  ohne FFT: ca. N2 komplexe Multiplikationen und Additionen
  mit FFT: ca. N log2 N komplexe Multiplikationen und Additionen

N	1000	10^6	10^9
N^2	10^6	10^{12}	10^{18}
$N \log_2 N$	10^4	$20*10^6$	$30*10^9$

10^{18} ns ~ 31.2 Jahre

$30*10^9$ ns ~ 30 Sekunden!

Die Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

- Rechenvorschrift zur Bestimmung der Spektralkomponenten von periodischen diskreten Signalen.

- Auf Digitalrechnern umsetzbare Näherung der Fourier-Transformation, schnell umsetzbar via Fast Fourier Transform (FFT) .

- Ermöglicht z.B.:
  - Spektralanalyse (für Audiosignale, Bilder, …).
  - Schwingungsanalyse mechanischer Systeme.
  - Filterung von Signalen.
  - Rauschunterdrückung.
  - Schnelle Berechnung von Faltungsoperationen.
  - Radarsignalverarbeitung für automotive Radare und Industrie 4.0 (siehe Automotive-Radar-Vorlesung)

Überblick der Transformationen

- **Laplace-Transformation:**

  $x(t) \Leftrightarrow X(p)$ mit $X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-pt}dt$

- **Fourier-Transformation** (continuous time fourier transform, **CTFT**):

  $x(t) \Leftrightarrow X(j\omega)$ mit $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt$

- **z-Transformation:**

  $x(kT) \Leftrightarrow \tilde{X}(z)$ mit $\tilde{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)z^{-n}$

- **Fourier-Transformation für zeitdiskrete Signale** (discrete time ~, **DTFT**):

  $x(kT) \Leftrightarrow \tilde{X}(e^{j2\pi f/f_T})$ mit $\tilde{X}(z = e^{j2\pi f/f_T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j2\pi n f/f_T}$

- **Diskrete Fourier Transformation** (discrete fourier transform, **DFT**):

  Abtastung der DTFT für diskrete Frequenzen f_k

Definition diskrete Fourier-Transformation

- Ausgangspunkt **kontinuierliche Fourier-Transformation**:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

1. **Zeitliche Abtastung** von x(t) mit Abtastfrequenz f_A = 1/T (DTFT):

$$X_A(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j2\pi n f / f_T}$$

2. **Beschränkung auf Signalausschnitt** der Länge N:

$$X_{A,W}(f) = \sum_{n=0}^{N} x(nT) e^{-j2\pi n f / f_T}$$

Fourier-Transformation.

1. Abtastung im Zeitbereich.
2. Beschränkung Signalausschnitt.
3. Abtastung im Frequenzbereich.

$\downarrow$

Diskrete Fourier-Transformation.

Definition diskrete Fourier-Transformation

3. **Abtastung der Frequenz f** mit Frequenzauflösung:

$$\Delta f = \frac{f_A}{N} = \frac{1}{NT}$$

d.h. $f \rightarrow k\Delta f$=k/(NT) liefert die

diskrete Fourier-Transformation (DFT)

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j2\pi kn/N}$$

inverse DFT:

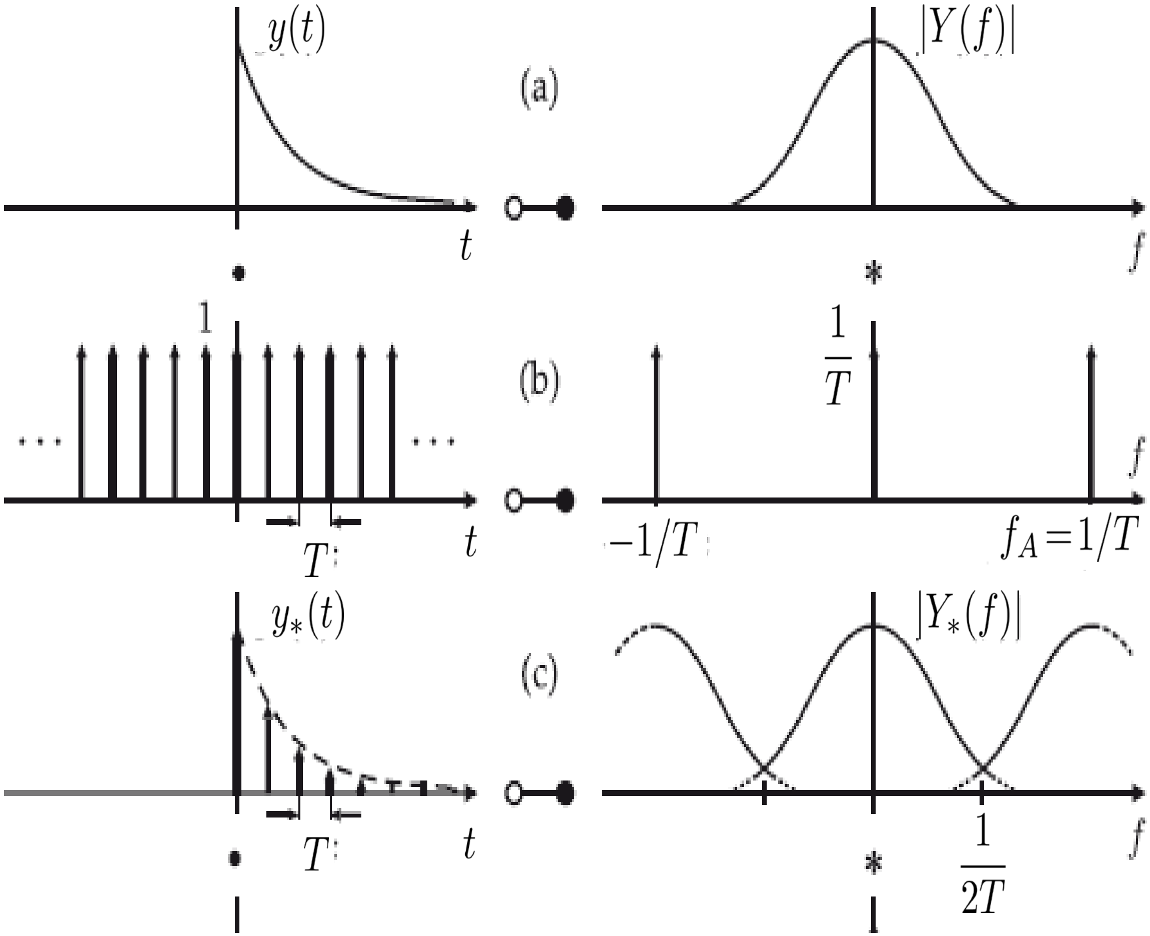
$$x(kT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi kn/N}$$

Fourier-Transformation.

