

Manuskript zur Vorlesung

# KINEMATIK

von C. Woernle

(alle Rechte vorbehalten)

Institut A für Mechanik  
Universität Stuttgart

SS 1993

## Übersicht

### Teil I: Grundlagen der räumlichen Kinematik

- 1 Einführung
- 2 Grundlagen der Vektorrechnung und Tensorrechnung
  - 2.1 Vektoren
  - 2.2 Tensoren 2. Stufe
- 3 Bewegungen von Punkten und Körpern im Raum
  - 3.1 Bewegung eines Punktes im Raum
  - 3.2 Drehbewegung des starren Körpers im Raum
  - 3.3 Allgemeine Bewegung des starren Körpers im Raum
- 4 Koordinaten zur Beschreibung von Drehbewegungen
  - 4.1 Koordinaten des Drehtensors (Richtungscosinus)
  - 4.2 Drehzeiger (natürliche Invarianten der Drehbewegung)
  - 4.3 EULER-Winkel
  - 4.4 KARDAN-Winkel
  - 4.5 Quaternionen und EULER-Parameter
  - 4.6 RODRIGUES-Parameter
- 5 Relativbewegungen
  - 5.1 Relative Zeitableitung von Vektoren
  - 5.2 Zusammensetzung zweier gegebener Bewegungen
- 6 Darstellung der allgemeinen Bewegung des starren Körpers mit Hilfe dualer Größen
  - 6.1 Duale Zahlen
  - 6.2 Duale Vektoren
  - 6.3 Übertragungsprinzip
  - 6.4 Gegenüberstellung von Fixpunktdrehung und Schraubbewegung
  - 6.5 Duale Darstellung von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen
  - 6.6 Zusammensetzung zweier Bewegungen in dualer Darstellung

### Teil II: Kinematik von Mechanismen

- 1 Grundbeziehungen kinematischer Ketten
  - 1.1 Struktur kinematischer Ketten
  - 1.2 Gelenke in kinematischen Ketten
  - 1.3 Freiheitsgrade und verallgemeinerte Koordinaten
- 2 Kinematik von offenen Gelenkketten (Vorwärtskinematik)
  - 2.1 Vorwärtskinematik bei allgemeinen Gelenken
  - 2.2 Vorwärtskinematik bei Standardgelenken
  - 2.3 Geometrische Parameter nach DENAVIT und HARTENBERG
  - 2.4 JACOBI-Matrix der Relativbewegung
- 3 Kinematik der Einzelschleife
  - 3.1 Schließbedingungen in einer allgemeinen Mehrkörperschleife
  - 3.2 Möglichkeiten zur Aufstellung der Schließbedingungen
  - 3.3 Schließbedingungen an einem geschnittenen Gelenk
  - 3.4 Schließbedingungen an einem "charakteristischen Gelenkpaar"
  - 3.5 Analyse der Geschwindigkeiten in einer kinematischen Schleife
  - 3.6 Analyse der Beschleunigungen in einer kinematischen Schleife
- 4 Kinematik mehrschleifiger Mechanismen
  - 4.1 Darstellung der kinematischen Struktur von Mechanismen
  - 4.2 Topologische Aufbereitung der Relativkinematik
  - 4.3 Einführung zusätzlicher Hilfskoordinaten
  - 4.4 Globale Kinematik

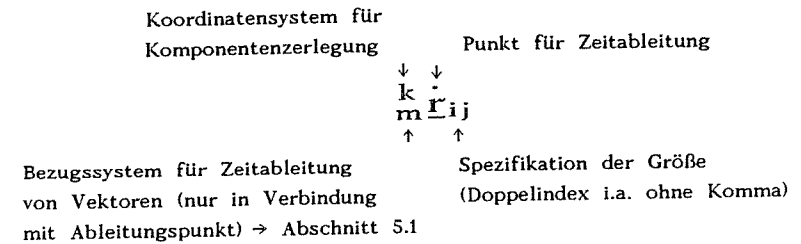
### Literatur

- ANGELES, J.: Spatial Kinematic Chains. New York: Springer-Verlag 1982.
- ANGELES, J.: Rational Kinematics. New York: Springer-Verlag 1988.
- BEYER, R.: Technische Raumkinematik. Berlin: Springer 1960
- BLUME, C.; DILLMANN, R.: Frei programmierbare Manipulatoren. Würzburg: Vogel-Verlag 1981.
- BOTTEMA, O.; ROTH, B.: Theoretical Kinematics. Amsterdam: North-Holland 1979.
- DUFFY, J.: Analysis of Mechanisms and Robot Manipulators. London: Arnold 1980.
- HARTENBERG, R.S.; DENAVIT, J.: Kinematic Synthesis of Linkages. New York: McGraw Hill 1964.
- HUNT, K.H.: Kinematic Geometry of Mechanisms: Oxford: Clarendon Press 1978.
- LUCK, K.; MODLER, K.-H.: Getriebetechnik. Wien: Springer-Verlag 1990.
- NIKRAVESH, P.: Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems. Englewood Cliffs: Prentice Hall 1988.
- PAUL, R.P.: Robot Manipulators. Cambridge, Mass.: The MIT Press 1981.
- SCHIEHLEN, W.: Technische Dynamik. Stuttgart: Teubner 1986.
- SONI, A.H.: Mechanism Synthesis and Analysis. New York: McGraw-Hill 1980.
- SUH, C.; RADCLIFFE, C.W.: Kinematics and Mechanisms Design. New York: John Wiley, 1978.

### Zur verwendeten Schreibweise

Für Vektoren und Spaltenmatrizen werden unterstrichene kleine Buchstaben und für Tensoren 2. Stufe und Matrizen unterstrichene große Buchstaben verwendet.

Vektorielle Größen werden nach dem folgenden Schema indiziert:



Einheitliche Bezeichnungen werden für folgende Vektoren verwendet:

- |  |   |
|--|---|
| $\underline{r}_{ij}$   | - Verbindungsvektor der Punkte $O_i$ und $O_j$ .  |
| $k \dot{\underline{r}}_{ij}$                                 | - Zeitliche Änderung des Vektors $\underline{r}_{ij}$ relativ zu $K_k$ .  |
| $\underline{u}_i$  | - Einheitsvektor einer Gelenkachse.   |
| $\underline{e}_{xi}, \underline{e}_{yi}, \underline{e}_{zi}$ | - Einheitsvektoren des Koordinatensystems $K_i$ .   |
| $\underline{\omega}_{ij}$                                    | - Winkelgeschwindigkeit des $K_j$ relativ zu $K_i$ .  |
| $\underline{v}_{ij}$   | - Geschwindigkeit des Punktes $O_j$ relativ zu $K_i$ .<br>Damit ist $\underline{v}_{ij} = {}_i \dot{\underline{r}}_{ij}$ .        |
| $\underline{\alpha}_{ij}$                                    | - Winkelbeschleunigung von $K_j$ relativ zu $K_i$ .<br>Damit ist $\underline{\alpha}_{ij} = {}_i \dot{\underline{\omega}}_{ij}$ . |
| $\underline{a}_{ij}$   | - Beschleunigung des Punktes $O_j$ relativ zu $K_i$ .<br>Damit ist $\underline{a}_{ij} = {}_i \dot{\underline{v}}_{ij}$ .         |
| $\underline{0}$  | - Nullvektor.   |

Bei Absolutgrößen wird im allgemeinen nur ein Index angeschrieben.

Für folgende Matrizen werden einheitliche Bezeichnungen verwendet:

- |                        |   |
|------------------------|---|
| ${}^i k \underline{T}$ | - Orthogonale $[3 \times 3]$ -Transformationsmatrix, transformiert Vektorkoordinaten von $K_k$ nach $K_i$ : ${}^i \underline{r} = {}^i k \underline{T} \cdot k \underline{r}$ . |
| $\underline{I}$        | - Einheitsmatrix (Dimension aus Zusammenhang).  |
| $\underline{0}$        | - Nullmatrix (Dimension aus Zusammenhang).  |

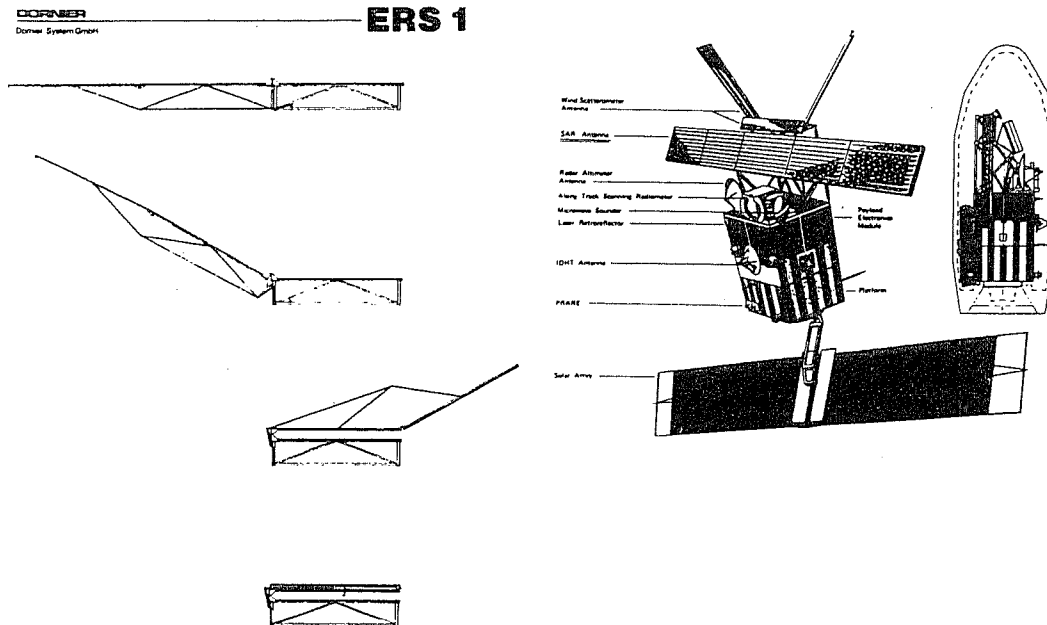
## 1 Einführung

Aufgabe der Kinematik ist es, die Lage sowie die Lageänderungen von Bezugssystemen (z.B. Körpern) im Raum zu beschreiben. Kinematik ist damit die Lehre von den Bewegungen, ohne Berücksichtigung der Kräfte als Ursache dieser Bewegungen. Eine besondere Bedeutung hat die Kinematik bei der Untersuchung einer speziellen Klasse von Mehrkörpersystemen, den Mechanismen, bei denen die über Gelenke miteinander verbundenen Körper geschlossene kinematische Schleifen bilden. Hierdurch sind die Bewegungen der einzelnen Körper stark miteinander verkoppelt und weisen im allgemeinen ein stark nichtlineares Verhalten auf. Die kinematische Analyse von Mechanismen erfordert eine effektive Formulierung der Bindungen infolge kinematischer Schleifen.

Im ersten Teil des vorliegenden Manuskripts werden Grundlagen der räumlichen Kinematik behandelt. Sie bilden die Grundlage für die im zweiten Teil dargestellten Methoden zur kinematischen Analyse von räumlichen Mechanismen.

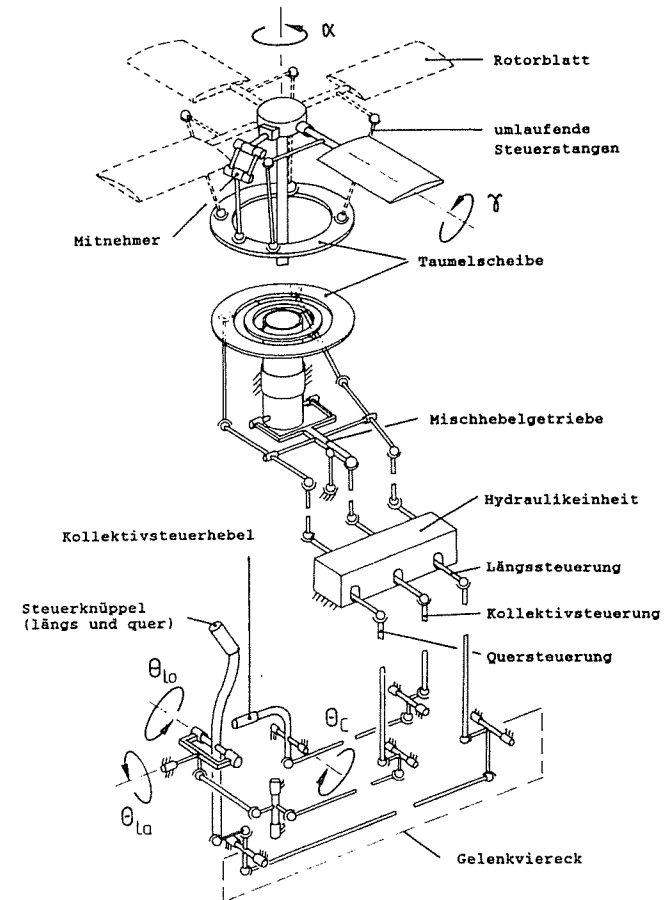
Beispiele für Mechanismen:

a) Entfaltmechanismus für eine Satelliten-Radarantenne (SAR-Antenne)



Entfaltmechanismus zur Realisierung einer hochgenauen ebenen Antennengeometrie, gebildet aus ebenen Gelenkvierecken, die nach dem Entfaltvorgang zu einem tragenden Fachwerk verriegelt werden.

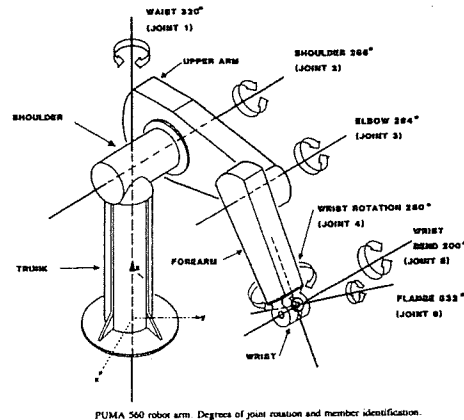
b) Hauptrotorsteuerung eines Hubschraubers



Über einen komplizierten Mechanismus mit zahlreichen kinematischen Schleifen werden die Bewegungen des Steuerknüppels und des Kollektivsteuerhebels in die Anstellung der Rotorblätter umgesetzt.

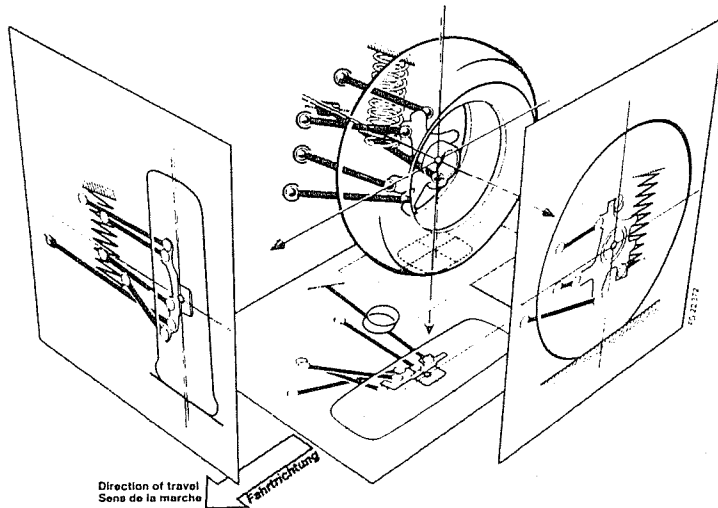
## c) Industrieroboter

Bewegung des "Endeffektors" (z.B. Werkzeug, Greifer, Plattform) mit bis zu sechs Freiheitsgraden im Raum.



Die zunächst *offene* kinematische Kette eines Industrieroboters wird bei der Bestimmung der Gelenkkoordinaten zu einer vorgegebenen Bahn ("Rückwärtstransformation") über die Bahn (gedanklich) geschlossen.

## d) Räumliche Einzelradaufhängung für einen PKW



Fünf räumlich angeordnete Lenker führen den Radträger mit einem Freiheitsgrad der Bewegung.

## 2 Grundlagen der Vektorrechnung und der Tensorrechnung

## 2.1 Vektoren

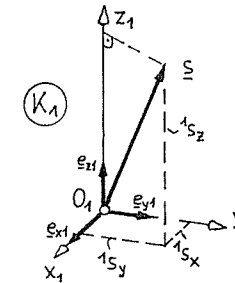
In der Mechanik wird unter einem Vektor eine physikalische Größe verstanden, zu deren Festlegung durch Zahlenwert und Einheit noch die Angabe ihres Richtungsinnes erforderlich ist (Beispiele: Ortsvektor  $\underline{r}$ , Geschwindigkeit  $\underline{v}$ , Kraft  $\underline{F}$ ).

## 2.1.1 Rechenregeln für Vektoren

- Summe  $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$
- Skalarprodukt  $c = \underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$
- Vektorprodukt  $\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$ ,  $\underline{c} \perp \underline{a}, \underline{b}$
- Mehrfache Produkte von Vektoren
  - Spatprodukt:  $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$
  - Entwicklungssatz:  $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$
  - Lagrange-Identität:  $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{b} \cdot \underline{c})(\underline{a} \cdot \underline{d})$

Zur Auswertung der vektoriellen Beziehungen führt man Koordinatensysteme ein und zerlegt die Vektoren in Komponenten.

## 2.1.2 Komponentenzzerlegung in einem Koordinatensystem



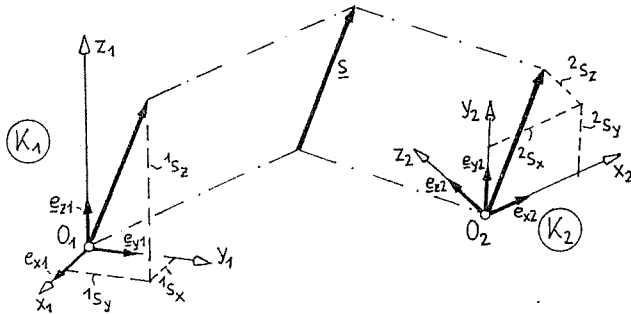
Jeder Vektor  $\underline{s}$  läßt sich in Komponenten in Richtung der drei Basisvektoren (Einheitsvektoren)  $\underline{e}_{x1}$ ,  $\underline{e}_{y1}$ ,  $\underline{e}_{z1}$  eines Koordinatensystems  $K_1$  (orthogonales Rechtssystem, Achsen  $x_1, y_1, z_1$ ) zerlegen:

$$\underline{s} = {}^1s_x \underline{e}_{x1} + {}^1s_y \underline{e}_{y1} + {}^1s_z \underline{e}_{z1} \quad (2.1)$$

Die einzelnen Summanden von Gl. (2.1) sind die *Komponenten* von  $\underline{s}$  im System  $K_1$ . Die orthogonalen Projektionen  ${}^1s_x = \underline{s} \cdot \underline{e}_{x1}$ ,  ${}^1s_y = \underline{s} \cdot \underline{e}_{y1}$ ,  ${}^1s_z = \underline{s} \cdot \underline{e}_{z1}$  sind die *Koordinaten* (skalaren Komponenten) des Vektors  $\underline{s}$  im System  $K_1$ , die für die praktische Rechnung in einer  $(3 \times 1)$ -Spaltenmatrix angeordnet werden:

$$\underline{{}^1s} = \begin{bmatrix} {}^1s_x \\ {}^1s_y \\ {}^1s_z \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \underline{{}^1s} = \begin{bmatrix} {}^1s_x \\ {}^1s_y \\ {}^1s_z \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

### 2.1.3 Transformation von Vektorkoordinaten



Für die praktische Rechnung mit Vektoren wird der Zusammenhang zwischen den Koordinaten desselben Vektors in unterschiedlichen Koordinatensystemen benötigt. Mit den Komponentenerlegungen des Vektors  $\underline{s}$  in zwei Koordinatensystemen  $K_1$  und  $K_2$  gilt

$$(\underline{s} =) {}^1s_x \underline{e}_{x1} + {}^1s_y \underline{e}_{y1} + {}^1s_z \underline{e}_{z1} \stackrel{!}{=} {}^2s_x \underline{e}_{x2} + {}^2s_y \underline{e}_{y2} + {}^2s_z \underline{e}_{z2}.$$

Die skalare Multiplikation dieser Vektorgleichung mit  $\underline{e}_{x1}$ ,  $\underline{e}_{y1}$  und  $\underline{e}_{z1}$  liefert:

$$\underline{e}_{x1} \cdot \left[ {}^1s_x \underbrace{\underline{e}_{x1} \cdot \underline{e}_{x1}}_1 + {}^1s_y \underbrace{\underline{e}_{x1} \cdot \underline{e}_{y1}}_0 + {}^1s_z \underbrace{\underline{e}_{x1} \cdot \underline{e}_{z1}}_0 \right] = {}^2s_x \underline{e}_{x1} \cdot \underline{e}_{x2} + {}^2s_y \underline{e}_{x1} \cdot \underline{e}_{y2} + {}^2s_z \underline{e}_{x1} \cdot \underline{e}_{z2},$$

$$\underline{e}_{y1} \cdot \left[ {}^1s_x \underbrace{\underline{e}_{y1} \cdot \underline{e}_{x1}}_0 + {}^1s_y \underbrace{\underline{e}_{y1} \cdot \underline{e}_{y1}}_1 + {}^1s_z \underbrace{\underline{e}_{y1} \cdot \underline{e}_{z1}}_0 \right] = {}^2s_x \underline{e}_{y1} \cdot \underline{e}_{x2} + {}^2s_y \underline{e}_{y1} \cdot \underline{e}_{y2} + {}^2s_z \underline{e}_{y1} \cdot \underline{e}_{z2},$$

$$\underline{e}_{z1} \cdot \left[ {}^1s_x \underbrace{\underline{e}_{z1} \cdot \underline{e}_{x1}}_0 + {}^1s_y \underbrace{\underline{e}_{z1} \cdot \underline{e}_{y1}}_0 + {}^1s_z \underbrace{\underline{e}_{z1} \cdot \underline{e}_{z1}}_1 \right] = {}^2s_x \underline{e}_{z1} \cdot \underline{e}_{x2} + {}^2s_y \underline{e}_{z1} \cdot \underline{e}_{y2} + {}^2s_z \underline{e}_{z1} \cdot \underline{e}_{z2},$$

oder in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} {}^1s_x \\ {}^1s_y \\ {}^1s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{e}_{x1} \cdot \underline{e}_{x2} & \underline{e}_{x1} \cdot \underline{e}_{y2} & \underline{e}_{x1} \cdot \underline{e}_{z2} \\ \underline{e}_{y1} \cdot \underline{e}_{x2} & \underline{e}_{y1} \cdot \underline{e}_{y2} & \underline{e}_{y1} \cdot \underline{e}_{z2} \\ \underline{e}_{z1} \cdot \underline{e}_{x2} & \underline{e}_{z1} \cdot \underline{e}_{y2} & \underline{e}_{z1} \cdot \underline{e}_{z2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2s_x \\ {}^2s_y \\ {}^2s_z \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$${}^1\underline{s} = {}^{12}\underline{T} {}^2\underline{s}.$$

Die Transformationsmatrix  ${}^{12}\underline{T}$  transformiert damit Koordinaten eines beliebigen Vektors  $\underline{s}$  vom System  $K_2$  in das System  $K_1$ .

Eigenschaften der Transformationsmatrix  ${}^{12}\underline{T}$ :

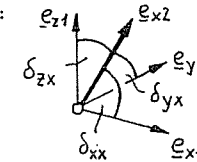
- In den Spaltenvektoren von  ${}^{12}\underline{T}$  stehen die Koordinaten der Einheitsvektoren  $\underline{e}_{x2}$ ,  $\underline{e}_{y2}$ ,  $\underline{e}_{z2}$  im System  $K_1$ , in den Zeilenvektoren die Koordinaten der Einheitsvektoren  $\underline{e}_{x1}$ ,  $\underline{e}_{y1}$ ,  $\underline{e}_{z1}$  im System  $K_2$ :

$${}^{12}\underline{T} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ {}^1\underline{e}_{x2} & {}^1\underline{e}_{y2} & {}^1\underline{e}_{z2} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{({}^2\underline{e}_{x1})^T}{({}^2\underline{e}_{y1})^T} \\ -\frac{({}^2\underline{e}_{y1})^T}{({}^2\underline{e}_{z1})^T} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

- Die Elemente  $T_{ij}$  der Matrix  ${}^{12}\underline{T}$  stellen die "Richtungscosinus" der Winkel zwischen den Basisvektoren der beiden Koordinatensysteme dar:

$$\left. \begin{aligned} T_{11} &= \underline{e}_{x1} \cdot \underline{e}_{x2} = \cos \delta_{xx}, & T_{12} &= \underline{e}_{x1} \cdot \underline{e}_{y2} = \cos \delta_{xy}, & T_{13} &= \underline{e}_{x1} \cdot \underline{e}_{z2} = \cos \delta_{xz}, \\ T_{21} &= \underline{e}_{y1} \cdot \underline{e}_{x2} = \cos \delta_{yx}, & T_{22} &= \underline{e}_{y1} \cdot \underline{e}_{y2} = \cos \delta_{yy}, & T_{23} &= \underline{e}_{y1} \cdot \underline{e}_{z2} = \cos \delta_{yz}, \\ T_{31} &= \underline{e}_{z1} \cdot \underline{e}_{x2} = \cos \delta_{zx}, & T_{32} &= \underline{e}_{z1} \cdot \underline{e}_{y2} = \cos \delta_{zy}, & T_{33} &= \underline{e}_{z1} \cdot \underline{e}_{z2} = \cos \delta_{zz}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Beispiel:



- Da die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren von  ${}^{12}\underline{T}$  ein orthonormales Rechtssystem bilden, ist  ${}^{12}\underline{T}$  eine orthogonale Matrix mit  $\det({}^{12}\underline{T}) = 1$ . Damit ist die Transformationsmatrix  ${}^{21}\underline{T}$  für die umgekehrte Transformation

$${}^2\underline{s} = {}^{21}\underline{T} {}^1\underline{s} \quad (2.6)$$

vom System  $K_1$  in das System  $K_2$  die Transponierte von  ${}^{12}\underline{T}$ :

$${}^{21}\underline{T} = ({}^{12}\underline{T})^{-1} = ({}^{12}\underline{T})^T. \quad (2.7)$$

- Aufgrund der sechs Orthonormalitätsbedingungen sind nur drei der neun Elemente von  ${}^{12}\underline{T}$  unabhängig.

Durch das Transformationsverhalten seiner Koordinaten gemäß den Gln. (2.3) und (2.6) wird ein Vektor als *Tensor 1. Stufe* definiert.

### 2.1.4 Konstruktion von Koordinatensystemen

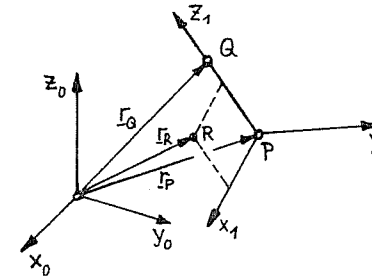
Ein Koordinatensystem wird günstig durch drei Punkte P, Q und R mit den Ortsvektoren  $\underline{r}_P$ ,  $\underline{r}_Q$  und  $\underline{r}_R$  definiert. Die drei Basisvektoren werden daraus wie folgt berechnet:

$$\underline{e}_{z1} = \frac{\underline{r}_Q - \underline{r}_P}{|\underline{r}_Q - \underline{r}_P|}$$

$$\underline{e}_{y1} = \frac{\underline{e}_{z1} \times (\underline{r}_R - \underline{r}_P)}{|\underline{e}_{z1} \times (\underline{r}_R - \underline{r}_P)|}$$

$$\underline{e}_{x1} = \underline{e}_{y1} \times \underline{e}_{z1}$$

$$\rightarrow {}^{01}\underline{T} = [{}^0\underline{e}_{x1} \mid {}^0\underline{e}_{y1} \mid {}^0\underline{e}_{z1}]$$



Durch diese Berechnungsvorschrift wird die Erfüllung der sechs Orthonormalitätsbedingungen für  ${}^{01}\underline{T}$  sichergestellt.

## 2.2 Tensoren 2. Stufe

Wie Tensoren 1. Stufe sind auch Tensoren 2. Stufe durch das Transformationsverhalten ihrer Koordinaten erklärt. Es wird hier nur eine vereinfachte Betrachtung durchgeführt.

### 2.2.1 Tensorielles Produkt zweier Vektoren

Es wird das *tensorielle (dyadische) Produkt*

$$\underline{D} = \underline{a} \circ \underline{b} \quad (2.8)$$

zweier Vektoren  $\underline{a}$  und  $\underline{b}$  eingeführt. Es soll folgenden Regeln genügen:

1.  $\underline{a} \circ (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \circ \underline{b} + \underline{a} \circ \underline{c}$  (Distributivgesetz),
  2.  $(k \underline{a}) \circ \underline{b} = k(\underline{a} \circ \underline{b})$ ,  $k$  skalar (Assoziativgesetz).
- (kein Kommutativgesetz, also  $\underline{a} \circ \underline{b} \neq \underline{b} \circ \underline{a}$ )

Mit diesen Regeln und der Darstellung der Vektoren  $\underline{a}$  und  $\underline{b}$  in einem Koordinatensystem  $K_1$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \underline{D} = \underline{a} \circ \underline{b} &= ({}^i a_x \underline{e}_{xi} + {}^i a_y \underline{e}_{yi} + {}^i a_z \underline{e}_{zi}) \circ ({}^i b_x \underline{e}_{xi} + {}^i b_y \underline{e}_{yi} + {}^i b_z \underline{e}_{zi}) = \\ &= \underbrace{{}^i a_x {}^i b_x \underline{e}_{xi} \circ \underline{e}_{xi}} + \underbrace{{}^i a_x {}^i b_y \underline{e}_{xi} \circ \underline{e}_{yi}} + \dots + \underbrace{{}^i a_z {}^i b_z \underline{e}_{zi} \circ \underline{e}_{zi}} = \\ &= {}^i D_{xx} \underline{G}_{xx} + {}^i D_{xy} \underline{G}_{xy} + \dots + {}^i D_{zz} \underline{G}_{zz}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Man definiert  $\underline{D}$  als *Tensor 2. Stufe* mit

$$\begin{aligned} {}^i D_{xx}, \dots, {}^i D_{zz} &- 9 \text{ Koordinaten des Tensors im System } K_1, \\ \underline{G}_{xx}, \dots, \underline{G}_{zz} &- 9 \text{ "Basistensoren" 2. Stufe.} \end{aligned}$$

Für die praktische Rechnung werden die 9 Koordinaten von  $\underline{D}$  in einer (3,3)-Matrix  ${}^i \underline{D}$  angeordnet, die aus den Vektorkoordinaten  ${}^i \underline{a}$  und  ${}^i \underline{b}$  gebildet wird:

$${}^i \underline{D} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = {}^i \underline{a} \cdot {}^i \underline{b}^T. \quad (2.10)$$

Die in Gl. (2.10) wiedergegebene Bildung der 9 Koordinaten  $D_{kl}$  eines Tensors 2. Stufe aus den Koordinaten zweier Vektoren ist ein Sonderfall. Allgemein ist ein Tensor 2. Stufe durch das Transformationsverhalten seiner 9 Koordinaten beim Übergang auf ein anderes Koordinatensystem definiert (wie ein Tensor 1. Stufe durch das Transformationsverhalten seiner drei Koordinaten erklärt war). Dies wird in Abschnitt 2.2.4 beschrieben. Zuvor wird jedoch noch eine weitere Produktbildung zweier Tensoren eingeführt.

### 2.2.2 Verjüngendes Produkt zweier Tensoren

Allgemein führt das "*verjüngende*" Produkt eines Tensors  $m$ -ter Stufe mit einem Tensor  $n$ -ter Stufe auf einen Tensor  $(m+n-2)$ -ter Stufe. Das verjüngende Produkt soll mit " $\cdot$ " gekennzeichnet werden.

#### a) Verjüngendes Produkt zweier Tensoren 1. Stufe (Skalarprodukt)

Das verjüngende Produkt zweier Tensoren 1. Stufe bzw. Vektoren  $\underline{a}$  und  $\underline{b}$  ist das bekannte Skalarprodukt zweier Vektoren. Im Fall orthonormierter Basisvektoren  $\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$  (Index für Koordinatensystem weggelassen) gilt:

$$\begin{aligned} \underline{a} \cdot \underline{b} &= (a_x \underline{e}_x + a_y \underline{e}_y + a_z \underline{e}_z) \cdot (b_x \underline{e}_x + b_y \underline{e}_y + b_z \underline{e}_z) = \\ &= a_x b_x \underbrace{\underline{e}_x \cdot \underline{e}_x}_1 + a_x b_y \underbrace{\underline{e}_x \cdot \underline{e}_y}_0 + a_x b_z \underbrace{\underline{e}_x \cdot \underline{e}_z}_0 + \\ &+ a_y b_x \underbrace{\underline{e}_y \cdot \underline{e}_x}_0 + a_y b_y \underbrace{\underline{e}_y \cdot \underline{e}_y}_1 + a_y b_z \underbrace{\underline{e}_y \cdot \underline{e}_z}_0 + \\ &+ a_z b_x \underbrace{\underline{e}_z \cdot \underline{e}_x}_0 + a_z b_y \underbrace{\underline{e}_z \cdot \underline{e}_y}_0 + a_z b_z \underbrace{\underline{e}_z \cdot \underline{e}_z}_1 = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \underline{a}^T \underline{b}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dieselbe Rechnung lautet in Summenschreibweise:

$$\begin{aligned} \underline{a} \cdot \underline{b} &= \left[ \sum_{\alpha} a_{\alpha} \underline{e}_{\alpha} \right] \cdot \left[ \sum_{\gamma} b_{\gamma} \underline{e}_{\gamma} \right] = \sum_{\alpha} \sum_{\gamma} a_{\alpha} b_{\gamma} \underline{e}_{\alpha} \cdot \underline{e}_{\gamma} = \sum_{\alpha} \sum_{\gamma} a_{\alpha} b_{\gamma} \delta_{\alpha\gamma} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} b_{\alpha}, \\ \text{mit } \underline{e}_{\alpha} \cdot \underline{e}_{\gamma} &= \delta_{\alpha\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \gamma \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \gamma \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die Summen laufen dabei jeweils über  $x, y, z$ .

#### b) Verjüngendes Produkt eines Tensors 2. Stufe mit einem Tensor 1. Stufe

Das verjüngende Produkt eines Tensors 2. Stufe  $\underline{D}$  mit einem Tensor 1. Stufe  $\underline{r}$  liefert einen Tensor 1. Stufe bzw. einen Vektor:

$$\begin{aligned} \underline{D} \cdot \underline{r} &= (D_{xx} \underline{e}_x \circ \underline{e}_x + D_{xy} \underline{e}_x \circ \underline{e}_y + D_{xz} \underline{e}_x \circ \underline{e}_z + \\ &+ D_{yx} \underline{e}_y \circ \underline{e}_x + D_{yy} \underline{e}_y \circ \underline{e}_y + D_{yz} \underline{e}_y \circ \underline{e}_z + \\ &+ D_{zx} \underline{e}_z \circ \underline{e}_x + D_{zy} \underline{e}_z \circ \underline{e}_y + D_{zz} \underline{e}_z \circ \underline{e}_z) \cdot (r_x \underline{e}_x + r_y \underline{e}_y + r_z \underline{e}_z) = \\ &= \left[ \sum_{\alpha} \sum_{\beta} D_{\alpha\beta} \underline{e}_{\alpha} \circ \underline{e}_{\beta} \right] \cdot \left[ \sum_{\gamma} r_{\gamma} \underline{e}_{\gamma} \right] = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} D_{\alpha\beta} r_{\gamma} (\underline{e}_{\alpha} \circ \underline{e}_{\beta}) \cdot \underline{e}_{\gamma}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Die Summen laufen dabei jeweils über  $x, y, z$ .

Das verjüngende Produkt wird nun so definiert, daß der rechte Basisvektor  $\underline{e}_{\beta}$  im tensoriellen Produkt herausgelöst wird und mit  $\underline{e}_{\gamma}$  ein Skalarprodukt bildet:

$$\underline{D} \cdot \underline{r} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} D_{\alpha\beta} r_{\gamma} \underline{e}_{\alpha} (\underline{e}_{\beta} \cdot \underline{e}_{\gamma}). \quad (2.14)$$

In der orthonormalen Basis gilt wieder  $\underline{e}_{\beta} \cdot \underline{e}_{\gamma} = \delta_{\beta\gamma}$  und man erhält einen Vektor  $\underline{s}$ :

$$\begin{aligned} \underline{D} \cdot \underline{r} &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} D_{\alpha\beta} r_{\gamma} \underline{e}_{\alpha} \delta_{\beta\gamma} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} D_{\alpha\beta} r_{\beta} \underline{e}_{\alpha} = \\ &= (D_{xx} r_x + D_{xy} r_y + D_{xz} r_z) \underline{e}_x + \\ &+ (D_{yx} r_x + D_{yy} r_y + D_{yz} r_z) \underline{e}_y + \\ &+ (D_{zx} r_x + D_{zy} r_y + D_{zz} r_z) \underline{e}_z =: \underline{s}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Für die praktische Rechnung kann wieder auf Matrizenschreibweise übergegangen werden:

$$\begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\underline{s} = \underline{D} \underline{r}.$$

Entsprechend läßt sich zeigen, daß für die Koordinatendarstellung des verjüngenden Produkt "von links", also

$$\underline{s} = \underline{r} \cdot \underline{D}, \quad (2.17)$$

gilt:

$$\begin{bmatrix} s_x & s_y & s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x & r_y & r_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\underline{s}^T = \underline{r}^T \underline{D}.$$

## 2.2.3 Abbildungen von Vektoren durch Tensoren 2. Stufe

Die Beziehung

$$\underline{s} = \underline{f}(\underline{r}) = \underline{D} \cdot \underline{r}$$

kann als eine lineare Abbildung des Vektors  $\underline{r}$  auf den Vektor  $\underline{s}$  mit dem Tensor 2. Stufe  $\underline{D}$  als linearem Operator aufgefaßt werden. Sie besitzt die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \underline{f}(\underline{r}_1 + \underline{r}_2) &= \underline{f}(\underline{r}_1) + \underline{f}(\underline{r}_2), \\ \underline{f}(\lambda \underline{r}) &= \lambda \underline{f}(\underline{r}) \quad (\lambda \text{ skalar}). \end{aligned}$$

Beispiele für Tensoren 2. Stufe:

- Darstellung des Vektorprodukts mit Hilfe eines Tensors 2. Stufe:

$$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r} = \underline{\tilde{\omega}} \cdot \underline{r}. \quad (2.19)$$

Der Tensor 2. Stufe  $\underline{\tilde{\omega}}$  bildet  $\underline{r}$  auf  $\underline{v}$  ab. Unter Berücksichtigung der bekannten Beziehung für das Vektorprodukt lassen sich die Koordinaten  ${}^i\tilde{\omega}$  des Tensors  $\underline{\tilde{\omega}}$  in einem Koordinatensystem  $K_i$  angeben:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_y r_z - \omega_z r_y \\ \omega_z r_x - \omega_x r_z \\ \omega_x r_y - \omega_y r_x \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$${}^i\underline{v} = {}^i\tilde{\underline{\omega}} {}^i\underline{r}$$

Die Matrix  ${}^i\tilde{\underline{\omega}}$  ist schiefsymmetrisch:  ${}^i\tilde{\underline{\omega}} = -({}^i\tilde{\underline{\omega}})^T$ .

- Herauslösen eines Vektors aus einem Skalarprodukt:

Durch Umkehrung des Schrittes von Gl. (2.13) nach Gl. (2.14) läßt sich in dem Vektorausdruck  $\underline{a}(\underline{b} \cdot \underline{r})$  der Vektor  $\underline{r}$  herauslösen:

$$\underline{s} = \underline{a}(\underline{b} \cdot \underline{r}) = (\underline{a} \circ \underline{b}) \cdot \underline{r}. \quad (2.21)$$

Der Tensor 2. Stufe  $\underline{a} \circ \underline{b}$  bildet  $\underline{r}$  auf  $\underline{s}$  ab.

## 2.2.4 Transformation von Tensorkoordinaten

Die Koordinaten  ${}^i\underline{D}$  eines Tensors 2. Stufe im System  $K_i$  können mit der Transformationsmatrix  ${}^{ik}\underline{T}$  in die Koordinaten  ${}^k\underline{D}$  in einem zweiten System  $K_k$  transformiert werden. Für die Herleitung wird die Tensorgleichung  $\underline{s} = \underline{D} \cdot \underline{r}$  in Koordinaten des Systems  $K_i$  angeschrieben:

$${}^i\underline{s} = {}^i\underline{D} {}^i\underline{r}.$$

Einsetzen der Transformationsbeziehungen  ${}^i\underline{r} = {}^{ik}\underline{T} {}^k\underline{r}$  und  ${}^i\underline{s} = {}^{ik}\underline{T} {}^k\underline{s}$  ergibt:

$${}^{ik}\underline{T} {}^k\underline{s} = {}^i\underline{D} {}^{ik}\underline{T} {}^k\underline{r} \rightarrow {}^k\underline{s} = {}^{ki}\underline{T} {}^i\underline{D} {}^{ik}\underline{T} {}^k\underline{r}.$$

Der Vergleich mit der im System  $K_k$  angeschriebenen Tensorgleichung  ${}^k\underline{s} = {}^k\underline{D} {}^k\underline{r}$  zeigt das Transformationsverhalten für Koordinaten von Tensoren 2. Stufe in Matrizenschreibweise:

$${}^k\underline{D} = {}^{ki}\underline{T} {}^i\underline{D} ({}^{ik}\underline{T})^T = {}^{ki}\underline{T} {}^i\underline{D} {}^{ik}\underline{T}. \quad (2.22)$$

## 2.2.5 Zur Schreibweise von Vektorgleichungen

Insgesamt können damit vektorielle Ausdrücke in koordinatenfreier Vektorschreibweise oder, mit Hilfe der Koordinaten in einem Koordinatensystem, in Matrizenschreibweise dargestellt werden:

	Vektor-schreibweise	Koordinaten in Matrizenschreibweise
Skalarprodukt:	$\lambda = \underline{a} \cdot \underline{b}$	$\lambda = {}^i\underline{a}^T {}^i\underline{b}$
Verjüngung e's Tensors 2. Stufe:	$\underline{s} = \underline{Q} \cdot \underline{r}$	${}^i\underline{s} = {}^i\underline{Q} {}^i\underline{r}$
Vektorprodukt:	$\underline{v} = \underline{a} \times \underline{b} = \underline{\tilde{a}} \cdot \underline{b}$	${}^i\underline{v} = {}^i\tilde{\underline{a}} {}^i\underline{b}$
Dyadisches Produkt:	$\underline{D} = \underline{a} \circ \underline{b}$	${}^i\underline{D} = {}^i\underline{a} {}^i\underline{b}^T$

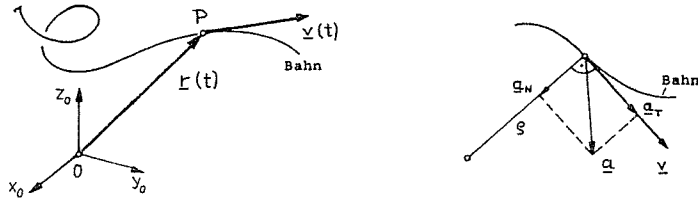
Es ist zu beachten, daß die angegebenen Matrizengleichungen nur für Komponentenzerlegungen in einem orthonormalen System von Basisvektoren gelten.

In den folgenden Kapiteln wird überwiegend die Matrizenschreibweise verwendet.