1. Abtastung im Zeitbereich.
2. Beschränkung Signalausschnitt.
3. Abtastung im Frequenzbereich.

Diskrete Fourier-Transformation.

Graphische Veranschaulichung der DFT



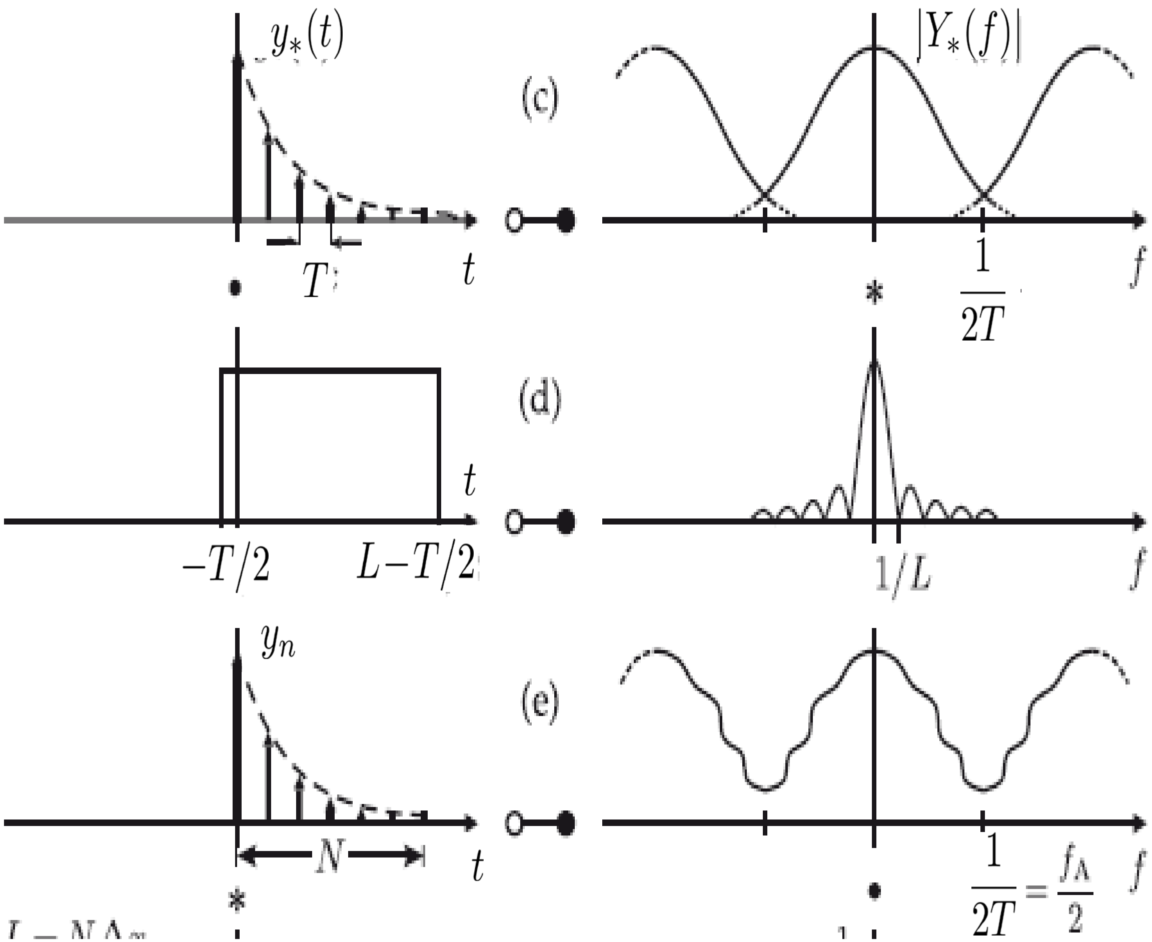
Fourier-Transformation.

1. Abtastung im Zeitbereich.
2. Beschränkung Signalausschnitt.
3. Abtastung im Frequenzbereich.

Diskrete Fourier-Transformation.

Zeitliche Abtastung
→ periodische Wiederholung im Frequenzbereich

Graphische Veranschaulichung der DFT



Fourier-Transformation.

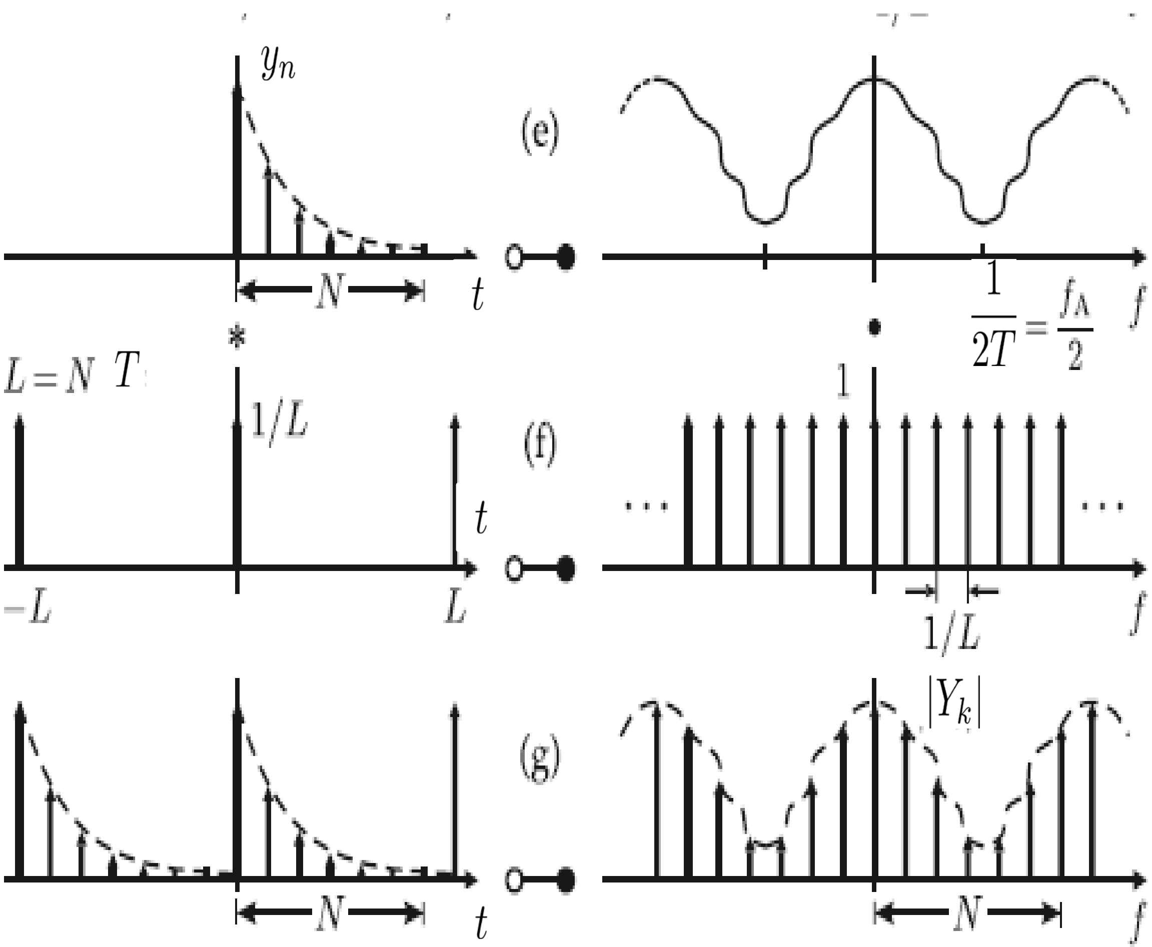
1. Abtastung im Zeitbereich.
2. Beschränkung Signalausschnitt.
3. Abtastung im Frequenzbereich.