### 3 Bewegungen von Punkten und Körpern im Raum

#### 3.1 Bewegung eines Punktes im Raum



##### 3.1.1 Bahn eines Punktes

Die Beschreibung der Bewegung eines Punktes P relativ zu einem festen Referenzsystem (Inertialsystem)  $K_0$  erfolgt über den Ortsvektor

$$\underline{r}(t) = {}^0r_x(t) \underline{e}_{x0} + {}^0r_y(t) \underline{e}_{y0} + {}^0r_z(t) \underline{e}_{z0} \quad \rightarrow \quad {}^0\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \\ r_z(t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Die drei unabhängigen Koordinaten von  $\underline{r}(t)$  entsprechen den *drei Freiheitsgraden* der Bewegung eines Punktes im Raum.

##### 3.1.2 Geschwindigkeit eines Punktes

Die Geschwindigkeit von P relativ zu  $K_0$  (Absolutgeschwindigkeit) ist:

$$\begin{aligned} \underline{v}(t) &= \frac{d\underline{r}}{dt} = \left( \frac{d}{dt} {}^0r_x(t) \right) \underline{e}_{x0} + \left( \frac{d}{dt} {}^0r_y(t) \right) \underline{e}_{y0} + \left( \frac{d}{dt} {}^0r_z(t) \right) \underline{e}_{z0} = \\ &= \dot{\underline{r}}(t) = {}^0\dot{r}_x(t) \underline{e}_{x0} + {}^0\dot{r}_y(t) \underline{e}_{y0} + {}^0\dot{r}_z(t) \underline{e}_{z0} = \\ &= {}^0v_x(t) \underline{e}_{x0} + {}^0v_y(t) \underline{e}_{y0} + {}^0v_z(t) \underline{e}_{z0} \end{aligned} \quad (3.2a)$$

$$\rightarrow {}^0\underline{v}(t) = {}^0\dot{\underline{r}}(t) = \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix} \quad (3.2b)$$

Die Richtung von  $\underline{v}$  ist stets *tangential* zur Bahn.

$$\text{Betrag: } v = |\underline{v}| = \sqrt{{}^0v_x^2 + {}^0v_y^2 + {}^0v_z^2} = \frac{d}{dt} |\underline{r}| \quad (3.3)$$

##### 3.1.3 Beschleunigung eines Punktes

Die Beschleunigung von P relativ zu  $K_0$  (Absolutbeschleunigung) ist:

$$\begin{aligned} \underline{a}(t) &= \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \frac{d \underline{v}}{dt} = \ddot{\underline{r}}(t) = {}^0\ddot{r}_x(t) \underline{e}_{x0} + {}^0\ddot{r}_y(t) \underline{e}_{y0} + {}^0\ddot{r}_z(t) \underline{e}_{z0} \\ &= {}^0a_x(t) \underline{e}_{x0} + {}^0a_y(t) \underline{e}_{y0} + {}^0a_z(t) \underline{e}_{z0} \end{aligned} \quad (3.4a)$$

$$\rightarrow {}^0\underline{a}(t) = {}^0\ddot{\underline{r}}(t) = \begin{bmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{bmatrix} \quad (3.4b)$$

Die Beschleunigung  $\underline{a}$  läßt sich an der Bahnkurve in zwei Anteile zerlegen:

- *Tangentialbeschleunigung* (Bahnbeschleunigung): Betragsänderung von  $\underline{v}$

$$a_T = \underline{a} \cdot \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \frac{dv}{dt} \quad (3.5)$$

- *Normalbeschleunigung* (Zentripetalbeschleunigung):

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} \quad \text{Krümmungsradius } \rho \quad (3.6)$$

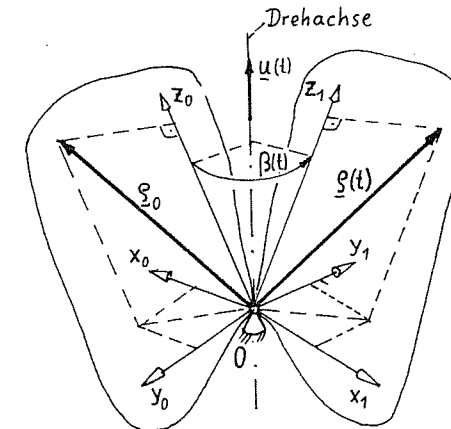
Die Normalbeschleunigung zeigt stets in Richtung der *Hauptnormalen* der Bahn; sie zeigt auf den Krümmungsmittelpunkt.

$$\text{Betrag von } \underline{a}: a = |\underline{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

### 3.2 Drehbewegung des starren Körpers im Raum

Bei der reinen Drehbewegung eines starren Körpers behält ein Körperpunkt seine Lage im Raum bei und bildet den *Fixpunkt* der Drehung. Zur Beschreibung der Drehbewegung eines starren Körpers um den Ursprungspunkt  $O_0$  des Inertialsystems  $K_0$  als Fixpunkt wird ein körperfestes Koordinatensystem  $K_1$  (Ursprung  $O_1=O_0=O$ ) eingeführt, das die Orientierung des Körpers repräsentiert. In der festen *Ausgangslage* des Körpers fällt  $K_1$  mit  $K_0$  zusammen.

Aus dieser Ausgangslage kann der Körper nach einem Theorem von EULER stets durch eine einzige Drehung um eine Achse (Richtungsvektor  $\underline{u}$ , Drehwinkel  $\beta$ ) in eine beliebige andere Orientierung gebracht werden. Sowohl die Achse  $\underline{u}$  als auch der Winkel  $\beta$  ändern sich im allgemeinen während der Drehbewegung, d.h. zu jeder neuen Orientierung gehört ein neues Paar  $(\underline{u}, \beta)$ , siehe Abschnitt 4.2.



### 3.2.1 Orientierung des starren Körpers

Der Übergang eines beliebigen körperfesten Vektors  $\underline{\rho}$  von der festen Ausgangslage  $\underline{\rho}_0$  in die aktuelle Lage  $\underline{\rho}(t)$  kann mit Hilfe eines linearen Operators, des *Drehtensors*  $\underline{R}(t)$ , wie folgt als Vektorgleichung ausgedrückt werden (vgl. Abschn. 2.2.4):

$$\underline{\rho}(t) = \underline{R}(t) \underline{\rho}_0 \quad (3.7)$$

Für die praktische Rechnung wird die Vektorgleichung (3.7) in Koordinaten eines zu wählenden Koordinatensystems ausgewertet. Wird z.B. das System  $K_0$  gewählt, so lautet der Zusammenhang zwischen den Koordinaten der *unterschiedlichen* Vektoren  $\underline{\rho}_0$  und  $\underline{\rho}(t)$ :

$${}^0\underline{\rho}(t) = {}^0\underline{R}(t) {}^0\underline{\rho}_0 \quad (3.8)$$

Die neun Koordinaten  ${}^0\underline{R}(t)$  des Drehtensors lassen sich unmittelbar angeben. Hierzu wird zunächst berücksichtigt, daß die *unterschiedlichen* Vektoren  $\underline{\rho}_0$  und  $\underline{\rho}(t)$  in  $K_0$  bzw.  $K_1$  *dieselben* (konstanten) Koordinaten besitzen, also

$${}^0\underline{\rho}_0 = {}^1\underline{\rho} \quad (3.9)$$

Einsetzen von Gl. (3.9) in die rechte Seite von Gl. (3.8) liefert den Zusammenhang

$${}^0\underline{\rho}(t) = {}^0\underline{R}(t) {}^1\underline{\rho} \quad (3.10)$$

zwischen den Koordinaten *desselben* Vektors  $\underline{\rho}(t)$  in den *unterschiedlichen* Koordinatensystemen  $K_0$  bzw.  $K_1$ . Dieser Zusammenhang läßt sich aber auch entsprechend Abschnitt 2.1.3 mit Hilfe der Transformationsmatrix  ${}^0\underline{T}(t)$  darstellen:

$${}^0\underline{\rho}(t) = {}^0\underline{T}(t) {}^1\underline{\rho} \quad (3.11)$$

Der Vergleich der Beziehungen (3.10) und (3.11) zeigt, daß die Koordinaten des Drehtensors  $\underline{R}(t)$  im System  $K_0$  gerade den Elementen der Transformationsmatrix  ${}^0\underline{T}(t)$  entsprechen:

$${}^0\underline{R}(t) = {}^0\underline{T}(t) \quad (3.12)$$

Die Transformation der Koordinaten  ${}^0\underline{R}(t)$  des Drehtensors in das System  $K_1$  entsprechend Gl. (2.22) zeigt ferner, daß die Koordinaten des Drehtensors  $\underline{R}(t)$  in den Koordinatensystemen  $K_0$  und  $K_1$  übereinstimmen:

$${}^1\underline{R} = \overbrace{{}^{10}\underline{T}}^{\underline{I}} \overbrace{{}^0\underline{R}}^{{}^0\underline{T}} \overbrace{{}^0\underline{T}}^{{}^0\underline{T}} = {}^0\underline{T} = {}^0\underline{R} \quad (3.13)$$

Die drei unabhängigen Elemente der orthogonalen Transformationsmatrix entsprechen den *drei Freiheitsgraden der Drehbewegung* eines starren Körpers im Raum. Möglichkeiten zur Wahl von Koordinaten für die Drehbewegung werden in Kapitel 4 ausführlich behandelt.

### Betrachtungsweisen der Drehbewegung

Insgesamt läßt sich damit die Drehung eines Körpers (bzw. eines Vektors) durch eine Matrizengleichung der Form

$$\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix}, \quad \text{mit } |\underline{b}| = |\underline{c}| \text{ und } \underline{B}^T = \underline{B}^{-1}, \quad (3.14)$$

$$\underline{b} = \underline{B} \underline{c}$$

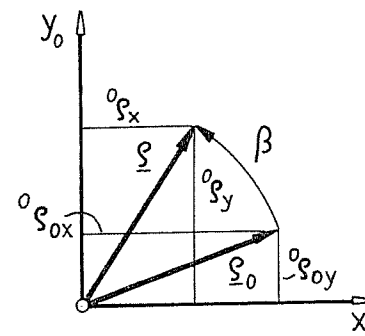
darstellen, die auf zwei gleichwertige Arten interpretiert werden kann:

1. Interpretation als *Vektordrehung* entsprechend Gl. (3.8):  ${}^0\underline{\rho}(t) = {}^0\underline{R}(t) {}^0\underline{\rho}_0$

Gl. (3.14) vermittelt hier den Zusammenhang zwischen den Koordinaten  $\underline{b} = {}^0\underline{\rho}(t)$  und  $\underline{c} = {}^0\underline{\rho}_0$  der *unterschiedlichen* Vektoren  $\underline{\rho}_0$  und  $\underline{\rho}(t)$  im *gleichen* Koordinatensystem  $K_0$ ; die Matrix  $\underline{B} = {}^0\underline{R}(t)$  beinhaltet die Koordinaten des Drehtensors der Vektordrehung  $\underline{\rho}_0 \rightarrow \underline{\rho}(t)$ .

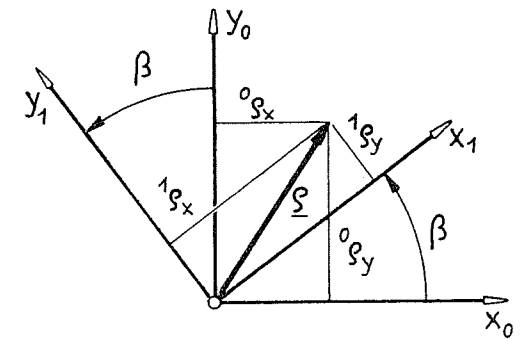
2. Interpretation als *Koordinatentransformation* entspr. Gl. (3.11):  ${}^0\underline{\rho}(t) = {}^0\underline{T}(t) {}^1\underline{\rho}$

Gl. (3.14) vermittelt hier den Zusammenhang zwischen den Koordinaten  $\underline{b} = {}^0\underline{\rho}(t)$  und  $\underline{c} = {}^1\underline{\rho}_0$  *desselben* Vektors  $\underline{\rho}(t)$  in den *unterschiedlichen* Koordinatensystemen  $K_0$  und  $K_1$ ; die Matrix  $\underline{B} = {}^0\underline{T}(t)$  entspricht der Transformationsmatrix der Koordinatentransformation  ${}^1\underline{\rho} \rightarrow {}^0\underline{\rho}(t)$ .



Vektordrehung

$${}^0\underline{\rho}(t) = {}^0\underline{R}(t) {}^0\underline{\rho}_0$$



Koordinatentransformation

$${}^0\underline{\rho}(t) = {}^0\underline{T}(t) {}^1\underline{\rho}$$

### 3.2.2 Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers

Die Zeitableitung der Transformationsbeziehung (3.11),  ${}^0\dot{\rho}(t) = {}^0\dot{T}(t) {}^1\rho$  liefert die Koordinaten der zeitliche Änderung  $\dot{\rho}(t)$  des Vektors  $\rho(t)$  im Inertialsystem  $K_0$ :

$${}^0\dot{\rho}(t) = {}^0\dot{T}(t) {}^1\rho + {}^0T(t) \frac{{}^1\dot{\rho}}{0} \quad (3.15)$$

Einsetzen der entgegengesetzten Transformation  ${}^1\rho = {}^0T^T(t) {}^0\rho(t)$  ergibt:

$${}^0\dot{\rho}(t) = {}^0\dot{T}(t) {}^0T^T(t) {}^0\rho(t) \quad (3.16)$$

Es läßt sich nun zeigen, daß die Matrix  $\underline{C} = {}^0\dot{T} {}^0T^T$  schiefssymmetrisch ist, d.h. es gilt  $\underline{C} = -\underline{C}^T$ . Hierzu wird die Orthogonalitätsbeziehung  ${}^0T {}^0T^T = \underline{I}$  nach der Zeit abgeleitet:

$$\frac{d}{dt}({}^0T {}^0T^T) = {}^0\dot{T} {}^0T^T + {}^0T {}^0\dot{T}^T = \underline{0} \quad \rightarrow \quad {}^0\dot{T} {}^0T^T = -({}^0T {}^0\dot{T}^T)^T, \\ \rightarrow \quad \underline{C} = -\underline{C}^T \quad (3.17)$$

Damit ist:

$${}^0\dot{T} {}^0T^T = \underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} \\ -C_{12} & 0 & C_{23} \\ -C_{13} & -C_{23} & 0 \end{bmatrix} = -\underline{C}^T.$$

Werden nun den nichtverschwindenden Elementen von  $\underline{C}$  die neuen Bezeichnungen  $C_{12} = -{}^0\omega_z$ ,  $C_{13} = {}^0\omega_y$ ,  $C_{23} = -{}^0\omega_x$  gegeben, so enthält  $\underline{C}$  die Koordinaten des dem Vektor  $\underline{\omega}$  zugeordneten schiefssymmetrischen Tensors  $\underline{\tilde{\omega}}$ , vgl. Gl. (2.20), also

$${}^0\tilde{\underline{\omega}} = {}^0\dot{T} {}^0T^T \quad (= {}^0\dot{T} {}^10T). \quad (3.18)$$

Damit läßt sich (3.16) schreiben als

$${}^0 \begin{bmatrix} \dot{\rho}_x(t) \\ \dot{\rho}_y(t) \\ \dot{\rho}_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) \\ \omega_z(t) & 0 & -\omega_x(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 0 \end{bmatrix} {}^0 \begin{bmatrix} \rho_x(t) \\ \rho_y(t) \\ \rho_z(t) \end{bmatrix} \\ {}^0\dot{\rho}(t) = {}^0\tilde{\underline{\omega}}(t) {}^0\rho(t) \quad (= {}^0\underline{\omega}(t) \times {}^0\rho(t)). \quad (3.19)$$

Da alle Vektoren im gleichen System  $K_0$  dargestellt sind, gilt Gl. (3.19) auch als Vektorgleichung:

$$\dot{\rho}(t) = \tilde{\underline{\omega}}(t) \rho(t) = \underline{\omega}(t) \times \rho(t). \quad (3.20)$$

Hierbei ist  $\underline{\omega}(t)$  der Vektor der Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers.

### 3.2.3 Winkelbeschleunigung des starren Körpers

Die Zeitableitung von Gl. (3.20) liefert die zweite Zeitableitung

$$\ddot{\rho}(t) = \frac{\dot{\tilde{\underline{\omega}}}(t)}{\tilde{\underline{\omega}}(t)} \rho(t) + \tilde{\underline{\omega}}(t) \frac{\dot{\rho}(t)}{\tilde{\underline{\omega}}(t) \rho(t)} = \underline{\tilde{\alpha}}(t) \rho(t) + \tilde{\underline{\omega}}(t) \tilde{\underline{\omega}}(t) \rho(t) \quad (3.21)$$

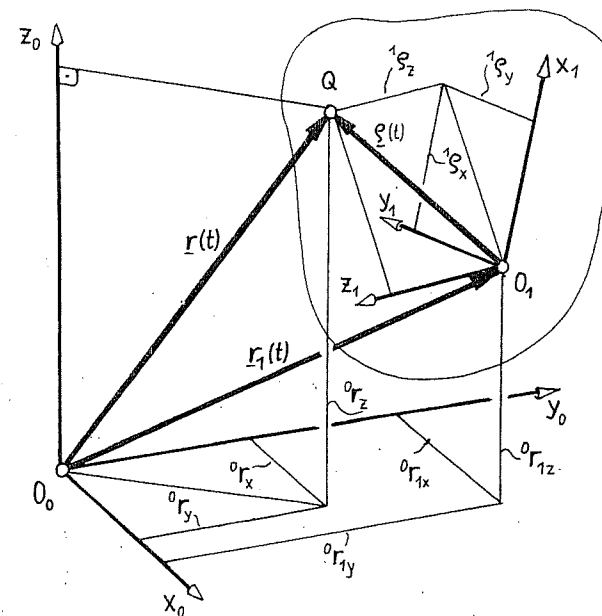
des Vektors  $\rho(t)$  mit dem Vektor  $\underline{\alpha}(t)$  der Winkelbeschleunigung. Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten  ${}^0\tilde{\underline{\alpha}}$  und der Transformationsmatrix  ${}^0T$  ergibt sich aus der Zeitableitung von Gl. (3.18):

$${}^0\tilde{\underline{\alpha}} = {}^0\dot{T} {}^0T^T + {}^0\dot{T} {}^0\dot{T}^T \quad (3.22)$$

### 3.3 Die allgemeine Bewegung des starren Körpers im Raum

Die allgemeine Bewegung des Körpers bzw. des damit verbundenen Koordinatensystems  $K_1$  im Raum läßt sich als eine Überlagerung einer Bahnbewegung und einer Drehbewegung beschreiben:

- Bahnbewegung  $\underline{r}_1(t)$  des Punktes  $O_1$  entsprechend Abschnitt 3.1:  
3 Freiheitsgrade der Translation.
- Drehbewegung um den Punkt  $O_1$  als Fixpunkt entsprechend Abschnitt 3.2:  
3 Freiheitsgrade der Rotation.



### 3.3.1 Position des starren Körpers im Raum

Ausgehend von der Drehung des körperfesten Vektors  $\underline{\rho}(t)$  aus Abschnitt 3.2.1 erhält man den Ortsvektor  $\underline{r}(t)$  eines beliebigen Körperpunktes Q unter Hinzunahme des Ortsvektors  $\underline{r}_1(t)$  zum Ursprung des körperfesten Systems  $K_1$ :

$$\underline{r}(t) = \underline{r}_1(t) + \underline{\rho}(t) = \underline{r}_1(t) + \underline{R}(t) \underline{\rho}_0 \quad (3.23)$$

Die Auswertung dieser Vektorgleichung in Koordinaten des Koordinatensystems  $K_0$  liefert unter Berücksichtigung der Beziehung  ${}^0\underline{R}(t) {}^0\underline{\rho}_0 = {}^0\underline{T}(t) {}^1\underline{\rho}$ :

$$\begin{aligned} {}^0 \begin{bmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \\ r_z(t) \end{bmatrix} &= {}^0 \begin{bmatrix} r_{1x}(t) \\ r_{1y}(t) \\ r_{1z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{11}(t) & T_{12}(t) & T_{13}(t) \\ T_{21}(t) & T_{22}(t) & T_{23}(t) \\ T_{31}(t) & T_{32}(t) & T_{33}(t) \end{bmatrix} {}^1 \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix} \\ {}^0 \underline{r}(t) &= {}^0 \underline{r}_1(t) + {}^0 \underline{T}(t) {}^1 \underline{\rho} \quad (3.24) \end{aligned}$$

Diese Matrizengleichung läßt sich auch in einer kompakteren Form darstellen:

$$\begin{aligned} {}^0 \begin{bmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \\ r_z(t) \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_{11}(t) & T_{12}(t) & T_{13}(t) & {}^0 r_{1x}(t) \\ T_{21}(t) & T_{22}(t) & T_{23}(t) & {}^0 r_{1y}(t) \\ T_{31}(t) & T_{32}(t) & T_{33}(t) & {}^0 r_{1z}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^1 \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \\ 1 \end{bmatrix} \\ {}^0 \underline{r}^*(t) &= {}^0 \underline{A}(t) {}^1 \underline{\rho}^* \quad (3.25) \end{aligned}$$

### 3.3.2 Geschwindigkeit des starren Körpers im Raum

Die Zeitableitung der Vektorgleichung (3.23) liefert unter Berücksichtigung von Gl. (3.20) die (Absolut-)Geschwindigkeit  $\underline{v}(t)$  des Punktes Q:

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \dot{\underline{r}}_1(t) + \dot{\underline{\rho}}(t) = \underline{v}_1(t) + \underline{\tilde{\omega}}(t) \underline{\rho}(t) \quad (3.26)$$

Die Auswertung dieser Vektorgleichung in Koordinaten des Koordinatensystems  $K_0$  ergibt:

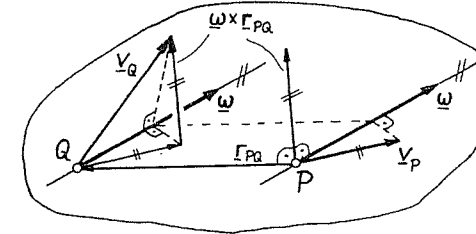
$$\begin{aligned} {}^0 \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix} &= {}^0 \begin{bmatrix} v_{1x}(t) \\ v_{1y}(t) \\ v_{1z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) \\ \omega_z(t) & 0 & -\omega_x(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 0 \end{bmatrix} {}^0 \begin{bmatrix} \rho_x(t) \\ \rho_y(t) \\ \rho_z(t) \end{bmatrix} \\ {}^0 \underline{v}(t) &= {}^0 \underline{v}_1(t) + {}^0 \underline{\tilde{\omega}}(t) {}^0 \underline{\rho}(t) \quad (3.27) \end{aligned}$$

#### Bewegungswinder:

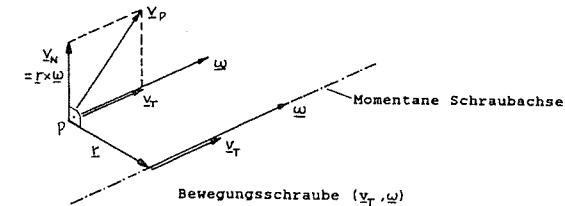
Der "Geschwindigkeitszustand" eines starren Körpers wird durch die Angabe der Winkelgeschwindigkeit  $\underline{\omega}$  und der Translationsgeschwindigkeit  $\underline{v}_P$  eines Körperpunktes P vollständig beschrieben. Man bezeichnet das Paar dieser Vektoren als *Bewegungswinder*  $(\underline{\omega}, \underline{v}_P)$  des Körpers im Punkt P.

Mit Hilfe der Beziehung (3.26) wird der Bewegungswinder  $(\underline{\omega}, \underline{v}_Q)$  in einem anderen Bezugspunkt Q erhalten:

$$\underline{v}_Q = \underline{v}_P + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PQ}$$



Durch gezielte Verschiebung des Bezugspunktes läßt sich der Bewegungswinder auf eine *Bewegungsschraube* (*Geschwindigkeitsschraube*) reduzieren. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß Winkelgeschwindigkeit und Translationsgeschwindigkeit parallel sind. Der allgemeine Geschwindigkeitszustand eines Körpers ist damit eine Schraubbewegung um die *momentane Schraubachse*.



### 3.3.3 Beschleunigung des starren Körpers im Raum

Die weitere Zeitableitung der Geschwindigkeitsgleichung (3.26) liefert unter Berücksichtigung von (3.21) die (Absolut-)Beschleunigung  $\underline{a}(t)$  des Punktes Q:

$$\underline{a}(t) = \ddot{\underline{r}}(t) = \ddot{\underline{r}}_1(t) + \ddot{\underline{\rho}}(t) = \underline{a}_1(t) + \underline{\tilde{\alpha}}(t) \underline{\rho}(t) + \underline{\tilde{\omega}}(t) \underline{\tilde{\omega}}(t) \underline{\rho}(t) \quad (3.28)$$

In Koordinaten von  $K_0$  gilt:

$$\begin{aligned} {}^0 \begin{bmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{bmatrix} &= {}^0 \begin{bmatrix} a_{1x}(t) \\ a_{1y}(t) \\ a_{1z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_z(t) & \alpha_y(t) \\ \alpha_z(t) & 0 & -\alpha_x(t) \\ -\alpha_y(t) & \alpha_x(t) & 0 \end{bmatrix} {}^0 \begin{bmatrix} \rho_x(t) \\ \rho_y(t) \\ \rho_z(t) \end{bmatrix} + \\ &+ {}^0 \underline{\tilde{\alpha}}(t) {}^0 \underline{\rho}(t) + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) \\ \omega_z(t) & 0 & -\omega_x(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) \\ \omega_z(t) & 0 & -\omega_x(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 0 \end{bmatrix} {}^0 \begin{bmatrix} \rho_x(t) \\ \rho_y(t) \\ \rho_z(t) \end{bmatrix} + \\ &+ {}^0 \underline{\tilde{\omega}}(t) {}^0 \underline{\tilde{\omega}}(t) {}^0 \underline{\rho}(t) \end{aligned}$$

#### 4 Koordinaten zur Beschreibung von Drehbewegungen

Von den neun Komponenten des Drehtensors bzw. der Transformationsmatrix zur Beschreibung der Drehung eines starren Körpers sind aufgrund der sechs Orthogonalitätsbedingungen nur drei voneinander unabhängig, entsprechend den drei Freiheitsgraden der freien Drehbewegung im Raum. Der Drehtensor bzw. die Transformationsmatrix kann deswegen in Abhängigkeit von drei unabhängigen Koordinaten ausgedrückt werden. Aus später ersichtlichen Gründen werden jedoch häufig mehr als drei Koordinaten gewählt, die dann nicht mehr unabhängig voneinander sind, sondern zusätzlichen Nebenbedingungen unterliegen. In diesem Kapitel werden die Grundbeziehungen zu einigen wichtigen Koordinatendarstellungen der Drehbewegung zusammengestellt.

Die Zusammenhänge zwischen den Größen zur Beschreibung der Drehbewegung des körperfesten Systems  $K_1$  relativ zum Ausgangssystem  $K_0$  und den allgemein mit

$$\underline{\gamma} = [\gamma_1, \dots, \gamma_m]^T, \quad m \geq 3, \quad (4.1)$$

bezeichneten Koordinaten der Drehbewegung können wie folgt ausgedrückt werden:

- Drehtensor bzw. Transformationsmatrix, vgl. Abschnitt 3.2.1:

$${}^0\mathbf{R} = {}^0\mathbf{R}(\underline{\gamma}) = {}^1\mathbf{R}(\underline{\gamma}) \quad \text{bzw.} \quad {}^{01}\mathbf{T} = {}^{01}\mathbf{T}(\underline{\gamma}), \quad (4.2a)$$

$$\underline{\gamma} = \underline{\gamma}(\mathbf{R}) \quad \text{bzw.} \quad \underline{\gamma} = \underline{\gamma}({}^{01}\mathbf{T}). \quad (4.2b)$$

- Winkelgeschwindigkeit (Koordinaten in  $K_0$  oder in  $K_1$ ):

$${}^0\omega = \mathbf{H}_0(\underline{\gamma}) \dot{\underline{\gamma}} \quad \text{und} \quad {}^1\omega = \mathbf{H}_1(\underline{\gamma}) \dot{\underline{\gamma}}, \quad (4.3a)$$

$$\dot{\underline{\gamma}} = \mathbf{K}_0(\underline{\gamma}) {}^0\omega \quad \text{und} \quad \dot{\underline{\gamma}} = \mathbf{K}_1(\underline{\gamma}) {}^1\omega. \quad (4.3b)$$

- Winkelbeschleunigung (Koordinaten in  $K_0$  oder in  $K_1$ ):

$${}^0\alpha = \mathbf{H}_0(\underline{\gamma}) \ddot{\underline{\gamma}} + \ddot{\alpha}_0(\underline{\gamma}, \dot{\underline{\gamma}}) \quad \text{und} \quad {}^1\alpha = \mathbf{H}_1(\underline{\gamma}) \ddot{\underline{\gamma}} + \ddot{\alpha}_1(\underline{\gamma}, \dot{\underline{\gamma}}), \quad (4.4a)$$

$$\ddot{\underline{\gamma}} = \mathbf{K}_0(\underline{\gamma}) {}^0\alpha + \ddot{\gamma}_0(\underline{\gamma}, \dot{\underline{\gamma}}) \quad \text{und} \quad \ddot{\underline{\gamma}} = \mathbf{K}_1(\underline{\gamma}) {}^1\alpha + \ddot{\gamma}_1(\underline{\gamma}, \dot{\underline{\gamma}}). \quad (4.4b)$$

Zusätzlich gelten  $m-3$  algebraische Nebenbedingungen der Form

$$\Phi(\underline{\gamma}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Phi_i(\underline{\gamma}) = 0, \quad i = 1, \dots, m-3. \quad (4.5)$$

**Anwendungsbeispiel:** Bewegungsgleichungen für die freie Drehung eines starren Körpers im Raum.

Mit den Drehkoordinaten  $\underline{\gamma}$  als verallgemeinerten Lagekoordinaten und den Koordinaten der Winkelgeschwindigkeit im System  $K_1$  (günstig, da  ${}^1\omega = \text{const}$ ) als verallgemeinerten Geschwindigkeiten ("Minimalgeschwindigkeiten") lauten die Bewegungsgleichungen mit den dazugehörigen Anfangsbedingungen:

$$\dot{\underline{\gamma}} = \mathbf{K}_1(\underline{\gamma}) {}^1\omega; \quad \underline{\gamma}(t=t_0) = \underline{\gamma}({}^{01}\mathbf{T}(t=t_0)), \quad (4.6a)$$

$${}^1\omega = {}^1\mathbf{Q}_S^{-1} ({}^1\mathbf{M}_S^e - {}^1\tilde{\omega} {}^1\mathbf{Q}_S {}^1\omega); \quad {}^1\omega(t=t_0), \quad (4.6b)$$

mit  ${}^1\mathbf{M}_S^e$ : eingeprägte Momente bzgl. Massenmittelpunkt S

${}^1\mathbf{Q}_S$ : Trägheitstensor bzgl. Massenmittelpunkt S

In den insgesamt  $m+3$  Bewegungsgleichungen (4.6) werden nur die Lagebeziehungen (4.2) und die Geschwindigkeitsgleichung (4.3b) benötigt. Die Beschleunigungsgleichungen (4.4) sind nur für die "LAGRANGE-Formulierung" der Bewegungsgleichungen erforderlich, bei der die Drehkoordinaten als verallgemeinerte Lagekoordinaten und deren Zeitableitungen als verallgemeinerte Geschwindigkeiten verwendet werden. Diese Formulierung ist allerdings im Vergleich zur "EULER-Formulierung" (4.6) wesentlich ungünstiger und wird deswegen kaum verwendet. Aus diesem Grund wird im folgenden auf die Herleitung der Beschleunigungsgleichungen (4.4) verzichtet.

#### 4.1 Koordinaten des Drehtensors (Richtungscosinus)

##### 4.1.1 Darstellung des Drehtensors bzw. der Transformationsmatrix $\rightarrow$ Gl. (4.2)

Es ist naheliegend, unmittelbar die  $m=9$  Koordinaten des Drehtensors als Koordinaten der Drehbewegung zu benutzen. Entsprechend Gl. (3.12) ist dann

$$\underline{\gamma} = {}^0\mathbf{R} = {}^{01}\mathbf{T}. \quad (4.7)$$

Zwischen den neun Elementen  $T_{ij}$  der Matrix  ${}^{01}\mathbf{T}$  bestehen die sechs Orthogonalitätsbedingungen, d.h. die drei Zeilen- oder Spaltenvektoren von  ${}^{01}\mathbf{T}$  haben die Länge 1 und stehen paarweise senkrecht aufeinander. Es sind dies die sechs unabhängigen Einzelgleichungen der Beziehung  ${}^{01}\mathbf{T} {}^{01}\mathbf{T}^T = \mathbf{I} \rightarrow$  Gl. (4.5)

$$\Phi(\underline{\gamma}) = 0:$$

$$\sum_{j=1}^3 T_{\alpha j} T_{\beta j} - \delta_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{mit} \quad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \beta \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \beta \end{cases}, \quad \alpha = 1, 2, 3; \beta = 1, 2, 3. \quad (4.8)$$

##### 4.1.2 Darstellung der Winkelgeschwindigkeit $\rightarrow$ Gl. (4.3)

###### a) Koordinaten von $\omega$ im Ausgangssystem $K_0$ :

Nach Gl. (3.18) gilt:

$${}^0\omega = {}^{01}\mathbf{T} {}^{01}\dot{\mathbf{T}}^T. \quad (4.9)$$

Die Auflösung nach  ${}^{01}\dot{\mathbf{T}}$  liefert:

$${}^{01}\dot{\mathbf{T}} = {}^0\omega {}^{01}\mathbf{T}. \quad (4.10)$$

###### b) Koordinaten von $\omega$ im körperfesten System $K_1$ :

Mit der Transformation der Tensorkoordinaten  ${}^0\omega$  entsprechend Gl. (2.22), also

$${}^0\omega = {}^{01}\mathbf{T} {}^1\omega {}^{01}\mathbf{T}^T,$$

gehen die Gln. (4.9) und (4.10) über in

$${}^1\omega = {}^{01}\mathbf{T}^T {}^{01}\dot{\mathbf{T}}, \quad (4.11)$$

bzw.

$${}^{01}\dot{\mathbf{T}} = {}^{01}\mathbf{T} {}^1\omega. \quad (4.12)$$

## 4.2 Drehzeiger (natürliche Invarianten der Drehbewegung)

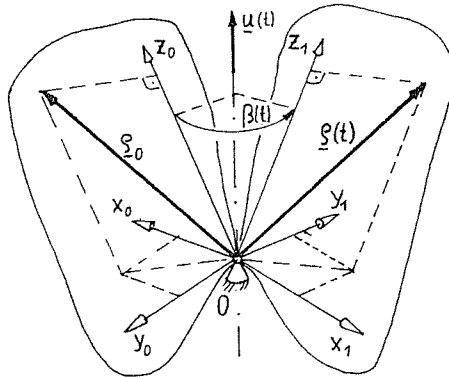
### 4.2.1 Darstellung des Drehtensors bzw. der Transformationsmatrix → Gl. (4.2a)

Wie bereits in Abschnitt 3.2.1 angesprochen, kann ein starrer Körper stets durch eine einzige Drehung um eine Achse (normierter Richtungsvektor  $\underline{u}$ , Drehwinkel  $\beta$ ) von einer Ausgangsorientierung in eine beliebige andere Orientierung überführt werden. Der Achsvektor  $\underline{u}$  und der Winkel  $\beta$  werden auch als "natürliche Invarianten" der Drehung bezeichnet, da sie (im Gegensatz zu den Euler- oder Kardanwinkeln) unabhängig von gewählten Koordinatensystemen sind. Die im Ausgangssystem  $K_0$  und im körperfesten System  $K_1$  gleichen Koordinaten von  $\underline{u}$  und der Winkel  $\beta$  können nun als  $m=4$  Koordinaten der Drehbewegung gewählt werden:

$$\underline{\gamma} = [{}^0u_x, {}^0u_y, {}^0u_z, \beta]^T = [{}^0\underline{u}^T, \beta]^T \quad (= [{}^1\underline{u}^T, \beta]^T) \quad (4.13)$$

Die  $m-3=1$  Nebenbedingung lautet: → Gl. (4.5)

$$\Phi(\underline{\gamma}) = 0: \quad {}^0\underline{u}^T {}^0\underline{u} - 1 = 0. \quad (4.14)$$



Die Herleitung des Drehtensors  ${}^0\underline{R}(\underline{u}, \beta) = {}^0\underline{I}(\underline{u}, \beta)$  kann auf zwei Arten erfolgen:

#### a) Geometrische Herleitung

Der gedrehte Vektor  $\underline{\rho}$  (Betrag  $\rho$ ) wird durch eine Linearkombination der drei paarweise senkrecht aufeinanderstehenden Einheitsvektoren  $\underline{f}_1, \underline{f}_2$  und  $\underline{f}_3$  dargestellt:

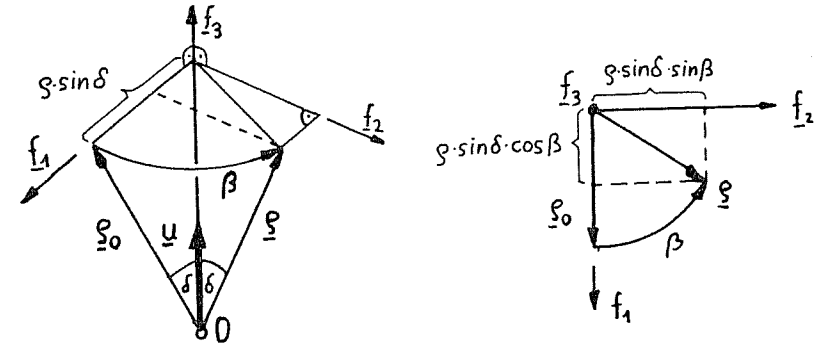
$$\underline{\rho} = c_1 \underline{f}_1 + c_2 \underline{f}_2 + c_3 \underline{f}_3$$

$$\text{mit } \underline{f}_1 = \frac{\underline{\rho}_0 - (\underline{u}^T \underline{\rho}_0) \underline{u}}{\rho \sin \delta}, \quad \underline{f}_2 = \frac{\underline{u} \times \underline{\rho}_0}{\rho \sin \delta}, \quad \underline{f}_3 = \underline{u},$$

$$c_1 = \rho \sin \delta \cos \beta, \quad c_2 = \rho \sin \delta \sin \beta, \quad c_3 = \underline{u}^T \underline{\rho}_0.$$

Die Auswertung im System  $K_0$  liefert (Koordinatenindex 0 weggelassen):

$$\begin{aligned} \underline{\rho} &= \cos \beta \underline{\rho}_0 + \sin \beta \underline{u} \times \underline{\rho}_0 + (1 - \cos \beta) (\underline{u}^T \underline{\rho}_0) \underline{u} \\ \Rightarrow \underline{\rho} &= (\cos \beta \underline{I} + \sin \beta \underline{\tilde{u}} + (1 - \cos \beta) \underline{u} \underline{u}^T) \underline{\rho}_0 = \underline{R}(\underline{u}, \beta) \underline{\rho}_0. \end{aligned} \quad (4.15)$$



Damit lautet der Drehtensor im System  $K_0$ , vgl. Gl. (3.12):

$$\underline{R}(\underline{u}, \beta) = \cos \beta \underline{I} + \sin \beta \underline{\tilde{u}} + (1 - \cos \beta) \underline{u} \underline{u}^T = {}^0\underline{I}(\underline{u}, \beta), \quad (4.16a)$$

bzw. ausgeschrieben (Abkürzungen "s"=sin, "c"=cos)

$$\underline{R}(\underline{u}, \beta) = {}^0\underline{I} = \begin{bmatrix} c\beta + (1-c\beta)u_x^2 & (1-c\beta)u_xu_y - s\beta u_z & (1-c\beta)u_xu_z + s\beta u_y \\ (1-c\beta)u_xu_y + s\beta u_z & c\beta + (1-c\beta)u_y^2 & (1-c\beta)u_yu_z - s\beta u_x \\ (1-c\beta)u_xu_z - s\beta u_y & (1-c\beta)u_yu_z + s\beta u_x & c\beta + (1-c\beta)u_z^2 \end{bmatrix}. \quad (4.16b)$$

Die Betrachtung der umgekehrten Drehung

$$\underline{\rho}_0 = \underline{R}^{-1}(\underline{u}, \beta) \underline{\rho} \quad (\text{bzw. } {}^1\underline{\rho} = {}^0\underline{I}^{-1}(\underline{u}, \beta) {}^0\underline{\rho})$$

bestätigt die Orthogonalität des Drehtensors:

$$\underline{R}^{-1}(\underline{u}, \beta) = \underline{R}(\underline{u}, -\beta) = \underline{R}(-\underline{u}, \beta) = \underline{R}^T(\underline{u}, \beta). \quad (4.17)$$

Ferner läßt sich die Invarianz der Drehachse bezüglich der Drehung, also

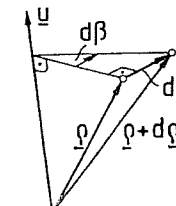
$$\underline{u} = \underline{R}(\underline{u}, \beta) \underline{u} \quad (\text{bzw. } {}^0\underline{u} = {}^0\underline{I}(\underline{u}, \beta) {}^1\underline{u}), \quad (4.18)$$

durch Einsetzen einfach verifizieren.

#### b) Analytische Herleitung

Die endliche Drehung  $\underline{\rho}(\underline{u}, \beta) = \underline{R}(\underline{u}, \beta) \underline{\rho}_0$  läßt sich auch durch die Integration einer Differentialgleichung herleiten. Wird die Achsrichtung  $\underline{u}$  in  $K_0$  als fest angesehen, so erfährt ein Vektor  $\underline{\rho}$  bei einer Drehung um diese Achse mit dem Drehwinkel  $d\beta$  in erster Näherung die Änderung ("infinitesimale Drehung" von  $\underline{\rho}$ )

$$d\underline{\rho} = \underline{u} \times \underline{\rho} d\beta \quad \text{bzw.} \quad d\underline{\rho} = \underline{\tilde{u}} \underline{\rho} d\beta.$$



Daraus folgt eine Vektordifferentialgleichung für die Funktion  $\underline{\rho}(\beta)$ :

$$\frac{d\underline{\rho}}{d\beta} = \tilde{\underline{u}} \underline{\rho} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{d\beta} \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Mit der Anfangsbedingung  $\underline{\rho}(\beta=0) = \underline{\rho}_0$  lautet die Lösung dieses homogenen linearen Differentialgleichungssystems:

$$\underline{\rho}(\beta) = e^{\tilde{\underline{u}}\beta} \underline{\rho}_0.$$

Die Fundamentalmatrix  $e^{\tilde{\underline{u}}\beta}$  läßt sich durch eine endliche Potenzreihe ausdrücken:

$$e^{\tilde{\underline{u}}\beta} = c_0 \underline{I} + c_1 \tilde{\underline{u}} + c_2 \tilde{\underline{u}}^2. \quad (4.20)$$

Nach dem Satz von CAYLEY und HAMILTON gilt diese Beziehung auch, wenn man die "Systemmatrix"  $\tilde{\underline{u}}$  durch ihre Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$$

ersetzt. Dies liefert drei Gleichungen der Form

$$e^{0\beta} = c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0^2,$$

$$e^{i\beta} = c_0 + c_1 i + c_2 i^2,$$

$$e^{-i\beta} = c_0 + c_1(-i) + c_2(-i)^2.$$

Daraus ergeben sich die Koeffizienten

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \sin\beta, \quad c_2 = 1 - \cos\beta.$$

Eingesetzt in Gl. (4.20) erhält man wieder den Drehtensor entsprechend Gl. (4.16):

$$\begin{aligned} e^{\tilde{\underline{u}}\beta} &= \underline{R}(\underline{u}, \beta) = \underline{I} + \sin\beta \tilde{\underline{u}} + (1 - \cos\beta) \tilde{\underline{u}} \tilde{\underline{u}} = \\ &= \cos\beta \underline{I} + \sin\beta \tilde{\underline{u}} + (1 - \cos\beta) \underline{u} \underline{u}^T \end{aligned} \quad (4.21)$$

Bei der letzten Umformung wurde die Beziehung  $\tilde{\underline{u}} \tilde{\underline{u}} = \underline{u} \underline{u}^T - \underline{I}$  berücksichtigt, die aus  $\tilde{\underline{u}} \tilde{\underline{u}} \underline{\rho} = \underline{u} \times (\underline{u} \times \underline{\rho}) = \underline{u} (\underline{u}^T \underline{\rho}) - \underline{\rho} (\underline{u}^T \underline{u}) = (\underline{u} \underline{u}^T - \underline{I}) \underline{\rho}$  folgt.