Diskrete Fourier-Transformation.

Zeitliche Begrenzung, d.h. Fensterung im Zeitbereich
→ „Verschmierung“ von Y_*
→ Leckeffekt (siehe später)

aus [1]

Graphische Veranschaulichung der DFT



Fourier-Transformation.

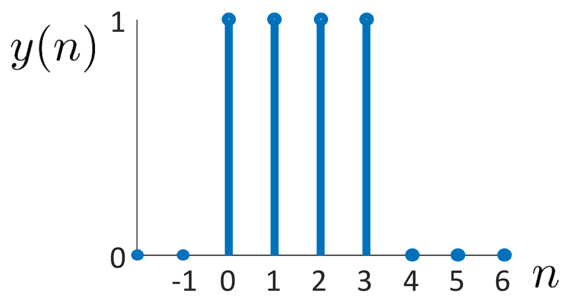
1. Abtastung im Zeitbereich.
2. Beschränkung Signalausschnitt.
3. Abtastung im Frequenzbereich.

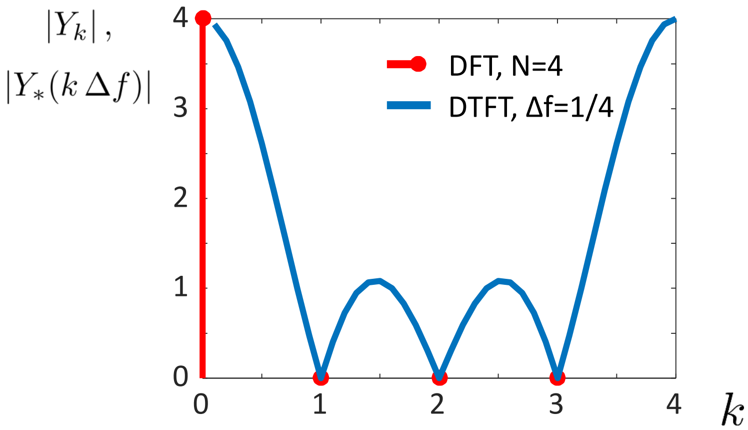
Diskrete Fourier-Transformation.

Frequenzabtastung
→ periodische Wiederholung im Zeitbereich
→ DFT nur für periodische Signale

aus [1]

Beispiel





DFT (mit N=4, T=1):

$$
\begin{aligned}
Y_k &= \sum_{n=0}^{3} 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} \\
&= 1 + e^{-j\frac{\pi}{2}k} + e^{-j\pi k} + e^{-j\frac{3\pi}{2}k} \\
&= \begin{cases} 4 & ; \quad k=0 \\ 0 & ; \quad k \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

DTFT (T=1):

$$
\begin{aligned}
Y_*(f) &= \sum_{n=0}^{3} 1 \cdot e^{-j2\pi f n} \\
&= \frac{1 - e^{-j2\pi f \cdot 4}}{1 - e^{-j2\pi f}} \\
&= \frac{e^{-j4\pi f}}{e^{-j\pi f}} \, \frac{e^{j4\pi f} - e^{-j4\pi f}}{e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}} \\
&= e^{-j3\pi f} \frac{\sin 4\pi f}{\sin \pi f}
\end{aligned}
$$

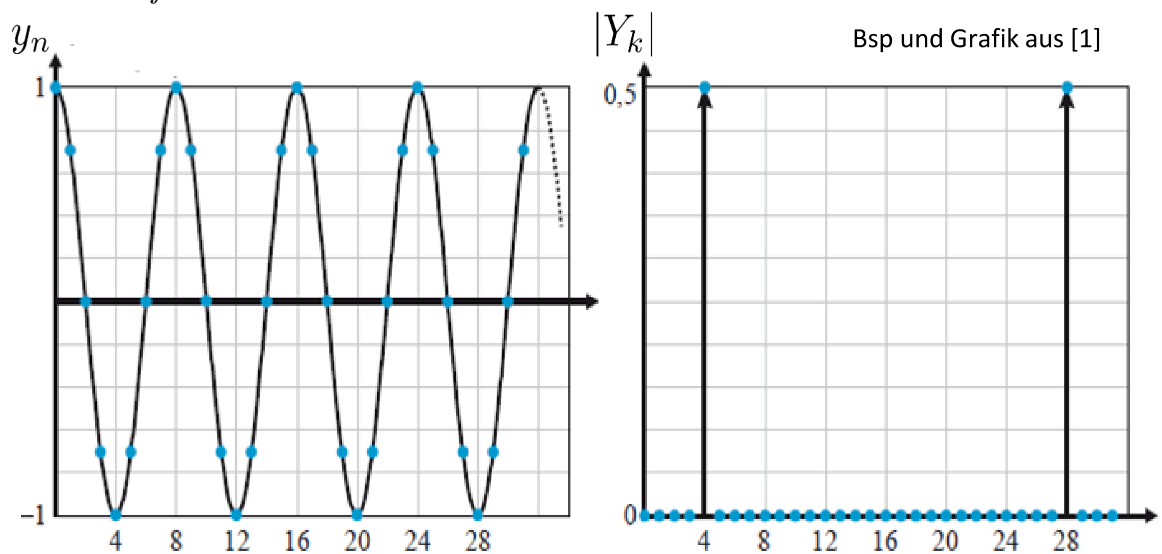
Leckeffekt

Betrachte DFT einer harmonischen Schwingung

$$y(t) = cos(2\pi f_0 t)$$

mit Frequenz f_0, Abtastintervall $T = 1$ und Beobachtungslänge $N = 32$.
Für die Frequenzauflösung ergibt sich dann $\Delta f = 1/(NT) = 1/32$.