#### 4.2.2 Bestimmung des Drehzeigers aus dem Drehtensor $\rightarrow$ Gl. (4.2b)

Für die Bestimmung des Drehzeigers  $\underline{\gamma} = [{}^0\underline{u}, \beta]$  aus einem gegebenen Drehtensor  ${}^0\underline{R} = {}^{01}\underline{T} = (T_{ij})$  wird eine Berechnungsvorschrift angegeben, die alle Sonderfälle berücksichtigt und numerisch am günstigsten ist. Zunächst werden ausgehend von Gl. (4.16) alle zur Verfügung stehenden Gleichungen zusammengestellt.

##### a) Gleichungen aus den Hauptdiagonalelementen von ${}^{01}\underline{T} = (T_{ij})$

- Summe der Hauptdiagonalelemente (Spur):

$$\text{sp}({}^{01}\underline{T}) = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \cos\beta (1+1+1) + (1 - \cos\beta) \frac{(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)}{1} = 2\cos\beta + 1$$

$$\rightarrow \cos\beta = \frac{1}{2} (T_{11} + T_{22} + T_{33} - 1) \quad (i)$$

$$\rightarrow \sin\beta = \pm \sqrt{1 - \cos^2\beta} \quad (ii.1)$$

- einzelne Hauptdiagonalelemente:

$$T_{11} = \cos\beta + (1 - \cos\beta) u_x^2 \rightarrow u_x = \pm \sqrt{\frac{T_{11} - \cos\beta}{1 - \cos\beta}}, \quad (ii.2)$$

$$T_{22} = \cos\beta + (1 - \cos\beta) u_y^2 \rightarrow u_y = \pm \sqrt{\frac{T_{22} - \cos\beta}{1 - \cos\beta}}, \quad (ii.3)$$

$$T_{33} = \cos\beta + (1 - \cos\beta) u_z^2 \rightarrow u_z = \pm \sqrt{\frac{T_{33} - \cos\beta}{1 - \cos\beta}}. \quad (ii.4)$$

##### b) Gleichungen aus den Nebendiagonalelementen von ${}^{01}\underline{T} = (T_{ij})$

- schiefsymmetrische Nebendiagonalelemente:

$$2u_x \sin\beta = T_{32} - T_{23}, \quad (iii.1)$$

$$2u_y \sin\beta = T_{13} - T_{31}, \quad (iii.2)$$

$$2u_z \sin\beta = T_{21} - T_{12}. \quad (iii.3)$$

- symmetrische Nebendiagonalelemente:

$$2(1 - \cos\beta) u_y u_z = T_{32} + T_{23}, \quad (iii.4)$$

$$2(1 - \cos\beta) u_x u_z = T_{13} + T_{31}, \quad (iii.5)$$

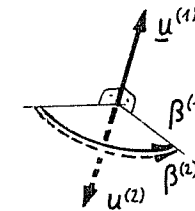
$$2(1 - \cos\beta) u_x u_y = T_{21} + T_{12}. \quad (iii.6)$$

Die Berechnungsvorschrift ist:

1. Auswertung von Gl. (i) liefert  $\cos\beta$ .
2. Mit einer der vier Gln. (ii) wird eine nichtverschwindende Größe  $\sin\beta, u_x, u_y$  oder  $u_z$  bestimmt, wobei das Vorzeichen beliebig gewählt wird. Im Hinblick auf die Genauigkeit des folgenden Berechnungsschritts ist es zweckmäßig, aus diesen vier Größen die betragsgrößte auszuwählen.
3. Aus drei der sechs Gln. (iii) können die drei fehlenden Größen eindeutig bestimmt werden, wobei durch die in Schritt 2 ausgewählte Größe dividiert wird.
4. Mit  $\cos\beta$  und  $\sin\beta$  liegt  $\beta$  in einem  $2\pi$ -Bereich, z.B.  $-\pi \leq \beta \leq \pi$ , eindeutig fest.

##### Bemerkungen:

- Bei der Auswahl des Vorzeichens in Schritt 2 wird einer von zwei Drehzeigern ausgewählt, welche dieselbe Drehung beschreiben:



Lösung 1:  $\underline{u}^{(1)}$   
 $\beta^{(1)}$

Lösung 2:  $\underline{u}^{(2)} = -\underline{u}^{(1)}$   
 $\beta^{(2)} = -\beta^{(1)}$

- Im Fall  $\beta = 0$  ( $\rightarrow \cos\beta = 1$ ) versagen die Gln. (ii.2) - (ii.4):  $\underline{u}$  ist nicht definiert.
- Falls  $\beta$  den  $2\pi$ -Bereich aus Schritt 4 verläßt, tritt im Verlauf von  $\beta$  ein Sprung von  $2\pi$  auf, der bei der Integration zusätzliche Maßnahmen erfordert.

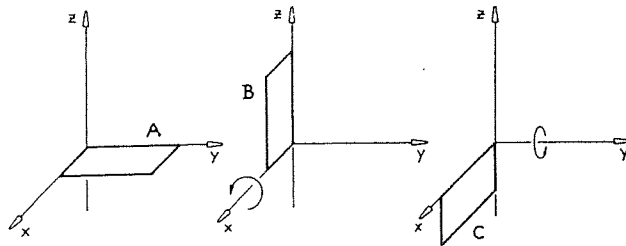
### 4.2.3 Beschreibung mehrfacher Drehungen

Bei der Hintereinanderschaltung endlicher Drehungen ist zunächst zu beachten, daß endliche Drehungen nichtkommutativ sind, d.h. an eine festgelegte Reihenfolge gebunden sind.

Beispiel:

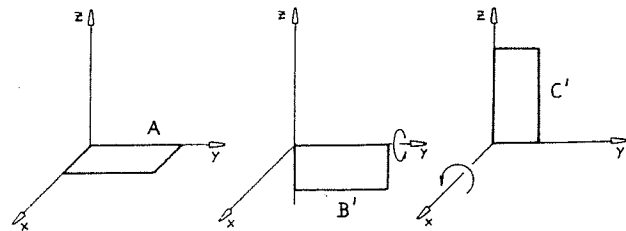
1. Drehungsfolge: 90°-Drehung um x-Achse, anschließend 90°-Drehung um y-Achse

$A \rightarrow B \rightarrow C$



2. Drehungsfolge: 90°-Drehung um y-Achse, anschließend 90°-Drehung um x-Achse

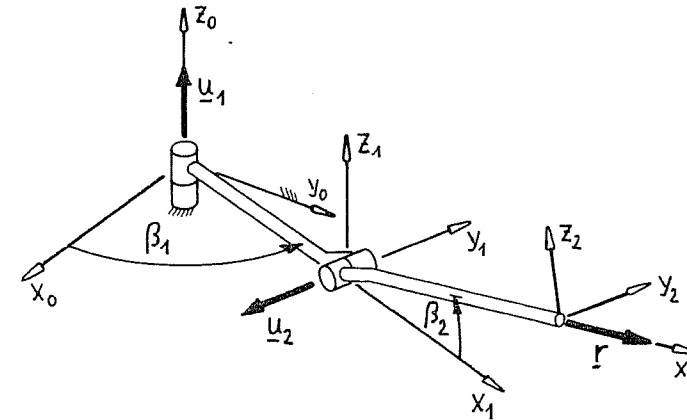
$A \rightarrow B' \rightarrow C'$



Ausgehend von einer gegebenen Ausgangslage führen dieselben Teildrehungen in unterschiedlicher Reihenfolge zu unterschiedlichen Endlagen. Nur bei infinitesimalen Drehungen sind die Teildrehungen kommutativ.

Die Darstellung mehrfacher Drehungen wird nun anhand eines "Zweiarmroboters" gezeigt. Der Endeffektor ist über zwei Drehgelenke (Drehwinkel  $\beta_1$  und  $\beta_2$ ) mit dem Grundgestell verbunden.

Zunächst werden die Einzeldrehungen jeweils für sich entsprechend Abschnitt 4.2.1 betrachtet. Hierbei wird die Betrachtungsweise als Koordinatentransformation gewählt, die bei der anschließenden Hintereinanderschaltung der Drehungen übersichtlicher ist.



a) Teildrehung ( $\underline{u}_1, \beta_1$ ): Ausgangssystem  $K_0 \rightarrow$  gedrehtes System  $K_1$

$${}^0\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(4.16)} {}^{01}\underline{T}(\underline{u}_1, \beta_1) = \begin{bmatrix} \cos\beta_1 & -\sin\beta_1 & 0 \\ \sin\beta_1 & \cos\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Transformation der Koordinaten eines beliebigen Vektors  $\underline{r}$ :

$${}^0\underline{r} = {}^{01}\underline{T}(\underline{u}_1, \beta_1) {}^1\underline{r}. \quad (4.22)$$

b) Teildrehung ( $\underline{u}_2, \beta_2$ ): Ausgangssystem  $K_1 \rightarrow$  gedrehtes System  $K_2$

$${}^1\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(4.16)} {}^{12}\underline{T}(\underline{u}_2, \beta_2) = \begin{bmatrix} \cos\beta_2 & 0 & -\sin\beta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta_2 & 0 & \cos\beta_2 \end{bmatrix}$$

Transformation der Koordinaten eines beliebigen Vektors  $\underline{r}$ :

$${}^1\underline{r} = {}^{12}\underline{T}(\underline{u}_2, \beta_2) {}^2\underline{r}. \quad (4.23)$$

c) Gesamtdrehung: Ausgangssystem  $K_0 \rightarrow$  gedrehtes System  $K_2$

Einsetzen von Gl. (4.23) in (4.22):

$${}^0\underline{r} = {}^{01}\underline{T}(\underline{u}_1, \beta_1) {}^{12}\underline{T}(\underline{u}_2, \beta_2) {}^2\underline{r} = {}^{02}\underline{T} {}^2\underline{r}. \quad (4.24)$$

Für den dargestellten endeffektorfesten Vektor  $\underline{r}$  (Länge  $r$ ) gilt beispielsweise:

$${}^0\underline{r}(\beta_1, \beta_2) = {}^{01}\underline{T}(\underline{u}_1, \beta_1) {}^{12}\underline{T}(\underline{u}_2, \beta_2) {}^2\underline{r} \\ \begin{bmatrix} r \cos\beta_1 \cos\beta_2 \\ r \sin\beta_1 \cos\beta_2 \\ r \sin\beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta_1 & -\sin\beta_1 & 0 \\ \sin\beta_1 & \cos\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta_2 & 0 & -\sin\beta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta_2 & 0 & \cos\beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

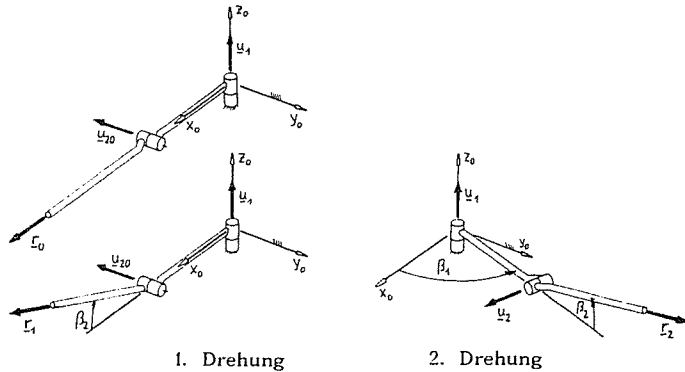


### Interpretation von Gl. (4.25) als Vektordrehung

Auch wenn die Interpretation mehrfacher Drehungen als Koordinatentransformationen übersichtlicher ist und deswegen in den späteren Abschnitten fast ausschließlich verwendet wird, soll im folgenden die zweifache Drehung (4.25) als Vektordrehung betrachtet werden.

Die zweifache Drehung des Vektors  $\underline{r}$  von seiner Ausgangslage  $\underline{r}_0$  bei  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  in die Endlage  $\underline{r}_2 = \underline{r}(\beta_1, \beta_2)$  wird mit Hilfe von Drehtensoren beschrieben. Alle Vektorbeziehungen werden in Koordinaten von  $K_0$  dargestellt. Es sind zwei Reihenfolgen der Einzeldrehungen möglich, die beide dieselbe Endlage von  $\underline{r}$  liefern:

#### I Teildrehungen um "Ausgangsachsen"



a) 1. Drehung um die Achse  $\underline{u}_2(\beta_1=0) = \underline{u}_{20}$ :  $\underline{r}_1 = \underline{R}(\underline{u}_{20}, \beta_2) \underline{r}_0$

$$\underline{u}_{20} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{R}(\underline{u}_{20}, \beta_2) = \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & 0 & -\sin \beta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta_2 & 0 & \cos \beta_2 \end{bmatrix}$$

b) 2. Drehung um die Achse  $\underline{u}_1 = \underline{u}_{10}$ :  $\underline{r}_2 = \underline{R}(\underline{u}_1, \beta_1) \underline{r}_1$

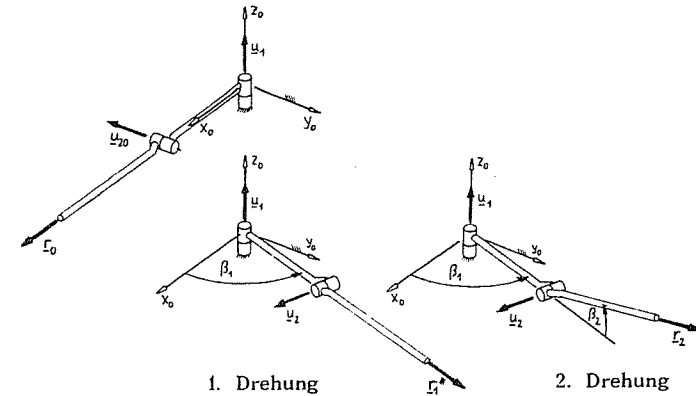
$$\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{R}(\underline{u}_1, \beta_1) = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 & 0 \\ \sin \beta_1 & \cos \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Gesamtdrehung: vgl. Gl. (4.25)

$$\underline{r}_2(\beta_1, \beta_2) = \underline{R}(\underline{u}_1, \beta_1) \underline{R}(\underline{u}_{20}, \beta_2) \underline{r}_0$$

$$\begin{bmatrix} r \cos \beta_1 \cos \beta_2 \\ r \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ r \sin \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 & 0 \\ \sin \beta_1 & \cos \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & 0 & -\sin \beta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta_2 & 0 & \cos \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

#### II Teildrehungen um "mitgedrehte Achsen"



a) 1. Drehung um die Achse  $\underline{u}_{10} = \underline{u}_1$ :  $\underline{r}_1^* = \underline{R}(\underline{u}_1, \beta_1) \underline{r}_0$

$$\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{R}(\underline{u}_1, \beta_1) = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 & 0 \\ \sin \beta_1 & \cos \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Andere Zwischenlage  $\underline{r}_1^*$  als bei der ersten Drehungsfolge!

b) 2. Drehung um die gedrehte Achse  $\underline{u}_2$ :  $\underline{r}_2 = \underline{R}(\underline{u}_2, \beta_2) \underline{r}_1^*$

$$\underline{u}_2(\beta_1) = \underline{R}(\underline{u}_1, \beta_1) \underline{u}_{20} = \begin{bmatrix} \sin \beta_1 \\ -\cos \beta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{R}(\underline{u}_2, \beta_2) = \begin{bmatrix} c\beta_2 + (1-c\beta_2)s^2\beta_1 & -(1-c\beta_2)s\beta_1c\beta_1 & -c\beta_1s\beta_2 \\ -(1-c\beta_2)s\beta_1c\beta_1 & c\beta_2 + (1-c\beta_2)c^2\beta_1 & -s\beta_1s\beta_2 \\ c\beta_1s\beta_2 & s\beta_1s\beta_2 & c\beta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Abkürzungen: "s"=sin, "c"=cos})$$

c) Gesamtdrehung: vgl. Gl. (4.25)

$$\underline{r}_2(\beta_1, \beta_2) = \underline{R}(\underline{u}_2, \beta_2) \underline{R}(\underline{u}_1, \beta_1) \underline{r}_0$$

$$\begin{bmatrix} r \cos \beta_1 \cos \beta_2 \\ r \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ r \sin \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\beta_2 + (1-c\beta_2)s^2\beta_1 & -(1-c\beta_2)s\beta_1c\beta_1 & -c\beta_1s\beta_2 \\ -(1-c\beta_2)s\beta_1c\beta_1 & c\beta_2 + (1-c\beta_2)c^2\beta_1 & -s\beta_1s\beta_2 \\ c\beta_1s\beta_2 & s\beta_1s\beta_2 & c\beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta_1 & -s\beta_1 & 0 \\ s\beta_1 & c\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aus

$$(\underline{r}_2(\beta_1, \beta_2) =) \underline{R}(\underline{u}_2, \beta_2) \underline{R}(\underline{u}_1, \beta_1) \underline{r}_0 = \underline{R}(\underline{u}_1, \beta_1) \underline{R}(\underline{u}_{20}, \beta_2) \underline{r}_0$$

folgt der Zusammenhang zwischen den Drehtensoren  $\underline{R}(\underline{u}_2, \beta_2)$  und  $\underline{R}(\underline{u}_{20}, \beta_2)$ :

$$\underline{R}(\underline{u}_2, \beta_2) = \underline{R}(\underline{u}_1, \beta_1) \underline{R}(\underline{u}_{20}, \beta_2) \underline{R}^T(\underline{u}_1, \beta_1)$$

#### 4.2.4 Winkelgeschwindigkeit und Drehzeiger → Gl. (4.3)

##### a) Koordinaten von $\underline{\omega}$ im Ausgangssystem $K_0$

Der Zusammenhang zwischen Drehtensor und Winkelgeschwindigkeit ist nach Gl. (3.18):

$${}^0\tilde{\underline{\omega}}(t) = {}^0\dot{\underline{R}}(t) {}^0\underline{R}^T(t) = {}^0\dot{\underline{I}}(t) {}^0\underline{I}^T(t) \quad (4.26)$$

Die Auswertung von Gl. (4.26) unter Verwendung von Gl. (4.16) ist aufwendig. Eine Herleitung über die EULER-Parameter wird in Abschnitt 4.6.3 angegeben. Das Ergebnis ist (Koordinatenindex bei  $\underline{u}$  weggelassen):

$${}^0\tilde{\underline{\omega}} = \dot{\beta}\underline{u} + \sin\beta\dot{\underline{u}} + (1-\cos\beta)\underline{u} \times \dot{\underline{u}} = \begin{bmatrix} \sin\beta \underline{1} + (1-\cos\beta)\tilde{\underline{u}} & \underline{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{u}} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$\underline{H}_0(\underline{\gamma}) \quad \dot{\underline{\gamma}}$

Die Winkelgeschwindigkeit hängt damit nicht nur von der zeitlichen Änderung  $\dot{\beta}$  des Drehwinkels, sondern auch von der zeitlichen Änderung  $\dot{\underline{u}}$  der Drehachse ab. Nur im Fall einer in  $K_0$  (und damit auch in  $K_1$ ) festen Drehachse  $\underline{u}$  gilt die einfache Beziehung

$${}^0\tilde{\underline{\omega}} = \dot{\beta}\underline{u}$$

Die Auflösung von Gl. (4.27) nach  $\dot{\underline{\gamma}}$  ergibt (Herleitung in Abschnitt 4.6.3):

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{u}} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin\beta}{(1-\cos\beta)} (\underline{1} - \underline{u}\underline{u}^T) - \tilde{\underline{u}} \right] \\ \underline{u}^T \end{bmatrix} {}^0\tilde{\underline{\omega}} \quad (4.28)$$

$\dot{\underline{\gamma}} = \underline{K}_0(\underline{\gamma}) {}^0\tilde{\underline{\omega}}$

Für  $\beta = 0$  ist die Auflösung nach  $\dot{\underline{\gamma}}$  nicht möglich.

##### b) Koordinaten von $\underline{\omega}$ im körperfesten System $K_1$

Die entsprechenden Beziehungen für  ${}^1\tilde{\underline{\omega}}$  lauten (vgl. Abschnitt 4.6.3):

$${}^1\tilde{\underline{\omega}} = \dot{\beta}\underline{u} + \sin\beta\dot{\underline{u}} - (1-\cos\beta)\underline{u} \times \dot{\underline{u}} = \begin{bmatrix} \sin\beta \underline{1} - (1-\cos\beta)\tilde{\underline{u}} & \underline{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{u}} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$\underline{H}_1(\underline{\gamma}) \quad \dot{\underline{\gamma}}$

und

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{u}} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin\beta}{(1-\cos\beta)} (\underline{1} - \underline{u}\underline{u}^T) + \tilde{\underline{u}} \right] \\ \underline{u}^T \end{bmatrix} {}^1\tilde{\underline{\omega}} \quad (4.30)$$

$\dot{\underline{\gamma}} = \underline{K}_1(\underline{\gamma}) {}^1\tilde{\underline{\omega}}$

#### 4.3 EULER-Winkel

Ausgehend von den Überlegungen von Abschnitt 4.2.3 kann eine räumliche Drehung auch mit Hilfe der Drehwinkel von drei aufeinanderfolgenden Einzeldrehungen um drei verschiedene Achsen beschrieben werden, wobei neben den Drehachsen die Reihenfolge der Einzeldrehungen festzulegen ist. Zur Vereinfachung der Beziehungen führt man die Einzeldrehungen als "Elementardrehungen" um die Koordinatenachsen ein. Zweckmäßig ist hierbei die Veranschaulichung durch eine gedachte kinematische Kette mit drei Drehgelenken. Unter den zahlreichen Möglichkeiten zur Definition derartiger Drehungsfolgen werden am häufigsten die EULER- und die KARDAN-Winkel gewählt. Die Definitionen hierfür sind in der Literatur jedoch nicht einheitlich.

Die  $m=3$  EULER-Winkel  $\underline{\gamma} = [\psi, \Theta, \Phi]^T$  sind dadurch gekennzeichnet, daß die erste und die dritte Drehung um dieselbe Achse erfolgen.

##### 4.3.1 EULER-Winkel und Transformationsmatrix → Gl. (4.2a)

Beschreibt man die Einzeldrehungen mit Hilfe von Transformationsmatrizen, so lautet die Transformation der Koordinaten eines beliebigen Vektors  $\underline{r}$  vom gedrehten körperfesten System  $K_3$  in das Ausgangssystem  $K_0$ :

$$\begin{aligned} {}^0\underline{r} &= {}^{03}\underline{T}(\psi, \Theta, \Phi) {}^3\underline{r} \\ {}^0\underline{r} &= {}^{01}\underline{T}(\psi) {}^{12}\underline{T}(\Theta) {}^{23}\underline{T}(\Phi) {}^3\underline{r} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} {}^0r_x \\ {}^0r_y \\ {}^0r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Phi & -\sin\Phi & 0 \\ \sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^3r_x \\ {}^3r_y \\ {}^3r_z \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

mit

$${}^{03}\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\Theta - \sin\psi\cos\Theta\sin\Phi & -\cos\psi\sin\Theta - \sin\psi\cos\Theta\cos\Phi & \sin\psi\sin\Theta \\ \sin\psi\cos\Theta + \cos\psi\cos\Theta\sin\Phi & -\sin\psi\sin\Theta + \cos\psi\cos\Theta\cos\Phi & -\cos\psi\sin\Theta \\ \sin\Theta\sin\Phi & \sin\Theta\cos\Phi & \cos\Theta \end{bmatrix} = {}^{30}\underline{T}^T \quad (4.32)$$

Aus einer vorliegenden Transformationsmatrix  ${}^{03}\underline{T} = (T_{ij})$  können die EULER-Winkel wie folgt bestimmt werden: → Gl. (4.2b)

$$\left. \begin{aligned} \cos\Theta &= T_{33} \\ \sin\Theta &= \pm \sqrt{1 - T_{33}^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \Theta \text{ (2 Lösungen!)} \quad \text{Bemerkungen:}$$

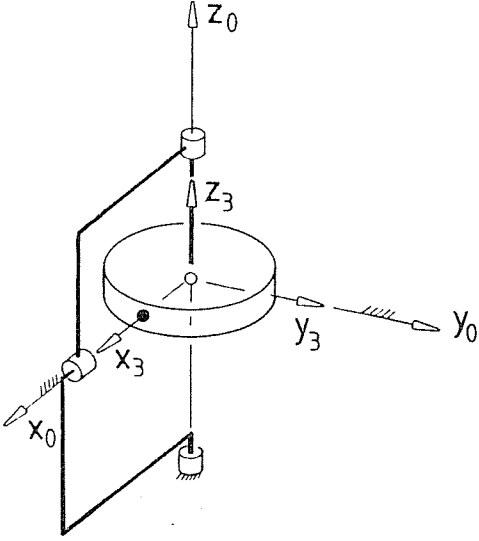
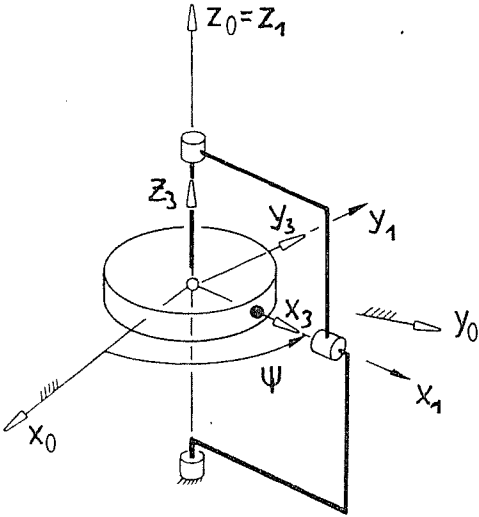
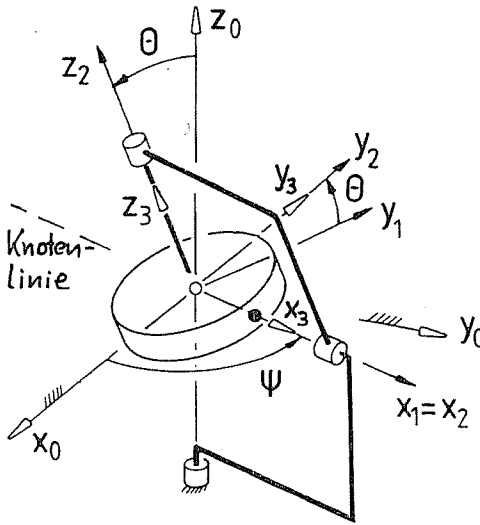
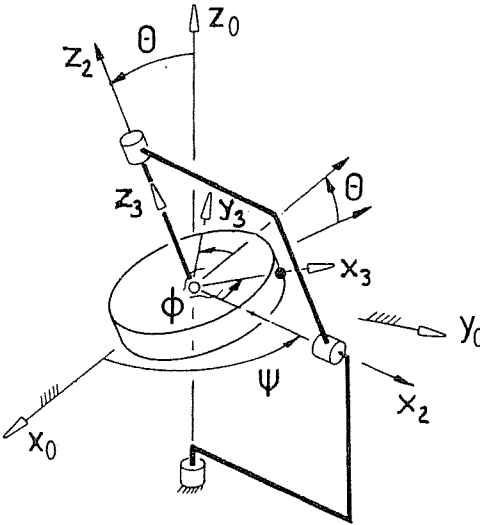
- Die beiden Lösungen entsprechen den beiden Konfigurationen der kinematischen Kette bei gegebener Lage von  $K_3$ .

$$\left. \begin{aligned} \cos\Phi &= \frac{T_{32}}{\sin\Theta} \\ \sin\Phi &= \frac{T_{31}}{\sin\Theta} \end{aligned} \right\} \rightarrow \Phi$$

$$\left. \begin{aligned} \cos\psi &= -\frac{T_{23}}{\sin\Theta} \\ \sin\psi &= \frac{T_{13}}{\sin\Theta} \end{aligned} \right\} \rightarrow \psi$$

- Für  $\Theta=0, \pm\pi$  sind  $\Phi$  und  $\psi$  nicht definiert

Drehungsfolge für EULER-Winkel

<p>Ausgangslage:  <math>(x,y,z)_0 = (x,y,z)_3</math></p>	<p>1. Drehung:  Winkel <math>\psi</math> um <math>z_3 (=z_0)</math>-Achse</p>	<p>2. Drehung:  Winkel <math>\theta</math> um <math>x_3 (=x_1)</math>-Achse</p>	<p>3. Drehung:  Winkel <math>\phi</math> um <math>z_3 (=z_2)</math>-Achse</p>
			
<p>Beschreibung mit  Transformationsmatrizen</p>	${}^{01}\underline{T}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	${}^{12}\underline{T}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$	${}^{23}\underline{T}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
<p>Transformation der  Koordinaten  eines beliebigen Vektors <math>\underline{r}</math></p>	${}^0\underline{r} = {}^{01}\underline{T}(\psi) {}^1\underline{r}$	${}^1\underline{r} = {}^{12}\underline{T}(\theta) {}^2\underline{r}$	${}^2\underline{r} = {}^{23}\underline{T}(\phi) {}^3\underline{r}$

### 4.3.2 Darstellung der Winkelgeschwindigkeit → Gl. (4.3)

Die Winkelgeschwindigkeit des Systems  $K_3$  relativ zu  $K_0$  ergibt sich aus der vektoriellen Summe der Teilwinkelgeschwindigkeiten:

$$\underline{\omega} = \dot{\psi} \underline{e}_{z0} + \dot{\Theta} \underline{e}_{x1} + \dot{\Phi} \underline{e}_{z2}$$

Diese Vektorgleichung wird in Koordinaten von  $K_0$  und  $K_3$  ausgewertet.

#### a) Koordinaten von $\underline{\omega}$ im Ausgangssystem $K_0$

$$\begin{aligned} {}^0\underline{\omega} &= \dot{\psi} {}^0\underline{e}_{z0} + \dot{\Theta} {}^0\underline{e}_{x1} + \dot{\Phi} {}^0\underline{e}_{z2} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} {}^0\omega_x \\ {}^0\omega_y \\ {}^0\omega_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \cos\psi & \sin\psi \sin\Theta \\ 0 & \sin\psi & -\cos\psi \sin\Theta \\ 1 & 0 & \cos\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix}, \\ {}^0\underline{\omega} &= \underline{H}_0(\underline{\gamma}) \underline{\dot{\gamma}}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Aufgelöst nach  $\underline{\dot{\gamma}}$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sin\Theta} \begin{bmatrix} -\sin\psi \cos\Theta & \cos\psi \cos\Theta & \sin\Theta \\ \cos\psi \sin\Theta & \sin\psi \sin\Theta & 0 \\ \sin\psi & -\cos\psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0\omega_x \\ {}^0\omega_y \\ {}^0\omega_z \end{bmatrix}, \\ \underline{\dot{\gamma}} &= \underline{K}_0(\underline{\gamma}) {}^0\underline{\omega}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Für  $\Theta = 0, \pm\pi$  ist die Auflösung nach  $\underline{\dot{\gamma}}$  nicht möglich ("Singularität" der EULER-Winkel).

#### b) Koordinaten von $\underline{\omega}$ im körperfesten System $K_3$

$$\begin{aligned} {}^3\underline{\omega} &= \dot{\psi} {}^3\underline{e}_{z0} + \dot{\Theta} {}^3\underline{e}_{x1} + \dot{\Phi} {}^3\underline{e}_{z2} = {}^{30}\underline{T} {}^0\underline{\omega} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} {}^3\omega_x \\ {}^3\omega_y \\ {}^3\omega_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sin\Phi \sin\Theta & \cos\Phi & 0 \\ \cos\Phi \sin\Theta & -\sin\Phi & 0 \\ \cos\Theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix}, \\ {}^3\underline{\omega} &= \underline{H}_3(\underline{\gamma}) \underline{\dot{\gamma}}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Aufgelöst nach  $\underline{\dot{\gamma}}$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sin\Theta} \begin{bmatrix} \sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ \cos\Phi \sin\Theta & -\sin\Phi \sin\Theta & 0 \\ -\sin\Phi \cos\Theta & -\cos\Phi \cos\Theta & \sin\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^3\omega_x \\ {}^3\omega_y \\ {}^3\omega_z \end{bmatrix}, \\ \underline{\dot{\gamma}} &= \underline{K}_3(\underline{\gamma}) {}^3\underline{\omega}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

### 4.4 KARDAN-Winkel

Die  $m = 3$  KARDAN-Winkel  $\underline{\gamma} = [\alpha, \beta, \gamma]^T$  sind dadurch gekennzeichnet, daß die erste und die dritte Drehung um dieselbe Achse erfolgen.

#### 4.4.1 KARDAN-Winkel und Transformationsmatrix → Gl. (4.2)

Die Transformation der Koordinaten eines beliebigen Vektors  $\underline{r}$  vom körperfesten System  $K_3$  in das Ausgangssystem  $K_0$  lautet:

$$\begin{aligned} {}^0\underline{r} &= {}^{03}\underline{T}(\alpha, \beta, \gamma) {}^3\underline{r} \\ {}^0\underline{r} &= {}^{01}\underline{T}(\alpha) {}^{12}\underline{T}(\beta) {}^{23}\underline{T}(\gamma) {}^3\underline{r} \\ \begin{bmatrix} {}^0r_x \\ {}^0r_y \\ {}^0r_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^3r_x \\ {}^3r_y \\ {}^3r_z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

mit

$${}^{03}\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos\beta \cos\gamma & -\cos\beta \sin\gamma & \sin\beta \\ \cos\alpha \sin\gamma + \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma & \cos\alpha \cos\gamma - \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma & -\sin\alpha \cos\beta \\ \sin\alpha \sin\gamma - \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma & \sin\alpha \cos\gamma + \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma & \cos\alpha \cos\beta \end{bmatrix} = ({}^{30}\underline{T})^T \quad (4.38)$$

Aus einer vorliegenden Transformationsmatrix  ${}^{03}\underline{T} = (T_{ij})$  können die KARDAN-Winkel wie folgt bestimmt werden:

$$\left. \begin{aligned} \cos\beta &= \pm \sqrt{1 - T_{13}^2} \\ \sin\beta &= T_{13} \end{aligned} \right\} \rightarrow \beta \text{ (2 Lösungen!)} \quad \text{Bemerkungen:}$$

- Die beiden Lösungen entsprechen den beiden Konfigurationen der kinematischen Kette bei gegebener Lage von  $K_3$ .

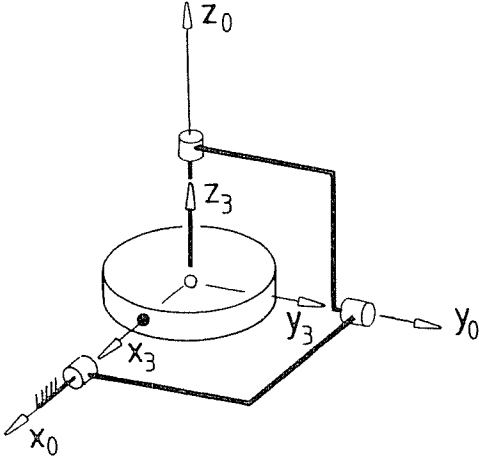
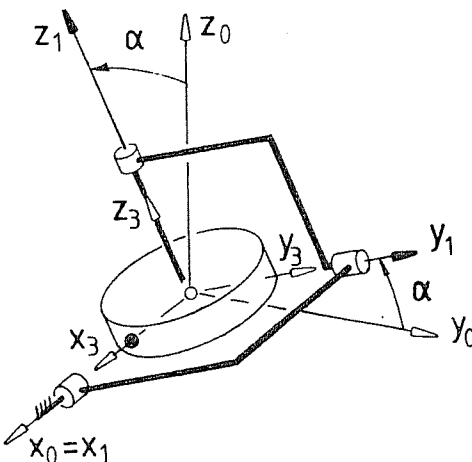
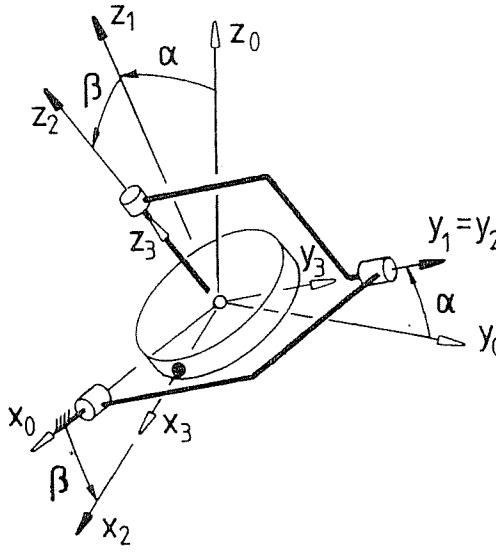
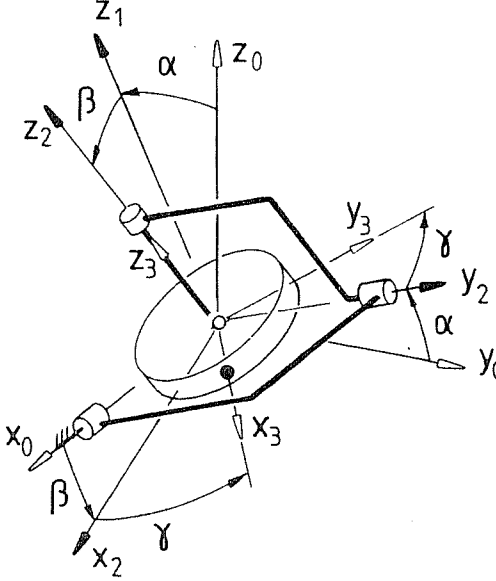
$$\left. \begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{T_{11}}{\cos\beta} \\ \sin\gamma &= -\frac{T_{12}}{\cos\beta} \end{aligned} \right\} \rightarrow \gamma$$

$$\left. \begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{T_{33}}{\cos\beta} \\ \sin\alpha &= -\frac{T_{23}}{\cos\beta} \end{aligned} \right\} \rightarrow \alpha$$

- Für  $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$  sind  $\alpha$  und  $\gamma$  nicht definiert

Für  $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$  ist die Auflösung nach  $\underline{\dot{\gamma}}$  nicht möglich ("Singularität" der KARDAN-Winkel).

Drehungsfolge für KARDAN-Winkel

<p>Ausgangslage:  <math>(x,y,z)_0 = (x,y,z)_3</math></p>	<p>1. Drehung:  Winkel <math>\alpha</math> um <math>x_3</math>-(<math>=x_0</math>)-Achse</p>	<p>2. Drehung:  Winkel <math>\beta</math> um <math>y_3</math>-(<math>=y_1</math>)-Achse</p>	<p>3. Drehung:  Winkel <math>\gamma</math> um <math>z_3</math>-(<math>=z_2</math>)-Achse</p>
			
<p>Beschreibung mit  Transformationsmatrizen</p>	${}^{01}\underline{T}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$	${}^{12}\underline{T}(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$	${}^{23}\underline{T}(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
<p>Transformation der  Koordinaten  eines beliebigen Vektors <math>\underline{r}</math></p>	${}^0\underline{r} = {}^{01}\underline{T}(\alpha) {}^1\underline{r}$	${}^1\underline{r} = {}^{12}\underline{T}(\beta) {}^2\underline{r}$	${}^2\underline{r} = {}^{23}\underline{T}(\gamma) {}^3\underline{r}$

#### 4.4.2 Darstellung der Winkelgeschwindigkeit → Gl. (4.3)

Die Winkelgeschwindigkeit des Systems  $K_3$  relativ zu  $K_0$  ergibt sich aus der vektoriellen Summe der Teilwinkelgeschwindigkeiten:

$$\underline{\omega} = \dot{\alpha} \underline{e}_{x0} + \dot{\beta} \underline{e}_{y1} + \dot{\gamma} \underline{e}_{z2}$$

Diese Vektorgleichung in Koordinaten von  $K_0$  und  $K_3$  ausgewertet.

##### a) Koordinaten von $\underline{\omega}$ im Ausgangssystem $K_0$

$$\begin{aligned} {}^0\underline{\omega} &= \dot{\alpha} {}^0\underline{e}_{x0} + \dot{\beta} {}^0\underline{e}_{y1} + \dot{\gamma} {}^0\underline{e}_{z2} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} {}^0\omega_x \\ {}^0\omega_y \\ {}^0\omega_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin\beta \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\cos\beta \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}, \\ {}^0\underline{\omega} &= \underline{H}_0(\underline{\gamma}) \underline{\dot{\gamma}}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Aufgelöst nach  $\underline{\gamma}$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\cos\beta} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta \\ 0 & \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\cos\beta \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0\omega_x \\ {}^0\omega_y \\ {}^0\omega_z \end{bmatrix}, \\ \underline{\dot{\gamma}} &= \underline{K}_0(\underline{\gamma}) {}^0\underline{\omega}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Für  $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$  ist die Auflösung nach  $\underline{\dot{\gamma}}$  nicht möglich ("Singularität" der KARDAN-Winkel).

##### b) Koordinaten von $\underline{\omega}$ im körperfesten System $K_3$

$$\begin{aligned} {}^3\underline{\omega} &= \dot{\alpha} {}^3\underline{e}_{x0} + \dot{\beta} {}^3\underline{e}_{y1} + \dot{\gamma} {}^3\underline{e}_{z2} = {}^{30}\underline{T} {}^0\underline{\omega} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} {}^3\omega_x \\ {}^3\omega_y \\ {}^3\omega_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\cos\beta\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ \sin\beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}, \\ {}^3\underline{\omega} &= \underline{H}_3(\underline{\gamma}) \underline{\dot{\gamma}}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Aufgelöst nach  $\underline{\gamma}$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\cos\beta} \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma & 0 \\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^3\omega_x \\ {}^3\omega_y \\ {}^3\omega_z \end{bmatrix}, \\ \underline{\dot{\gamma}} &= \underline{K}_3(\underline{\gamma}) {}^3\underline{\omega}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

#### 4.5 Quaternionen und EULER-Parameter

Die  $m = 4$  EULER-Parameter werden direkt aus dem Drehzeiger  $(\underline{u}, \beta)$  gebildet. Der Vorteil der EULER-Parameter gegenüber dem Drehzeiger sowie den EULER- oder KARDAN-Winkeln liegt darin, daß sie keine "Singularitäten" aufweisen und damit für beliebige Drehungen definiert sind. Eine vorteilhafte mathematische Formulierung der entsprechenden Beziehungen wird mit Hilfe der auf HAMILTON zurückgehenden Algebra der "Quaternionen" erreicht, die hier in vereinfachter Form kurz dargestellt wird.