1. Fall:
$f_0 = 1/8$ ganzzahliges Vielfaches von Δ_f
$\rightarrow$ kein Leckeffekt!



Bsp und Grafik aus [1]

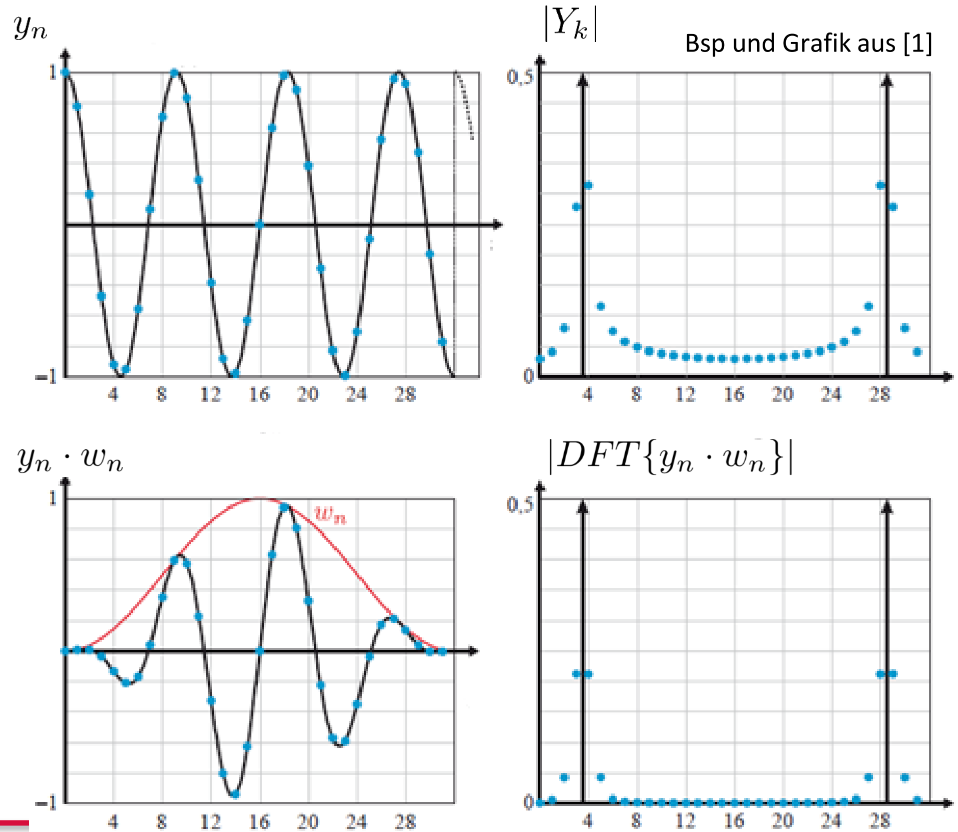
Leckeffekt

2. Fall:
$f_0 = 1/9.143$ kein ganzzahliges Vielfaches von Δ_f
$\rightarrow$ Unstetigkeitsstelle durch periodische Wiederholung im Zeitbereich
$\rightarrow$ breitbandige Auswirkung im Frequenzbereich
$\rightarrow$ Leckeffekt!

2. Fall: Reduzierung durch Fensterung
Fensterung mit Hann-Fenster

$$w_n = \frac{1}{2}\left(1 - cos\frac{2\pi n}{N}\right) \quad , \quad n \in [0, N]$$

$\rightarrow$ Glättung der Stöße an Unstetigkeitsstellen
$\rightarrow$ Reduzierung Leckeffekt!
$\rightarrow$ aber: Abschwächung Signal an Rändern



Bsp und Grafik aus [1]

Leckeffekt

- Definition: Auswirkungen der Zeitbegrenzung eines Signals auf dessen Fourier-Transformierte.

- Zwei Interpretationsmöglichkeiten:
  - Im Frequenzbereich: „Verschmieren“ der Fourier-Transformierten durch Faltung mit der Fensterfunktion
  - Im Zeitbereich: Unstetigkeitsstellen durch periodische Wiederholung führen zu breitbandiger Beeinflussung des Spektrums

- In Sonderfällen tritt bei DFT kein Leckeffekt auf (wenn Frequenzanteile ganzzahliges Vielfaches von Abtastfrequenz Δf).

- Leckeffekt kann i.A. reduziert werden durch Abschwächung des Signals an Rändern des Beobachtungsintervalls.

Zusammenfassung: DFT

- DFT ist rechnertaugliche Näherung der Fourier-Transformation.
- Aufbau DFT: Zeitdiskretisierung → endliche Signallänge → Frequenzdiskretisierung. Bei DFT sind sowohl Zeitfunktion als auch Spektrum periodisch.
- Durch endliche Beobachtungslänge und periodische Fortsetzung entsteht i.A. ein Leckeffekt.
- Leckeffekt kann durch geeignete Fensterung vermindert werden.
- Nächster Schritt: Fast-Fourier-Transform (FFT).

FFT-Prinzip: Divide & Conquer

- Unterteile p(x) in geraden und ungeraden Anteil:

$$
\begin{aligned}
p(x) = {} & a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}\, x^{n-1} \\
= {} & a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots + a_{n-2} x^{n-2} \\
& + x(a_1 + a_3 x^2 + a_5 x^4 + \cdots + a_{n-1} x^{n-2})
\end{aligned}
$$

- Also:

$$p(x) = p_{even}(x^2) + x\, p_{odd}(x^2)$$

- mit:

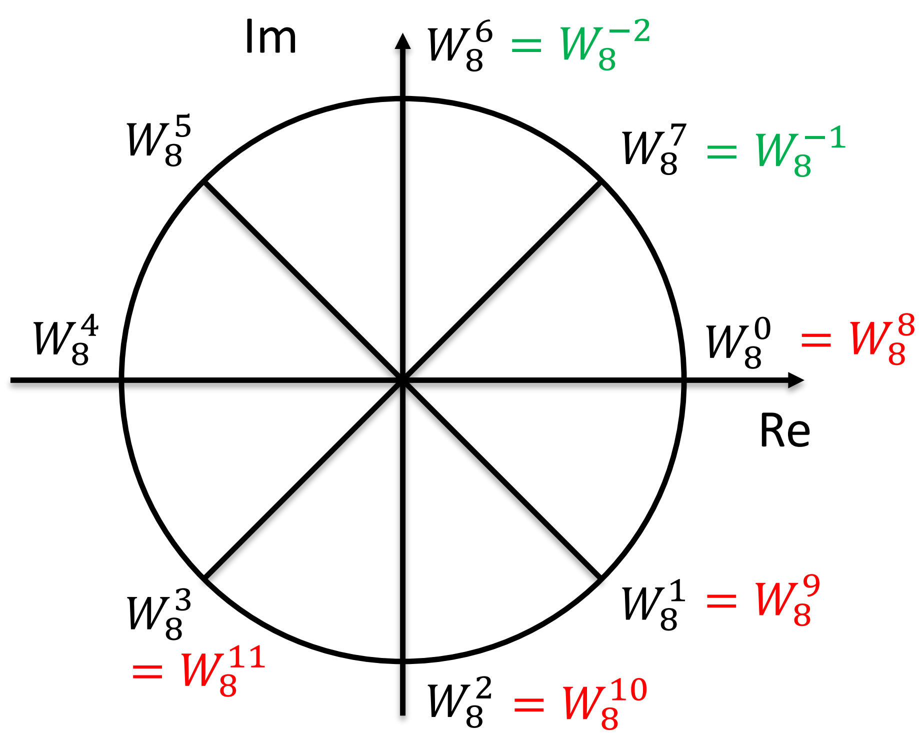
$$
\begin{aligned}
p_{even}(y) &= a_0 + a_2 y + a_4 y^2 + \cdots + a_{n-2} y^{\frac{n}{2}-1} \\
p_{odd}(y) &= a_1 + a_3 y + a_5 y^2 + \cdots + a_{n-1} y^{\frac{n}{2}-1}
\end{aligned}
$$

FFT-Prinzip: Divide & Conquer

- $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) W_N^{kn}$

mit $W_N = e^{-j2\pi/N}$

- Beispiel N=8:



FFT-Prinzip: Divide & Conquer

- $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) W_N^{kn}$ mit $W_N = e^{-j2\pi/N}$
- $X_k = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2nT) W_N^{2kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x((2n+1)T) W_N^{(2n+1)k}$
- Mit $W_N^{2kn} = e^{-\frac{j2\pi}{N}2kn} = e^{-\frac{j2\pi}{N/2}kn} = W_{N/2}^{kn}$:

$$X_k = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2nT) W_{N/2}^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x((2n+1)T) W_{N/2}^{kn}$$

$$X_k = X_{k,even}\left(W_{\frac{N}{2}}^{kn}\right) + W_N^k X_{k,odd}\left(W_{\frac{N}{2}}^{kn}\right)$$

DFT mit N Punkten

DFT mit N/2 Punkten

DFT mit N/2 Punkten

FFT-Prinzip: Divide & Conquer

- Aufwand bisher: N^2 komplexe Multiplikationen
- Jetzt: $2\,(N/2)^2 + N$ komplexe Multiplikationen

- Weiter aufteilen:
  - Annahme: N sei 2er-Potenz, d.h. $N = 2^p$
  - Damit: $p = \log_2 N$ Aufteilungen möglich

Multiplikationen:

1. Teilung: $2\,(N/2)^2 + N = N^2/2 + N$ komplexe Multiplikationen

2. Teilung: $2\,(2(N/4)^2 + N/2) + N = N^2/4 + 2N$

3. Teilung: $2\,(2(2(N/8)^2 + N/4) + N/2) + N = N^2/8 + 3N$

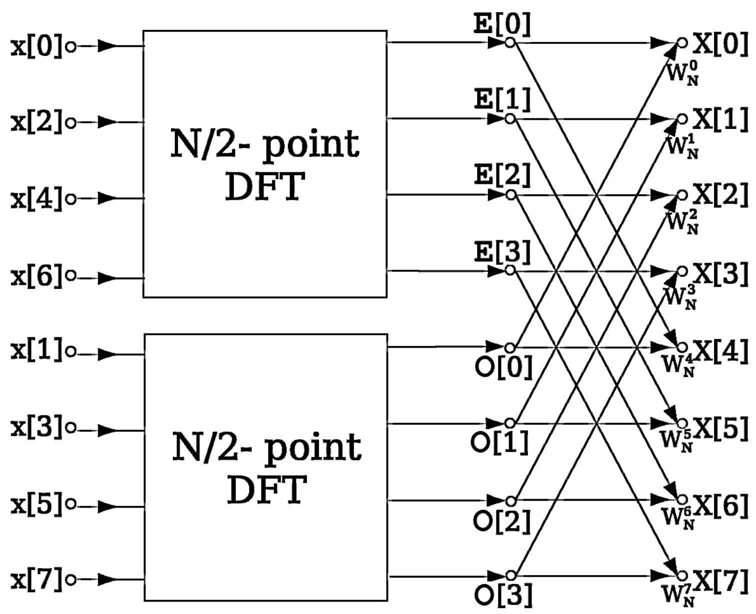
…

p. Teilung: $N^2/2^p + pN = N^2/N + N\log_2 N$

→ Für große N: ca. $N \log_2 N$ komplexe Multiplikationen!