##### 4.5.1 Algebra der Quaternionen

Eine Quaternion  $\underline{q}$  ist eine viergliedrige "hyperkomplexe" Zahl, die über eine reelle Einheit  $e_0$  und drei imaginäre Einheiten  $e_1, e_2$  und  $e_3$  wie folgt definiert ist:

$$\underline{q} = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3. \quad (4.43)$$

Man unterscheidet dabei den Realteil  $q_0$  und die drei Imaginärteile  $q_1, q_2$  und  $q_3$ . Für die Produkte der Einheiten gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} e_0 e_0 &= e_0 = 1, \\ e_i e_i &= -e_0 = -1, \quad i=1,2,3, \\ e_i e_0 &= e_0 e_i = e_i, \quad i=1,2,3, \\ e_i e_j &= -e_j e_i, \quad i,j=1,2,3 \text{ mit } i \neq j, \quad (\text{vgl. Vektorprodukt}) \\ e_i e_{i+1} &= e_{i+2}, \quad i=1,2,3 \text{ zyklisch.} \end{aligned} \quad (\text{vgl. "gewöhnliche" Imaginäreinheit } i)$$

Aus diesen Definitionen ergeben sich die folgenden Rechenregeln für Quaternionen:

##### a) Summe zweier Quaternionen

$$\begin{aligned} \underline{s} = \underline{q} + \underline{r} &= (q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3) + (r_0 e_0 + r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3) = \\ &= (q_0 + r_0) e_0 + (q_1 + r_1) e_1 + (q_2 + r_2) e_2 + (q_3 + r_3) e_3 = \\ &= s_0 e_0 + s_1 e_1 + s_2 e_2 + s_3 e_3. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Die Summe zweier Quaternionen ist kommutativ:  $\underline{s} = \underline{q} + \underline{r} = \underline{r} + \underline{q}$ .

##### b) Produkt zweier Quaternionen

$$\begin{aligned} \underline{s} = \underline{q} \underline{r} &= (q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3) (r_0 e_0 + r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3) = \\ &= (q_0 r_0 - q_1 r_1 - q_2 r_2 - q_3 r_3) e_0 + \\ &+ [q_0 r_1 + q_1 r_0 + (q_2 r_3 - q_3 r_2)] e_1 + \\ &+ [q_0 r_2 + q_2 r_0 + (q_3 r_1 - q_1 r_3)] e_2 + \\ &+ [q_0 r_3 + q_3 r_0 + (q_1 r_2 - q_2 r_1)] e_3 = \\ &= s_0 e_0 + s_1 e_1 + s_2 e_2 + s_3 e_3. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Für die weiteren Überlegungen ist es sinnvoll, den Realteil als "Skalarteil" und den die drei Imaginärteile als "Vektorteil" der Quaternion aufzufassen. Schreibt man formal

$$\left. \begin{aligned} \underline{q} &= q_0 + \underline{q} \\ \underline{r} &= r_0 + \underline{r} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} q_0 &= S(\underline{q}), r_0 = S(\underline{r}) && \text{"Skalarteile" von } \underline{q} \text{ bzw. } \underline{r}, \\ \underline{q} &= V(\underline{q}), \underline{r} = V(\underline{r}) && \text{"Vektorteile" von } \underline{q} \text{ bzw. } \underline{r}, \end{aligned}$$

so lautet das Produkt

$$\underline{s} = \underline{q} \underline{r} = (q_0 r_0 - \underline{q}^T \underline{r}) + (q_0 \underline{r} + \underline{q} r_0 + \underline{q} \times \underline{r}). \quad (4.46)$$

Wegen der Nichtkommutativität des Vektorprodukts, also  $\underline{q} \times \underline{r} = -\underline{r} \times \underline{q}$ , ist das Quaternionenprodukt ebenfalls nichtkommutativ:  $\underline{q} \underline{r} \neq \underline{r} \underline{q}$ .

Dagegen gilt: Assoziatives Gesetz:  $(\underline{q} \underline{r}) \underline{s} = \underline{q} (\underline{r} \underline{s}) = \underline{q} \underline{r} \underline{s}$ ,

Distributives Gesetz:  $\underline{q} (\underline{r} + \underline{s}) = \underline{q} \underline{r} + \underline{q} \underline{s}$ .

In manchen Fällen ist auch eine Matrizendarstellung des Produkts zweier Quaternionen zweckmäßig. Das Produkt  $\underline{s} = \underline{q} \underline{r}$  kann dabei auf zwei Arten dargestellt werden:

- Zweiter Faktor  $\underline{r}$  nach rechts herausgezogen:

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ \underline{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -\underline{q}^T \\ \underline{q} & q_0 \mathbf{1} + \underline{q} \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ \underline{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 r_0 - \underline{q}^T \underline{r} \\ q_0 \underline{r} + \underline{q} r_0 + \underline{q} \times \underline{r} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \text{Skalarteil} \\ \leftarrow \text{Vektorteil} \end{array} \right. \quad (4.47)$$

- Erster Faktor  $\underline{q}$  nach rechts herausgezogen:

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ \underline{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 & -\underline{r}^T \\ \underline{r} & r_0 \mathbf{1} - \underline{r} \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \underline{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 q_0 - \underline{r}^T \underline{q} \\ r_0 \underline{q} + q_0 \underline{r} - \underline{r} \times \underline{q} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \text{Skalarteil} \\ \leftarrow \text{Vektorteil} \end{array} \right. \quad (4.48)$$

Man kann ferner das "Quaternionenprodukt"  $\underline{s} = \underline{q} \underline{r}$  zweier Vektoren  $\underline{q}$  und  $\underline{r}$  einführen, indem man diese als Quaternionen mit verschwindendem Skalarteil auffaßt:

$$\underline{s} = \underline{q} \underline{r} = (0 + \underline{q})(0 + \underline{r}) = -\underline{q}^T \underline{r} + \underline{q} \times \underline{r}. \quad (4.49)$$

### c) Konjugierte Quaternion

Die zur Quaternion  $\underline{q} = q_0 + \underline{q}$  konjugierte Quaternion ist

$$\bar{\underline{q}} = q_0 - \underline{q}. \quad (4.50)$$

Für die Konjugierte eines Produktes gilt:

$$\overline{\underline{q} \underline{r}} = \bar{\underline{r}} \bar{\underline{q}}. \quad (4.51)$$

### d) Norm (Betrag) einer Quaternion

In Anlehnung an die Betragbildung gewöhnlicher komplexer Zahlen bildet man:

$$|\underline{q}|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = q_0^2 + \underline{q}^T \underline{q} = (q_0 + \underline{q})(q_0 - \underline{q}) = \underline{q} \bar{\underline{q}}. \quad (4.52)$$

### e) Inverse Quaternion

Durch Erweiterung mit  $\bar{\underline{q}}$  wird der Nenner skalar gemacht:

$$\underline{q}^{-1} = \frac{1}{\underline{q}} = \frac{\bar{\underline{q}}}{\underline{q} \bar{\underline{q}}} = \frac{\bar{\underline{q}}}{|\underline{q}|^2}. \quad (4.53)$$

Zusammen mit Gl. (4.52) ist dann

$$\underline{q} \underline{q}^{-1} = \underline{1} = 1 + \underline{0}. \quad (4.54)$$

Die Überlegenheit der Quaternionenrechnung gegenüber der herkömmlichen Vektorrechnung besteht darin, daß die vier Gruppenaxiome erfüllt sind:

1. Das Produkt einer Quaternion ist wieder eine Quaternion
2. Die Multiplikation ist assoziativ.
3. Es existiert das Einselement  $\underline{1}$  so, daß die Gleichung  $\underline{q} \underline{1} = \underline{q} (1 + \underline{0}) = \underline{q}$  erfüllt ist.
4. Zu einer Quaternion  $\underline{q}$  existiert die Inverse  $\underline{q}^{-1}$  so, daß  $\underline{q} \underline{q}^{-1} = \underline{1}$  erfüllt ist.

### 4.5.2 Beschreibung von Drehbewegungen mit EULER-Parametern → Gl. (4.2a)

Unter Verwendung der natürlichen Invarianten der Drehbewegung, also der Koordinaten  ${}^0 \underline{u}$  (=  ${}^1 \underline{u}$ ) der Drehachse und des dazugehörigen Drehwinkels  $\beta$ , wird die folgende Quaternion gebildet:

$$\underline{q}({}^0 \underline{u}, \beta) = q_0 + \underline{q} = \cos \frac{\beta}{2} + {}^0 \underline{u} \sin \frac{\beta}{2}. \quad (4.55)$$

Die  $m = 4$  Anteile der Quaternion  $\underline{q}({}^0 \underline{u}, \beta)$  werden nun als Koordinaten der Drehung verwendet und als EULER-Parameter bezeichnet:

$$\underline{\gamma} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T = \left[ \cos \frac{\beta}{2}, {}^0 u_x \sin \frac{\beta}{2}, {}^0 u_y \sin \frac{\beta}{2}, {}^0 u_z \sin \frac{\beta}{2} \right]^T. \quad (4.56)$$

Die EULER-Parameter unterliegen der Normierungsbedingung → Gl. (4.5)

$$\Phi(\underline{\gamma}) = 0: \quad (|\underline{\gamma}|^2 =) \cos^2 \frac{\beta}{2} + {}^0 \underline{u}^T {}^0 \underline{u} \sin^2 \frac{\beta}{2} - 1 = 0. \quad (4.57)$$

Die Drehung eines Vektors  $\underline{p}$  von seiner Ausgangslage  $\underline{p}_0$  in die Lage  $\underline{p}$  wird durch das folgende doppelte Quaternionenprodukt beschrieben, das der Vektorgleichung (4.15),  ${}^0 \underline{p} = {}^0 \underline{R} {}^0 \underline{p}_0$ , entspricht:

$${}^0 \underline{p} = \underline{q} {}^0 \underline{p}_0 \bar{\underline{q}}. \quad (4.58)$$

Die Vektorkoordinaten  $\underline{p}_0$  und  $\underline{p}$  sind dabei als Quaternionen mit verschwindendem Skalarteil anzusehen. Mit  $\underline{q} = q_0 + \underline{q}$  liefert die Auswertung des Ausdrucks (4.58):

$${}^0 \underline{p} = \underline{q} {}^0 \underline{p}_0 \bar{\underline{q}} = (q_0 + \underline{q}) {}^0 \underline{p}_0 (q_0 - \underline{q}) = q_0^2 {}^0 \underline{p}_0 + q_0 (\underline{q} {}^0 \underline{p}_0 - {}^0 \underline{p}_0 \underline{q}) - \underline{q} {}^0 \underline{p}_0 \underline{q}. \quad (4.59)$$

Mit den Quaternionenprodukten

$$\begin{aligned}\underline{q} \, {}^0\rho_0 &= -\underline{q}^T \, {}^0\rho_0 + \tilde{\underline{q}} \, {}^0\rho_0, \\ {}^0\rho_0 \, \underline{q} &= -{}^0\rho_0^T \, \underline{q} + {}^0\tilde{\rho}_0 \, \underline{q}, \\ \underline{q} \, {}^0\rho_0 \, \underline{q} &= (\underline{q}^T \underline{q}) \, {}^0\rho_0 - 2(\underline{q}^T \, {}^0\rho_0) \, \underline{q}\end{aligned}$$

wird daraus:

$${}^0\rho = \underline{q} \, {}^0\rho_0 \, \tilde{\underline{q}} = \left[ (q_0^2 - \underline{q}^T \underline{q}) \underline{1} + 2q_0 \tilde{\underline{q}} + 2 \underline{q} \underline{q}^T \right] {}^0\rho_0 = {}^0\underline{R} \, {}^0\rho_0. \quad (4.60)$$

Damit läßt sich der Drehtensor  ${}^0\underline{R}$  bzw. die Transformationsmatrix  ${}^{01}\underline{T}$  mit Hilfe der EULER-Parameter ausdrücken:

$$\begin{aligned}{}^0\underline{R}(\underline{q}) &= (q_0^2 - \underline{q}^T \underline{q}) \underline{1} + 2q_0 \tilde{\underline{q}} + 2 \underline{q} \underline{q}^T = \\ &= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} = {}^{01}\underline{T}(\underline{q}). \quad (4.61)\end{aligned}$$

Eigenschaften von Gl. (4.58),  ${}^0\rho = \underline{q} \, {}^0\rho_0 \, \tilde{\underline{q}}$ :

- Wie die entsprechende Vektorgleichung kann auch die Quaternionenbeziehung (4.58) als Koordinatentransformation aufgefaßt werden und entspricht dann der Matrizengleichung  ${}^0\rho = {}^{01}\underline{T} \, {}^1\rho$ . Mit einem in Anlehnung an die Transformationsmatrix eingeführten Doppelindex oben links gilt dann für die Transformation der Koordinaten des gedrehten Vektors  $\rho$  von  $K_1$  nach  $K_0$ :

$${}^0\rho = {}^{01}\underline{q} \, {}^1\rho \, {}^{01}\tilde{\underline{q}} \quad \text{mit} \quad {}^{01}\tilde{\underline{q}} = {}^{10}\underline{q}. \quad (4.62)$$

- Die EULER-Parameter  $\underline{q}$  und  $-\underline{q}$  beschreiben dieselbe Drehung. Dies ist auch in Gl. (4.61) erkennbar:

$${}^0\underline{R}(\underline{q}) = {}^0\underline{R}(-\underline{q}) \quad \text{bzw.} \quad {}^{01}\underline{T}(\underline{q}) = {}^{01}\underline{T}(-\underline{q}). \quad (4.63)$$

- Multiplikation mit  $\tilde{\underline{q}}$  von links und mit  $\underline{q}$  von rechts liefert die umgekehrte Drehung

$${}^0\rho_0 = \tilde{\underline{q}} \, {}^0\rho \, \underline{q}. \quad (4.64)$$

#### 4.5.3 Bestimmung der EULER-Parameter aus dem Drehtensor $\rightarrow$ Gl. (4.2b)

Die Bestimmung der EULER-Parameter  $\underline{\gamma} = [q_0, \underline{q}^T]^T$  aus einem gegebenen Drehtensor  ${}^0\underline{R} = {}^{01}\underline{T} = (T_{ij})$  erfolgt analog zur Berechnung des Drehzeigers in Abschnitt 4.2.2. Ausgehend von Gl. (4.61) werden zunächst wieder die zur Verfügung stehenden Gleichungen zusammengestellt.

#### a) Gleichungen aus den Hauptdiagonalelementen von ${}^{01}\underline{T} = (T_{ij})$

- Summe der Hauptdiagonalelemente (Spur):

$$\begin{aligned}\text{sp}({}^{01}\underline{T}) &= T_{11} + T_{22} + T_{33} = (q_0^2 - \underline{q}^T \underline{q})(1+1+1) + 2(\underbrace{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}_{\underline{q}^T \underline{q}}) = 3q_0^2 - \underline{q}^T \underline{q} = \\ &= 4q_0^2 - 1,\end{aligned}$$

$$\rightarrow q_0^2 = \frac{1}{4}(1 + T_{11} + T_{22} + T_{33}), \quad (i)$$

$$\rightarrow q_0 = \pm \sqrt{q_0^2}. \quad (ii.1)$$

- einzelne Hauptdiagonalelemente:

$$\begin{aligned}T_{11} &= q_0^2 - \underbrace{\underline{q}^T \underline{q}}_{1 - q_0^2} + 2q_1^2 = 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 \\ \rightarrow q_1 &= \pm \sqrt{\frac{1}{2}(T_{11} + 1) - q_0^2}.\end{aligned} \quad (ii.2)$$

$$\text{Entsprechend: } q_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(T_{22} + 1) - q_0^2}, \quad (ii.3)$$

$$q_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(T_{33} + 1) - q_0^2}. \quad (ii.4)$$

#### b) Gleichungen aus den Nebendiagonalelementen von ${}^{01}\underline{T} = (T_{ij})$

- schiefsymmetrische Nebendiagonalelemente:

$$4q_0 q_1 = T_{32} - T_{23}, \quad (iii.1)$$

$$4q_0 q_2 = T_{13} - T_{31}, \quad (iii.2)$$

$$4q_0 q_3 = T_{21} - T_{12}. \quad (iii.3)$$

- symmetrische Nebendiagonalelemente:

$$4q_2 q_3 = T_{32} + T_{23}, \quad (iii.4)$$

$$4q_1 q_3 = T_{13} + T_{31}, \quad (iii.5)$$

$$4q_1 q_2 = T_{21} + T_{12}. \quad (iii.6)$$

Die Berechnungsvorschrift lautet:

1. Auswertung von Gl. (i) liefert  $q_0^2$ .
2. Mit einer der vier Gln. (ii) wird ein nichtverschwindender EULER-Parameter  $q_0, q_1, q_2$  oder  $q_3$  bestimmt, wobei das Vorzeichen beliebig gewählt wird. Im Hinblick auf die Genauigkeit des folgenden Berechnungsschritts ist es zweckmäßig, den betragsgrößten dieser vier Parameter auszuwählen.
3. Aus drei der sechs Gln. (iii) können die drei fehlenden EULER-Parameter eindeutig bestimmt werden, wobei durch die in Schritt 2 ausgewählte Größe dividiert wird.

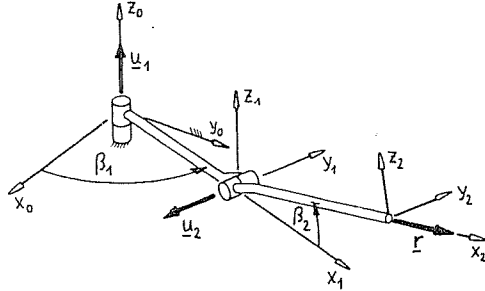
**Bemerkung:**

- Bei der Auswahl des Vorzeichens in Schritt 2 wird einer von zwei EULER-Parametersätzen ausgewählt, welche dieselbe Drehung beschreiben, vgl. Gl. (4.63).



#### 4.5.4 Beschreibung mehrfacher Drehungen mit EULER-Parametern

Die Darstellung mehrfacher Drehungen mit Hilfe von EULER-Parametern wird am Beispiel aus Abschnitt 4.2.3 durchgeführt, wobei die Interpretation als Koordinatentransformation gewählt wird.



a) Teildrehung ( $\underline{u}_1, \beta_1$ ): Ausgangssystem  $K_0 \rightarrow$  gedrehtes System  $K_1$

$${}^{01}\underline{q}(\underline{u}_1, \beta_1) = {}^{01}\underline{q}_0 + {}^{01}\underline{q} = \cos \frac{\beta_1}{2} + {}^{01}\underline{u}_1 \sin \frac{\beta_1}{2} \quad \text{mit} \quad {}^{01}\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformation der Koordinaten eines beliebigen Vektors  $\underline{r}$ :

$${}^0\underline{r} = {}^{01}\underline{q} \cdot {}^{12}\underline{r} \cdot {}^{01}\underline{\bar{q}} \quad \text{mit} \quad {}^{01}\underline{\bar{q}} = {}^{10}\underline{q} \quad (4.65)$$

b) Teildrehung ( $\underline{u}_2, \beta_2$ ): Ausgangssystem  $K_1 \rightarrow$  gedrehtes System  $K_2$

$${}^{12}\underline{q}(\underline{u}_2, \beta_2) = {}^{12}\underline{q}_0 + {}^{12}\underline{q} = \cos \frac{\beta_2}{2} + {}^{12}\underline{u}_2 \sin \frac{\beta_2}{2} \quad \text{mit} \quad {}^{12}\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Transformation der Koordinaten eines beliebigen Vektors  $\underline{r}$ :

$${}^1\underline{r} = {}^{12}\underline{q} \cdot {}^{23}\underline{r} \cdot {}^{12}\underline{\bar{q}} \quad \text{mit} \quad {}^{12}\underline{\bar{q}} = {}^{21}\underline{q} \quad (4.66)$$

c) Gesamtdrehung: Ausgangssystem  $K_0 \rightarrow$  gedrehtes System  $K_2$

Einsetzen von Gl. (4.66) in (4.65):

$${}^0\underline{r} = {}^{01}\underline{q} \cdot {}^{12}\underline{q} \cdot {}^{23}\underline{r} \cdot {}^{01}\underline{\bar{q}} = {}^{01}\underline{q} \cdot {}^{12}\underline{q} \cdot {}^{23}\underline{r} \cdot {}^{01}\underline{\bar{q}} \cdot {}^{12}\underline{\bar{q}} = {}^{02}\underline{q} \cdot {}^{23}\underline{r} \cdot {}^{02}\underline{\bar{q}} \quad (4.67)$$

Für die EULER-Parameter der resultierenden Gesamtdrehung gilt dann:

$${}^{02}\underline{q} = {}^{01}\underline{q} \cdot {}^{12}\underline{q} = ({}^{01}\underline{q}_0 \cdot {}^{12}\underline{q}_0 - {}^{01}\underline{q}^T \cdot {}^{12}\underline{q}) + ({}^{01}\underline{q}_0 \cdot {}^{12}\underline{q} + {}^{01}\underline{q} \cdot {}^{12}\underline{q}_0 + {}^{01}\underline{\bar{q}} \cdot {}^{12}\underline{\bar{q}}) = \quad (4.68a)$$

$$= {}^{02}\underline{q}_0 + {}^{02}\underline{q} = \begin{bmatrix} \sin \frac{\beta_1}{2} \sin \frac{\beta_2}{2} \\ -\cos \frac{\beta_1}{2} \sin \frac{\beta_2}{2} \\ \sin \frac{\beta_1}{2} \cos \frac{\beta_2}{2} \end{bmatrix} \quad (4.68b)$$

#### 4.5.5 EULER-Parameter und Winkelgeschwindigkeit $\rightarrow$ Gl. (4.3)

a) Koordinaten von  $\underline{\omega}$  im Ausgangssystem  $K_0$

Die Zeitableitung der Beziehung (4.58),

$${}^0\underline{\rho} = \underline{q} \cdot {}^0\underline{\rho}_0 \cdot \underline{\bar{q}},$$

für die Drehung des körperfesten Vektors  $\underline{\rho}$  liefert unter Berücksichtigung von  ${}^0\underline{\rho}_0 = \underline{0}$  (feste Ausgangslage) sowie der Produktregel:

$${}^0\dot{\underline{\rho}} = \dot{\underline{q}} \cdot {}^0\underline{\rho}_0 \cdot \underline{\bar{q}} + \underline{q} \cdot {}^0\underline{\rho}_0 \cdot \dot{\underline{\bar{q}}}.$$

Der Vektor  $\underline{\rho}_0$  wird mit Hilfe von Gl. (4.64),  ${}^0\underline{\rho}_0 = \underline{\bar{q}} \cdot {}^0\underline{\rho} \cdot \underline{q}$ , für die umgekehrte Drehung ausgedrückt:

$${}^0\dot{\underline{\rho}} = \dot{\underline{q}} \cdot \underline{\bar{q}} \cdot {}^0\underline{\rho} \cdot \underline{\bar{q}} + \underline{q} \cdot \underline{\bar{q}} \cdot {}^0\underline{\rho} \cdot \underline{q} \cdot \dot{\underline{q}}.$$

Unter Berücksichtigung von  $\underline{q} \cdot \dot{\underline{\bar{q}}} = \dot{\underline{q}} \cdot \underline{\bar{q}}$ , vgl. Gl. (4.51), gilt

$${}^0\dot{\underline{\rho}} = \left( \dot{\underline{q}} \cdot \underline{\bar{q}} \right) \cdot {}^0\underline{\rho} + {}^0\underline{\rho} \cdot \left( \dot{\underline{\bar{q}}} \cdot \underline{q} \right) \quad (4.69)$$

Für die weitere Umformung wird nun die Zeitableitung der Normierungsbedingung (4.57),  $\underline{q} \cdot \underline{\bar{q}} = 1$ , betrachtet:

$$\dot{\underline{q}} \cdot \underline{\bar{q}} + \underline{q} \cdot \dot{\underline{\bar{q}}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \underline{\dot{r}} + \underline{\bar{\dot{r}}} = 0 \quad (4.70)$$

Daraus folgt, daß der Skalarteil der Quaternion  $\underline{r} = \underline{\dot{q}} \cdot \underline{\bar{q}}$  verschwindet, also  $\underline{r} = 0 + \underline{r}$  und  $\underline{\bar{r}} = 0 - \underline{r}$ . Damit wird aus Gl. (4.69)

$${}^0\dot{\underline{\rho}} = \underline{r} \cdot {}^0\underline{\rho} + {}^0\underline{\rho} \cdot \underline{\bar{r}} = \underline{r} \cdot {}^0\underline{\rho} - {}^0\underline{\rho} \cdot \underline{r} = (-\underline{r}^T \cdot {}^0\underline{\rho} + \underline{\bar{r}} \cdot {}^0\underline{\rho}) - (-{}^0\underline{\rho}^T \cdot \underline{r} + {}^0\underline{\rho} \cdot \underline{\bar{r}}) = 2 \underline{\bar{r}} \cdot {}^0\underline{\rho} (= 2 \underline{r} \times {}^0\underline{\rho}).$$

Der Vergleich mit Gl. (3.19),  ${}^0\dot{\underline{\rho}} = {}^0\underline{\omega} \cdot {}^0\underline{\rho} = {}^0\underline{\omega} \times {}^0\underline{\rho}$ , zeigt:

$${}^0\underline{\omega} = 2 \underline{r} = 2 \dot{\underline{q}} \cdot \underline{\bar{q}} \quad (4.71)$$

In Matrixschreibweise, vgl. Gl. (4.48), lautet diese Beziehung:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ {}^0\underline{\omega} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} q_0 & \underline{q}^T \\ -\underline{q} & q_0 \mathbf{I} + \underline{\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{\underline{q}} \end{bmatrix} \leftarrow \text{1. Zeile: Gl. (4.70)} \quad (4.72a)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} {}^0\omega_x \\ {}^0\omega_y \\ {}^0\omega_z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (4.72b)$$

$${}^0\underline{\omega} = \underline{H}_0(\underline{\gamma}) \cdot \dot{\underline{\gamma}}$$

Multiplikation von Gl. (4.71) mit  $\frac{1}{2}\tilde{q}$  von rechts ermöglicht die Auflösung nach  $\dot{q}$ :

$$\dot{q} = \frac{1}{2} {}^0\tilde{\omega} \tilde{q} . \quad (4.73)$$

In Matrizenschreibweise, vgl. Gl. (4.48):

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_0 & -q^T \\ q & q_0 I - \tilde{q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ {}^0\tilde{\omega} \end{bmatrix} \quad (4.74a)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0\omega_x \\ {}^0\omega_y \\ {}^0\omega_z \end{bmatrix} , \quad (4.74b)$$

$$\dot{\underline{\gamma}} = \underline{K}_0(\underline{\gamma}) \quad {}^0\tilde{\omega} .$$

#### b) Koordinaten von $\tilde{\omega}$ im körperfesten System $K_1$

Berücksichtigung der Koordinatentransformation

$${}^0\tilde{\omega} = q \quad {}^1\tilde{\omega} \quad \tilde{q}$$

entsprechend Gl. (4.62) in Gl. (4.71) liefert

$$q \quad {}^1\tilde{\omega} \quad \tilde{q} = 2\dot{q} \tilde{q} \rightarrow {}^1\tilde{\omega} = 2\tilde{q} \dot{q} . \quad (4.75)$$

In Matrizenschreibweise, vgl. Gl. (4.47):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ {}^1\tilde{\omega} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} q_0 & q^T \\ -q & q_0 I - \tilde{q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (4.76a)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} {}^1\omega_x \\ {}^1\omega_y \\ {}^1\omega_z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} , \quad (4.76b)$$

$${}^1\tilde{\omega} = \underline{H}_1(\underline{\gamma}) \quad \dot{\underline{\gamma}} .$$

Multiplikation von Gl. (4.75) mit  $\frac{1}{2}\tilde{q}$  von links ermöglicht die Auflösung nach  $\dot{q}$ :

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \quad {}^1\tilde{\omega} . \quad (4.77)$$

In Matrizenschreibweise, vgl. Gl. (4.47):

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_0 & -q^T \\ q & q_0 I + \tilde{q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ {}^1\tilde{\omega} \end{bmatrix} \quad (4.78a)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\omega_x \\ {}^1\omega_y \\ {}^1\omega_z \end{bmatrix} , \quad (4.78b)$$

$$\dot{\underline{\gamma}} = \underline{K}_1(\underline{\gamma}) \quad {}^1\tilde{\omega} .$$

#### 4.6 RODRIGUES-Parameter

Die  $m = 3$  RODRIGUES-Parameter  $\underline{\lambda}$  werden aus dem Drehzeiger  $(\underline{u}, \beta)$  gebildet:

$$\underline{\gamma} = \underline{\lambda} = {}^0\underline{u} \tan \frac{\beta}{2} : \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0u_x \\ {}^0u_y \\ {}^0u_z \end{bmatrix} \tan \frac{\beta}{2} . \quad (4.79)$$

Für  $\beta = \pm\pi$  sind damit die RODRIGUES-Parameter nicht definiert.

Zu den EULER-Parametern besteht der direkte Zusammenhang:

$$\underline{\lambda} = \frac{q}{q_0} \quad \text{mit} \quad q_0 = \cos \frac{\beta}{2} , \quad q = {}^0\underline{u} \sin \frac{\beta}{2} . \quad (4.80)$$

##### 4.6.1 Darstellung des Drehtensors mit Hilfe der RODRIGUES-Parameter $\rightarrow$ Gl. (4.2)

Der Drehtensor (Koordinatenindex für System  $K_0$  weggelassen)

$$\underline{R}(\underline{u}, \beta) = \underline{I} + \sin \beta \tilde{\underline{u}} + (1 - \cos \beta) \tilde{\underline{u}} \tilde{\underline{u}} = {}^{01}\underline{T}(\underline{u}, \beta)$$

aus Gl. (4.21) kann mit Hilfe der trigonometrischen Beziehungen  $(x = \tan \frac{\beta}{2})$

$$\sin \beta = \frac{2x}{1+x^2} , \quad \cos \beta = \frac{1-x^2}{1+x^2} ,$$

umgeformt werden:

$$\underline{R} = \underline{I} + \frac{2x}{1+x^2} \tilde{\underline{u}} + \frac{1+x^2 - (1-x^2)}{1+x^2} \tilde{\underline{u}} \tilde{\underline{u}} = \underline{I} + \frac{2}{1+x^2} x \frac{\tilde{\underline{u}}}{\tilde{\underline{\lambda}}} + \frac{2}{1+x^2} \frac{(x \tilde{\underline{u}})}{\tilde{\underline{\lambda}}} \frac{(x \tilde{\underline{u}})}{\tilde{\underline{\lambda}}} \\ \rightarrow \underline{R}(\underline{\lambda}) = \underline{I} + \frac{2}{1+\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}} \left( \tilde{\underline{\lambda}} + \tilde{\underline{\lambda}} \tilde{\underline{\lambda}} \right) = {}^{01}\underline{T}(\underline{\lambda}) . \quad (4.81)$$

Ausgeschrieben:

$$\underline{R}(\underline{\lambda}) = \frac{1}{1+\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}} \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_3) & 2(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2) \\ 2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_3) & 1 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1) \\ 2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2) & 2(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1) & 1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{bmatrix} = {}^{01}\underline{T}(\underline{\lambda}) . \quad (4.82)$$

Zur Bestimmung der RODRIGUES-Parameter aus einem vorliegenden Drehtensor werden zunächst die EULER-Parameter entsprechend Abschnitt 4.5.3 berechnet und anschließend Gl. (4.80) angewandt.

#### 4.6.2 RODRIGUES-Parameter und Winkelgeschwindigkeit → Gl. (4.3)

Die Zusammenhänge zwischen der Winkelgeschwindigkeit und der Zeitableitung der RODRIGUES-Parameter können beispielsweise über die EULER-Parameter hergeleitet werden, siehe Abschnitt 4.6.3.

##### a) Koordinaten von $\underline{\omega}$ im Ausgangssystem $K_0$

$$\begin{aligned} {}^0\omega &= \frac{2}{1+\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}} \left( \dot{\underline{\lambda}} + \tilde{\underline{\lambda}} \dot{\underline{\lambda}} \right) = \left[ \frac{2}{1+\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}} \left( \underline{I} + \tilde{\underline{\lambda}} \right) \right] \dot{\underline{\lambda}} = \\ &= \underline{H}_0(\underline{\lambda}) \quad \dot{\underline{\lambda}} \end{aligned} \quad (4.83)$$

Aufgelöst nach  $\dot{\underline{\lambda}}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\lambda}} &= \frac{1}{2} (\underline{I} + \underline{\lambda} \underline{\lambda}^T - \tilde{\underline{\lambda}}) {}^0\omega \\ \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\lambda_1^2 & \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_3 & 1+\lambda_2^2 & \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \\ \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 & \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 & 1+\lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0\omega_x \\ {}^0\omega_y \\ {}^0\omega_z \end{bmatrix}, \\ \dot{\underline{\lambda}} &= \underline{K}_0(\underline{\lambda}) \quad {}^0\omega \end{aligned} \quad (4.84)$$

##### b) Koordinaten von $\underline{\omega}$ im körperfesten System $K_1$

$$\begin{aligned} {}^1\omega &= \frac{2}{1+\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}} \left( \dot{\underline{\lambda}} - \tilde{\underline{\lambda}} \dot{\underline{\lambda}} \right) = \left[ \frac{2}{1+\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}} \left( \underline{I} - \tilde{\underline{\lambda}} \right) \right] \dot{\underline{\lambda}} = \\ &= \underline{H}_1(\underline{\lambda}) \quad \dot{\underline{\lambda}} \end{aligned} \quad (4.85)$$

Aufgelöst nach  $\dot{\underline{\lambda}}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\lambda}} &= \frac{1}{2} (\underline{I} + \underline{\lambda} \underline{\lambda}^T + \tilde{\underline{\lambda}}) {}^1\omega \\ \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\lambda_1^2 & \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_3 & 1+\lambda_2^2 & \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \\ \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 & \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 & 1+\lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\omega_x \\ {}^1\omega_y \\ {}^1\omega_z \end{bmatrix}, \\ \dot{\underline{\lambda}} &= \underline{K}_1(\underline{\lambda}) \quad {}^1\omega \end{aligned} \quad (4.86)$$

#### 4.6.3 Herleitungen für RODRIGUES-Parameter und Drehzeiger

Die in den entsprechenden Abschnitten angegebenen Zusammenhänge zwischen der Winkelgeschwindigkeit im Ausgangssystem  $K_0$  und den RODRIGUES-Parametern sowie dem Drehzeiger werden ausgehend von Gl. (4.71) hergeleitet:

$${}^0\ddot{\underline{\omega}} = 2\dot{\underline{q}} \ddot{\underline{q}} = 2(\dot{q}_0 + \dot{\underline{q}})(q_0 - \underline{q}) = \underbrace{2(\dot{q}_0 q_0 + \dot{\underline{q}}^T \underline{q})}_0 + 2(q_0 \dot{\underline{q}} - \dot{q}_0 \underline{q} - \tilde{\underline{q}} \dot{\underline{q}}). \quad (4.87)$$

Die entsprechenden Beziehungen für  ${}^1\omega$  können in analoger Weise ausgehend von Gl. (4.75) hergeleitet werden.

##### a) Rodrigues-Parameter

- Winkelgeschwindigkeit  ${}^0\omega = {}^0\omega(\underline{\lambda}, \dot{\underline{\lambda}}) \rightarrow$  Gl. (4.83)

$$\text{Gl. (4.80) ergibt: } \underline{q} = q_0 \underline{\lambda} \rightarrow \dot{\underline{q}} = \dot{q}_0 \underline{\lambda} + q_0 \dot{\underline{\lambda}}. \quad (4.88)$$

$$\text{Außerdem gilt: } q_0^2 = \cos^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1}{1+\tan^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{1}{1+\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}}. \quad (4.89)$$

Gl. (4.88) in (4.87) eingesetzt:

$${}^0\omega = 2 \left( q_0 \dot{q}_0 \underline{\lambda} + q_0^2 \dot{\underline{\lambda}} - \dot{q}_0 q_0 \underline{\lambda} - q_0 \underline{\lambda} \tilde{\underline{\lambda}} \dot{\underline{\lambda}} - q_0^2 \underline{\lambda} \dot{\underline{\lambda}} \right) = 2q_0^2 (\dot{\underline{\lambda}} + \tilde{\underline{\lambda}} \dot{\underline{\lambda}}).$$

Mit Gl. (4.89):

$${}^0\omega = \frac{2}{1+\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}} (\dot{\underline{\lambda}} + \tilde{\underline{\lambda}} \dot{\underline{\lambda}}). \quad (4.90)$$

- Auflösung nach  $\dot{\underline{\lambda}} \rightarrow \dot{\underline{\lambda}} = \dot{\underline{\lambda}}(\underline{\lambda}, {}^0\omega) \rightarrow$  Gl. (4.84)

Skalare Multiplikation von Gl. (4.90) mit  $\underline{\lambda}$ :

$$\underline{\lambda}^T {}^0\omega = \frac{2}{1+\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}} (\underline{\lambda}^T \dot{\underline{\lambda}} + \underline{\lambda}^T \tilde{\underline{\lambda}} \dot{\underline{\lambda}}) = \frac{2}{1+\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}} \underline{\lambda}^T \dot{\underline{\lambda}}. \quad (4.91)$$

Vektorielle Multiplikation von Gl. (4.90) von links mit  $\underline{\lambda}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{\lambda}} {}^0\omega &= \frac{2}{1+\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}} (\tilde{\underline{\lambda}} \dot{\underline{\lambda}} + \tilde{\underline{\lambda}} \tilde{\underline{\lambda}} \dot{\underline{\lambda}}) = \\ &= \frac{2}{1+\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}} (\tilde{\underline{\lambda}} \dot{\underline{\lambda}} + \underline{\lambda} (\underline{\lambda}^T \dot{\underline{\lambda}}) - \dot{\underline{\lambda}} (\underline{\lambda}^T \underline{\lambda})) = \\ &= \underbrace{\frac{2}{1+\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}} \tilde{\underline{\lambda}} \dot{\underline{\lambda}}}_{(4.90): {}^0\omega - \frac{2}{1+\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}} \dot{\underline{\lambda}}} + \underbrace{\frac{2}{1+\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}} (\underline{\lambda}^T \dot{\underline{\lambda}}) \underline{\lambda}}_{(4.91): \underline{\lambda}^T {}^0\omega} - \frac{2}{1+\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}} (\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}) \dot{\underline{\lambda}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \tilde{\underline{\lambda}} {}^0\omega &= {}^0\omega - \frac{2}{1+\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}} \dot{\underline{\lambda}} + (\underline{\lambda}^T {}^0\omega) \underline{\lambda} - \frac{2}{1+\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}} (\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}) \dot{\underline{\lambda}} = \\ &= (\underline{I} + \underline{\lambda} \underline{\lambda}^T) {}^0\omega - 2 \frac{1+\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}}{1+\underline{\lambda}^T \underline{\lambda}} \dot{\underline{\lambda}} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \dot{\underline{\lambda}} = \frac{1}{2} (\underline{I} + \underline{\lambda} \underline{\lambda}^T - \tilde{\underline{\lambda}}) {}^0\omega. \quad (4.92)$$

b) Drehzeiger ( $\underline{u}, \beta$ )- Winkelgeschwindigkeit  ${}^0\omega = {}^0\omega(\underline{u}, \beta, \dot{\underline{u}}, \dot{\beta}) \rightarrow \text{Gl. (4.27)}$ 

$$\text{Es gilt: } q_0 = \cos \frac{\beta}{2} \rightarrow \dot{q}_0 = -\frac{\dot{\beta}}{2} \sin \frac{\beta}{2}, \quad (4.93)$$

$$\underline{q} = \underline{u} \sin \frac{\beta}{2} \rightarrow \dot{\underline{q}} = \dot{\underline{u}} \sin \frac{\beta}{2} + \underline{u} \frac{\dot{\beta}}{2} \cos \frac{\beta}{2}. \quad (4.94)$$

Gln. (4.93) und (4.94) in (4.87) eingesetzt:

$${}^0\omega = 2 \left( \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \dot{\underline{u}} + \frac{\dot{\beta}}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} \underline{u} + \frac{\dot{\beta}}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \underline{u} - \sin^2 \frac{\beta}{2} \tilde{\underline{u}} \underline{u} - \frac{\dot{\beta}}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \frac{\tilde{\underline{u}} \underline{u}}{\underline{0}} \right)$$

Mit

$$\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} \sin \beta, \quad \sin^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \beta)$$

ergibt sich schließlich

$$\underline{{}^0\omega} = \sin \beta \dot{\underline{u}} + \dot{\beta} \underline{u} + (1 - \cos \beta) \frac{\tilde{\underline{u}} \dot{\underline{u}}}{\underline{0}}. \quad (4.95)$$

- Auflösung nach  $\dot{\underline{u}}$  und  $\dot{\beta} \rightarrow \dot{\underline{u}} = \dot{\underline{u}}(\underline{u}, \beta, {}^0\omega), \dot{\beta} = \dot{\beta}(\underline{u}, \beta, {}^0\omega) \rightarrow \text{Gl. (4.28)}$ Skalare Multiplikation von Gl. (4.95) mit  $\underline{u}$  liefert unter Berücksichtigung von  $|\underline{u}| = 1$  und  $\underline{u} \perp \underline{\dot{u}}$ :

$$\begin{aligned} \underline{u}^T {}^0\omega &= \sin \beta \frac{\underline{u}^T \dot{\underline{u}}}{\underline{0}} + \dot{\beta} \frac{\underline{u}^T \underline{u}}{1} + (1 - \cos \beta) \frac{\underline{u}^T \tilde{\underline{u}} \dot{\underline{u}}}{\underline{0}} = \dot{\beta} \\ \rightarrow \underline{\dot{\beta}} &= \underline{u}^T {}^0\omega. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Vektorielle Multiplikation von Gl. (4.95) von links mit  $\underline{u}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{u}} {}^0\omega &= \sin \beta \tilde{\underline{u}} \underline{\dot{u}} + \dot{\beta} \frac{\tilde{\underline{u}} \underline{u}}{\underline{0}} + (1 - \cos \beta) \tilde{\underline{u}} \tilde{\underline{u}} \dot{\underline{u}} = \\ &= \sin \beta \tilde{\underline{u}} \underline{\dot{u}} + (1 - \cos \beta) \left( \frac{(\underline{u}^T \dot{\underline{u}}) \underline{u}}{\underline{0}} - \frac{(\underline{u}^T \underline{u}) \dot{\underline{u}}}{1} \right) \\ \rightarrow \tilde{\underline{u}} \underline{\dot{u}} &= \frac{1}{\sin \beta} \left( \tilde{\underline{u}} {}^0\omega + (1 - \cos \beta) \underline{\dot{u}} \right) \end{aligned} \quad (4.97)$$

Gln. (4.96) und (4.97) in (4.95) eingesetzt:

$$\begin{aligned} {}^0\omega &= \sin \beta \underline{\dot{u}} + (\underline{u}^T {}^0\omega) \underline{u} + \frac{(1 - \cos \beta)}{\sin \beta} \left( \tilde{\underline{u}} {}^0\omega + (1 - \cos \beta) \underline{\dot{u}} \right) \\ \rightarrow \sin \beta (\underline{I} - \underline{u} \underline{u}^T) {}^0\omega &= (2 - 2 \cos \beta) \underline{\dot{u}} + (1 - \cos \beta) \tilde{\underline{u}} {}^0\omega \\ \rightarrow \underline{\dot{u}} &= \frac{\sin \beta}{2(1 - \cos \beta)} (\underline{I} - \underline{u} \underline{u}^T) {}^0\omega - \frac{1}{2} \tilde{\underline{u}} {}^0\omega \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin \beta}{(1 - \cos \beta)} (\underline{I} - \underline{u} \underline{u}^T) - \tilde{\underline{u}} \right] {}^0\omega. \end{aligned} \quad (4.98)$$

## 5 Relativbewegungen

### 5.1 Relative Zeitableitung von Vektoren

Die Bildung *zeitlicher Ableitungen* von Vektoren erfordert die Angabe des *Bezugssystems* für die zeitliche Änderung. Während bisher ( $\Rightarrow$  Abschnitte 3.1.2/3, 3.2.2/3, 3.3.2/3) lediglich Zeitableitungen von Vektoren bezüglich des raumfesten Inertialsystems betrachtet worden sind, müssen häufig Zeitableitungen von Vektoren bezüglich bewegter Bezugssysteme durchgeführt werden. Zur Herleitung der entsprechenden Beziehungen werden die Basisvektoren zweier Koordinatensysteme  $K_0$  und  $K_1$  betrachtet, die sich beliebig im Raum bewegen, ferner ein beliebiger, ebenfalls zeitveränderlicher Vektor  $\underline{s}(t)$ . Entsprechend Abschnitt 2.2 kann  $\underline{s}(t)$  gleichermaßen mit Hilfe der Komponenten in  $K_0$  und  $K_1$  dargestellt werden:

$$\underline{s}(t) = {}^0s_x(t) \underline{e}_{x0}(t) + {}^0s_y(t) \underline{e}_{y0}(t) + {}^0s_z(t) \underline{e}_{z0}(t) \quad (5.1)$$

bzw.

$$\underline{s}(t) = {}^1s_x(t) \underline{e}_{x1}(t) + {}^1s_y(t) \underline{e}_{y1}(t) + {}^1s_z(t) \underline{e}_{z1}(t) . \quad (5.2)$$

Es wird nun die zeitliche Ableitung von  $\underline{s}(t)$  relativ zum System  $K_0$  zunächst ausgehend von Gl. (5.1) gebildet:

$$\frac{d\underline{s}}{dt} = \left( \frac{d}{dt} {}^0s_x \right) \underline{e}_{x0} + \left( \frac{d}{dt} {}^0s_y \right) \underline{e}_{y0} + \left( \frac{d}{dt} {}^0s_z \right) \underline{e}_{z0} + {}^0s_x \frac{d}{dt} \underline{e}_{x0} + {}^0s_y \frac{d}{dt} \underline{e}_{y0} + {}^0s_z \frac{d}{dt} \underline{e}_{z0} . \quad (5.3)$$

Das Bezugssystem  $K_0$  für die Ableitung der Vektoren wird durch die Schreibweise " $\frac{d}{dt}$ " kenntlich gemacht. In Gl. (5.3) werden damit die Ableitungen der Einheitsvektoren  $\underline{e}_{x0}$ ,  $\underline{e}_{y0}$ ,  $\underline{e}_{z0}$  sowie des Vektors  $\underline{s}$  relativ zu  $K_0$  bezeichnet. Da die Einheitsvektoren  $\underline{e}_{x0}$ ,  $\underline{e}_{y0}$ ,  $\underline{e}_{z0}$  ihre Richtungen relativ zum System  $K_0$  nicht ändern, verschwinden in Gl. (5.3) ihre Ableitungen und es verbleibt

$$\frac{d\underline{s}}{dt} = \left( \frac{d}{dt} {}^0s_x \right) \underline{e}_{x0} + \left( \frac{d}{dt} {}^0s_y \right) \underline{e}_{y0} + \left( \frac{d}{dt} {}^0s_z \right) \underline{e}_{z0} . \quad (5.4)$$

(vgl. z.B. Abschnitt 3.1.2; dort war das Inertialsystem  $K_0$  Bezugssystem für die Zeitableitung, was nicht explizit gekennzeichnet wurde.)