FFT-Prinzip: Divide & Conquer

- Das vorgestellte Verfahren ist bekannt als „decimation-in-time radix-2 FFT“ und besteht aus wiederholter Aufteilung in folgende Struktur:

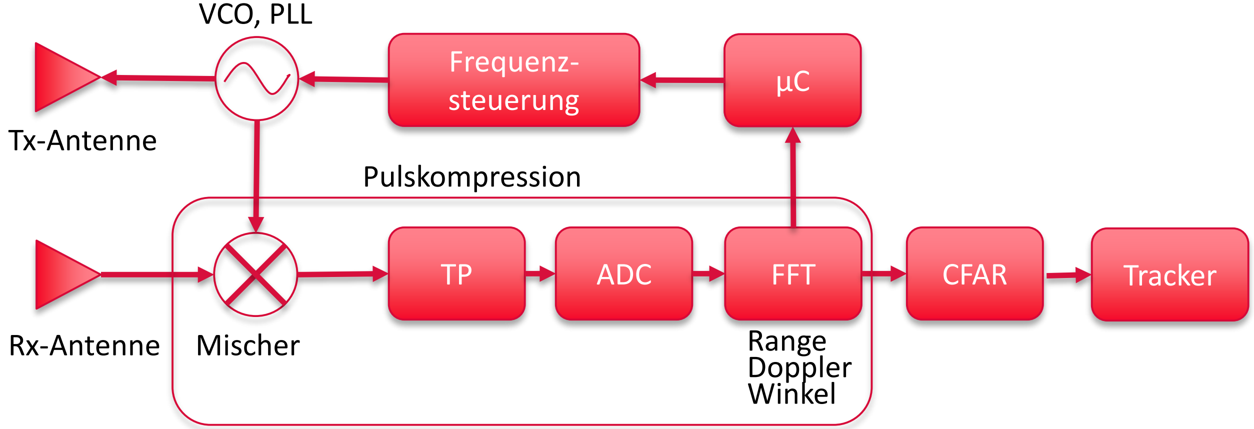


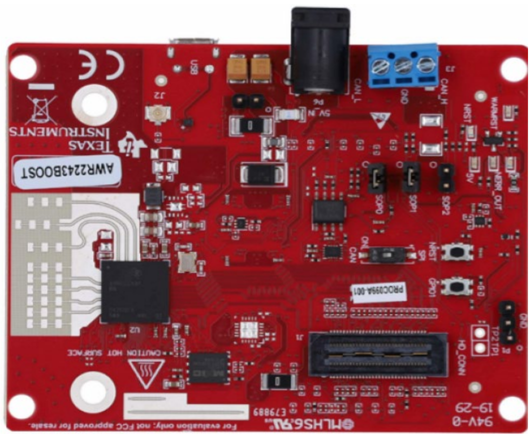
Quelle: wikipedia.org

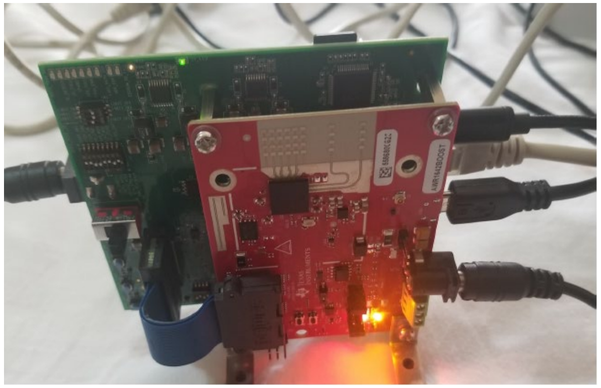
- Für dieses Verfahren ist erforderlich, dass die Anzahl der Elemente N der FFT eine 2er Potenz ist.

Anwendung: Automotive Radar

- Das Automotive Radar von TI:

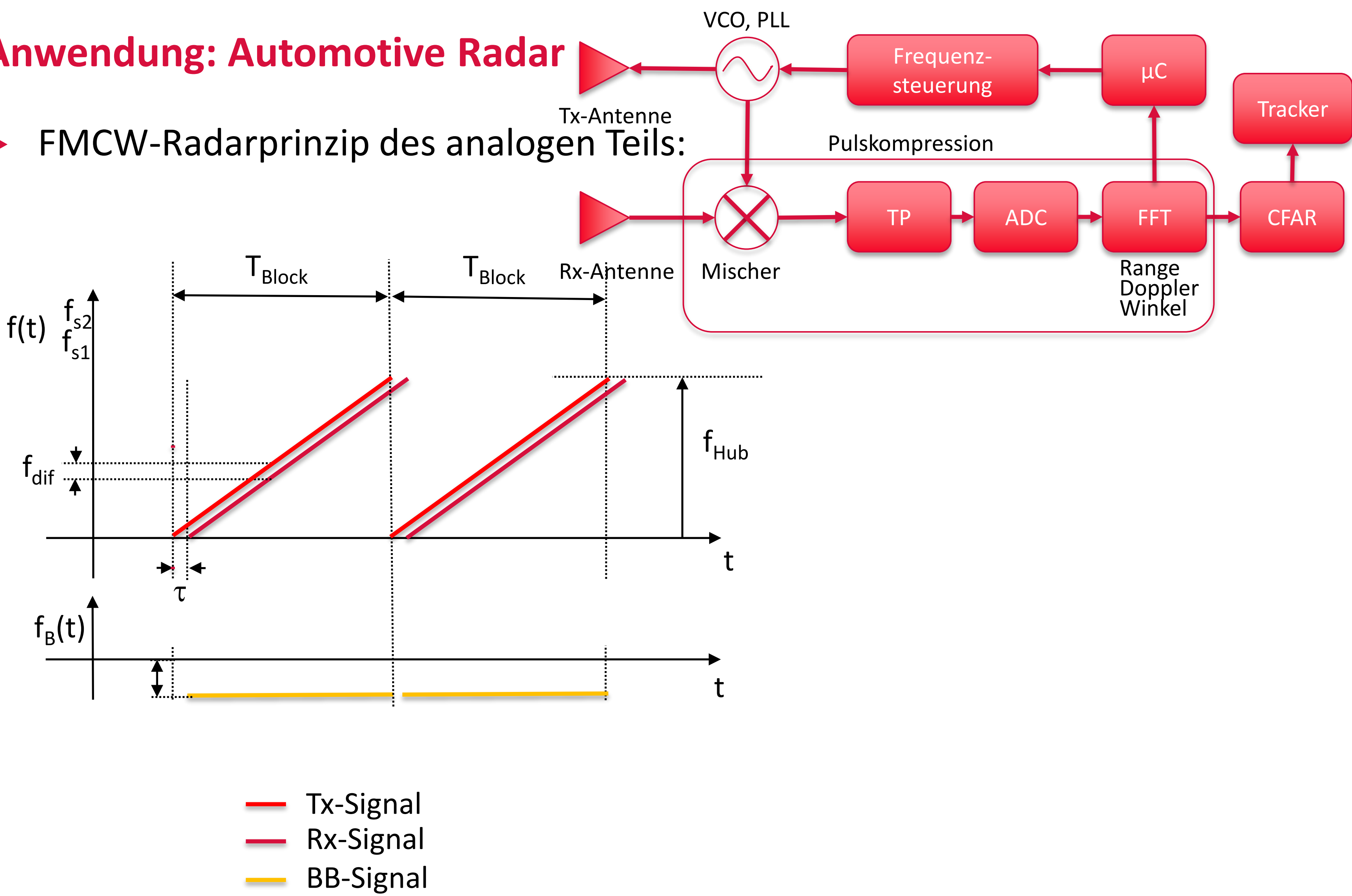




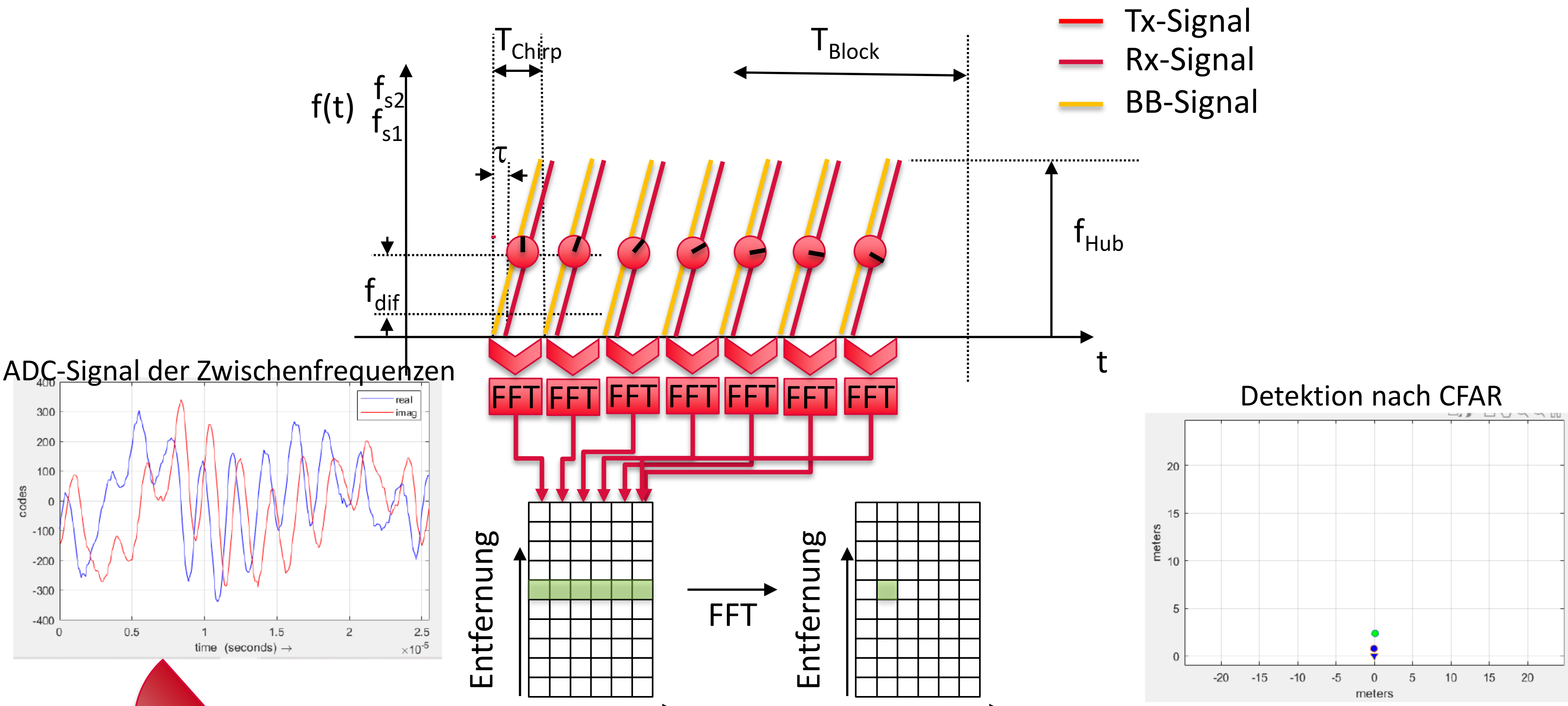


Anwendung: Automotive Radar

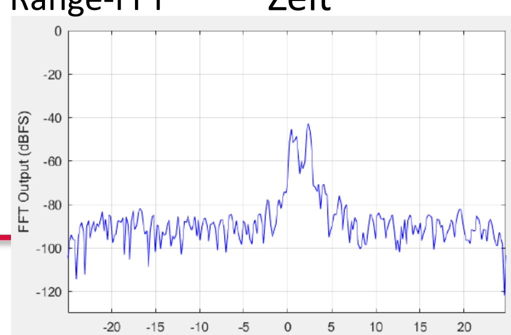
- FMCW-Radarprinzip des analogen Teils:

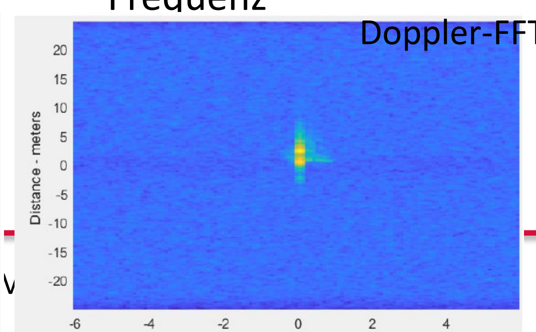


Anwendung: Automotive Radar



Range-FFT

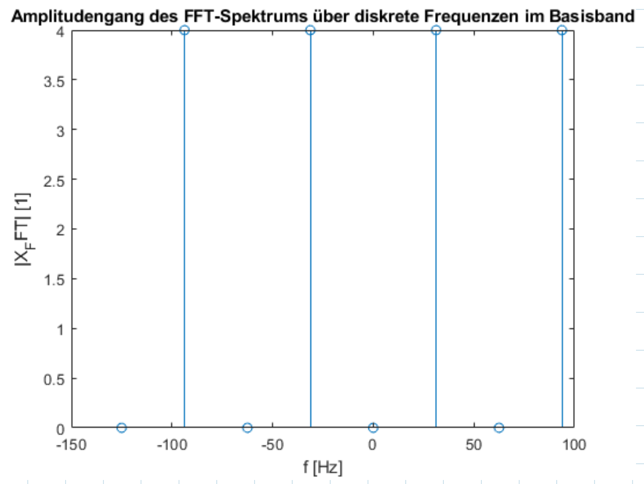


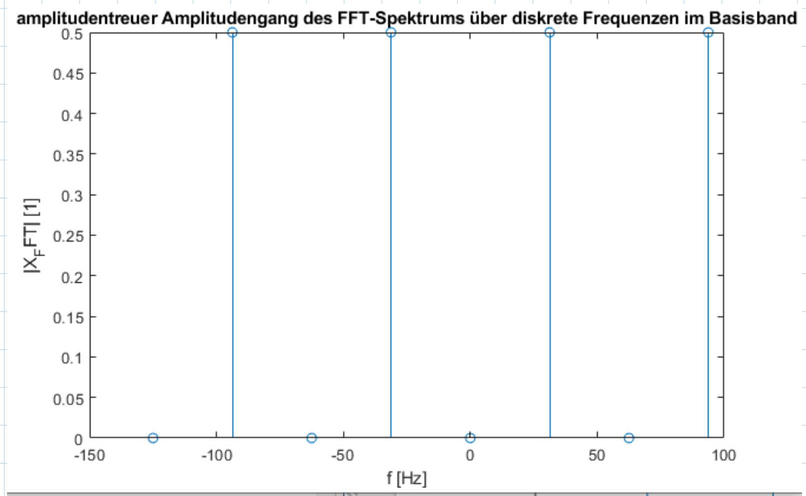


FFT in Matlab

Definition **Amplitudentreuer Amplitudengang**: resultiert aus einer Berechnungsvorschrift der diskreten FT, bei der die Amplitude des aus dem abgetasteten harmonischen Signals berechneten DFT den selben Wert hat wie die Amplitude des unabgetasteten (kontinuierlichen) Signals.

- Bei der FFT in Matlab müssen die FFT-Wert durch die FFT-Länge N_FFT geteilt werden. Dann haben Sinus-, Cosinus-Signal sowie komplexe Schwingungen dieselbe Amplitude wie die entsprechenden kontinuierlichen Signale. (Matlab: DSV_FFT_Basisband.mlx)

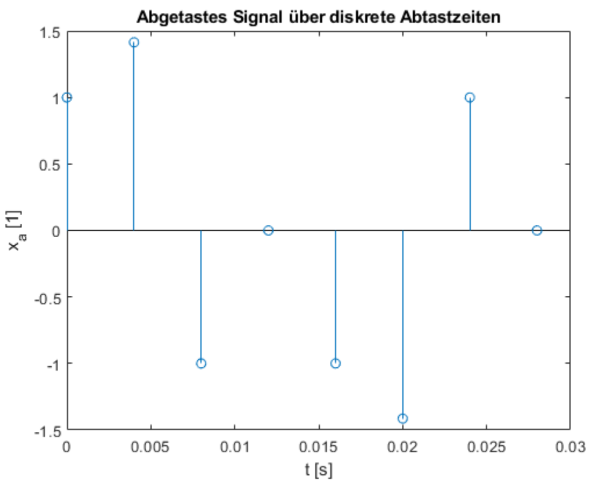


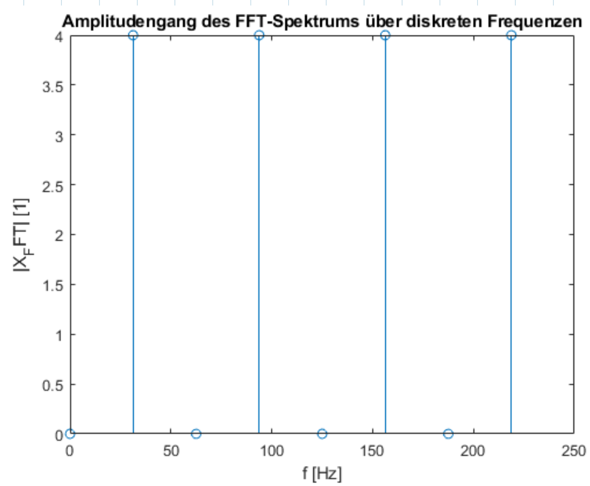


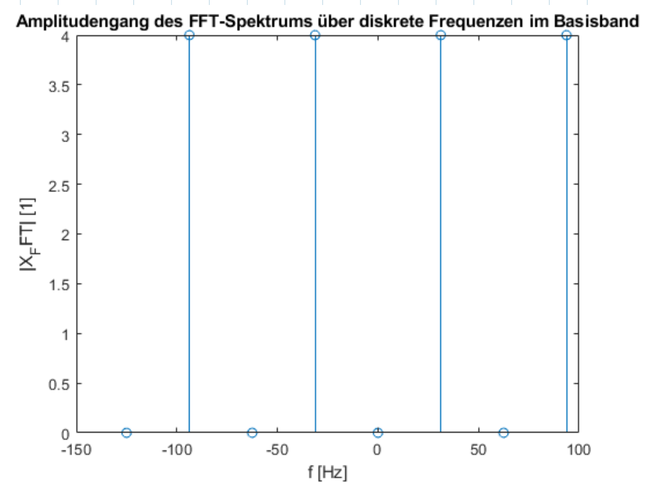
FFT in Matlab

Definition **Frequenzbin**: Der Frequenzbin ist ein diskreter Frequenzpunkt an dem die DFT z.B. durch die FFT berechnet ist. Der Frequenzbin kann durch einen Index (z.B. k) oder Frequenzwert gekennzeichnet sein.

- Bei der FFT sind Frequenzbins äquidistant über den Frequenzbereich verteilt. Eine FFT mit der Länge N_FFT hat N_FFT Frequenzbins, also wird an N_FFT unterschiedlichen Stellen die diskrete Fourietransformation („das Spektrum") bestimmt. (Matlab: DSV_FFT_Basisband.mlx)







Literaturverzeichnis

- [1] Jürgen Beyerer, Fernando Puente León, Christian Frese. Automatische Sichtprüfung: Grundlagen, Methoden und Praxis der Bildgewinnung und Bildauswertung. Springer, 2016
- [2] Uwe Kienke. Signale und Systeme. Springer, 1998.
- [3] Oppenheim, Schafer, Buck. Discrete-Time Signal Processing, 1998.

Lernziele

- Warum wird die FFT benutzt?
- Für welche Andwendungen wird die FFT benutzt?
- Wieviele Abtastwerte werden bei der DFT genommen?
- Wie ist der Frequenzabstand der berechneten Werte bei der DFT?
- Wie ist der Zusammenhang zwischen der DFT und der FFT?
- Was ist das Prinzip der FFT?
- Was ist der Leckeffekt?
- Was ist Windowing? Warum wird Windowing eingesetzt?