Ausgehend von Gl. (5.2) lautet die Ableitung von  $\underline{s}(t)$  relativ zum System  $K_0$ :

$$\frac{d\underline{s}}{dt} = \left( \frac{d}{dt} {}^1s_x \right) \underline{e}_{x1} + \left( \frac{d}{dt} {}^1s_y \right) \underline{e}_{y1} + \left( \frac{d}{dt} {}^1s_z \right) \underline{e}_{z1} + {}^1s_x \frac{d}{dt} \underline{e}_{x1} + {}^1s_y \frac{d}{dt} \underline{e}_{y1} + {}^1s_z \frac{d}{dt} \underline{e}_{z1} . \quad (5.5)$$

Die zeitliche Änderung der Basisvektoren  $\underline{e}_{x1}$ ,  $\underline{e}_{y1}$ ,  $\underline{e}_{z1}$  des Systems  $K_1$  relativ zu  $K_0$  kann entsprechend Gl. (3.20) mit Hilfe der Winkelgeschwindigkeit  $\underline{\omega}_{01}$  von  $K_1$  relativ zu  $K_0$  ausgedrückt werden:

$$\frac{d}{dt} \underline{e}_{x1} = \underline{\omega}_{01} \times \underline{e}_{x1} , \quad \frac{d}{dt} \underline{e}_{y1} = \underline{\omega}_{01} \times \underline{e}_{y1} , \quad \frac{d}{dt} \underline{e}_{z1} = \underline{\omega}_{01} \times \underline{e}_{z1} . \quad (5.6)$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{s}}{dt} &= \left( \frac{d}{dt} {}^1s_x \right) \underline{e}_{x1} + \left( \frac{d}{dt} {}^1s_y \right) \underline{e}_{y1} + \left( \frac{d}{dt} {}^1s_z \right) \underline{e}_{z1} + \underline{\omega}_{01} \times \left( {}^1s_x \underline{e}_{x1} + {}^1s_y \underline{e}_{y1} + {}^1s_z \underline{e}_{z1} \right) , \\ \frac{d\underline{s}}{dt} &= \frac{{}^1d\underline{s}}{dt} + \underline{\omega}_{01} \times \underline{s} . \end{aligned} \quad (5.7a)$$

Kompakter läßt sich die Zeitableitung von Vektoren durch einen Ableitungspunkt in Verbindung mit einem Index unten links für das Bezugssystem schreiben:

$${}_0\dot{\underline{s}} = {}_1\dot{\underline{s}} + \underline{\omega}_{01} \times \underline{s} = {}_1\dot{\underline{s}} + \tilde{\underline{\omega}}_{01} \underline{s} . \quad (5.7b)$$

Anmerkungen:

- Gl. (5.7) ist eine Vektorgleichung und kann als Koordinatengleichung in *jedem beliebigen Koordinatensystem*  $K_i$  dargestellt werden, also

$${}_i\dot{\underline{s}} = {}_i\dot{\underline{s}} + {}_i\tilde{\underline{\omega}}_{01} {}_i\underline{s} . \quad (5.8)$$

- Gl. (5.3) zeigt, daß die zeitliche Ableitung der *Koordinaten*  ${}_i\dot{\underline{s}}(t)$  des Vektors  $\underline{s}(t)$  in einem System  $K_i$  die Koordinaten des Vektors  ${}_i\dot{\underline{s}}(t)$  in  $K_i$  liefert, also

$$\frac{d}{dt} ({}_i\underline{s}(t)) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} {}^is_x(t) \\ {}^is_y(t) \\ {}^is_z(t) \end{bmatrix} = {}_i\dot{\underline{s}}(t) . \quad (5.9)$$

Bei der Differentiation der  $(3 \times 1)$ -Koordinatenmatrizen ist die Angabe eines Bezugssystems nicht notwendig (und macht keinen Sinn), da hierbei die *skalaren* Vektorkoordinaten differenziert werden und nicht der Vektor  $\underline{s}(t)$  selbst.

- Die Ableitungen der Koordinaten  ${}_0\dot{\underline{s}}(t)$  und  ${}_1\dot{\underline{s}}(t)$  *desselben* Vektors  $\underline{s}(t)$  liefert also die Koordinaten  ${}_0\dot{\underline{s}}$  bzw.  ${}_1\dot{\underline{s}}$  der *unterschiedlichen* Vektoren  ${}_0\dot{\underline{s}}$  und  ${}_1\dot{\underline{s}}$ , die - wenn notwendig - mit Hilfe der Transformationsmatrix  ${}^{01}\underline{T}$  in das jeweils andere System transformiert werden können:

$${}_1\dot{\underline{s}} = {}^{10}\underline{T} {}_0\dot{\underline{s}} , \quad (5.10)$$

$${}_0\dot{\underline{s}} = {}^{01}\underline{T} {}_1\dot{\underline{s}} . \quad (5.11)$$

- Entsprechend ist die *Integration*

$$\underline{s}(t) = \int_0^t {}_i\dot{\underline{s}}(\tau) d\tau \quad (5.12)$$

in Koordinaten des Systems  $K_i$  auszuführen:

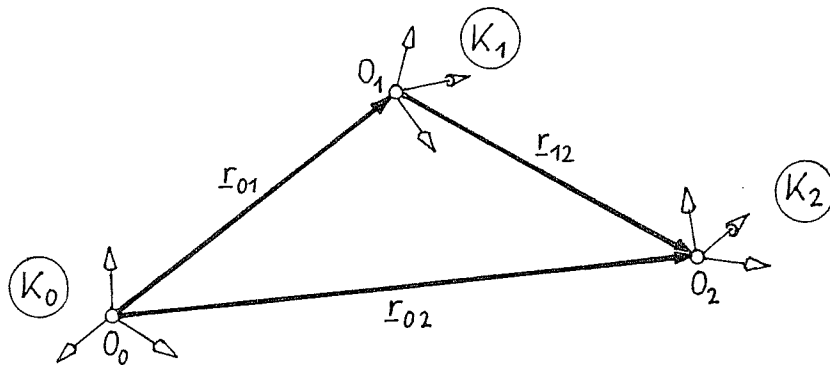
$${}_i\underline{s}(t) = \int_0^t {}_i\dot{\underline{s}}(\tau) d\tau : \quad \begin{bmatrix} s_x(t) \\ s_y(t) \\ s_z(t) \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} {}_i\dot{s}_x(\tau) \\ {}_i\dot{s}_y(\tau) \\ {}_i\dot{s}_z(\tau) \end{bmatrix} d\tau . \quad (5.13)$$

- Aus Gl. (5.7) ergibt sich, daß die Zeitableitungen der Winkelgeschwindigkeit  $\underline{\omega}_{01}$  relativ zu  $K_1$  und  $K_0$  übereinstimmen:

$$\frac{{}_0 d \underline{\omega}_{01}}{dt} = \frac{{}_1 d \underline{\omega}_{01}}{dt} + \underbrace{\underline{\omega}_{01} \times \underline{\omega}_{01}}_0 \rightarrow {}_0 \dot{\underline{\omega}}_{01} = {}_1 \dot{\underline{\omega}}_{01} \quad (5.14)$$

## 5.2 Zusammensetzung zweier gegebener Bewegungen

Eine grundlegende Aufgabenstellung der Kinematik besteht darin, aus zwei hintereinander ausgeführten Teilbewegungen die resultierende Gesamtbewegung zu berechnen, vgl. Abschnitt 4.2.3. Diese beiden Teilbewegungen sollen dabei aus vorhergehenden Berechnungsschritten oder auch aus Messungen bekannt sein. Es werden dazu drei Bezugssysteme  $K_0$ ,  $K_1$  und  $K_2$  betrachtet.



Die beiden Teilbewegungen von  $K_1$  relativ zu  $K_0$  sowie von  $K_2$  relativ zu  $K_1$  seien auf Lage-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsebene wie folgt gegeben.

### a) Bewegung von Bezugssystem $K_1$ relativ zu Bezugssystem $K_0$

#### Lage:

Transformationsmatrix der Drehung von  $K_0$  nach  $K_1$ :  ${}^{01}\underline{T} (= {}^0\mathbf{R}_{01})$

Verbindungsvektor von  $K_0$  nach  $K_1$ :  $\underline{r}_{01}$

#### Geschwindigkeit:

Winkelgeschwindigkeit von  $K_1$  relativ zu  $K_0$ :  $\underline{\omega}_{01}$

Geschwindigkeit von  $K_1$  (Punkt  $O_1$ ) relativ zu  $K_0$ :  $\underline{v}_{01} = \frac{{}_0 d \underline{r}_{01}}{dt} = {}_0 \dot{\underline{r}}_{01}$

#### Beschleunigung:

Winkelbeschleunigung von  $K_1$  relativ zu  $K_0$ :  $\underline{\alpha}_{01} = \frac{{}_0 d \underline{\omega}_{01}}{dt} = {}_0 \dot{\underline{\omega}}_{01}$

Beschleunigung von  $K_1$  (Punkt  $O_1$ ) relativ zu  $K_0$ :  $\underline{a}_{01} = \frac{{}_0 d \underline{v}_{01}}{dt} = {}_0 \dot{\underline{v}}_{01}$

### b) Bewegung von Bezugssystem $K_2$ relativ zu Bezugssystem $K_1$

#### Lage:

a) Transformationsmatrix der Drehung von  $K_1$  nach  $K_2$ :  ${}^{12}\underline{T} (= {}^1\mathbf{R}_{12})$

b) Verbindungsvektor von  $K_1$  nach  $K_2$ :  $\underline{r}_{12}$

#### Geschwindigkeit:

a) Winkelgeschwindigkeit von  $K_2$  relativ zu  $K_1$ :  $\underline{\omega}_{12}$

b) Geschwindigkeit von  $K_2$  (Punkt  $O_2$ ) relativ zu  $K_1$ :  $\underline{v}_{12} = \frac{{}_1 d \underline{r}_{12}}{dt} = {}_1 \dot{\underline{r}}_{12}$

#### Beschleunigung:

a) Winkelbeschleunigung von  $K_2$  relativ zu  $K_1$ :  $\underline{\alpha}_{12} = \frac{{}_1 d \underline{\omega}_{12}}{dt} = {}_1 \dot{\underline{\omega}}_{12}$

b) Beschleunigung von  $K_2$  (Punkt  $O_2$ ) relativ zu  $K_1$ :  $\underline{a}_{12} = \frac{{}_1 d \underline{v}_{12}}{dt} = {}_1 \dot{\underline{v}}_{12}$

Daraus läßt sich die gesuchte resultierende Bewegung von Bezugssystem  $K_2$  relativ zu Bezugssystem  $K_0$  wie folgt darstellen.

### c) Bewegung von Bezugssystem $K_2$ relativ zu Bezugssystem $K_0$

Lage:

a) Transformationsmatrix der Drehung von  $K_0$  nach  $K_2$  ( $\rightarrow$  Abschnitt 4.2.3):

$${}^{02}\underline{T} = {}^{01}\underline{T} {}^{12}\underline{T} (= {}^0R_{02}) . \quad (5.15)$$

b) Verbindungsvektor von  $K_0$  nach  $K_2$ :

$$\underline{r}_{02} = \underline{r}_{01} + \underline{r}_{12} . \quad (5.16)$$

Geschwindigkeit:

a) Winkelgeschwindigkeit von  $K_2$  relativ zu  $K_0$ :

$$\underline{\omega}_{02} = \underline{\omega}_{01} + \underline{\omega}_{12} . \quad (5.17)$$

b) Geschwindigkeit von  $K_2$  (Punkt  $O_2$ ) relativ zu  $K_0$ :

$$\begin{aligned} \underline{v}_{02} &= \frac{d\underline{r}_{02}}{dt} = \frac{d}{dt} (\underline{r}_{01} + \underline{r}_{12}) = \\ &= \frac{d\underline{r}_{01}}{dt} + \frac{d\underline{r}_{12}}{dt} \\ &\downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ \underline{v}_{02} &= \underline{v}_{01} + \underline{v}_{12} + \underline{\omega}_{01} \times \underline{r}_{12} . \end{aligned} \quad (5.18)$$

Beschleunigung:

a) Winkelbeschleunigung von  $K_2$  relativ zu  $K_0$ :

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_{02} &= \frac{d\underline{\omega}_{02}}{dt} = \frac{d}{dt} (\underline{\omega}_{01} + \underline{\omega}_{12}) = \\ &= \frac{d\underline{\omega}_{01}}{dt} + \frac{d\underline{\omega}_{12}}{dt} \\ &\downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ \underline{\alpha}_{02} &= \underline{\alpha}_{01} + \underline{\alpha}_{12} + \underline{\omega}_{01} \times \underline{\omega}_{12} . \end{aligned} \quad (5.19)$$

b) Beschleunigung von  $K_2$  (Punkt  $O_2$ ) relativ zu  $K_0$ :

$$\begin{aligned} \underline{a}_{02} &= \frac{d\underline{v}_{02}}{dt} = \frac{d}{dt} (\underline{v}_{01} + \underline{v}_{12} + \underline{\omega}_{01} \times \underline{r}_{12}) = \\ &= \frac{d\underline{v}_{01}}{dt} + \frac{d\underline{v}_{12}}{dt} + \frac{d\underline{\omega}_{01}}{dt} \times \underline{r}_{12} + \underline{\omega}_{01} \times \frac{d\underline{r}_{12}}{dt} = \\ &\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &= \underline{a}_{01} + \underline{a}_{12} + \underline{\omega}_{01} \times \underline{v}_{12} + \underline{\alpha}_{01} \times \underline{r}_{12} + \underline{\omega}_{01} \times (\underline{v}_{12} + \underline{\omega}_{01} \times \underline{r}_{12}) = \\ \underline{a}_{02} &= \underline{a}_{01} + \underline{a}_{12} + \underline{\alpha}_{01} \times \underline{r}_{12} + 2 \underline{\omega}_{01} \times \underline{v}_{12} + \underline{\omega}_{01} \times (\underline{\omega}_{01} \times \underline{r}_{12}) . \end{aligned} \quad (5.20)$$

Herleitung von Gl. (5.17):

$$\begin{aligned} {}^0\tilde{\underline{\omega}}_{02} &\stackrel{(3.18)}{=} {}^{02}\underline{T} {}^{02}\underline{T}^T \stackrel{(5.15)}{=} ({}^{01}\underline{T} {}^{12}\underline{T} + {}^{01}\underline{T} {}^{12}\dot{\underline{T}}) ({}^{01}\underline{T} {}^{12}\underline{T})^T = \\ &= \underbrace{{}^{01}\underline{T} {}^{12}\underline{T} {}^{12}\underline{T}^T {}^{01}\underline{T}^T}_{{}^0\tilde{\underline{\omega}}_{01}} + \underbrace{{}^{01}\underline{T} {}^{12}\dot{\underline{T}} {}^{12}\underline{T}^T {}^{01}\underline{T}^T}_{\stackrel{(2.22)}{{}^0\tilde{\underline{\omega}}_{12}}} = \\ &= \underline{\omega}_{01} + \underline{\omega}_{12} \rightarrow \text{Gl. (5.17)} . \end{aligned}$$

Die vektoriellen Beziehungen müssen in einem gemeinsamen Koordinatensystem ausgewertet werden. Hierzu sind mit Hilfe der gegebenen Transformationsmatrizen zusätzliche Koordinatentransformationen notwendig.

**Beispiel:**

a) Gegebene Bewegung von Bezugssystem  $K_1$  relativ zu Bezugssystem  $K_0$ :

$${}^{01}\underline{T}, {}^0\underline{r}_{01}, {}^0\underline{\omega}_{01}, {}^0\underline{v}_{01}, {}^0\underline{\alpha}_{01}, {}^0\underline{a}_{01} .$$

b) Gegebene Bewegung von Bezugssystem  $K_2$  relativ zu Bezugssystem  $K_1$ :

$${}^{12}\underline{T}, {}^1\underline{r}_{12}, {}^1\underline{\omega}_{12}, {}^1\underline{v}_{12}, {}^1\underline{\alpha}_{12}, {}^1\underline{a}_{12} .$$

c) Gesuchte Bewegung von Bezugssystem  $K_2$  relativ zu Bezugssystem  $K_0$  mit Darstellung aller Vektoren in  $K_0$ :

Lage:

$${}^{02}\underline{T} = {}^{01}\underline{T} {}^{12}\underline{T} ,$$

$${}^0\underline{r}_{02} = {}^0\underline{r}_{01} + {}^0\underline{r}_{12} \quad \text{mit} \quad {}^0\underline{r}_{12} = {}^{01}\underline{T} {}^1\underline{r}_{12} .$$

Geschwindigkeit:

$${}^0\underline{\omega}_{02} = {}^0\underline{\omega}_{01} + {}^0\underline{\omega}_{12} \quad \text{mit} \quad {}^0\underline{\omega}_{12} = {}^{01}\underline{T} {}^1\underline{\omega}_{12} ,$$

$${}^0\underline{v}_{02} = {}^0\underline{v}_{01} + {}^0\underline{v}_{12} + {}^0\tilde{\underline{\omega}}_{01} {}^0\underline{r}_{12} \quad \text{mit} \quad {}^0\underline{v}_{12} = {}^{01}\underline{T} {}^1\underline{v}_{12} .$$

Beschleunigung:

$${}^0\underline{\alpha}_{02} = {}^0\underline{\alpha}_{01} + {}^0\underline{\alpha}_{12} + {}^0\tilde{\underline{\omega}}_{01} {}^0\underline{\omega}_{12} \quad \text{mit} \quad {}^0\underline{\alpha}_{12} = {}^{01}\underline{T} {}^1\underline{\alpha}_{12} ,$$

$${}^0\underline{a}_{02} = {}^0\underline{a}_{01} + {}^0\underline{a}_{12} + {}^0\tilde{\underline{\alpha}}_{01} {}^0\underline{r}_{12} + 2 {}^0\tilde{\underline{\omega}}_{01} {}^0\underline{v}_{12} + {}^0\tilde{\underline{\omega}}_{01} {}^0\tilde{\underline{\omega}}_{01} {}^0\underline{r}_{12}$$

$$\text{mit} \quad {}^0\underline{a}_{12} = {}^{01}\underline{T} {}^1\underline{a}_{12} .$$

## 6 Darstellung der allgemeinen Bewegung des starren Körpers mit Hilfe dualer Größen

Die allgemeine Bewegung des starren Körpers läßt sich entsprechend Abschnitt 3.3 aus der Drehbewegung um einen beliebigen Körperpunkt und der Bahnbewegung dieses Punktes im Raum aufbauen. Auch wenn diese Beschreibung prinzipiell für alle Anwendungen ausreichend ist, wird in diesem Abschnitt eine alternative Darstellung betrachtet, die sich stärker an den geometrischen Eigenschaften der räumlichen Bewegung orientiert. Während vom geometrischen Standpunkt die Fixpunktdrehung der sphärischen Geometrie zuzuordnen ist, kann die allgemeine Bewegung des starren Körpers als "Schraubbewegung" von Linien im Raum mit Methoden der Liniengeometrie beschrieben werden. Eine elegante mathematische Formulierung ist mit Hilfe der sogenannten dualen Größen (duale Zahlen, duale Vektoren, duale Tensoren, duale Matrizen) möglich, die im folgenden kurz eingeführt werden.

### 6.1. Duale Zahlen

Vergleichbar mit komplexen Zahlen sind duale Zahlen zweigliedrige Ausdrücke der Form

$$\hat{a} = a + \varepsilon a' \quad (6.1)$$

mit dem Realteil  $a$ , dem Dualteil  $a'$  und der Dualeinheit  $\varepsilon$  mit der Eigenschaft

$$\varepsilon^2 = 0. \quad (6.2)$$

#### 6.1.1 Rechenregeln

##### a) Summe/Differenz zweier dualer Zahlen

$$\hat{c} = \hat{a} \pm \hat{b} = (a + \varepsilon a') \pm (b + \varepsilon b') = (a \pm b) + \varepsilon (a' \pm b') = c \pm \varepsilon c'. \quad (6.3)$$

##### b) Produkt zweier dualer Zahlen

$$\hat{c} = \hat{a} \hat{b} = (a + \varepsilon a')(b + \varepsilon b') = ab + \varepsilon (ab' + a'b) = c + \varepsilon c'. \quad (6.4)$$

##### c) Quotient zweier dualer Zahlen

$$\hat{c} = \frac{\hat{a}}{\hat{b}} = \frac{a + \varepsilon a'}{b + \varepsilon b'} = \frac{a + \varepsilon a'}{b + \varepsilon b'} \cdot \frac{b - \varepsilon b'}{b - \varepsilon b'} = \frac{a}{b} + \varepsilon \frac{a'b - ab'}{b^2} = c + \varepsilon c', \quad b \neq 0. \quad (6.5)$$

### 6.1.2 Analytische Funktionen von dualen Variablen

In Anlehnung an die Definition von Funktionen reeller oder komplexer Variabler ordnet eine Funktion  $f$  jedem Wert einer dualen Variablen  $\hat{x} = x + \varepsilon x'$  (aus einer Menge  $M_x$  dualer Zahlen) je einen Wert der Variablen  $\hat{y} = y + \varepsilon y'$  (aus einer Menge  $M_y$  dualer Zahlen) zu:

$$\hat{y} = f(\hat{x}) \quad \text{bzw.} \quad y + \varepsilon y' = f(x + \varepsilon x') \quad (6.6)$$

Die Mengen  $M_x$  und  $M_y$  bilden den Definitions- bzw. Wertebereich der Funktion  $f$ .

Mit Gl. (6.6) wird jedem Zahlenpaar  $x, x'$  (mit  $x + \varepsilon x' \in M_x$ ) ein Paar  $y, y'$  (mit  $y + \varepsilon y' \in M_y$ ) zugeordnet, d.h.  $y, y'$  sind zunächst als Funktionen der beiden unabhängigen reellen Variablen  $x, x'$  anzusehen:

$$y = y(x, x'), \quad y' = y'(x, x'). \quad (6.7)$$

Damit kann man für  $\hat{y} = f(\hat{x})$  auch schreiben:

$$\hat{y} = f(\hat{x}) = f(x + \varepsilon x') = y(x, x') + \varepsilon y'(x, x'). \quad (6.8)$$

Eine Funktion  $f(\hat{x})$  ist genau dann in einem Punkt  $\hat{x} = \hat{x}_0$  analytisch, wenn sie durch eine in einem Kreis um  $\hat{x}_0$  konvergente Potenzreihe

$$f(\hat{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\hat{x} - \hat{x}_0)^k, \quad c_k \text{ reell,}$$

dargestellt werden kann. Mit der Umformung ( $\rightarrow$  binomischer Satz)

$$\begin{aligned} (\hat{x} - \hat{x}_0)^k &= ((x + \varepsilon x') - (x_0 + \varepsilon x'_0))^k = ((x - x_0) + \varepsilon(x' - x'_0))^k = \\ &= (x - x_0)^k + \varepsilon(x' - x'_0) k (x - x_0)^{k-1} + \varepsilon^2 \dots = 0 \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\hat{x} - \hat{x}_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k + \varepsilon (x' - x'_0) \sum_{k=0}^{\infty} c_k k (x - x_0)^{k-1} = \\ &= f(x) + \varepsilon x' \frac{df(x)}{dx}. \end{aligned}$$

Damit besitzen die beiden Anteile einer analytischen Funktion  $\hat{y} = f(\hat{x})$  die Form

$$y = f(x), \quad y' = x' \frac{df(x)}{dx}, \quad (6.9)$$

d.h. die Funktionen  $y(x, x')$  und  $y'(x, x')$  aus Gl. (6.7) genügen den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial x'}, \quad \text{und} \quad \frac{\partial y}{\partial x'} = 0, \quad (6.10)$$

vgl. CAUCHY-RIEMANN-Differentialgleichungen bei analytischen Funktionen komplexer Variabler.

Für eine Funktion mehrerer dualer Variablen  $\hat{y} = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$  mit  $\hat{x}_i = x_i + \varepsilon x'_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , läßt sich ebenfalls durch eine Reihenentwicklung zeigen, daß gilt:

$$\begin{aligned} \hat{y} = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varepsilon \sum_{i=1}^n x'_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= y + \varepsilon y'. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Die Ableitung einer analytischen Funktion  $f(\hat{x})$  nach der dualen Variablen  $\hat{x}$  lautet:

$$\frac{df(\hat{x})}{d\hat{x}} = \frac{df(x)}{dx} + \varepsilon x' \frac{d^2 f(x)}{dx^2}. \quad (6.12)$$



Beispiele:

$$\sin \hat{x} = \sin x + \varepsilon x' \cos x = - \frac{d \cos \hat{x}}{d \hat{x}}, \quad (6.13a)$$

$$\cos \hat{x} = \cos x - \varepsilon x' \sin x = \frac{d \sin \hat{x}}{d \hat{x}}, \quad (6.13b)$$

$$\sin(\hat{a} \hat{x}) = \sin(ax) + \varepsilon(a'x \cos(ax) + x'a \cos(ax)), \quad (6.13c)$$

$$\sqrt{\hat{x}} = \sqrt{x} + \varepsilon \frac{x'}{2\sqrt{x}}. \quad (6.13d)$$

## 6.2 Duale Vektoren

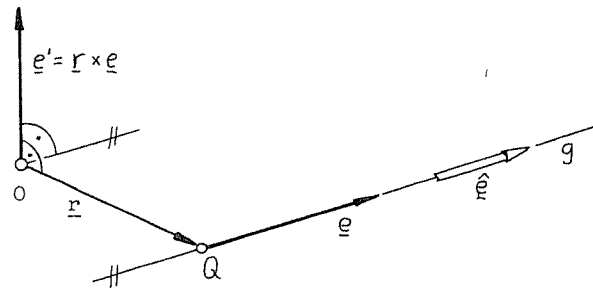
Duale Vektoren ermöglichen die vektorielle Darstellung von gerichteten Geraden im Raum und, in ihrer allgemeinen Form, die Darstellung von "Schrauben", d.h. gerichteten Geraden mit einer zugeordneten skalaren Größe (Steigung).

### 6.2.1 Dualer Einheitsvektor

Ein dualer Einheitsvektor

$$\hat{e} = \underline{e} + \varepsilon \underline{e}' = \underline{e} + \varepsilon \underline{r} \times \underline{e}, \quad |\underline{e}| = 1, \quad (6.14)$$

kennzeichnet eine *gerichtete Gerade*  $g$  im Raum. Er wird durch einen Doppelpfeil auf dieser Geraden gekennzeichnet. Im Realteil steht der normierte Richtungsvektor  $\underline{e}$  der Geraden, im Dualteil das *Moment*  $\underline{e}' = \underline{r} \times \underline{e} = \tilde{\underline{r}} \underline{e}$  von  $\underline{e}$  bezüglich eines frei wählbaren Punktes  $O$ . Hierbei ist  $\underline{r}$  ein Vektor von  $O$  zu einem beliebigen Punkt  $Q$  auf der Geraden  $g$ .



Zerlegt man die beiden Anteile  $\underline{e}$  und  $\underline{e}'$  in Komponenten eines orthonormierten Koordinatensystems  $K$  mit Ursprung im gewählten Punkt  $O$ , so stellen die insgesamt sechs Koordinaten die normierten PLÜCKER-Linienkoordinaten der Geraden in diesem System dar:

$$(e_x, e_y, e_z, e'_x, e'_y, e'_z). \quad (6.15)$$

Sie unterliegen den Nebenbedingungen

$$\underline{e}^T \underline{e} = 1: e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = |\underline{e}|^2 = 1,$$

$$\underline{e}^T \underline{e}' = 0: e_x e'_x + e_y e'_y + e_z e'_z = 0.$$

Damit sind zur Beschreibung einer gerichteten Geraden vier Parameter erforderlich.

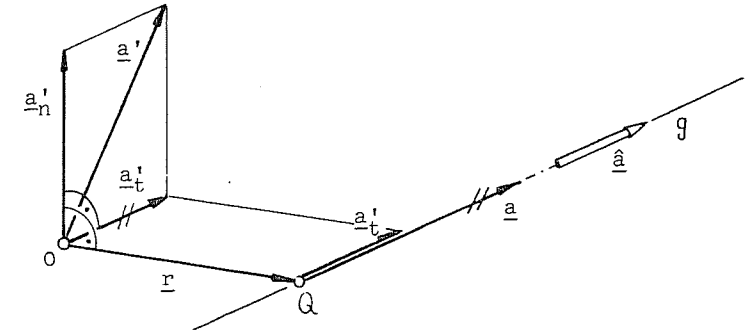
### 6.2.2 Allgemeiner dualer Vektor

Ein allgemeiner dualer Vektor

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \underline{a} + \varepsilon \underline{a}' = \underline{a} + \varepsilon (\underline{r} \times \underline{a} + h \underline{a}) = \\ &= \underline{a} + \varepsilon (\underline{a}'_n + \underline{a}'_t) \end{aligned} \quad (6.16)$$

kennzeichnet eine *Schraube*, d.h. eine *gerichtete Gerade*  $g$  mit einem zugeordneten skalaren Größe, der *Steigung*  $h$  (Darstellung ebenfalls mit Doppelpfeil). Im Realteil steht der Richtungsvektor  $\underline{a}$  der Geraden (nicht unbedingt normiert), im Dualteil das *Moment*  $\underline{a}'_n = \underline{r} \times \underline{a}$  von  $\underline{a}$  bezüglich eines Punktes  $O$  sowie ein Vektor  $\underline{a}'_t = h \underline{a}$ , der die Steigung  $h$  festlegt:

$$h = \frac{\underline{a}'_t \cdot \underline{a}}{\underline{a} \cdot \underline{a}} = \frac{\underline{a}' \cdot \underline{a}}{a^2}. \quad (6.17)$$



Zerlegt man die beiden Anteile  $\underline{a}$  und  $\underline{a}'$  in Komponenten eines orthonormierten Koordinatensystems  $K$  mit Ursprung im gewählten Punkt  $O$ , so stellen die insgesamt sechs Koordinaten die *Schraubenkoordinaten* der Schraube in diesem System dar:

$$(a_x, a_y, a_z, a'_x, a'_y, a'_z). \quad (6.18)$$

Sie unterliegen der Nebenbedingung

$$\underline{a}^T \underline{a} = a^2: a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2.$$

Damit sind zur Beschreibung einer Schraube fünf unabhängige Größen erforderlich.

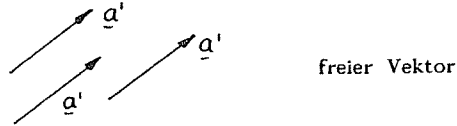
Ein allgemeiner dualer Vektor  $\hat{a}$  kann im Fall  $|\underline{a}| \neq 0$  wie folgt in einen dualen Betrag  $\hat{a}$  und einen dualen Einheitsvektor  $\hat{e}$  aufgespalten werden ( $\rightarrow$  Gl. (6.27)):

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \underline{a} + \varepsilon \underline{a}' = \underline{a} + \varepsilon (\underline{r} \times \underline{a} + h \underline{a}) = a (\underline{e} + \varepsilon (\underline{r} \times \underline{e} + h \underline{e})) = \\ &= (a(1 + \varepsilon h)) (\underline{e} + \varepsilon \underline{r} \times \underline{e}) = (a + \varepsilon h a) (\underline{e} + \varepsilon \underline{r} \times \underline{e}) \\ &= (a + \varepsilon \underline{a}') (\underline{e} + \varepsilon \underline{e}') \\ &= \hat{a} \hat{e}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Der duale Einheitsvektor ist damit ein Sonderfall des allgemeinen dualen Vektors mit  $a = 1$  und  $a' = 0$  (d.h.  $h = 0$ ).

Im Fall  $a = 0$  und  $a' \neq 0$  (d.h.  $\frac{1}{h} = 0$ ) verschwindet der Realteil. Es verbleibt die duale Darstellung eines freien Vektors  $\underline{a}'$ , der eine Raumrichtung kennzeichnet:

$$\hat{\underline{a}} = \underline{0} + \varepsilon \underline{a}' = \varepsilon \underline{a}' \quad (6.20)$$



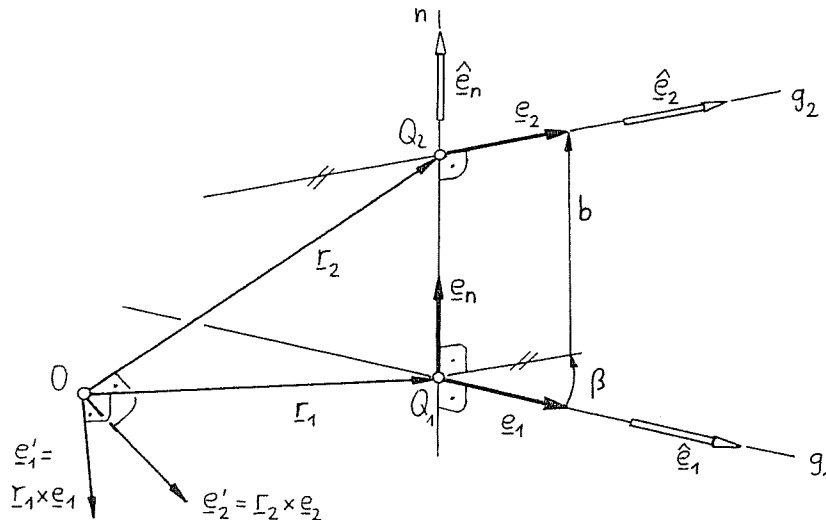
### 6.2.3 Rechenregeln für duale Vektoren

Alle Verknüpfungen gewöhnlicher Vektoren können auf duale Vektoren übertragen werden, wobei die dualen Vektoren innerhalb einer Gleichung denselben Bezugspunkt besitzen müssen. Es besteht eine vollkommene Analogie zu den entsprechenden Rechenoperationen mit gewöhnlichen Vektoren.

#### a) Summe zweier dualer Vektoren

$$\begin{aligned} \hat{\underline{b}} = \hat{\underline{a}}_1 + \hat{\underline{a}}_2 &= (\underline{a}_1 + \varepsilon \underline{a}'_1) + (\underline{a}_2 + \varepsilon \underline{a}'_2) = (\underline{a}_1 + \underline{a}_2) + \varepsilon (\underline{a}'_1 + \underline{a}'_2) = \\ &= \underline{b} + \varepsilon \underline{b}' \end{aligned} \quad (6.21)$$

#### b) Skalarprodukt zweier dualer Vektoren



Für die Interpretation des Skalarprodukts zweier dualer Vektoren  $\hat{\underline{a}}_1$  und  $\hat{\underline{a}}_2$  ist es günstig, die dualen Beträge entsprechend Gl. (6.19) abzuspalten:

$$\hat{\underline{a}}_1 \cdot \hat{\underline{a}}_2 = (\hat{\underline{a}}_1 \hat{\underline{e}}_1) \cdot (\hat{\underline{a}}_2 \hat{\underline{e}}_2) = (\hat{\underline{a}}_1 \hat{\underline{a}}_2) \hat{\underline{e}}_1 \cdot \hat{\underline{e}}_2 \quad (6.22)$$

Die Auswertung von  $\hat{\underline{e}}_1 \cdot \hat{\underline{e}}_2$  ergibt unter Berücksichtigung von  $\varepsilon^2 = 0$ :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{e}}_1 \cdot \hat{\underline{e}}_2 &= (\underline{e}_1 + \varepsilon \underline{e}'_1) \cdot (\underline{e}_2 + \varepsilon \underline{e}'_2) = \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 + \varepsilon (\underline{e}_1 \cdot \underline{e}'_2 + \underline{e}'_1 \cdot \underline{e}_2), \\ \rightarrow \text{Realteil: } \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 &= \cos \beta, \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Dualteil: } \underline{e}_1 \cdot \underline{e}'_2 + \underline{e}'_1 \cdot \underline{e}_2 &= (\underline{r}_1 \times \underline{e}_1) \cdot \underline{e}_2 + \underline{e}_1 \cdot (\underline{r}_2 \times \underline{e}_2) = \\ &= \underline{r}_1 \cdot (\underline{e}_1 \times \underline{e}_2) - \underline{r}_2 \cdot (\underline{e}_1 \times \underline{e}_2) = \\ &= -(\underline{r}_2 - \underline{r}_1) \cdot (\underline{e}_1 \times \underline{e}_2) = \\ &= -b \sin \beta, \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\rightarrow \text{Skalarprodukt: } \hat{\underline{e}}_1 \cdot \hat{\underline{e}}_2 = \cos \beta - \varepsilon b \sin \beta \stackrel{(6.13b)}{=} \cos \hat{\beta} \quad (6.25)$$

Hier ist  $\hat{\beta} = \beta + \varepsilon b$  der *duale Winkel* der beiden Geraden mit dem sphärischen Winkel  $\beta$  zwischen den Achsrichtungen, gemessen um das Gemeinlot  $\underline{e}_n$ , und dem kürzesten Kreuzungsabstand  $b$  entlang des Gemeinlots  $\underline{e}_n$ .

Damit ist z.B. auch:

- Skalarprodukt zweier allgemeiner dualer Vektoren:

$$\hat{\underline{a}}_1 \cdot \hat{\underline{a}}_2 = \hat{\underline{a}}_1 \hat{\underline{a}}_2 \cos \hat{\beta} \quad (6.26)$$

- Bestimmung des Betrags eines dualen Vektors, vgl. Gl. (6.19):

$$\begin{aligned} \sqrt{\hat{\underline{a}} \cdot \hat{\underline{a}}} &= \sqrt{(\underline{a} + \varepsilon \underline{a}') \cdot (\underline{a} + \varepsilon \underline{a}')} = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a} + \varepsilon 2 \underline{a} \cdot \underline{a}'} = \\ &\stackrel{(6.13d)}{=} \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} + \varepsilon \frac{2 \underline{a} \cdot \underline{a}'}{2 \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}}} \stackrel{(6.17)}{=} \underset{\uparrow}{a} + \varepsilon \underset{\uparrow}{h a} \underline{a}' = \hat{\underline{a}} \end{aligned} \quad (6.27)$$

#### c) Vektorprodukt zweier dualer Vektoren

Für die Interpretation des Vektorprodukts zweier dualer Vektoren  $\hat{\underline{a}}_1$  und  $\hat{\underline{a}}_2$  werden ebenfalls die dualen Beträge abgespalten:

$$\hat{\underline{a}}_1 \times \hat{\underline{a}}_2 = (\hat{\underline{a}}_1 \hat{\underline{e}}_1) \times (\hat{\underline{a}}_2 \hat{\underline{e}}_2) = (\hat{\underline{a}}_1 \hat{\underline{a}}_2) \hat{\underline{e}}_1 \times \hat{\underline{e}}_2 \quad (6.28)$$

Zur Auswertung von  $\hat{\underline{e}}_1 \times \hat{\underline{e}}_2$  werden die Ortsvektoren  $\underline{r}_1$  und  $\underline{r}_2 = \underline{r}_1 + b \underline{e}_n$  zu den Wirkungslinien  $g_1$  bzw.  $g_2$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit so gewählt, daß sie zu den Fußpunkten  $Q_1$  und  $Q_2$  des gemeinsamen Lotes  $n$  führen. Unter Berücksichtigung von  $\varepsilon^2 = 0$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{e}}_1 \times \hat{\underline{e}}_2 &= (\underline{e}_1 + \varepsilon \underline{e}'_1) \times (\underline{e}_2 + \varepsilon \underline{e}'_2) = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 + \varepsilon (\underline{e}_1 \times \underline{e}'_2 + \underline{e}'_1 \times \underline{e}_2), \\ \rightarrow \text{Realteil: } \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 &= \underline{e}_n \sin \beta, \end{aligned} \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow \text{Dualteil: } \underline{e}_1 \times \underline{e}_2' + \underline{e}_1' \times \underline{e}_2 &= (\underline{r}_1 \times \underline{e}_1) \times \underline{e}_2 + \underline{e}_1 \times (\underline{r}_2 \times \underline{e}_2) = \\
 &= \underline{e}_1 (\underline{r}_1 \cdot \underline{e}_2) - \underline{r}_1 (\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2) + \underline{r}_2 (\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2) - \underline{e}_2 (\underline{e}_1 \cdot \underline{r}_2) = \\
 &= \underbrace{(\underline{r}_2 - \underline{r}_1)}_{\underline{e}_n b} \underbrace{(\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2)}_{\cos \beta} + \underbrace{\underline{e}_1 (\underline{r}_1 \cdot \underline{e}_2) - \underline{e}_2 (\underline{e}_1 \cdot \underline{r}_2)}_{\substack{\uparrow \underline{r}_1 + b \underline{e}_n \\ \underline{r}_1 \times (\underline{e}_1 \times \underline{e}_2) \\ \underline{e}_n \sin \beta}} - \underline{e}_2 (\underline{e}_1 \cdot \underline{r}_2) = \\
 &= \underline{e}_n b \cos \beta + \underbrace{\underline{e}_1 (\underline{r}_1 \cdot \underline{e}_2) - \underline{e}_2 (\underline{e}_1 \cdot \underline{r}_2)}_{\substack{\uparrow \underline{r}_1 + b \underline{e}_n \\ \underline{r}_1 \times (\underline{e}_1 \times \underline{e}_2) \\ \underline{e}_n \sin \beta}} - \underline{e}_2 (\underline{e}_1 \cdot \underline{r}_2) = \\
 &= \underline{e}_n b \cos \beta + \underbrace{\underline{r}_1 \times \underline{e}_n}_{\underline{e}_n'} \sin \beta, \quad (6.30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow \text{Vektorprodukt: } \hat{\underline{e}}_1 \times \hat{\underline{e}}_2 &= \underline{e}_n \sin \beta + \varepsilon (\underline{e}_n b \cos \beta + \underline{e}_n' \sin \beta) = \\
 &= (\sin \beta + \varepsilon b \cos \beta) (\underline{e}_n + \varepsilon \underline{e}_n') = \\
 &= \sin \hat{\beta} \hat{\underline{e}}_n. \quad (6.31)
 \end{aligned}$$

Hierbei ist  $\hat{\underline{e}}_n$  der duale Einheitsvektor des Gemeinlots.

Damit ist z.B. auch:

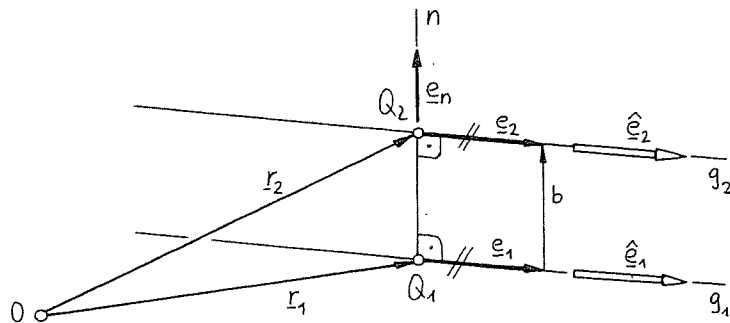
- Vektorprodukt zweier allgemeiner dualer Vektoren:

$$\hat{\underline{a}}_1 \times \hat{\underline{a}}_2 = \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{\underline{e}}_1 \times \hat{\underline{e}}_2 = \hat{a}_1 \hat{a}_2 \sin \hat{\beta} \hat{\underline{e}}_n. \quad (6.32)$$

- Vektorprodukt zweier paralleler dualer Einheitsvektoren ( $\cos \beta = 1$ ,  $\sin \beta = 0$ ):

$$\hat{\underline{e}}_1 \times \hat{\underline{e}}_2 = \underline{e}_n 0 + \varepsilon (\underline{e}_n b 1 + \underline{e}_n' 0) = \underline{0} + \varepsilon b \underline{e}_n. \quad (6.33)$$

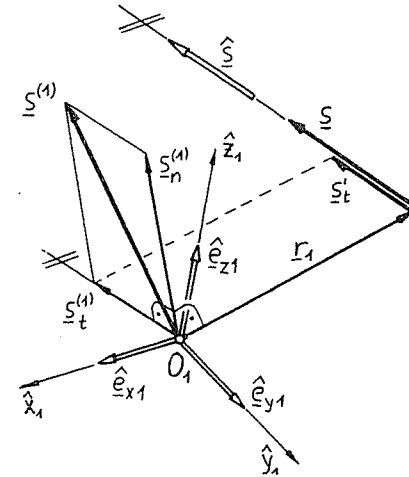
Dies ist der freie Richtungsvektor des entlang der beiden Geraden frei verschiebbaren Gemeinlots  $n$ , vgl. Gl. (6.20).



## 6.2.4 Komponentenzerlegung dualer Vektoren in einer dualen Vektorbasis

Drei duale Einheitsvektoren  $\hat{\underline{e}}_{x1}$ ,  $\hat{\underline{e}}_{y1}$  und  $\hat{\underline{e}}_{z1}$ , die sich in einem gemeinsamen Punkt  $O_1$  senkrecht schneiden, bilden eine *duale Vektorbasis*  $\hat{K}_1$ , deren Achsen mit  $\hat{x}_1$ ,  $\hat{y}_1$  und  $\hat{z}_1$  bezeichnet werden sollen. Es werden hier nur Rechtssysteme betrachtet. Jeder duale Vektor  $\hat{\underline{s}}$  lässt sich dann in Komponenten in Richtung dieser drei dualen Basisvektoren zerlegen:

$$\hat{\underline{s}} = {}^1\hat{s}_x \hat{\underline{e}}_{x1} + {}^1\hat{s}_y \hat{\underline{e}}_{y1} + {}^1\hat{s}_z \hat{\underline{e}}_{z1}. \quad (6.34)$$



In Analogie zur gewöhnlichen Vektoralgebra sind die einzelnen Summanden von Gl. (6.34) die dualen *Komponenten* von  $\hat{\underline{s}}$  in  $\hat{K}_1$ . Die dualen Projektionen  ${}^1\hat{s}_x = \hat{\underline{s}} \cdot \hat{\underline{e}}_{x1}$ ,  ${}^1\hat{s}_y = \hat{\underline{s}} \cdot \hat{\underline{e}}_{y1}$ ,  ${}^1\hat{s}_z = \hat{\underline{s}} \cdot \hat{\underline{e}}_{z1}$  sind die *dualen Koordinaten* des Vektors  $\hat{\underline{s}}$  in  $\hat{K}_1$ , die für die praktische Rechnung in einer  $(3 \times 1)$ -Spaltenmatrix mit dualen Elementen angeordnet werden:

$${}^1\hat{\underline{s}} = \begin{bmatrix} {}^1\hat{s}_x \\ {}^1\hat{s}_y \\ {}^1\hat{s}_z \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad {}^1\hat{\underline{s}} = \begin{bmatrix} {}^1\hat{s}_x \\ {}^1\hat{s}_y \\ {}^1\hat{s}_z \end{bmatrix}. \quad (6.35)$$

Unter Verwendung der Schreibweise "(1)" im Dualteil anstelle von "." zur expliziten Kennzeichnung des Bezugspunkts  $O_1$  ergibt die Aufspaltung in Real- und Dualteil

$$\begin{aligned}
 {}^1\hat{\underline{s}} &= \begin{bmatrix} {}^1\hat{s}_x \\ {}^1\hat{s}_y \\ {}^1\hat{s}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} s_x^{(1)} \\ s_y^{(1)} \\ s_z^{(1)} \end{bmatrix} = \\
 &= {}^1\underline{s} + \varepsilon {}^1\underline{s}^{(1)}. \quad (6.36)
 \end{aligned}$$

Im Dualteil stehen die Koordinaten des Dualteils von  $\hat{s}$  für den Bezugspunkt  $O_1$  im System  $K_1$ . Dies läßt sich z.B. anhand der x-Koordinate zeigen:

$$\begin{aligned} {}^1\hat{s}_x &= \hat{s} \cdot \hat{e}_{x1} = \underline{s} \cdot \underline{e}_{x1} + \varepsilon (\underline{s}^{(1)} \cdot \underline{e}_{x1} + \underline{s} \cdot \underline{e}_{x1}^{(1)}) = \\ &= {}^1s_x + \varepsilon {}^1s_x^{(1)} \quad \underline{0}, \text{ da } O_1 \text{ Bezugspunkt} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Die Koordinatendarstellung eines dualen Vektors in einer dualen Vektorbasis  $\hat{K}_1$  beinhaltet damit:

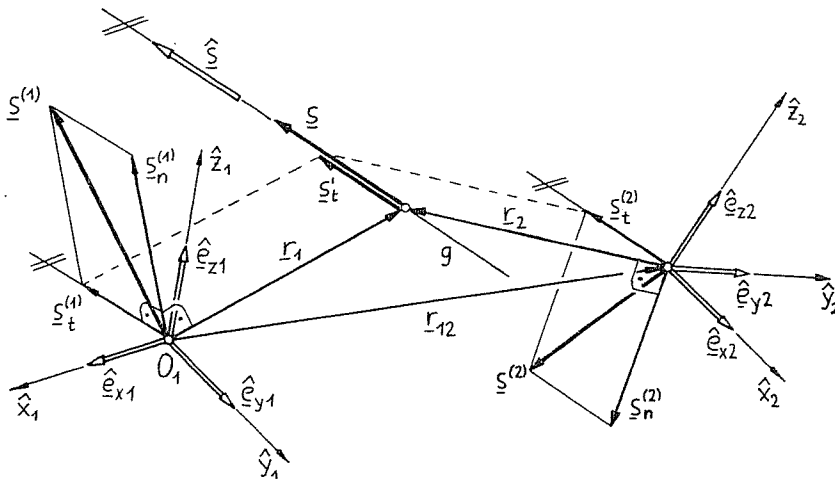
1. Festlegung des Ursprungs  $O_1$  als Referenzpunkt für den Dualteil  $\underline{s}^{(1)}$ .
2. Festlegung der Richtungen für die Komponentenzerlegung des Realteils  $\underline{s}$  und des Dualteils  $\underline{s}^{(1)}$ .

### 6.2.5 Transformation von dualen Vektorkoordinaten

Für den Zusammenhang zwischen den Koordinaten desselben Vektors in unterschiedlichen Koordinatensystemen gilt in Analogie zur gewöhnlichen Vektoralgebra:

$$\begin{aligned} {}^1 \begin{bmatrix} \hat{s}_x \\ \hat{s}_y \\ \hat{s}_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{e}_{x1} \cdot \hat{e}_{x2} & \hat{e}_{x1} \cdot \hat{e}_{y2} & \hat{e}_{x1} \cdot \hat{e}_{z2} \\ \hat{e}_{y1} \cdot \hat{e}_{x2} & \hat{e}_{y1} \cdot \hat{e}_{y2} & \hat{e}_{y1} \cdot \hat{e}_{z2} \\ \hat{e}_{z1} \cdot \hat{e}_{x2} & \hat{e}_{z1} \cdot \hat{e}_{y2} & \hat{e}_{z1} \cdot \hat{e}_{z2} \end{bmatrix} {}^2 \begin{bmatrix} \hat{s}_x \\ \hat{s}_y \\ \hat{s}_z \end{bmatrix} \\ {}^1\hat{s} &= {}^{12}\hat{T} {}^2\hat{s} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Die *duale Transformationsmatrix*  ${}^{12}\hat{T}$  transformiert damit Koordinaten eines beliebigen Vektors  $\hat{s}$  vom System  $\hat{K}_2$  in das System  $\hat{K}_1$ .



Eigenschaften der Transformationsmatrix  ${}^{12}\hat{T}$ :

- In den Spaltenvektoren von  ${}^{12}\hat{T}$  stehen die Koordinaten der Einheitsvektoren  $\hat{e}_{x2}, \hat{e}_{y2}, \hat{e}_{z2}$  im System  $\hat{K}_1$ , in den Zeilenvektoren die Koordinaten der Einheitsvektoren  $\hat{e}_{x1}, \hat{e}_{y1}, \hat{e}_{z1}$  im System  $\hat{K}_2$ :

$$\begin{aligned} {}^{12}\hat{T} &= \begin{bmatrix} {}^1\hat{e}_{x2} & {}^1\hat{e}_{y2} & {}^1\hat{e}_{z2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} {}^1e_{x2} & {}^1e_{y2} & {}^1e_{z2} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} {}^1\tilde{r}_{12} {}^1e_{x2} & {}^1\tilde{r}_{12} {}^1e_{y2} & {}^1\tilde{r}_{12} {}^1e_{z2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} {}^1e_{x2} & {}^1e_{y2} & {}^1e_{z2} \end{bmatrix} + \varepsilon {}^1\tilde{r}_{12} \begin{bmatrix} {}^1e_{x2} & {}^1e_{y2} & {}^1e_{z2} \end{bmatrix} = \\ &= {}^{12}\underline{T} + \varepsilon {}^1\tilde{r}_{12} {}^{12}\underline{T} = \\ &= {}^{12}\underline{T} + \varepsilon {}^{12}\underline{T}^* \end{aligned} \quad (6.39)$$

Die Auswertung von Gl. (6.38) liefert damit:

$$\begin{aligned} {}^1\hat{s} &= {}^{12}\hat{T} {}^2\hat{s} = \\ &= ({}^{12}\underline{T} + \varepsilon {}^1\tilde{r}_{12} {}^{12}\underline{T}) ({}^2s + \varepsilon {}^2s^{(2)}) = \\ &= {}^{12}\underline{T} {}^2s + \varepsilon ({}^1\tilde{r}_{12} {}^{12}\underline{T} {}^2s + {}^{12}\underline{T} {}^2s^{(2)}) = \\ &= {}^1s + \varepsilon ({}^1\tilde{r}_{12} {}^1s + {}^1s^{(2)}) = \\ &= {}^1s + \varepsilon {}^1s^{(1)} \end{aligned} \quad (6.40)$$

- Eine Änderung des Bezugspunkts ohne Drehung des Koordinatensystems läßt sich durch eine reine Parallelverschiebung von  $O_2$  nach  $O_1$  darstellen. Mit  ${}^{12}\underline{T} = \underline{I}$  gilt ausgehend von Gl. (6.40):

$$\begin{aligned} {}^1\hat{s} &= (\underline{I} + \varepsilon {}^1\tilde{r}_{12}) ({}^1s + \varepsilon {}^1s^{(2)}) = {}^1s + \varepsilon ({}^1\tilde{r}_{12} {}^1s + {}^1s^{(2)}) = \\ &= {}^1s + \varepsilon {}^1s^{(1)} \end{aligned} \quad (6.41)$$

- Bei der Transformation bleiben die folgenden **Invarianten** der Vektorschraube erhalten:

\* Länge und Richtung von  $\underline{s}$ .

\* Der parallel zu  $\underline{s}$  liegende Anteil des Dualteils und damit die Steigung  $h$ :

$$\underline{s}_t^{(1)} = \underline{s}_t^{(2)} = \underline{s}_t' = h \underline{s} \quad (6.42)$$

\* Die Lage der Schraubachse, ausgedrückt über den senkrecht auf  $\underline{s}$  stehenden Anteil des Dualteils (Moment von  $\underline{s}$ ):

$$\underline{s}_n^{(1)} = \underline{r}_1 \times \underline{s} = \underline{s}_n^{(2)} + \underline{r}_{12} \times \underline{s} \quad (6.43a)$$

$$\underline{s}_n^{(2)} = \underline{r}_2 \times \underline{s} = \underline{s}_n^{(1)} + \underline{r}_{21} \times \underline{s} \quad (6.43b)$$

- Die duale Orthogonalitätsbedingung lautet:

$$\begin{aligned} {}^{12}\hat{\underline{T}} {}^{12}\hat{\underline{T}}^T &= \left( {}^{12}\underline{T} + \varepsilon \begin{matrix} 1\tilde{\underline{F}}_{12} & {}^{12}\underline{T} \end{matrix} \right) \left( {}^{12}\underline{T} + \varepsilon \begin{matrix} 1\tilde{\underline{F}}_{12} & {}^{12}\underline{T} \end{matrix} \right)^T = \\ &= {}^{12}\underline{T} {}^{12}\underline{T}^T + \varepsilon \left( \begin{matrix} 1\tilde{\underline{F}}_{12} & {}^{12}\underline{T} \end{matrix} \begin{matrix} {}^{12}\underline{T}^T & 1\tilde{\underline{F}}_{12}^T \end{matrix} + \begin{matrix} {}^{12}\underline{T} & 1\tilde{\underline{F}}_{12} \end{matrix} \begin{matrix} {}^{12}\underline{T}^T & 1\tilde{\underline{F}}_{12}^T \end{matrix} \right) = \\ &= \underline{\underline{I}} + \varepsilon \underline{\underline{Q}}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

- Aus  ${}^{12}\hat{\underline{T}}$  ergibt sich durch Transponieren die Matrix  ${}^{21}\hat{\underline{T}}$  der umgekehrten Transformation:

$$\begin{aligned} {}^{12}\hat{\underline{T}}^T &= {}^{12}\underline{T}^T + \varepsilon \left( \begin{matrix} 1\tilde{\underline{F}}_{12} & {}^{12}\underline{T} \end{matrix} \right)^T = {}^{12}\underline{T}^T + \varepsilon \begin{matrix} {}^{12}\underline{T}^T & 1\tilde{\underline{F}}_{12}^T \end{matrix} = \\ &= {}^{21}\underline{T} + \varepsilon \begin{matrix} {}^{21}\underline{T} & 1\tilde{\underline{F}}_{21} \end{matrix} = \\ &= {}^{21}\underline{T} + \varepsilon \begin{matrix} {}^{21}\underline{T} & 2\tilde{\underline{F}}_{21} \end{matrix} {}^{21}\underline{T} \\ &= {}^{21}\hat{\underline{T}}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

- Die Transformation (6.40) kann auch in reeller Darstellung mit einer  $(6 \times 6)$ -Matrix ausgedrückt werden:

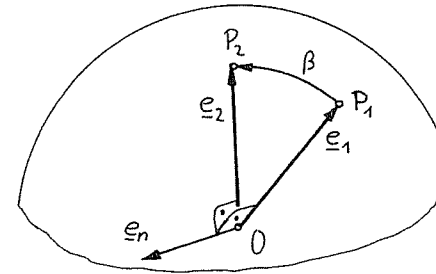
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{\underline{s}} \\ \underline{\underline{s}}^{(1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}^{12}\underline{T} & \underline{\underline{Q}} \\ {}^{12}\underline{T}^T & {}^{12}\underline{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{s}} \\ \underline{\underline{s}}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{12}\underline{T} & \underline{\underline{Q}} \\ 1\tilde{\underline{F}}_{12} & {}^{12}\underline{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{s}} \\ \underline{\underline{s}}^{(2)} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} {}^{12}\underline{T} & \underline{\underline{Q}} \\ 1\tilde{\underline{F}}_{12} & {}^{12}\underline{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{s}} \\ \underline{\underline{s}}^{(2)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

### 6.3 Übertragungsprinzip

In der gewöhnlichen Vektoralgebra werden freie Vektoren betrachtet, die vom geometrischen Standpunkt Raumrichtungen beschreiben. Eine Raumrichtung läßt sich durch einen freien Einheitsvektor  $\underline{e}$  oder - gleichwertig - durch einen Punkt P auf der Oberfläche einer Einheitskugel festlegen. Damit stellt die Algebra freier Vektoren zugleich ein Hilfsmittel zur Beschreibung der zweidimensionalen Geometrie auf der Kugeloberfläche, der sphärischen Geometrie, dar.

In derselben Weise ist die in den vorhergehenden Abschnitten eingeführte Algebra dualer Vektoren ein Hilfsmittel zur Beschreibung der Liniengeometrie. Ihr Grundelement ist die gerichtete Gerade im Raum, die durch einen dualen Einheitsvektor  $\hat{\underline{e}}$  repräsentiert wird. Damit ergibt sich die folgende Gegenüberstellung:

#### Sphärische Geometrie



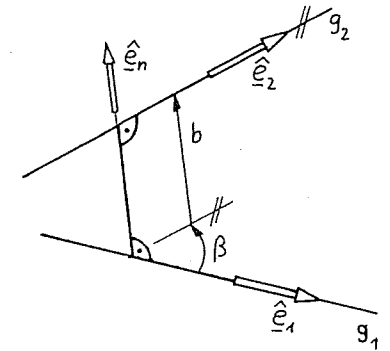
Einheitsvektoren  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$

Punkte  $P_1, P_2$  auf der Einheitskugel

Sphärischer Winkel  $\beta$

von  $P_1$  nach  $P_2$  um  $\underline{e}_n$

#### Liniengeometrie



Duale Einheitsvektoren  $\hat{\underline{e}}_1, \hat{\underline{e}}_2$

Gerichtete Geraden  $g_1, g_2$  im Raum

Dualer Winkel  $\hat{\beta} = \beta + \varepsilon b$   
von  $g_1$  nach  $g_2$  um  $\hat{\underline{e}}_n$

In den vorhergehenden Abschnitten wurde die vollkommene Analogie zwischen Beziehungen der gewöhnlichen und der dualen Vektoralgebra gezeigt. Für alle Operationen mit dualen Vektoren galt dabei:

- Der Realteil gibt eine Beziehung der gewöhnlichen Vektoralgebra bzw. der sphärischen Geometrie an.

- Der Dualteil erweitert die Gültigkeit dieser Beziehung für die Liniengeometrie.

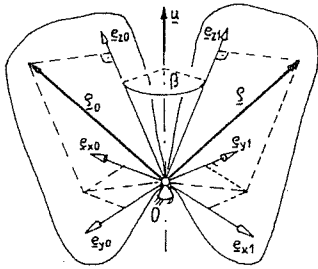
Dies begründet ein auf KOTELNIKOV (1895) und STUDY (1903) zurückgehendes Übertragungsprinzip:

Sämtliche Beziehungen der sphärischen Geometrie können durch Einsetzen dualer Größen ("duale Erweiterung") auf die Liniengeometrie übertragen werden.

In der Kinematik kann dieses Übertragungsprinzip dazu benutzt werden, sämtliche Beziehungen der Drehung eines starren Körpers um einen Fixpunkt aus den Abschnitten 3.2 und 4 durch duale Erweiterung auf die allgemeine räumliche Bewegung (Schraubbewegung) zu übertragen. Dies ist in einer Gegenüberstellung von Fixpunktdrehung und Schraubbewegung zusammengefaßt.

## 6.4 Gegenüberstellung von Fixpunktdrehung und Schraubbewegung

### Fixpunktdrehung



**Drehung**  
der körperfesten Vektorbasis:  
Ausgangslage  $\hat{K}_0 \rightarrow$  Endlage  $\hat{K}_1$

**Drehzeiger**  ${}^0\hat{u}, \beta$

Achse  $\hat{u}$  der endlichen Drehung

Drehwinkel  $\beta$

Drehung eines körperfesten Vektors

$${}^0\hat{p} = {}^0(\cos\beta \hat{I} + \sin\beta \hat{u} + (1 - \cos\beta) \hat{u}\hat{u}^T) {}^0\hat{p}_0$$

$$= {}^0\hat{R}(\hat{u}, \beta) {}^0\hat{p}_0$$

Drehtensor

Koordinatentransformation

$${}^0\hat{p} = {}^{01}\hat{T}(\hat{u}, \beta) {}^1\hat{p} = {}^0\hat{R}(\hat{u}, \beta) {}^1\hat{p}$$

**EULER-Parameter (Quaternionen)**

$$\hat{q}(\hat{u}, \beta) = \hat{q}_0 + \hat{q} = \cos \frac{\beta}{2} + {}^0\hat{u} \sin \frac{\beta}{2}$$

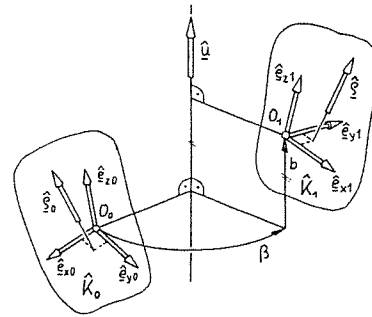
Drehung eines körperfesten Vektors

$${}^0\hat{p} = \hat{q} {}^0\hat{p}_0 \hat{q}^{-1}$$

Koordinatentransformation

$${}^0\hat{p} = {}^{01}\hat{q} {}^1\hat{p} {}^{01}\hat{q}^{-1} \quad \text{mit} \quad {}^{01}\hat{q} = {}^{10}\hat{q}$$

### Schraubbewegung



$\rightarrow$  **Schraubung**  
der dualen körperfesten Vektorbasis:  
Ausgangslage  $\hat{K}_0 \rightarrow$  Endlage  $\hat{K}_1$

$\rightarrow$  **Dualer Drehzeiger**  ${}^0\hat{u}, \hat{\beta}$

Achse  $\hat{u}$  der endlichen Schraubung

Dualer "Schraubwinkel"  $\hat{\beta} = \beta + \varepsilon b$  (6.47)

Schraubung eines körperf. dualen Vektors

$${}^0\hat{p} = {}^0(\cos\hat{\beta} \hat{I} + \sin\hat{\beta} \hat{u} + (1 - \cos\hat{\beta}) \hat{u}\hat{u}^T) {}^0\hat{p}_0$$

$$= {}^0\hat{R}(\hat{u}, \hat{\beta}) {}^0\hat{p}_0$$

dualer Schraubtensor (6.48)

Duale Koordinatentransformation

$${}^0\hat{p} = {}^{01}\hat{T}(\hat{u}, \hat{\beta}) {}^1\hat{p} = {}^0\hat{R}(\hat{u}, \hat{\beta}) {}^1\hat{p} \quad (6.49)$$

$\rightarrow$  **Duale EULER-Param. (duale Quaternionen)**

$$\hat{q}(\hat{u}, \hat{\beta}) = \hat{q}_0 + \hat{q} = \cos \frac{\hat{\beta}}{2} + {}^0\hat{u} \sin \frac{\hat{\beta}}{2} \quad (6.50)$$

Schraubung eines körperf. dualen Vektors

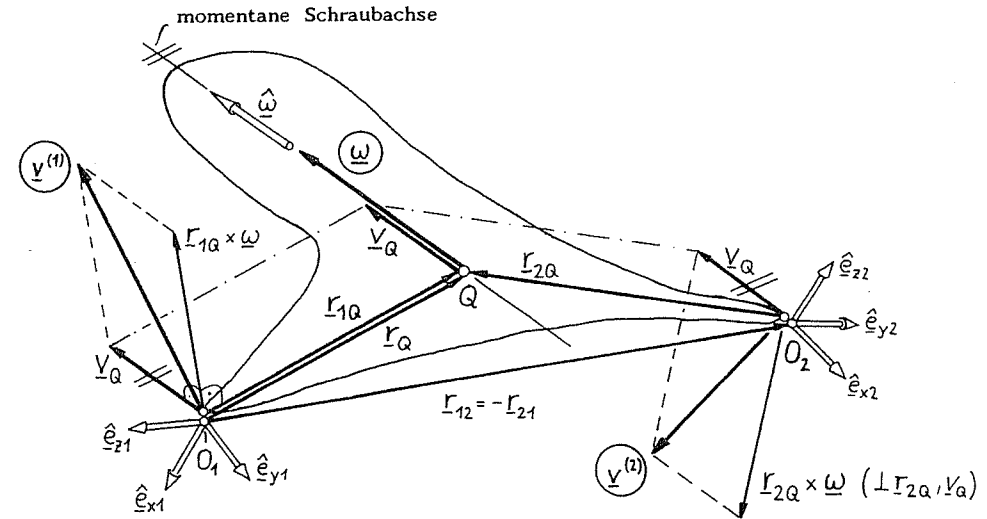
$${}^0\hat{p} = \hat{q} {}^0\hat{p}_0 \hat{q}^{-1} \quad (6.51)$$

Duale Koordinatentransformation

$${}^0\hat{p} = {}^{01}\hat{q} {}^1\hat{p} {}^{01}\hat{q}^{-1} \quad \text{mit} \quad {}^{01}\hat{q} = {}^{10}\hat{q} \quad (6.52)$$

## 6.5 Duale Darstellung von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen

### 6.5.1 Geschwindigkeitsschraube



Betrachtet wird die Bewegung eines starren Körpers relativ zu einer beliebigen (ruhenden oder bewegten) dualen Vektorbasis  $\hat{K}_1$  (Ursprung  $O_1$ , duale Einheitsvektoren  $\hat{e}_{x1}, \hat{e}_{y1}, \hat{e}_{z1}$ ) mit der Winkelgeschwindigkeit  $\underline{\omega}$  und der Translationsgeschwindigkeit  $\underline{v}_Q$  eines Körperpunktes  $Q$  auf der momentanen Schraubachse, vgl. Abschnitt 3.3.2. Die Geschwindigkeitsschraube  $(\underline{\omega}, \underline{v}_Q)$  kann wie folgt als dualer Vektor in  $\hat{K}_1$  dargestellt werden:

$${}^1\hat{\omega} = {}^1\underline{\omega} + \varepsilon ({}^1\underline{r}_Q \times \underline{\omega} + \underline{v}_Q) \quad (6.53)$$

Hier ist  $\underline{r}_Q$  der Vektor vom Bezugspunkt  $O_1$  nach  $Q$ .

Zur Interpretation des Dualteils wird die Geschwindigkeit  $\underline{v}_Q$  mit Hilfe der Starrkörperbeziehung (3.26) über die Geschwindigkeit  $\underline{v}^{(1)}$  des in der betrachteten Position momentan mit  $O_1$  zusammenfallenden Körperpunktes (gegebenenfalls ist der der Körper gedanklich so zu erweitern, daß er sich über  $O_1$  erstreckt) ausgedrückt:

$$\underline{v}_Q = \dot{\underline{r}}_Q = \underline{v}^{(1)} + \dot{\underline{r}}_{1Q} = \underline{v}^{(1)} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{1Q} \quad (6.54)$$

Hierbei ist  $\underline{r}_{1Q}$  der körperfeste Verbindungsvektor von dem mit  $O_1$  momentan zusammenfallenden Körperpunkt nach  $Q$ . Der Vektor  $\underline{r}_{1Q}$  fällt deswegen momentan mit  $\underline{r}_Q$  zusammen:

$$\underline{r}_{1Q} = \underline{r}_Q \quad \left( \text{aber} \quad \dot{\underline{r}}_{1Q} = \underline{\omega} \times \underline{r}_{1Q} \neq \dot{\underline{r}}_Q = \underline{v}_Q ! \right) \quad (6.55)$$

Einsetzen von (6.54) und (6.55) in den Dualteil von (6.53) liefert:

$${}^1\hat{\omega} = {}^1\underline{\omega} + \varepsilon ({}^1\underline{r}_{1Q} \times \underline{\omega} + \underline{v}^{(1)} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{1Q}) = {}^1\underline{\omega} + \varepsilon {}^1\underline{v}^{(1)} \quad (6.56)$$

Damit  $\hat{\underline{\omega}}$  ein "echter" dualer Vektor ist, muß die Transformationsbeziehung (6.40) für den Übergang auf eine andere duale Vektorbasis  $\hat{K}_2$  (Ursprung  $O_2$ , duale Einheitsvektoren  $\hat{\underline{e}}_{x2}, \hat{\underline{e}}_{y2}, \hat{\underline{e}}_{z2}$ ) gelten:

$$\begin{aligned} {}^2\hat{\underline{\omega}} &= {}^{21}\hat{\underline{T}} {}^1\hat{\underline{\omega}} = (\underline{I} + \varepsilon {}^2\tilde{\underline{r}}_{21}) {}^{21}\underline{T} {}^1(\underline{\omega} + \varepsilon \underline{v}^{(1)}) = \\ &= {}^2\underline{\omega} + \varepsilon {}^2(\underline{v}^{(1)} + \frac{\underline{r}_{21} \times \underline{\omega}}{\underline{\omega} \times \underline{r}_{12}}) = {}^2\underline{\omega} + \varepsilon {}^2\underline{v}^{(2)}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Hierbei ist  $\underline{v}^{(2)} = \underline{\omega} \times \underline{r}_{12}$  die Geschwindigkeit des momentan mit  $O_2$  zusammenfallenden Körperpunktes relativ zu  $K_1$ . Da  ${}^2\hat{\underline{\omega}}$  wieder die Form eines dualen Vektors entsprechend  ${}^1\hat{\underline{\omega}}$  hat, ist die Geschwindigkeitsschraube ein "echter" dualer Vektor.

### 6.5.2 Beschleunigungsschraube

Der Körper soll die Winkelbeschleunigung  $\dot{\underline{\omega}} = \underline{\alpha}$  und die Beschleunigung  $\dot{\underline{v}}_Q = \underline{a}_Q$  des Punktes  $Q$  relativ zu  $K_1$  besitzen. Die Zeitableitung von Gl. (6.53) liefert dann:

$${}^1\dot{\hat{\underline{\omega}}} = {}^1\dot{\underline{\omega}} + \varepsilon {}^1(\dot{\underline{r}}_Q \times \underline{\omega} + \underline{r}_Q \times \dot{\underline{\omega}} + \dot{\underline{v}}_Q). \quad (6.58)$$

Die Beschleunigung  $\dot{\underline{v}}_Q = \underline{a}_Q$  von  $Q$  läßt sich durch die Zeitableitung von Gl. (6.54) ausdrücken. Hierbei ist  $\underline{v}^{(1)} = \underline{a}^{(1)}$  die Beschleunigung des momentan mit  $O_1$  zusammenfallenden Körperpunktes:

$$\dot{\underline{v}}_Q = \underline{v}^{(1)} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{1Q} + \underline{\omega} \times \dot{\underline{r}}_{1Q} \quad (6.59)$$

Einsetzen von (6.54), (6.55) und (6.59) in den Dualteil von (6.58) führt auf:

$$\begin{aligned} {}^1\dot{\hat{\underline{\omega}}} &= {}^1\dot{\underline{\omega}} + \varepsilon {}^1((\underline{v}^{(1)} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{1Q}) \times \underline{\omega} + \underline{r}_{1Q} \times \dot{\underline{\omega}} + \dot{\underline{v}}_Q + \underline{\omega} \times \underline{r}_{1Q} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{1Q})) = \\ &= {}^1\dot{\underline{\omega}} + \varepsilon {}^1(\underline{v}^{(1)} + \underline{v}^{(1)} \times \underline{\omega}) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ {}^1\dot{\underline{\alpha}} &= {}^1\dot{\underline{\alpha}} + \varepsilon {}^1(\underline{a}^{(1)} + \underline{v}^{(1)} \times \underline{\omega}). \end{aligned} \quad (6.60)$$

Dies ist die duale Darstellung der "Beschleunigungsschraube". Im Dualteil steht neben der Beschleunigung  $\underline{a}^{(1)}$  des momentan mit  $O_1$  zusammenfallenden Körperpunktes der Zusatzterm  $\underline{v}^{(1)} \times \underline{\omega}$ .

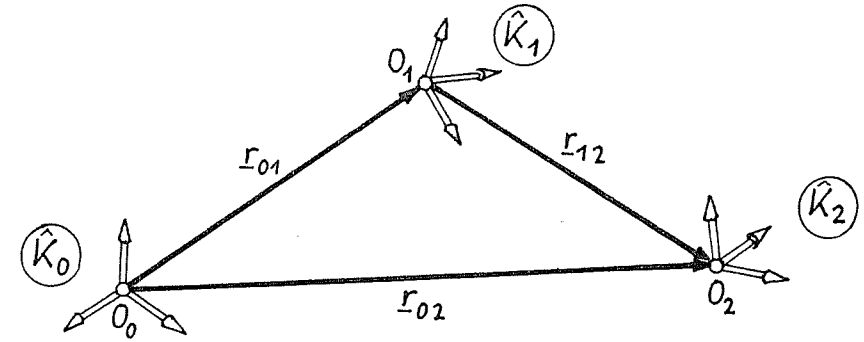
Damit  $\hat{\underline{\alpha}}$  ein "echter" dualer Vektor ist, muß ebenfalls die Transformationsbeziehung (6.40) für den Übergang auf eine andere duale Vektorbasis  $K_2$  gelten:

$$\begin{aligned} {}^2\hat{\underline{\alpha}} &= {}^{21}\hat{\underline{T}} {}^1\hat{\underline{\alpha}} = (\underline{I} + \varepsilon {}^2\tilde{\underline{r}}_{21}) {}^{21}\underline{T} {}^1(\underline{\alpha} + \varepsilon (\underline{a}^{(1)} + \underline{v}^{(1)} \times \underline{\omega})) = \\ &= {}^2\underline{\alpha} + \varepsilon {}^2(\underline{a}^{(1)} + \underline{v}^{(1)} \times \underline{\omega} + \frac{\underline{r}_{21} \times \underline{\alpha}}{\underline{\alpha} \times \underline{r}_{12}}) = \\ &= {}^2\underline{\alpha} + \varepsilon {}^2(\underline{a}^{(1)} + \underline{\alpha} \times \underline{r}_{12} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{12}) + \underline{v}^{(2)} \times \underline{\omega}), \\ {}^2\hat{\underline{\alpha}} &= {}^2\underline{\alpha} + \varepsilon {}^2(\underline{a}^{(2)} + \underline{v}^{(2)} \times \underline{\omega}). \end{aligned} \quad (6.61)$$

Hier ist  $\underline{a}^{(2)}$  die Beschleunigung des momentan mit  $O_2$  zusammenfallenden Körperpunktes relativ zu  $K_1$ . Da  ${}^2\hat{\underline{\alpha}}$  in dieselbe Form wie  ${}^1\hat{\underline{\alpha}}$  hat, ist auch die Beschleunigungsschraube ein "echter" dualer Vektor.

## 6.6 Zusammensetzung zweier Bewegungen in dualer Darstellung

Entsprechend der Aufgabenstellung von Abschnitt 5.2 werden die relativen Bewegungen von drei dualen Basissystemen  $\hat{K}_0, \hat{K}_1$  und  $\hat{K}_2$  betrachtet. Die beiden Bewegungen von  $\hat{K}_1$  relativ zu  $\hat{K}_0$  sowie von  $\hat{K}_2$  relativ zu  $\hat{K}_1$  seien auf Lage-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsebene wie folgt gegeben.



### a) Bewegung von $\hat{K}_1$ relativ zu $\hat{K}_0$

Lage:

Duale Transformationsmatrix:

$${}^{01}\hat{\underline{T}} = {}^{01}\underline{T} + \varepsilon {}^0\tilde{\underline{r}}_{01} {}^{01}\underline{T}. \quad (6.62)$$

Geschwindigkeit:

Geschwindigkeitsschraube der Bewegung von  $\hat{K}_1$  relativ zu  $\hat{K}_0$ :

$${}^0\hat{\underline{\omega}}_{01} = {}^0\underline{\omega}_{01} + \varepsilon {}^0\underline{v}_{01}^{(0)}. \quad (6.63)$$

$\underline{\omega}_{01}$  - Winkelgeschwindigkeit von  $\hat{K}_1$  relativ zu  $\hat{K}_0$ ,

$\underline{v}_{01}^{(0)}$  - Geschwindigkeit des momentan mit  $O_0$  zusammenfallenden Punktes auf  $\hat{K}_1$  relativ zu  $\hat{K}_0$ .

Beschleunigung:

Beschleunigungsschraube der Bewegung von  $\hat{K}_1$  relativ zu  $\hat{K}_0$ :

$${}^0\hat{\underline{\alpha}}_{01} = {}^0\underline{\alpha}_{01} + \varepsilon {}^0(\underline{a}_{01}^{(0)} + \underline{v}_{01} \times \underline{\omega}_{01}), \quad (6.64)$$

$\underline{\alpha}_{01}$  - Winkelbeschleunigung von  $\hat{K}_1$  relativ zu  $\hat{K}_0$ ,

$\underline{a}_{01}^{(0)}$  - Beschleunigung des momentan mit  $O_0$  zusammenfallenden Punktes auf  $\hat{K}_1$  relativ zu  $\hat{K}_0$ .

b) Bewegung von  $\hat{K}_2$  relativ zu  $\hat{K}_1$ Lage:

Duale Transformationsmatrix:

$${}^{12}\hat{T} = {}^{12}T + \varepsilon {}^1\tilde{r}_{12} {}^{12}T \quad (6.65)$$

Geschwindigkeit:Geschwindigkeitsschraube der Bewegung von  $\hat{K}_2$  relativ zu  $\hat{K}_1$ :

$${}^1\hat{\omega}_{12} = {}^1\omega_{12} + \varepsilon {}^1\tilde{v}_{12}^{(1)} \quad (6.66)$$

 $\omega_{12}$  - Winkelgeschwindigkeit von  $\hat{K}_2$  relativ zu  $\hat{K}_1$ , $\tilde{v}_{12}^{(1)}$  - Geschwindigkeit des momentan mit  $O_1$  zusammenfallenden Punkts auf  $\hat{K}_2$  relativ zu  $\hat{K}_1$ .Beschleunigung:Beschleunigungsschraube der Bewegung von  $\hat{K}_2$  relativ zu  $\hat{K}_1$ :

$${}^1\hat{\alpha}_{12} = {}^1\alpha_{12} + \varepsilon {}^1(\tilde{a}_{12}^{(1)} + \tilde{v}_{12}^{(1)} \times \omega_{12}) \quad (6.67)$$

 $\alpha_{12}$  - Winkelbeschleunigung von  $\hat{K}_2$  relativ zu  $\hat{K}_1$ , $\tilde{a}_{12}^{(1)}$  - Beschleunigung des momentan mit  $O_1$  zusammenfallenden Punkts auf  $\hat{K}_2$  relativ zu  $\hat{K}_1$ .c) Bewegung von  $\hat{K}_2$  relativ zu  $\hat{K}_0$ .Lage:

Duale Transformationsmatrix:

$$\begin{aligned} {}^{12}\hat{T} &= {}^{01}\hat{T} {}^{12}\hat{T} = ({}^{01}T + \varepsilon {}^0\tilde{r}_{01} {}^{01}T) ({}^{12}T + \varepsilon {}^1\tilde{r}_{12} {}^{12}T) = \quad \text{Erweiterung} \\ &= {}^{01}T {}^{12}T + \varepsilon ({}^0\tilde{r}_{01} {}^{01}T {}^{12}T + {}^{01}T {}^1\tilde{r}_{12} {}^{12}T + \underbrace{{}^0\tilde{r}_{01} {}^1\tilde{r}_{12} {}^{01}T {}^{12}T}_{\text{Erweiterung}}) = \\ &= {}^{02}T + \varepsilon ({}^0\tilde{r}_{01} {}^{02}T + {}^{01}T {}^1\tilde{r}_{12} {}^{02}T + \underbrace{{}^0\tilde{r}_{01} {}^1\tilde{r}_{12} {}^{02}T}_{\text{Erweiterung}}) = \\ &= {}^{02}T + \varepsilon {}^0\tilde{r}_{02} {}^{02}T \quad (6.68) \end{aligned}$$

Gl. (6.68) ist die duale Erweiterung von Gl. (5.15).

Geschwindigkeit:Transformation der in  $\hat{K}_1$  gegebenen Geschwindigkeitsschraube  $\hat{\omega}_{12}$  nach  $\hat{K}_0$ :

$$\begin{aligned} {}^0\hat{\omega}_{12} &= {}^{01}\hat{T} {}^1\hat{\omega}_{12} = ({}^{01}T + \varepsilon {}^0\tilde{r}_{01} {}^{01}T) ({}^1\omega_{12} + \varepsilon {}^1\tilde{v}_{12}^{(1)}) = \\ &= {}^0\omega_{12} + \varepsilon ({}^0r_{01} \times \omega_{12} + \tilde{v}_{12}^{(1)}) = \\ &= {}^0\omega_{12} + \varepsilon {}^0\tilde{v}_{02}^{(0)} \quad (6.69) \end{aligned}$$

 $\omega_{12}$  - Winkelgeschwindigkeit von  $\hat{K}_2$  relativ zu  $\hat{K}_1$ , $\tilde{v}_{12}^{(1)}$  - Geschwindigkeit des momentan mit  $O_0$  zusammenfallenden Punkts auf  $\hat{K}_2$  relativ zu  $\hat{K}_1$ .Gesuchte Geschwindigkeitsschraube der Bewegung von  $\hat{K}_2$  relativ zu  $\hat{K}_0$ :

$$\begin{aligned} {}^0\hat{\omega}_{02} &= {}^0\hat{\omega}_{01} + {}^0\hat{\omega}_{12} = {}^0(\omega_{01} + \omega_{12}) + \varepsilon ({}^0\tilde{v}_{01}^{(0)} + \tilde{v}_{12}^{(0)}) = \\ &= {}^0\omega_{02} + \varepsilon {}^0\tilde{v}_{02}^{(0)} \quad (6.70) \end{aligned}$$

 $\omega_{02}$  - Winkelgeschwindigkeit von  $\hat{K}_2$  relativ zu  $\hat{K}_0$  $\tilde{v}_{02}^{(0)}$  - Geschwindigkeit des momentan mit  $O_0$  zusammenfallenden Punkts auf  $\hat{K}_2$  relativ zu  $\hat{K}_0$ .

Gl. (6.70) ist die duale Erweiterung von Gl. (5.17).

Beschleunigung:Transformation der in  $\hat{K}_1$  gegebenen Geschwindigkeitsschraube  $\hat{\alpha}_{12}$  nach  $\hat{K}_0$ :

$$\begin{aligned} {}^0\hat{\alpha}_{12} &= {}^{01}\hat{T} {}^1\hat{\alpha}_{12} = ({}^{01}T + \varepsilon {}^0\tilde{r}_{01} {}^{01}T) ({}^1\alpha_{12} + \varepsilon ({}^1\tilde{a}_{12}^{(1)} + \tilde{v}_{12}^{(1)} \times \omega_{12})) = \\ &= {}^0\alpha_{12} + \varepsilon ({}^0r_{01} \times \alpha_{12} + \tilde{a}_{12}^{(1)} + \tilde{v}_{12}^{(1)} \times \omega_{12}) = \\ &= {}^0\alpha_{12} + \varepsilon ({}^0\tilde{a}_{12}^{(0)} + \tilde{v}_{12}^{(0)} \times \omega_{12}) \quad \uparrow \quad {}^0\tilde{v}_{12}^{(0)} = {}^0r_{01} \times \omega_{12} \quad (6.71) \end{aligned}$$

 $\alpha_{12}$  - Winkelbeschleunigung von  $\hat{K}_2$  relativ zu  $\hat{K}_1$ , $\tilde{a}_{12}^{(1)}$  - Beschleunigung des momentan mit  $O_0$  zusammenfallenden Punkts auf  $\hat{K}_2$  relativ zu  $\hat{K}_1$ .Gesuchte Beschleunigungsschraube der Bewegung von  $\hat{K}_2$  relativ zu  $\hat{K}_0$ :

$${}^0\hat{\alpha}_{02} = {}^0\hat{\alpha}_{01} + {}^0\hat{\alpha}_{12} + {}^0(\hat{\omega}_{01} \times \hat{\omega}_{12}) \quad (6.72a)$$

$$\text{Realteil: } \alpha_{01} + \alpha_{12} + \omega_{01} \times \omega_{12} = \alpha_{02} \quad (6.72b)$$

$$\begin{aligned} \text{Dualteil: } &({}^0\tilde{a}_{01} + \tilde{v}_{01}^{(0)} \times \omega_{01}) + ({}^0\tilde{a}_{12} + \tilde{v}_{12}^{(0)} \times \omega_{12}) + ({}^0\omega_{01} \times \tilde{v}_{12}^{(0)} + \tilde{v}_{01}^{(0)} \times \omega_{12}) = \\ &= {}^0\tilde{a}_{01} + {}^0\tilde{a}_{12} + \omega_{01} \times \tilde{v}_{12}^{(0)} + \tilde{v}_{01}^{(0)} \times (\omega_{01} + \omega_{12}) + \tilde{v}_{12}^{(0)} \times \omega_{12} + \underbrace{\omega_{01} \times \tilde{v}_{12}^{(0)} - \tilde{v}_{01}^{(0)} \times \omega_{12}}_{\text{Erweiterung}} = \\ &= {}^0\tilde{a}_{01} + {}^0\tilde{a}_{12} + 2\omega_{01} \times \tilde{v}_{12}^{(0)} + \tilde{v}_{01}^{(0)} \times (\omega_{01} + \omega_{12}) + \tilde{v}_{12}^{(0)} \times (\omega_{01} + \omega_{12}) = \\ &= {}^0\tilde{a}_{01} + {}^0\tilde{a}_{12} + 2\omega_{01} \times \tilde{v}_{12}^{(0)} + (\tilde{v}_{01}^{(0)} + \tilde{v}_{12}^{(0)}) \times (\omega_{01} + \omega_{12}) = \\ &= {}^0\tilde{a}_{02} + {}^0\tilde{v}_{02}^{(0)} \times \omega_{02} \quad (6.72c) \end{aligned}$$

Insgesamt:

$${}^0\hat{\alpha}_{02} = {}^0\hat{\alpha}_{01} + {}^0\hat{\alpha}_{12} + {}^0(\hat{\omega}_{01} \times \hat{\omega}_{12}) = {}^0\alpha_{02} + \varepsilon ({}^0\tilde{a}_{02} + \tilde{v}_{02}^{(0)} \times \omega_{02}) \quad (6.73)$$

 $\alpha_{02}$  - Winkelbeschleunigung von  $\hat{K}_2$  relativ zu  $\hat{K}_0$  $\tilde{a}_{02}^{(0)}$  - Beschleunigung des momentan mit  $O_0$  zusammenfallenden Punkts auf  $\hat{K}_2$  relativ zu  $\hat{K}_0$ .

Gl. (6.73) ist die duale Erweiterung von Gl. (5.19).

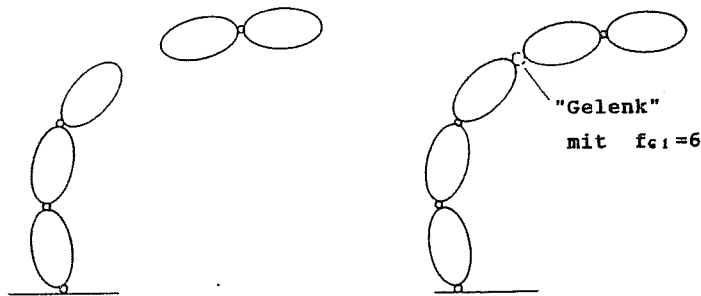


## Teil II: Kinematik von Mechanismen und Mehrkörpersystemen

### 1 Grundbeziehungen kinematischer Ketten

#### 1.1 Aufbau kinematischer Ketten

Ein Mehrkörpersystem von gelenkig miteinander verbundenen Körpern wird als kinematische Kette bzw. als kinematisch zusammenhängendes Mehrkörpersystem bezeichnet. Ein kinematisch nicht zusammenhängendes Mehrkörpersystem kann, falls erforderlich, durch Einführung von "Gelenken" mit 6 Gelenkfreiheitsgraden in ein kinematisch zusammenhängendes System überführt werden.



kinematisch nicht zusammenhängend

kinematisch zusammenhängend

#### 1.1.1 Topologische Klassifizierung

Man unterscheidet bei kinematischen Ketten zwei topologische Grundprinzipien.

##### a) Offene kinematische Ketten - Baumstruktur

Bei einer kinematischen Kette mit Baumstruktur ist der Weg von jedem Körper zu jedem beliebigen anderen Körper eindeutig bestimmt. Damit kann jedem Körper eindeutig ein Vorgängerkörper bzw. ein Vorgängergelenk zugeordnet werden. Wird ein Körper als Bezugskörper der kinematischen Kette gewählt, so ist:

$$n_G = n_B \quad (1.1)$$

mit  $n_G$  - Anzahl Gelenke,  
 $n_B$  - Anzahl von Körpern (ohne Bezugskörper).

##### b) geschlossene kinematische Ketten - kinematische Schleifen

Ausgehend von einer kinematischen Kette mit Baumstruktur gelangt man durch Einführung von je einem zusätzlichen Gelenk zu jeweils einer unabhängigen kinematischen Mehrkörperschleife. Ausgehend von Gl. (1.1) gilt damit für die Anzahl  $n_L$  von unabhängigen kinematischen Schleifen:

$$n_L = n_G - n_B \quad (1.2)$$

## Topologische Klassifizierung kinematischer Ketten

kinematische Kette	allgemeine Darstellung	Beispiel
offen (Baumstruktur)		 Sechssachsiger Industrieroboter
teilweise geschlossen		 Scherenarm-Industrieroboter
vollständig geschlossen		 Flugsimulator-Plattform

Weiter lassen sich **teilweise** und **vollständig geschlossene** kinematische Ketten unterscheiden. Ein System mit kinematischen Schleifen bildet eine teilweise geschlossene Kette, wenn

- einzelne Teilsysteme offene Ketten sind, oder
- mehrere geschlossene Teilsysteme "offen" miteinander verbunden sind.

Vollständig geschlossene kinematische Ketten sind dadurch gekennzeichnet, daß

- jeder Körper Teil einer Mehrkörperschleife ist, und
- jede Schleife mindestens einen Körper mit einer anderen Schleife gemeinsam hat.

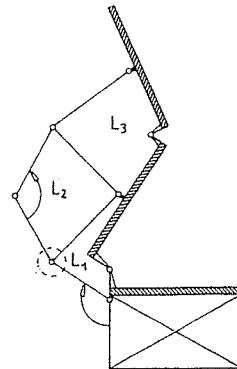
Mechanismen sind geschlossene kinematische Ketten.

### 1.1.2 Kinematische Klassifizierung

Nach der Art der Bewegung der Körper lassen sich kinematische Ketten in drei Gruppen einteilen.

#### a) Ebene kinematische Ketten

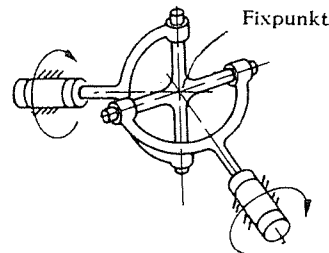
In ebenen kinematischen Ketten bewegen sich alle Körperpunkte parallel zu einer Bewegungsebene. Die Bewegung der Körper hat damit jeweils einen rotatorischen und zwei translatorische Bewegungsanteile. Als relative Bewegungen der Körper an den Gelenken können nur Verschiebungen parallel zur Bewegungsebene oder Drehungen um Achsen senkrecht zur Bewegungsebene auftreten. Eventuell zusätzlich vorhandene Gelenkfreiheitsgrade werden nicht ausgenutzt, siehe Abschnitt 1.3.2.



Faltfachwerk einer Satellitenantenne

#### b) Sphärische kinematische Ketten

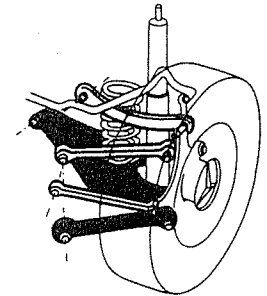
In sphärischen kinematischen Ketten bewegen sich alle Körperpunkte auf konzentrischen Kugeloberflächen um einen Fixpunkt. Die Körper haben damit drei rotatorische und keine translatorischen Bewegungsanteile. Die Relativbewegungen der Körper können nur Drehungen um Achsen durch den Fixpunkt sein. Eventuell zusätzlich vorhandene Gelenkfreiheitsgrade werden nicht ausgenutzt, siehe Abschnitt 1.3.2.



Wellen mit Kardangelenken

#### c) Räumliche kinematische Ketten

In räumlichen kinematischen Ketten führen die Körper allgemeine räumliche Bewegungen (Schraubbewegungen) mit je drei rotatorischen und drei translatorischen Bewegungsanteilen aus. Die Relativbewegung der Körper in den Gelenken ist (in Abhängigkeit vom Gelenktyp) im allgemeinen ebenfalls räumlich.



Fünfpunkt-Radaufhängung

### 1.2 Gelenke in kinematischen Ketten

Ein Gelenk verbindet jeweils zwei Körper einer kinematischen Kette. In Abhängigkeit vom Gelenkfreiheitsgrad  $f_G$  stellt es  $6 - f_G$  geometrische Bindungen zwischen den beiden Körpern her.

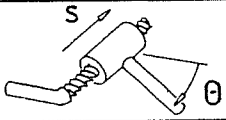
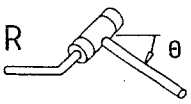
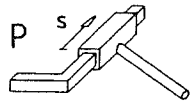
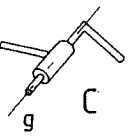
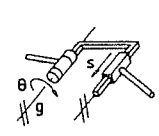
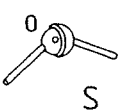
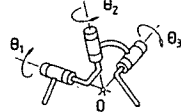
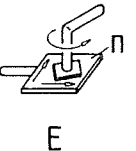
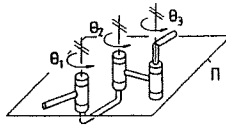
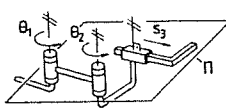
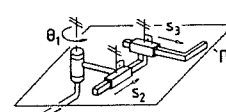
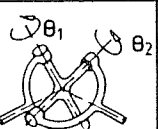
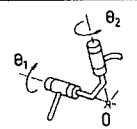
Die relative Bewegung zweier durch ein Gelenk miteinander verbundener Körper läßt sich durch sogenannte natürliche bzw. relative Gelenkkoordinaten  $\beta_i$  beschreiben. Bei den in den späteren Kapiteln beschriebenen Untersuchungen räumlicher kinematischer Ketten werden die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Gelenke betrachtet. Die natürlichen Gelenkkoordinaten dieser Gelenke sind Drehwinkel  $\beta_i = \theta_i$  und/oder Verschiebungen  $\beta_i = s_i$ . Das allgemeinste Gelenk der Zusammenstellung ist dabei das Schraubgelenk (Helical). Als Sonderfälle entstehen daraus unmittelbar das Drehgelenk (Revolute) (Steigung  $h = 0$ ) und das Schubgelenk (Prismatic) (Steigung  $h = \infty$ ). Die Gelenke mit mehreren Gelenkfreiheitsgraden, also das Dreh-Schubgelenk (Cylindrical), das Kardangelenken (T), das Kugelgelenk (Spherical) und das ebene Gelenk (Eben), können wiederum durch Hintereinanderschaltungen von Dreh- und Schubgelenken aufgebaut werden.

#### 1.2.1 Klassifizierung von Gelenken in der Getriebelehre

In der Getriebelehre werden nach REULEAUX Standardgelenke ("niedrige Elementenpaare", lower pairs) und komplexe Gelenke ("höhere Elementenpaare", higher pairs) unterschieden:

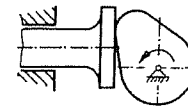
- a) Bei Standardgelenken haben die Körper *Flächenberührung*. Es werden die folgenden sechs Standardgelenke unterschieden:

Gelenk		Berührfläche
Schraubgelenk	(H)	Schraubenfläche
Drehgelenk	(R)	Rotationsfläche
Schubgelenk	(P)	Mantelfläche eines Prismas
Dreh-Schubgelenk	(C)	Zylindermantel
Kugelgelenk	(S)	Kugeloberfläche
Ebenes Gelenk	(E)	Ebene

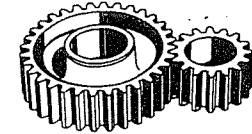
Gelenk	Darstellungen		Gelenk-koordinaten
Schraubgelenk $f_G = 1$			$\beta = \theta$
Drehgelenk $f_G = 1$			$\beta = \theta$
Schubgelenk $f_G = 1$			$\beta = s$
Dreh-Schubgelenk $f_G = 2$			$\beta_1 = \theta$ $\beta_2 = s$
Kugelgelenk $f_G = 3$			$\beta_1 = \theta_1$ $\beta_2 = \theta_2$ $\beta_3 = \theta_3$
Ebenes Gelenk $f_G = 3$			$\beta_1 = \theta_1$ $\beta_2 = \theta_2$ $\beta_3 = \theta_3$
			$\beta_1 = \theta_1$ $\beta_2 = \theta_2$ $\beta_3 = s_3$
			$\beta_1 = \theta_1$ $\beta_2 = s_2$ $\beta_3 = s_3$
Kardangelenk $f_G = 2$			$\beta_1 = \theta_1$ $\beta_2 = \theta_2$

b) Bei komplexen Gelenken haben die Körper *Linien- oder Punktberührung*.

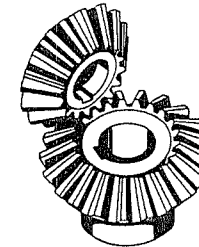
Beispiele:



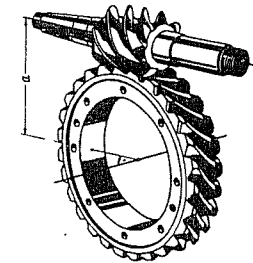
Kurvengetriebe (eben)



Stirnradgetriebe (eben)



Kegelradgetriebe (sphärisch)

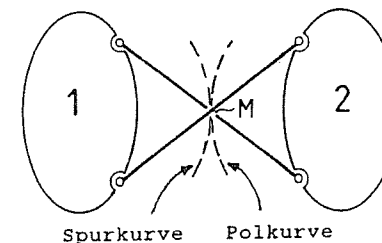


Schneckengetriebe (räumlich)

Die Verbindung zweier Körper über mehrere gelenkig gekoppelte Zwischenkörper kann in ihrer Gesamtheit ebenfalls als ein komplexes Gelenk angesehen werden. Besitzt eine solche Verbindung z.B. einen Freiheitsgrad, so "berühren" sich die beiden Körper entlang der momentanen Drehachse (bei ebener und sphärischer Bewegung) bzw. entlang der momentanen Schraubachse (bei räumlicher Bewegung). Das Abrollen (bei reiner Drehbewegung) bzw. "Schroten" (bei Schraubbewegung) der körperfesten Polflächen erzeugt eine kinematisch äquivalente Bewegung.

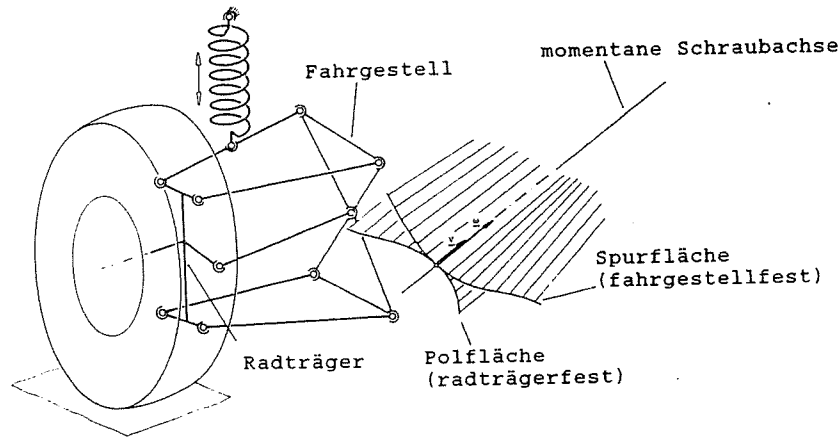
Beispiele :

Die Bewegung von Körper 2 relativ zu Körper 1 lässt sich bei ebener Bewegung als Abrollen der mit Körper 2 verbundenen Polfläche (Polkurve) auf der mit Körper 1 verbundenen Spurfläche (Spurkurve) darstellen. Die "Berührlinie" ist die momentane Drehachse durch den Momentanpol M.



M – Momentanpol

Bei der Einfederungsbewegung der Fünfpunkt-Radaufhängung läßt sich die Bewegung des Radträgers relativ zum Fahrgestell als "Schroten" der radträgerfesten Polfläche auf der fahrgestellfesten Spurfläche darstellen. Die "Berührlinie" ist die momentane Schraubachse dieser räumlichen Bewegung.



### 1.3 Freiheitsgrade und verallgemeinerte Koordinaten

#### 1.3.1 Anzahl der Freiheitsgrade von räumlichen kinematischen Ketten

Es wird eine beliebige räumliche kinematische Kette betrachtet mit:

- $n_B$  Körpern (ohne Bezugskörper) sowie
- $n_G$  Gelenken mit jeweils
- $f_{Gi}$  Gelenkfreiheitsgraden.

Die Anzahl der Freiheitsgrade  $f$  der gesamten kinematischen Kette relativ zum Bezugskörper ist dann

$$f = 6n_B - \sum_{i=1}^{n_G} (6 - f_{Gi}) \quad \text{bzw.} \quad (1.3a)$$

$$f = 6(n_B - n_G) + \sum_{i=1}^{n_G} f_{Gi}. \quad (1.3b)$$

Mit der Anzahl von kinematischen Schleifen

$$n_L = n_G - n_B$$

aus Gl. (1.2) geht Gl. (1.3) über in

$$f = \sum_{i=1}^{n_G} f_{Gi} - 6n_L. \quad (1.4)$$

In der Getriebetechnik wird Gl. (1.4) als Kriterium von GRÜBLER bezeichnet.

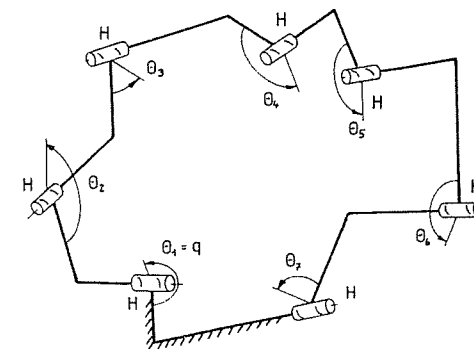
Man unterscheidet bei Mechanismen speziell:

- $f = 1$  zwangläufiger Mechanismus,
- $f = 0$  statisch bestimmte Struktur,
- $f < 0$  statisch unbestimmte Struktur.

Es ist zu beachten, daß die Gl. (1.3) bzw. (1.4) bei *überbestimmten* Mechanismen ein falsches Ergebnis liefern. Solche Mechanismen sind häufig eben oder sphärisch, siehe Abschnitt 1.3.2; es existieren jedoch auch räumliche überbestimmte Mechanismen.

Beispiele für räumliche Mechanismen:

#### a) 7H-Mechanismus (Schleife mit sieben Schraubgelenken)

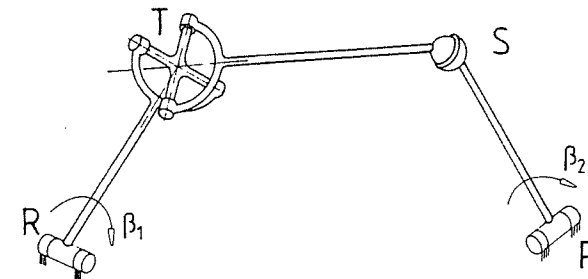


- $n_B = 6$  Körper
- $n_G = 7$  Schraubgelenke mit jeweils
- $f_{Gi} = 1$  Gelenkfreiheitsgraden.

- Anzahl Schleifen:  $n_L = 1$
- Anzahl Freiheitsgrade:  $f = 1$

Der 7H-Mechanismus kann als allgemeinsten einschleifiger Mechanismus mit  $f = 1$  Freiheitsgrad angesehen werden. Durch Spezialisierung der Schraubgelenke zu Dreh- oder Schubgelenken kann eine Vielzahl von Mechanismen aufgebaut werden.

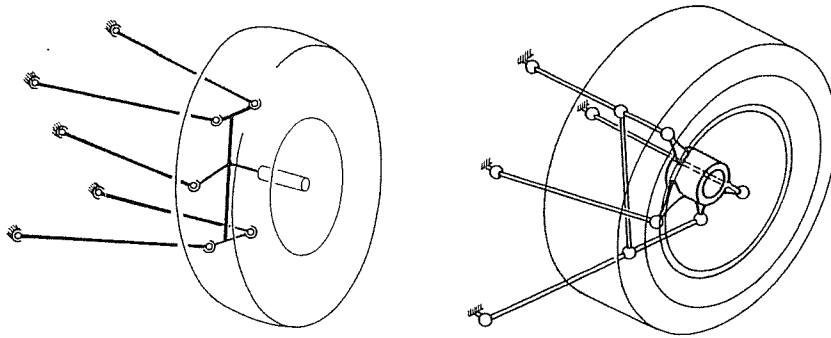
#### b) Räumliches Gelenkviereck (spezieller 7H-Mechanismus)



$f = 1$  Freiheitsgrad

Bei zwei Kugelgelenken an den Hebelenden kommt als weiterer Freiheitsgrad die Drehung der Koppel um ihre Längsachse hinzu, der jedoch keinen Einfluß auf das Übertragungsverhalten  $\beta_2$  ( $\beta_1$ ) hat ("isolierter Freiheitsgrad").

c) Fünflenker-Radaufhängungen (jeweils 10 Kugelgelenke)



Die Drehung des Rades relativ zum Radträger wird nicht berücksichtigt.

$$\left. \begin{array}{l} n_B = 6 \text{ Körper} \\ n_G = 10 \text{ Gelenke mit jeweils} \\ f_{G1} = 3 \text{ Gelenkfreiheitsgraden.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Anzahl Schleifen: } n_L = 4 \\ \rightarrow \text{Anzahl Freiheitsgrade: } f = 6 \end{array}$$

Ein Freiheitsgrad entspricht der Einfederbewegung, die übrigen fünf sind "isolierte Freiheitsgrade" der fünf Lenker um ihre Längsachsen. Durch Ersatz jeweils eines Kugelgelenks an jedem Lenker durch ein Kardangelenke werden die isolierten Freiheitsgrade vermieden.

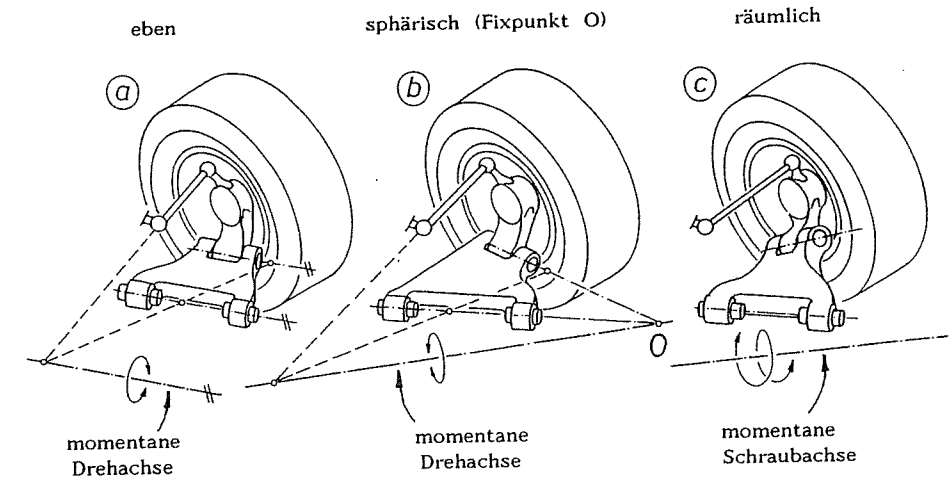
### 1.3.2 Anzahl der Freiheitsgrade von ebenen und sphärischen kinematischen Ketten

Bei ebenen und sphärischen kinematischen Ketten besitzen die Körper jeweils nur maximal drei Bewegungsmöglichkeiten, vgl. Abschnitt 1.1.2:

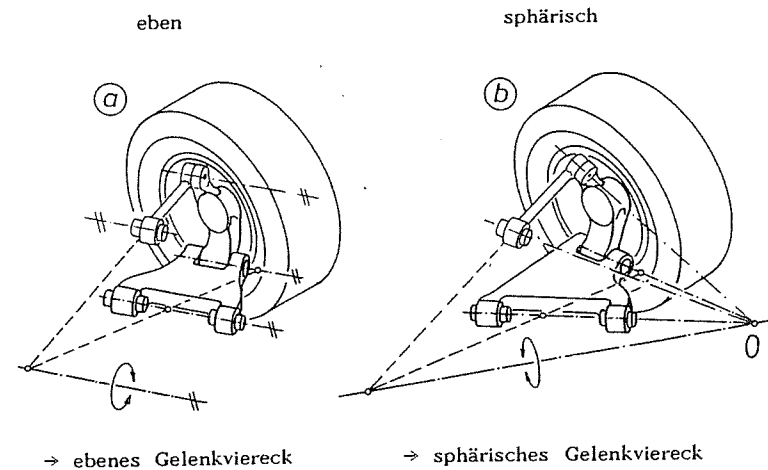
- eben: Bewegung der Körper parallel zu einer Ebene,
- sphärisch: Drehungen der Körper um einen Fixpunkt.

Aufgrund dieser speziellen Bewegungen der Körper werden unter Umständen nicht alle vorhandenen Freiheitsgrade der Gelenke ausgenutzt. Die Gelenke können dadurch offensichtlich durch Gelenke mit weniger Freiheitsgraden ersetzt werden, ohne die Anzahl der Freiheitsgrade des Mechanismus zu verändern.

Beispiel: Doppelquerlenker-Radaufhängung



Die Bedingungen (1.3)/(1.4) liefern korrekt  $f = 2$  Freiheitsgrade (davon ein isolierter Freiheitsgrad des oberen Lenkers um seine Längsachse). Im ebenen und sphärischen Fall können die beiden Kugelgelenke am oberen Lenker jeweils durch Drehgelenke mit speziellen Achsrichtungen ersetzt werden, ohne die Zahl der Freiheitsgrade zu verändern.



Für diese Gelenkmodellierungen liefern die Bedingungen (1.3)/(1.4)  $f = -2$  und stimmen damit nicht mehr. Dies ist jedoch nicht überraschend, da diese beiden Mechanismen erst durch die speziellen Körperabmessungen (parallele bzw. sich schneidende Achsen der Drehgelenke) beweglich werden, die in den Gln. (1.3)/(1.4) überhaupt nicht berücksichtigt worden sind. Bei allgemeinen Abmessungen wäre  $f = -2$  korrekt.

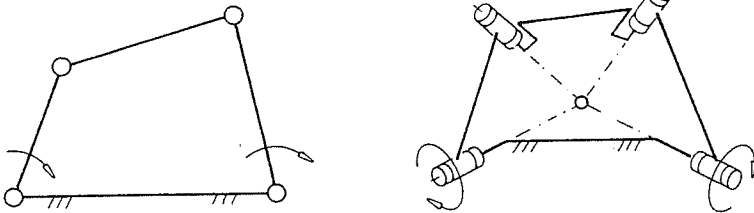
Für ebene und sphärische Mechanismen, bei denen alle nicht benötigten Gelenkfreiheitsgrade entfernt worden sind, lassen sich die Beziehungen (1.3)/(1.4) modifizieren, indem nur drei anstelle von sechs Bewegungsmöglichkeiten der Körper berücksichtigt werden:

$$f = 3(n_B - n_G) + \sum_{i=1}^{n_G} f_{Gi} \quad , \quad \text{bzw.} \quad (1.5a)$$

$$f = \sum_{i=1}^{n_G} f_{Gi} - 3n_L \quad (1.5b)$$

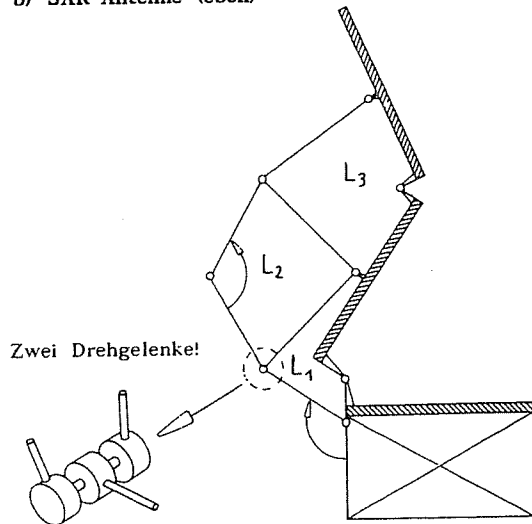
Beispiele:

a) Ebenes und sphärisches Gelenkviereck



$n_B = 3$	Körper	} → Anzahl Schleifen: $n_L = 1$
$n_G = 4$	Gelenke mit jeweils	
$f_{Gi} = 1$	Gelenkfreiheitsgraden.	
		→ Anzahl Freiheitsgrade: $f = 1$

b) SAR-Antenne (eben)



$n_B = 8$	Körper
$n_G = 11$	Gelenke mit jeweils
$f_{Gi} = 1$	Gelenkfreiheitsgraden.

→ Anzahl Schleifen:	$n_L = 3$
→ Anzahl Freiheitsgrade:	$f = 2$

### 1.3.3 Zur Wahl der verallgemeinerten Koordinaten (Minimalkoordinaten)

Die Lage eines mechanischen Systems mit  $f$  Freiheitsgraden läßt sich eindeutig durch  $f$  unabhängige Koordinaten  $q = [q_1, \dots, q_n]^T$ , die verallgemeinerten Koordinaten oder Minimalkoordinaten, beschreiben. Die Auswahl geeigneter Minimalkoordinaten erfordert bei kinematischen Ketten besondere Beachtung.

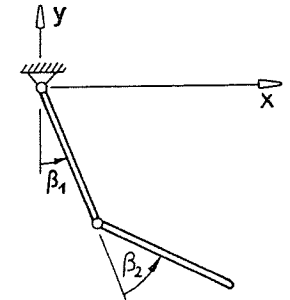
Beispiele:

a) Doppelpendel (Kinematische Kette mit Baumstruktur)

Günstige Wahl:

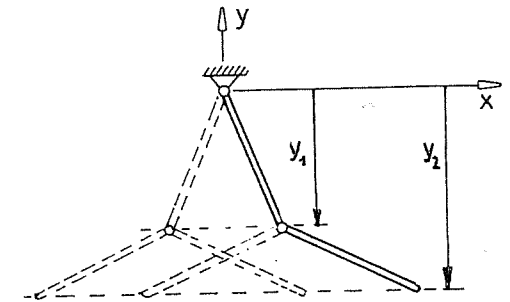
Relative Gelenkkoordinaten  $q = [\beta_1, \beta_2]^T$

(Hier auch  $q = [\beta_1, \beta_1 + \beta_2]^T$  günstig.)



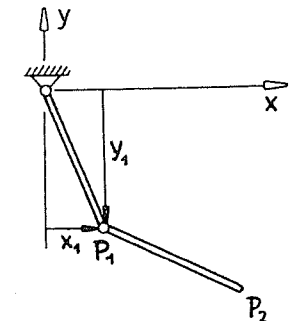
Falsche Wahl:

Absolutkoordinaten  $q = [y_1, y_2]^T$ ;  
nicht eindeutig.



Falsche Wahl:

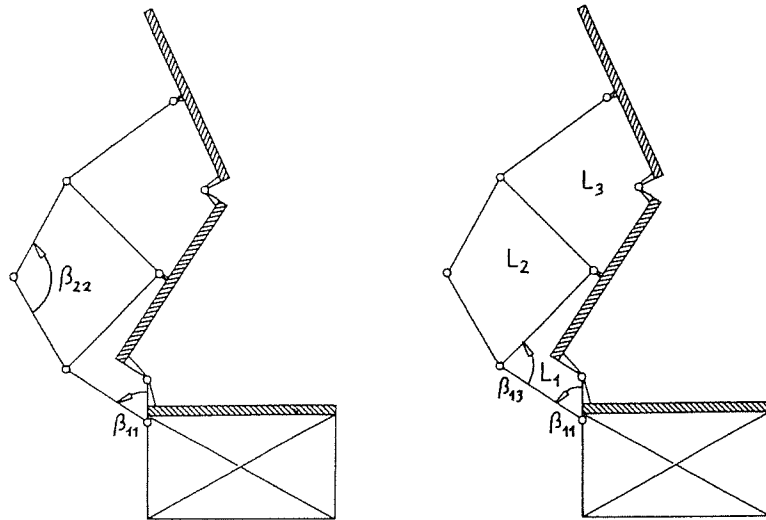
Absolutkoordinaten  $q = [x_1, y_1]^T$ ;  
nicht unabhängig.



Bei offenen kinematischen Ketten können stets die relativen Gelenkkoordinaten als Minimalkoordinaten gewählt werden.

b) SAR-Antenne (eben,  $n_L=3$  Schleifen,  $f=2$  Freiheitsgrade)

Es können  $f=2$  Minimalkoordinaten gewählt werden.



**Korrekte Wahl:**  $\underline{q} = [\beta_{11}, \beta_{22}]^T$

Die Koordinaten sind unabhängig voneinander.

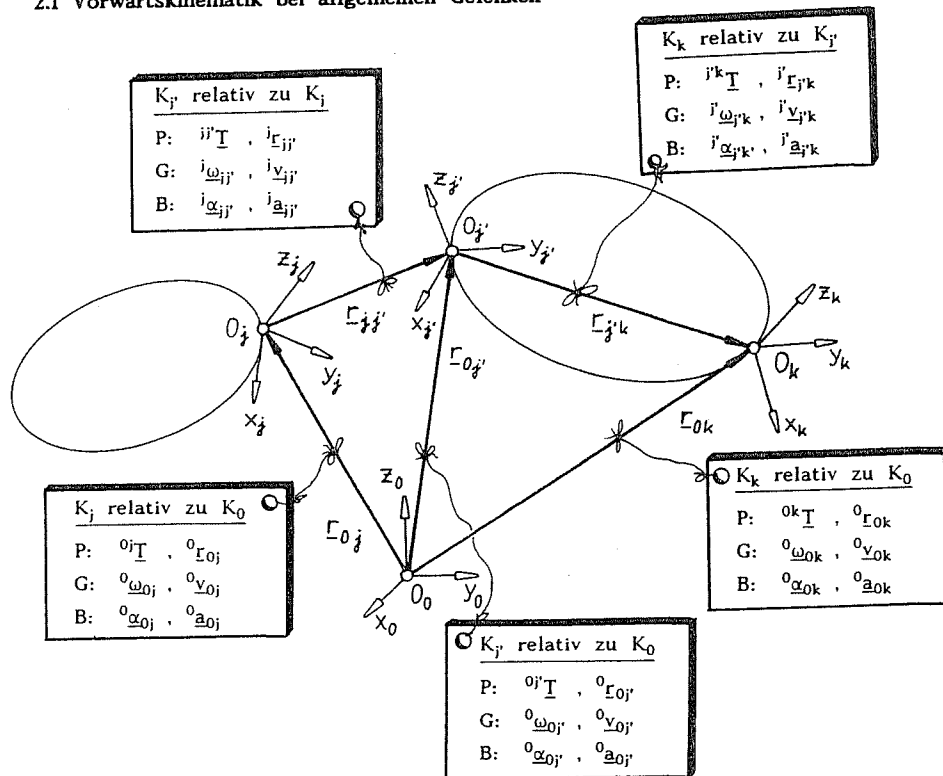
**Falsche Wahl:**  $\underline{q} = [\beta_{11}, \beta_{13}]^T$

Die Position der Schleife  $L_1$  ist überbestimmt, während die Lage der Schleifen  $L_2$  und  $L_3$  unbestimmt bleibt. Die gewählten Minimalkoordinaten sind nicht unabhängig voneinander (Schleife  $L_1$  besitzt als ebenes Gelenkviereck nur eine unabhängige Gelenkkoordinate).

## 2 Kinematik von offenen Gelenkketten (Vorwärtskinematik)

Die kinematische Analyse offener kinematischer Ketten umfaßt die Auswertung der "Vorwärtskinematik", d.h. der Bestimmung der absoluten Bewegung der einzelnen Körper, wenn die relativen Bewegungen über die natürlichen Gelenkkoordinaten vorgegeben sind. Die erforderlichen Berechnungen werden mit Hilfe der Beziehungen für Relativbewegungen aus Abschnitt 5.2 (I) in rekursiver Form durchgeführt.

### 2.1 Vorwärtskinematik bei allgemeinen Gelenken



Es werden zwei aufeinanderfolgende Körper einer kinematischen Kette betrachtet, die über ein beliebiges Gelenk  $G_j$  miteinander verbunden sind. An einem solchen Gelenk werden zwei Koordinatensysteme, das "Eingangs-Koordinatensystem"  $K_j$  und das "Ausgangs-Koordinatensystem"  $K_{j'}$  eingeführt, die jeweils fest mit den am Gelenk anschließenden Körpern verbunden sind. Die Relativbewegung im Gelenk  $G_j$  sei über den zeitlichen Verlauf der dazugehörigen natürlichen Gelenkkoordinaten gegeben. Damit ist auch die relative Bewegung der beiden zum Gelenk gehörenden Koordinatensysteme  $K_j$  und  $K_{j'}$  bekannt. Zusammen mit den festen Körperabmessungen können dann aus der bekannten Bewegung des Koordinatensystems  $K_j$  die Bewegungen der folgenden Koordinatensysteme  $K_{j'}$  und  $K_k$  bestimmt werden:

#### a) Position:

$${}^{0j'}\underline{T} = {}^{0j}\underline{T} {}^{jj'}\underline{T} \quad , \quad (2.1)$$

$${}^{0k}\underline{T} = {}^{0j'}\underline{T} {}^{j'k}\underline{T} \quad , \quad (2.2)$$

$${}^0\Gamma_{0j'} = {}^0\Gamma_{0j} + {}^0\Gamma_{jj'} \quad \text{mit} \quad {}^0\Gamma_{jj'} = {}^{0j}\underline{T} {}^j\Gamma_{jj'} \quad , \quad (2.3)$$

$${}^0\Gamma_{0k} = {}^0\Gamma_{0j'} + {}^0\Gamma_{j'k} \quad \text{mit} \quad {}^0\Gamma_{j'k} = {}^{0j'}\underline{T} {}^{j'}\Gamma_{j'k} \quad . \quad (2.4)$$

Zur kompakteren Schreibweise können die Übergänge (2.1)/(2.3) und (2.2)/(2.4) jeweils zu einer (4,4)-Matrizengleichung zusammengefaßt werden:

$$\left[ \begin{array}{c|c} {}^{0j'}\underline{T} & {}^0\Gamma_{0j'} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} {}^{0j}\underline{T} & {}^0\Gamma_{0j} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} {}^{jj'}\underline{T} & {}^j\Gamma_{jj'} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad , \quad (2.5)$$

${}^{0j'}\underline{A} \qquad \qquad \qquad {}^{0j}\underline{A} \qquad \qquad \qquad {}^{jj'}\underline{A}$

$$\left[ \begin{array}{c|c} {}^{0k}\underline{T} & {}^0\Gamma_{0k} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} {}^{0j'}\underline{T} & {}^0\Gamma_{0j'} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} {}^{j'k}\underline{T} & {}^{j'}\Gamma_{j'k} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad . \quad (2.6)$$

${}^{0k}\underline{A} \qquad \qquad \qquad {}^{0j'}\underline{A} \qquad \qquad \qquad {}^{j'k}\underline{A}$

#### b) Geschwindigkeit ( $\omega_{j'k} = 0$ , $v_{j'k} = 0$ ):

$${}^0\omega_{0j'} = {}^0\omega_{0j} + {}^0\omega_{jj'} \quad \text{mit} \quad {}^0\omega_{jj'} = {}^{0j}\underline{T} {}^j\omega_{jj'} \quad , \quad (2.7)$$

$${}^0\omega_{0k} = {}^0\omega_{0j'} \quad , \quad (2.8)$$

$${}^0v_{0j'} = {}^0v_{0j} + {}^0v_{jj'} + {}^0\tilde{\omega}_{0j} {}^0\Gamma_{jj'} \quad \text{mit} \quad {}^0v_{jj'} = {}^{0j'}\underline{T} {}^jv_{jj'} \quad , \quad (2.9)$$

$${}^0v_{0k} = {}^0v_{0j'} + {}^0\tilde{\omega}_{0j'} {}^0\Gamma_{j'k} \quad . \quad (2.10)$$

#### c) Beschleunigung ( $\alpha_{j'k} = 0$ , $a_{j'k} = 0$ ):

$${}^0\alpha_{0j'} = {}^0\alpha_{0j} + {}^0\alpha_{jj'} + {}^0\tilde{\omega}_{0j} {}^0\omega_{jj'} \quad \text{mit} \quad {}^0\alpha_{jj'} = {}^{0j}\underline{T} {}^j\alpha_{jj'} \quad , \quad (2.11)$$

$${}^0\alpha_{0k} = {}^0\alpha_{0j'} \quad , \quad (2.12)$$

$${}^0a_{0j'} = {}^0a_{0j} + {}^0a_{jj'} + {}^0\tilde{\alpha}_{0j} {}^0\Gamma_{jj'} + 2 {}^0\tilde{\omega}_{0j} {}^0v_{jj'} + {}^0\tilde{\omega}_{0j} {}^0\tilde{\omega}_{0j} {}^0\Gamma_{jj'} \quad \text{mit} \quad {}^0a_{jj'} = {}^{0j'}\underline{T} {}^ja_{jj'} \quad , \quad (2.13)$$

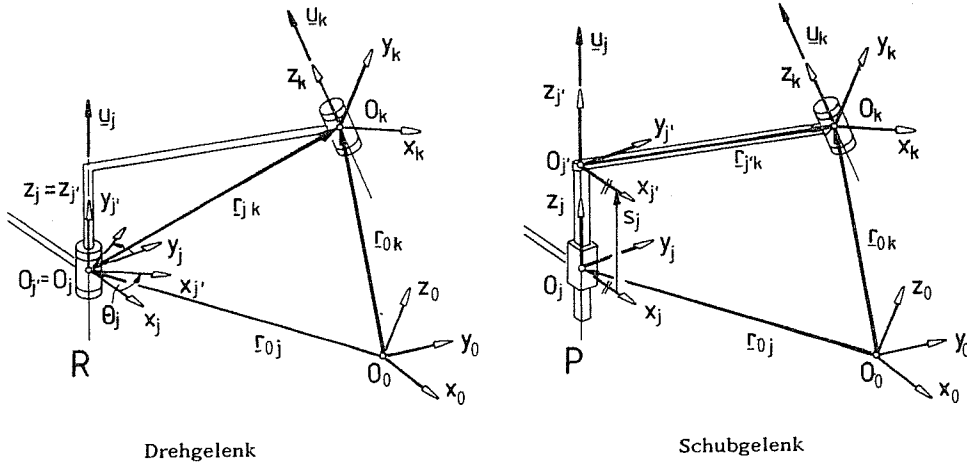
$${}^0a_{0k} = {}^0a_{0j'} + {}^0\tilde{\alpha}_{0j'} {}^0\Gamma_{j'k} + {}^0\tilde{\omega}_{0j'} {}^0\tilde{\omega}_{0j'} {}^0\Gamma_{j'k} \quad . \quad (2.14)$$

Ausgehend vom Bezugskörper der kinematischen Kette erhält man durch die rekursive Anwendung der Beziehungen (2.1) bis (2.14) bei gegebenen Gelenkkoordinaten sukzessive die Bewegung aller Körper relativ zum Koordinatensystem  $K_0$ .



## 2.2 Vorwärtskinematik bei Standardgelenken

Bei kinematischen Ketten mit Standardgelenken ist es ausreichend, Drehgelenke (R) und Schubgelenke (P) zu betrachten. Die z-Achsen der Gelenk-Bezugssysteme können ohne Einschränkung in die Gelenkachsen (Einheitsvektoren  $\underline{u}_j$ ) gelegt werden. Die Richtungen der x-Achsen in den Körpern sind frei wählbar.



### a) Drehgelenk

Der Übergang vom Eingangs-Koordinatensystem  $K_j$  in das Ausgangs-Koordinatensystem  $K_{j'}$  wird durch den Gelenkwinkel  $\beta_j = \theta_j$  beschrieben:

$${}^{jj'}\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j & 0 \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^{jj'}\underline{r}_{jj'} = \underline{0} \quad (2.15)$$

$${}^{jj'}\underline{\omega}_{jj'} = \dot{\theta}_j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad {}^{jj'}\underline{v}_{jj'} = \underline{0} \quad (2.16)$$

$${}^{jj'}\underline{a}_{jj'} = \ddot{\theta}_j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad {}^{jj'}\underline{a}_{jj'} = \underline{0} \quad (2.17)$$

### b) Schubgelenk

Der Übergang vom Eingangs-Koordinatensystem  $K_j$  in das Ausgangs-Koordinatensystem  $K_{j'}$  wird durch die Gelenkverschiebung  $\beta_j = s_j$  beschrieben:

$${}^{jj'}\underline{T} = \underline{I}, \quad {}^{jj'}\underline{r}_{jj'} = s_j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (2.18)$$

$${}^{jj'}\underline{\omega}_{jj'} = \underline{0}, \quad {}^{jj'}\underline{v}_{jj'} = \dot{s}_j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (2.19)$$

$${}^{jj'}\underline{a}_{jj'} = \underline{0}, \quad {}^{jj'}\underline{a}_{jj'} = \ddot{s}_j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (2.20)$$

## 2.3 Geometrische Parameter nach DENAVIT und HARTENBERG

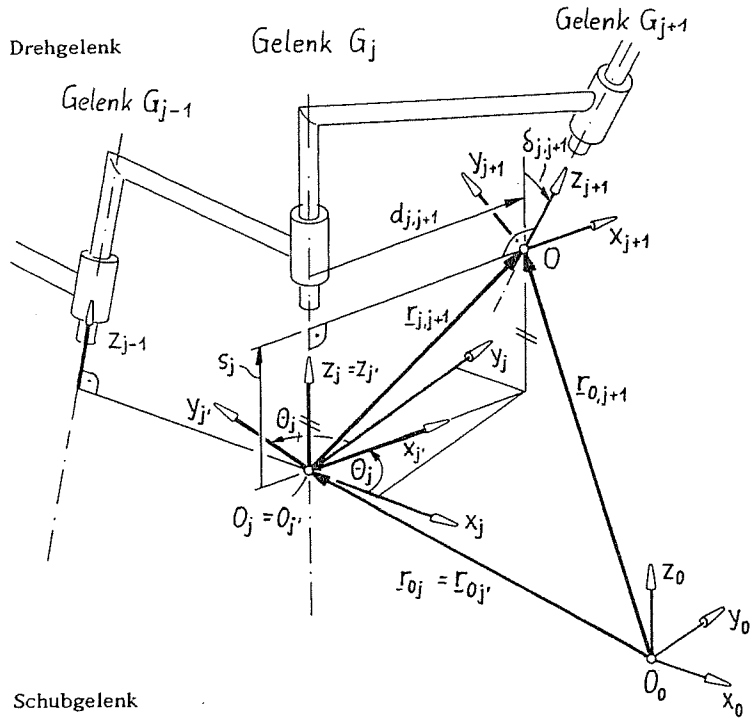
Bei der Wahl der Gelenk-Koordinatensysteme für Standardgelenke in Abschnitt 2.2 sind die Richtungen der  $x_j$ - bzw.  $x_{j'}$ -Achsen in den Körpern sowie die Lage der Bezugspunkte  $O_j$  und  $O_{j'}$  auf der Gelenkachse  $z_j$  noch frei. Dadurch sind die Matrizen  ${}^{jj'}\underline{T}$  und  ${}^{jj'}\underline{r}_{jj'}$ , die ausschließlich von den festen Körperabmessungen abhängen, im allgemeinen voll besetzt.

Zur Verringerung des Rechenaufwands bei der Auswertung des Körperübergangs (2.2)/(2.4) ist es sinnvoll, weitere Vereinbarungen für die Lage der Gelenk-Koordinatensysteme einzuführen. Die weitestgehenden Vereinfachungen werden erreicht, indem die  $x_j$ - bzw.  $x_{j'}$ -Achsen in die Richtungen der gemeinsamen Lote der aufeinanderfolgenden Gelenkachsen und die Bezugspunkte  $O_j$  und  $O_{j'}$  in die jeweiligen Lotfußpunkte gelegt werden. Dies ermöglicht die auf DENAVIT und HARTENBERG zurückgehende standardisierte Darstellung von unverzweigten kinematischen Ketten mit Dreh- und Schubgelenken mit einer Minimalzahl von geometrischen Parametern (DH-Parameter). Die typische Anwendung ist die kinematische Beschreibung von Industrierobotern. Für verzweigte kinematische Ketten, die Körper mit mehr als zwei Gelenken besitzen, ist die DH-Parametervereinbarung ungeeignet.

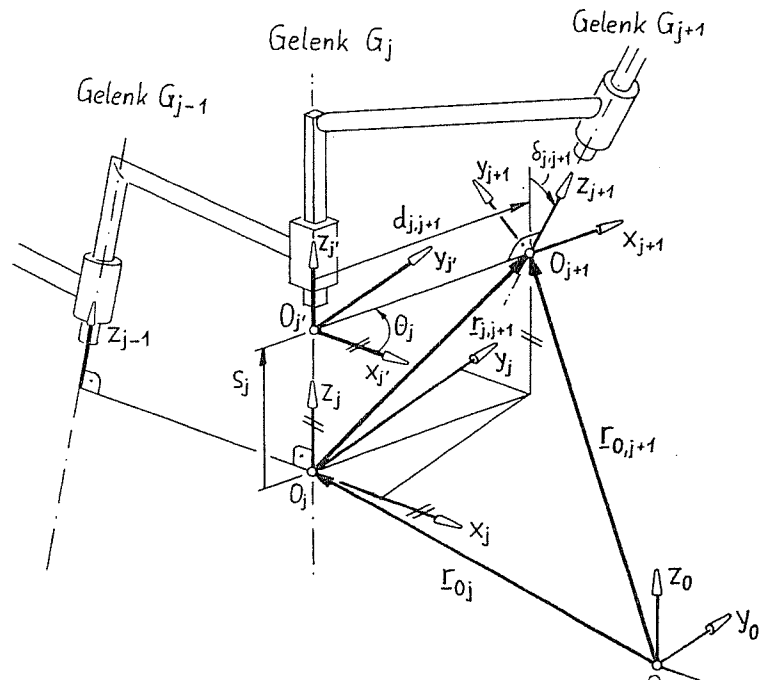
Zur systematischen Bestimmung der DH-Parameter einer offenen kinematischen Kette werden die Gelenkachsen beginnend am Grundgestell von 1 bis n durchnummeriert. Die Eingangs-Koordinatensysteme  $K_j$  der Gelenke werden nun wie folgt festgelegt (die Richtung der  $x_1$ -Achse am ersten Gelenk ist frei wählbar):

- $z_j$  - Frei wählbare Richtung der Achse des Gelenks  $G_j$ .
- $x_j$  - Richtung des gemeinsamen Lotes der  $z_{j-1}$ - und der  $z_j$ -Achse, gerichtet von der  $z_{j-1}$ - zur  $z_j$ -Achse. Falls sich die  $z_{j-1}$ - und die  $z_j$ -Achsen schneiden, ist die Richtung der  $x_j$ -Achse frei wählbar.
- $y_j$  - Ergänzung zum Rechtssystem.
- $O_j$  - Schnittpunkt der  $x_j$ - und der  $z_j$ -Achse. Falls die Gelenkachsen  $z_{j-1}$  und  $z_j$  parallel sind, ist die Lage von  $O_j$  entlang der  $z_j$ -Achse nicht bestimmt und kann frei gewählt werden.

Unter Berücksichtigung des Gelenktyps sind damit zugleich auch die Ausgangs-Koordinatensysteme  $K_{j'}$  eindeutig festgelegt. Sie werden deswegen häufig überhaupt nicht explizit eingeführt. Die einzige Ausnahme ist das System  $K_n$  am letzten Gelenk  $G_n$ , dessen  $x_n$ -Achse frei gewählt werden kann.



Schubgelenk



Die relative Lage zweier aufeinanderfolgender Koordinatensystems  $K_j$  und  $K_{j+1}$  wird durch die folgenden vier DH-Parameter vollständig beschrieben:

- $\Theta_j$  - Winkel von der  $x_j$ - zur  $x_{j+1}$ -Achse, gemessen im mathematisch positiven Sinn um die  $z_j$ -Achse (vorzeichenbehaftet).
- $s_j$  - Verschiebung von der  $x_j$ - zur  $x_{j+1}$ -Achse entlang der  $z_j$ -Achse (vorzeichenbehaftet).
- $\delta_{j,j+1}$  - Winkel zwischen der  $z_j$ - und der  $z_{j+1}$ -Achse, gemessen im mathematisch positiven Sinn um die  $x_{j+1}$ -Achse (vorzeichenbehaftet).
- $d_{j,j+1}$  - Verschiebung von der  $z_j$ - zur  $z_{j+1}$ -Achse entlang der  $x_{j+1}$ -Achse. Da die  $x_{j+1}$ -Achse so gewählt wurde, daß sie von  $z_j$  nach  $z_{j+1}$  zeigt, ist  $d_{j,j+1} \geq 0$ .

Der direkte Übergang von  $K_j$  nach  $K_{j+1}$  hängt unabhängig vom Gelenktyp nur noch von diesen vier DH-Parametern ab:

$${}^{j,j+1}\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos\Theta_j & -\sin\Theta_j \cos\delta_{j,j+1} & \sin\Theta_j \sin\delta_{j,j+1} \\ \sin\Theta_j & \cos\Theta_j \cos\delta_{j,j+1} & -\cos\Theta_j \sin\delta_{j,j+1} \\ 0 & \sin\delta_{j,j+1} & \cos\delta_{j,j+1} \end{bmatrix}, \quad (2.21a)$$

$${}^j\underline{r}_{j,j+1} = \begin{bmatrix} d_{j,j+1} \cos\Theta_j \\ d_{j,j+1} \sin\Theta_j \\ s_j \end{bmatrix}. \quad (2.21b)$$

Ferner kann der gelenkspezifische, nur von den festen Körperabmessungen abhängende Übergang zwischen dem Ausgangs-Koordinatensystem  $K_j$  und dem Eingangs-Koordinatensystem  $K_{j+1}$  angegeben werden:

#### a) Drehgelenke (Gelenkkoordinate $\Theta_j$ )

Die festen Parameter sind hier die Abstände  $s_j$  und  $d_{j,j+1}$  sowie der Kreuzungswinkel  $\delta_{j,j+1}$  der Gelenkachsen:

$${}^{j,j+1}\underline{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\delta_{j,j+1} & -\sin\delta_{j,j+1} \\ 0 & \sin\delta_{j,j+1} & \cos\delta_{j,j+1} \end{bmatrix}, \quad {}^j\underline{r}_{j,j+1} = \begin{bmatrix} d_{j,j+1} \\ 0 \\ s_j \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

#### b) Schubgelenke (Gelenkkoordinate $s_j$ )

Die festen Parameter sind hier der Abstand  $d_{j,j+1}$  und die Winkel  $\Theta_j$  und  $\delta_{j,j+1}$ :

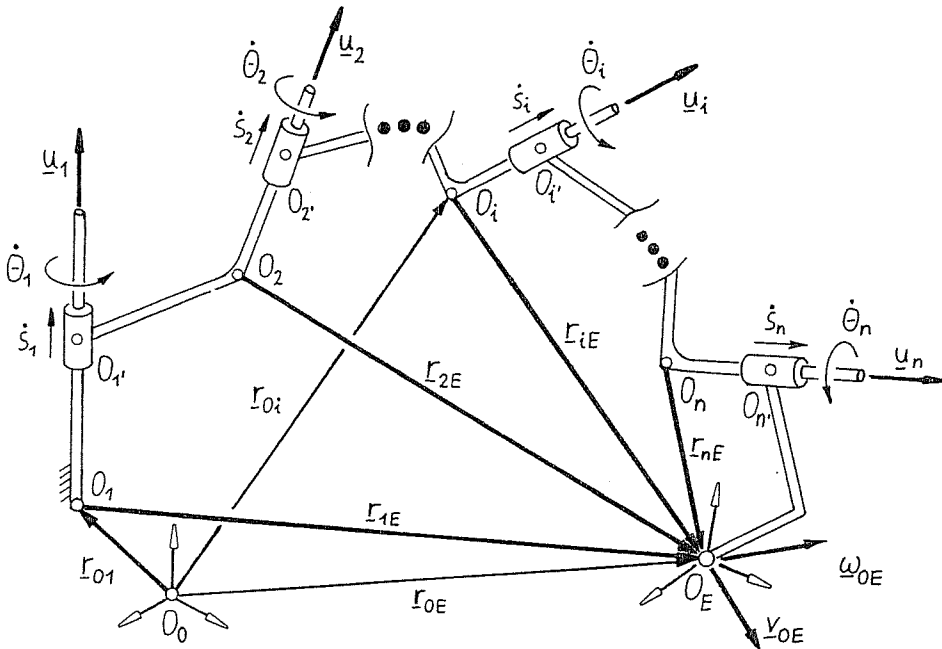
$${}^{j,j+1}\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos\Theta_j & -\sin\Theta_j & 0 \\ \sin\Theta_j & \cos\Theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\delta_{j,j+1} & -\sin\delta_{j,j+1} \\ 0 & \sin\delta_{j,j+1} & \cos\delta_{j,j+1} \end{bmatrix}, \quad (2.23a)$$

$${}^j\underline{r}_{j,j+1} = \begin{bmatrix} d_{j,j+1} \cos\Theta_j \\ d_{j,j+1} \sin\Theta_j \\ s_j \end{bmatrix}. \quad (2.23b)$$

## 2.4 JACOBI-Matrix der Relativbewegung

### 2.4.1 Darstellung der Geschwindigkeit mit Hilfe der JACOBI-Matrix

Die Rekursionsbeziehungen (2.7) bis (2.10) ermöglichen die sukzessive Bestimmung der Winkel- und Translationsgeschwindigkeiten aller Körper einer kinematischen Kette bei gegebenen Relativgeschwindigkeiten an den Gelenken. Insbesondere für Anwendungen in der Roboterkinematik ist es zweckmäßig, diese Beziehungen so zusammenzufassen, daß der Vektor der Ableitungen  $\dot{\underline{\beta}}$  der natürlichen Gelenkkoordinaten als Faktor herausgelöst ist.



Als Beispiel wird eine kinematische Kette mit  $n$  Dreh-Schubgelenken (natürliche Gelenkkoordinaten  $\theta_i$  und  $s_i$ ) betrachtet, wodurch sowohl Drehgelenke als auch Schubgelenke berücksichtigt sind. Die Geschwindigkeit ( $\underline{\omega}_{0E}$ ,  $\underline{v}_{0E}$ ) des Koordinatensystems  $K_E$  auf dem letzten Körper der Kette relativ zum System  $K_0$  auf dem Basiskörper (erste Gelenkachse  $\underline{u}_1$  fest in  $K_0$ ) soll bei gegebener Position explizit in Abhängigkeit der Ableitungen  $\dot{\theta}_i$  und  $\dot{s}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , der Gelenke ausgedrückt werden. Hierzu werden die auf alle Gelenke der Kette angewandten Beziehungen (2.7) bis (2.10) ineinander eingesetzt:

$${}^0\omega_{0E} = \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i {}^0\underline{u}_i \quad (2.24)$$

$${}^0\mathbf{v}_{0E} = \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i {}^0\tilde{\underline{u}}_i {}^0\mathbf{r}_{iE} + \sum_{i=1}^n \dot{s}_i {}^0\underline{u}_i \quad (2.25)$$

In Gl. (2.25) wurden bei der Zusammenfassung der zu  $\dot{\theta}_i$  gehörenden Vektoren die Verbindungsvektoren

$${}^0\mathbf{r}_{iE} = {}^0\mathbf{r}_{0E} - {}^0\mathbf{r}_{0i} \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (2.26)$$

von den Ursprungspunkten  $O_i$  der Eingangs-Koordinatensysteme  $K_i$  der Gelenke zum Punkt  $O_E$  eingeführt. Gleichwertig können in Gl. (1.30) auch die Vektoren  $\mathbf{r}_{i'E}$  von den Ursprungspunkten  $O_i'$  der Ausgangs-Koordinatensysteme  $K_i'$  verwendet werden, da der Verbindungsvektor  $\mathbf{r}_{i'i'} = s_i \underline{u}_i$  keinen Beitrag zum Vektorprodukt in der ersten Summe in Gl. (2.25) liefert.

Die Gln. (2.24) und (2.25) lassen sich zu einer Matrixgleichung zusammenfassen, wobei jetzt wieder explizit zwischen Dreh- und Schubgelenken unterschieden wird:

$$\begin{bmatrix} {}^0\omega_{0E} \\ {}^0\mathbf{v}_{0E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \underline{u}_1 & \mu_2 \underline{u}_2 & \dots & \mu_n \underline{u}_n \\ \underline{c}_1 & \underline{c}_2 & \dots & \underline{c}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\beta}_n \end{bmatrix} \quad (2.27a)$$

$$\dot{\underline{\beta}}_{0E} = {}^0\mathbf{J}_{0E}(\underline{\beta}) \dot{\underline{\beta}} \quad (2.27b)$$

mit  ${}^0\mathbf{c}_i = \mu_i {}^0\tilde{\underline{u}}_i {}^0\mathbf{r}_{iE} + (1 - \mu_i) {}^0\mathbf{u}_i$

und  $\mu_i = 1$  bei Drehgelenken ( $\beta_i = \theta_i$ ) ,

$\mu_i = 0$  bei Schubgelenken ( $\beta_i = s_i$ ) .

Die  $(6 \times n)$ -Matrix  ${}^0\mathbf{J}_{0E}(\underline{\beta})$  wird als die JACOBI-Matrix der Bewegung des Systems  $K_E$  relativ zum Basissystem  $K_0$  bezeichnet. Der Rang von  $\mathbf{J}_E$  kennzeichnet die Anzahl der unabhängigen Teilbewegungen des Systems  $K_E$  relativ zu  $K_0$  und wird als die Anzahl der Freiheitsgrade  $f_{0E}$  des Systems  $K_E$  relativ zu  $K_0$  definiert:

$$f_{0E} = \text{Rg}({}^0\mathbf{J}_{0E}) \quad (2.28)$$

Anstelle von  $K_0$  kann in den Beziehungen (2.24)/(2.25) bzw. (2.27) auch jedes andere Koordinatensystem  $K_k$  für die Darstellung der Vektoren verwendet werden. Die dabei auftretende JACOBI-Matrix  ${}^k\mathbf{J}_{0E}$  hat denselben Rang wie  ${}^0\mathbf{J}_{0E}$ .

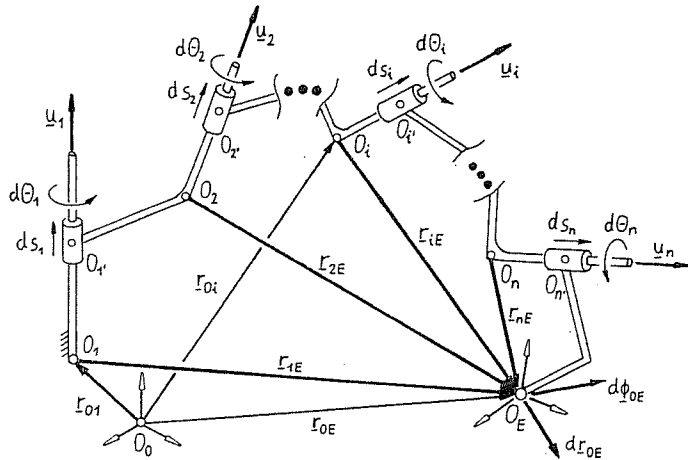
In der Roboterkinematik spielt die Anzahl der Freiheitsgrade  $f_{0E}$  der Bewegung des Endeffektors (System  $K_E$ ) relativ zum Basissystem  $K_0$  eine wichtige Rolle. Tritt z.B. bei einem Roboter mit  $n = 6$  Gelenkachsen in einer bestimmten Stellung der Fall  $f_{0E} < 6$  auf, so kann der Endeffektor in dieser Stellung nicht mehr beliebig verschoben oder gedreht werden: er ist in einer "Strecklage".

### 2.4.2 Darstellung der differentiellen Lageänderung mit Hilfe der JACOBI-Matrix

Die JACOBI-Matrix  ${}^0J_{0E}$  stellt zugleich den linearisierten Zusammenhang zwischen der Lageänderung des Endeffektors und den Änderungen der Gelenkkoordinaten her:

$${}^0 \begin{bmatrix} d\Phi_{0E} \\ d\mathbf{r}_{0E} \end{bmatrix} = {}^0 \begin{bmatrix} \mu_1 \underline{u}_1 & \mu_2 \underline{u}_2 & \dots & \mu_n \underline{u}_n \\ \underline{c}_1 & \underline{c}_2 & \dots & \underline{c}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\beta_1 \\ d\beta_2 \\ \vdots \\ d\beta_n \end{bmatrix} \quad (2.29a)$$

$${}^0 d\mathbf{z}_{0E} = {}^0 J_{0E}(\underline{\beta}) d\underline{\beta} \quad (2.29b)$$



Hierbei sind  $d\underline{\beta}$  beliebige Änderungen der Gelenkkoordinaten. Der Vektor  ${}^0 d\mathbf{z}_{0E}$  beschreibt den in  $d\underline{\beta}$  linearen Anteil der Lageänderung des Systems  $K_E$  relativ zu  $K_0$  (differentielle Lageänderung) mit

- dem in  $d\underline{\beta}$  linearen Anteil  $d\mathbf{r}_{0E}$  der Verschiebung  ${}^0 \Delta \mathbf{r}_{0E}(d\underline{\beta}) = {}^0 \mathbf{r}_{0E}(\underline{\beta} + d\underline{\beta}) - {}^0 \mathbf{r}_{0E}(\underline{\beta})$  von  $O_E$  relativ zu  $K_0$ , sowie
  - dem in  $d\underline{\beta}$  linearen Anteil  ${}^0 d\Phi_{0E}$  der Orientierungsänderung  $\Delta \mathbf{T}(d\underline{\beta}) = {}^0 \mathbf{E} \mathbf{T}^T(\underline{\beta}) {}^0 \mathbf{E} \mathbf{T}(\underline{\beta} + d\underline{\beta})$  von  $K_E$  relativ zu  $K_0$ . Der "Drehvektor"
- $${}^0 d\Phi_{0E} = {}^0 \underline{\omega}_{0E} d\Phi_{0E} \quad (2.30)$$

wird dabei aus den natürlichen Invarianten  $({}^0 \underline{\omega}_{0E}, d\Phi_{0E})$  des in  $d\underline{\beta}$  linearen Anteils von  $\Delta \mathbf{T}(d\underline{\beta})$  gebildet.

Bem.: Da sich die Winkelgeschwindigkeit  $\underline{\omega}_{0E}$  nicht als Ableitung einer Lagegröße darstellen läßt (im Gegensatz zur Translationsgeschwindigkeit  $\underline{v}_{0E} = \dot{\mathbf{r}}_{0E}$ ), ist der Vektor  $\mathbf{z}_{0E}$  auf Lageebene nicht definiert ("Pseudokoordinate").

### 2.4.3 Darstellung der Beschleunigung mit Hilfe der JACOBI-Matrix

Die Zeitableitung von Gl. (2.27) liefert die Darstellung der Beschleunigung von System  $K_E$  relativ zu  $K_0$ :

$${}^0 \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_{0E} \\ \underline{a}_{0E} \end{bmatrix} = {}^0 \begin{bmatrix} \mu_1 \underline{u}_1 & \dots & \mu_n \underline{u}_n \\ \underline{c}_1 & \dots & \underline{c}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\beta}_1 \\ \ddot{\beta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\beta}_n \end{bmatrix} + {}^0 \begin{bmatrix} \mu_1 \dot{\underline{u}}_1 & \dots & \mu_n \dot{\underline{u}}_n \\ \dot{\underline{c}}_1 & \dots & \dot{\underline{c}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\beta}_n \end{bmatrix} \quad (2.31a)$$

$${}^0 \underline{z}_{0E} = {}^0 J_{0E}(\underline{\beta}) \ddot{\underline{\beta}} + {}^0 \underline{j}_{0E}(\underline{\beta}, \dot{\underline{\beta}}) \dot{\underline{\beta}} \quad (2.31b)$$

mit  ${}^0 \dot{\underline{c}}_i = \mu_i ({}^0 \tilde{\underline{u}}_i {}^0 \mathbf{r}_{iE} + {}^0 \tilde{\underline{u}}_i {}^0 \dot{\mathbf{r}}_{iE}) + (1 - \mu_i) {}^0 \dot{\underline{u}}_i$

und  $\mu_i = 1$  bei Drehgelenken ( $\beta_i = \theta_i$ ),

$\mu_i = 0$  bei Schubgelenken ( $\beta_i = s_i$ ).

Die in  ${}^0 \underline{j}_{0E}(\underline{\beta}, \dot{\underline{\beta}})$  auftretenden Zeitableitungen von Verbindungs- und Achsvektoren werden bezüglich  $K_0$  gebildet. Sie können mit Hilfe der in Abhängigkeit von  $\dot{\underline{\beta}}$  vorliegenden Winkel- und Translationsgeschwindigkeiten der Gelenk-Koordinatensysteme ausgedrückt werden (Koordinatenindex  $0$  weggelassen):

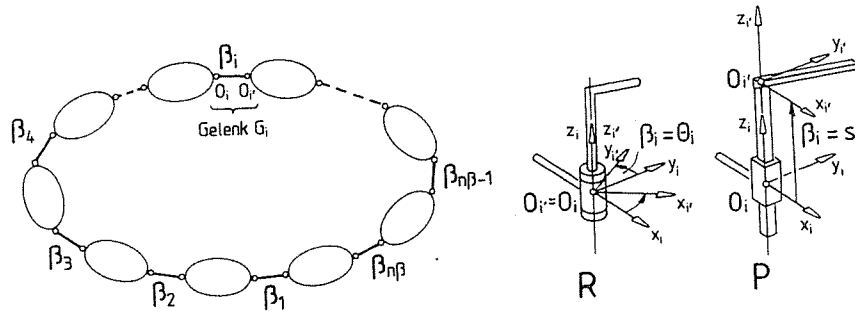
$$\dot{\underline{u}}_i = \tilde{\omega}_{0i} \underline{u}_i \quad (2.32)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{iE} = \tilde{\omega}_{0i} \mathbf{r}_{iE} + \underbrace{\sum_{k=i}^n (\mu_k \dot{\theta}_k \tilde{\underline{u}}_k \mathbf{r}_{kE} + (1 - \mu_k) \dot{s}_k \underline{u}_k)}_{i \dot{\mathbf{r}}_{iE}} \quad (2.33)$$

### 3 Kinematik der Einzelschleife

#### 3.1 Schließbedingungen in einer allgemeinen Mehrkörperschleife

Für die folgenden Untersuchungen wird eine allgemeine Mehrkörperschleife mit  $n_B$  Körpern und Gelenken betrachtet. Beschränkt man sich auf Standardgelenke (außer Schraubgelenke), so ist es ausreichend, nur Drehgelenke (R) und Schubgelenke (P) mit jeweils einem Gelenkfreiheitsgrad zu berücksichtigen. Gelenke mit mehreren Freiheitsgraden können entsprechend Abschnitt 1.2.1 in spezielle Anordnungen von Dreh- und Schubgelenken aufgelöst werden. Die relative Bewegung der einzelnen Körper der Schleife wird dann durch natürliche Gelenkkoordinaten  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n_B$ , beschrieben.



Allgemeine Mehrkörperschleife

Im Gegensatz zu offenen kinematischen Ketten (vgl. Kapitel 2) sind bei kinematischen Schleifen nicht mehr alle Gelenkkoordinaten voneinander unabhängig. Wird eine kinematische Schleife durch einen Schnitt an einem beliebigen Körper aufgetrennt, so werden dadurch sechs geometrische Bindungen (jeweils drei für die Übereinstimmung von Position und Orientierung) aufgelöst. Umgekehrt werden beim Schließen einer offenen kinematischen Kette über den letzten Körper sechs zusätzliche Bindungen, die sechs Schließbedingungen, in das System eingebracht. Über die dazugehörigen sechs Bindungsgleichungen werden genau sechs Gelenkkoordinaten der Schleife festgelegt, die damit nicht mehr unabhängig vorgegeben werden können, sondern von den übrigen Gelenkkoordinaten abhängen. Die  $n_B$  Gelenkkoordinaten der Schleife können deswegen in

$$n_q = n_B - 6 \text{ unabhängige Gelenkkoordinaten } \underline{q} = [q_1, \dots, q_{n_q}]^T \text{ und} \\ 6 \text{ abhängige Gelenkkoordinaten } \underline{y} = [y_1, \dots, y_6]^T$$

aufgeteilt werden. Die unabhängigen Gelenkkoordinaten  $\underline{q}$  sind Minimalkoordinaten (verallgemeinerte Koordinaten) der Schleife. Die Schließbedingungen können dann als ein System von sechs nichtlinearen algebraischen Gleichungen dargestellt werden:

$$\underline{g}(\underline{y}(t), \underline{q}(t)) = \underline{0} \quad \text{bzw.} \quad g_i(\underline{y}(t), \underline{q}(t)) = 0, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (3.1)$$

Durch das nichtlineare Gleichungssystem (3.1) wird die kinematische Übertragungsfunktion

$$\underline{y} = \underline{f}(\underline{q}) \quad (3.2)$$

der Schleife implizit definiert. Die Funktionen  $\underline{g}(\underline{y}(t), \underline{q}(t))$  sollen dabei als die Bindungsfunktionen bezeichnet werden. Die totale zeitliche Ableitung von Gl. (3.1) liefert die Schließbedingungen auf Geschwindigkeits- und Beschleunigungsebene:

$$\dot{\underline{g}}(\underline{y}, \underline{q}, \dot{\underline{y}}, \dot{\underline{q}}) = \underline{J}_y \dot{\underline{y}} + \underline{J}_q \dot{\underline{q}} = \underline{0}, \quad (3.3)$$

$$\ddot{\underline{g}}(\underline{y}, \underline{q}, \dot{\underline{y}}, \dot{\underline{q}}, \ddot{\underline{y}}, \ddot{\underline{q}}) = \underline{J}_y \ddot{\underline{y}} + \underline{J}_q \ddot{\underline{q}} + \ddot{\underline{g}} = \underline{0}. \quad (3.4)$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\underline{J}_y(\underline{y}, \underline{q}) = \frac{\partial \underline{g}(\underline{y}, \underline{q})}{\partial \underline{y}}, \quad \underline{J}_q(\underline{y}, \underline{q}) = \frac{\partial \underline{g}(\underline{y}, \underline{q})}{\partial \underline{q}}, \quad (3.5)$$

$$\ddot{\underline{g}}(\underline{y}, \underline{q}, \dot{\underline{y}}, \dot{\underline{q}}) = \underline{J}_y \dot{\underline{y}} + \underline{J}_q \dot{\underline{q}}. \quad (3.6)$$

Aus den linearen Gleichungssystemen (3.3) und (3.4) ergeben sich die kinematischen Übertragungsfunktionen auf Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsebene:

$$\dot{\underline{y}} = -\underline{J}_y^{-1} \underline{J}_q \dot{\underline{q}}, \quad (3.7)$$

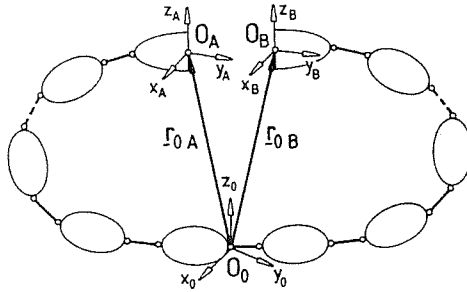
$$\ddot{\underline{y}} = -\underline{J}_y^{-1} (\underline{J}_q \ddot{\underline{q}} + \ddot{\underline{g}}). \quad (3.8)$$

Die Aufstellung und Lösung der Schließbedingungen zur Bestimmung der sechs abhängigen Gelenkkoordinaten ist die zentrale Aufgabe bei der kinematischen Analyse von Mechanismen. Eine Schwierigkeit liegt darin, daß die Schließbedingungen (3.1) mehrfache Lösungen für die gesuchten abhängigen Koordinaten  $\underline{y}$  besitzen. Geometrisch entsprechen diese Lösungen unterschiedlichen Konfigurationen der kinematischen Schleife. Da die numerische Bestimmung sämtlicher Lösungen (Nullstellen) eines nichtlinearen Gleichungssystems im allgemeinen sehr schwierig ist (die üblichen Verfahren ermitteln nur die zum gewählten Startwert nächstliegende Lösung), kommt der expliziten Darstellung der Übertragungsfunktion (3.2) eine besondere Bedeutung zu. In vielen praktisch wichtigen Fällen können solche expliziten Darstellungen durch eine geeignete Formulierung der Schließbedingungen erreicht werden.

Im allgemeinen sind allerdings keine expliziten, sondern nur numerische Lösungen des Gleichungssystems (3.1) möglich. Hier muß man sich dann meist auf die Bestimmung derjenigen Lösung beschränken, die am nächsten an einer gegebenen "Ausgangslage" der kinematischen Schleife liegt (was wiederum für viele Aufgabenstellungen ausreichend ist).

### 3.2 Möglichkeiten zur Aufstellung der Schließbedingungen

#### 3.2.1 Auftrennen der Schleife an einem Körper



Auftrennen der Schleife an einem Körper

Die kinematische Schleife wird hier mit einem Schnitt durch einen beliebigen Körper in zwei offene Teilketten aufgetrennt. Die Schließbedingungen ergeben sich dann unmittelbar aus der Forderung, daß die Schnittpuffer mit den Koordinatensystemen  $K_A$  und  $K_B$  an den Enden dieser Teilketten dieselbe Lage relativ zu einem Koordinatensystem  $K_0$  besitzen:

$${}^0A\mathbf{T} - {}^0B\mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

$${}^0\Gamma_{0A} - {}^0\Gamma_{0B} = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

Die Ortsvektoren und die Transformationsmatrizen für die Koordinatensysteme  $K_A$  und  $K_B$  werden ausgehend vom Bezugskörper durch kinematische Vorwärtsrechnung entsprechend Abschnitt 2.1 in den dazugehörigen Teilketten ausgedrückt. Da hierbei alle Gelenkübergänge benötigt werden, gehen alle (abhängigen und unabhängigen) Gelenkkoordinaten der Schleife in die Schließbedingungen (3.9)/(3.10) ein. Die Komponenten der Schließbedingungen (3.9)/(3.10) bilden ein System von insgesamt 12 nichtlinearen Gleichungen, von denen allerdings nur 6 voneinander unabhängig sind: drei Komponenten der Gleichung (3.9) sowie - wegen der sechs Orthonormalitätsbeziehungen in Transformationsmatrizen - drei der neun Komponenten der Matrixengleichung (3.10).

Werden die Transformationsmatrizen  ${}^0A\mathbf{T}$  und  ${}^0B\mathbf{T}$  durch die Quaternionen  ${}^0A\mathbf{p}$  bzw.  ${}^0B\mathbf{p}$  ersetzt (siehe Gl. (4.62) (I)), so tritt an die Stelle von Gl. (3.9) die nur noch vier Einzelgleichungen umfassende Schließbedingung

$${}^0A\mathbf{p} - {}^0B\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

Auf Geschwindigkeits- und Beschleunigungsebene gelten die Bedingungen

$${}^0\omega_{0A} - {}^0\omega_{0B} = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

$${}^0v_{0A} - {}^0v_{0B} = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

bzw.

$${}^0\alpha_{0A} - {}^0\alpha_{0B} = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

$${}^0a_{0A} - {}^0a_{0B} = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

Werden die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen von  $K_A$  und  $K_B$  mit Hilfe der Beziehungen aus Abschnitt 2.4.1 in Abhängigkeit der Gelenkkoordinaten ausgedrückt, ergeben sich Schließbedingungen der Form (3.3) bzw. (3.4).

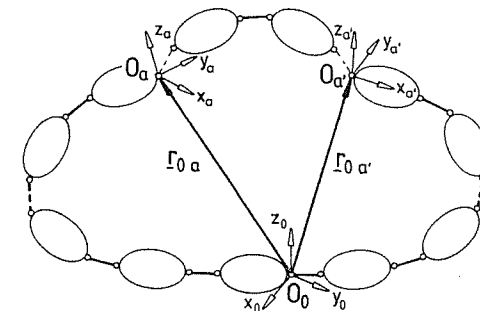
Die Methode des Auftrennens der Schleife an einem Körper hat den Vorteil, daß die Schließbedingungen unabhängig von den unterschiedlichen Gelenktypen stets in der Form der Gleichungen (3.9)/(3.11) und (3.10) angesetzt werden können.

Der Hauptnachteil besteht darin, daß die gesuchten sechs Gelenkkoordinaten im allgemeinen in alle sechs Schließbedingungen eingehen. Eine explizite Auflösung nach den gesuchten Gelenkkoordinaten, die in vielen Fällen möglich ist, kann nur durch algebraische Umformungen des nichtlinearen Gleichungssystems erreicht werden, was allerdings im allgemeinen unübersichtlich und aufwendig ist.

#### 3.2.2 Auftrennen der Schleife an einem Gelenk

Die Schleife wird bei dieser Methode an einem Gelenk, dessen Gelenkkoordinaten zu den sechs abhängigen Koordinaten  $\underline{y}$  der Schleife gehören, aufgetrennt. Besitzt dieses Gelenk  $f_{Ga}$  Gelenkfreiheitsgrade (vgl. Abschnitt 1.2.1), so werden die sechs abhängigen Koordinaten  $\underline{y}$  aufgeteilt in

- \*  $6 - f_{Ga}$  Gelenkkoordinaten  $\underline{y}_I$  außerhalb des geschnittenen Gelenks,
- \*  $f_{Ga}$  Gelenkkoordinaten  $\underline{y}_{II}$  des geschnittenen Gelenks.



Auftrennen der Schleife an einem Gelenk

(Das Schnittgelenk hat i.a. Zwischenkörper; z.B. ebenes Gelenk, Kugelgelenk)

Im Gegensatz zur Körperschnittmethode werden nur  $6 - f_{G_a}$  Bindungen aufgelöst und damit zunächst nur  $6 - f_{G_a}$  Schließbedingungen erhalten. Sie müssen unter Berücksichtigung der Geometrie des geschnittenen Gelenks aufgestellt werden. Für die Standardgelenke (außer Schraubgelenk) sind die Schließbedingungen in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Die Vektoren der linken und rechten Seite der Schließbedingungen werden jeweils ausgehend vom Koordinatensystem  $K_0$  durch kinematische Vorwärtsrechnung in den beiden Teilketten entsprechend Abschnitt 2.1 ausgedrückt. Hierbei wird der entscheidende Vorteil dieser Methode gegenüber der Körperschnittmethode erkennbar: Da der Gelenkübergang am geschnittenen Gelenk nicht benötigt wird, treten die dazugehörigen  $f_{G_a}$  Gelenkkoordinaten  $\underline{y}_{II}$  in diesen Schließbedingungen überhaupt nicht auf. Es wird damit bereits im Ansatz ein nicht-lineares Gleichungssystem mit nur noch  $6 - f_{G_a}$  Gleichungen in  $6 - f_{G_a}$  Unbekannten  $\underline{y}_I$  erhalten.

Die Gelenkkoordinaten  $\underline{y}_{II}$  des geschnittenen Gelenks müssen durch weitere  $f_{G_i}$  Bedingungen bestimmt werden, die sich ebenfalls aus der Geometrie des geschnittenen Gelenks herleiten lassen.

Damit wird das Gleichungssystem der Schließbedingungen (3.1) bereits im Ansatz in zwei Teilsysteme aufgeteilt:

- Ein "Kernsystem"

$$\underline{g}_I(\underline{y}_I, \underline{q}) = \underline{0} \quad (3.16)$$

mit  $6 - f_{G_a}$  simultan nach den nicht im geschnittenen Gelenk  $G_a$  liegenden Gelenkkoordinaten  $\underline{y}_I$  aufzulösenden Gleichungen. Die gegenüber den Gl. (3.9)/3.10) reduzierte Zahl von Gleichungen erleichtert eine algebraische Auflösung nach  $\underline{y}_I$  in der Form

$$\underline{y}_I = \underline{f}_I(\underline{q}) \quad (3.17)$$

(im allgemeinen existiert eine solche explizite Darstellung allerdings nicht).

- Ein zweites Teilsystem

$$\underline{g}_{II}(\underline{y}_{II}, \underline{y}_I, \underline{q}) = \underline{0}, \quad (3.18)$$

in das zusätzlich die  $f_{G_a}$  verbleibenden Gelenkkoordinaten  $\underline{y}_{II}$  des geschnittenen Gelenks eingehen. Für die Standardgelenke zeigt sich, daß dieses Teilsystem nach der Bestimmung von  $\underline{y}_I$  aus Gl. (3.16) bzw. (3.17) explizit nach  $\underline{y}_{II}$  auflösbar ist, also

$$\underline{y}_{II} = \underline{f}_{II}(\underline{y}_I, \underline{q}). \quad (3.19)$$

Als Nachteil der Gelenkschnittmethode bleibt, daß die explizite Lösungsdarstellung (3.17), sofern sie überhaupt möglich ist, weiterhin meist nur durch recht unübersichtliche algebraische Umformungen erreicht werden kann.

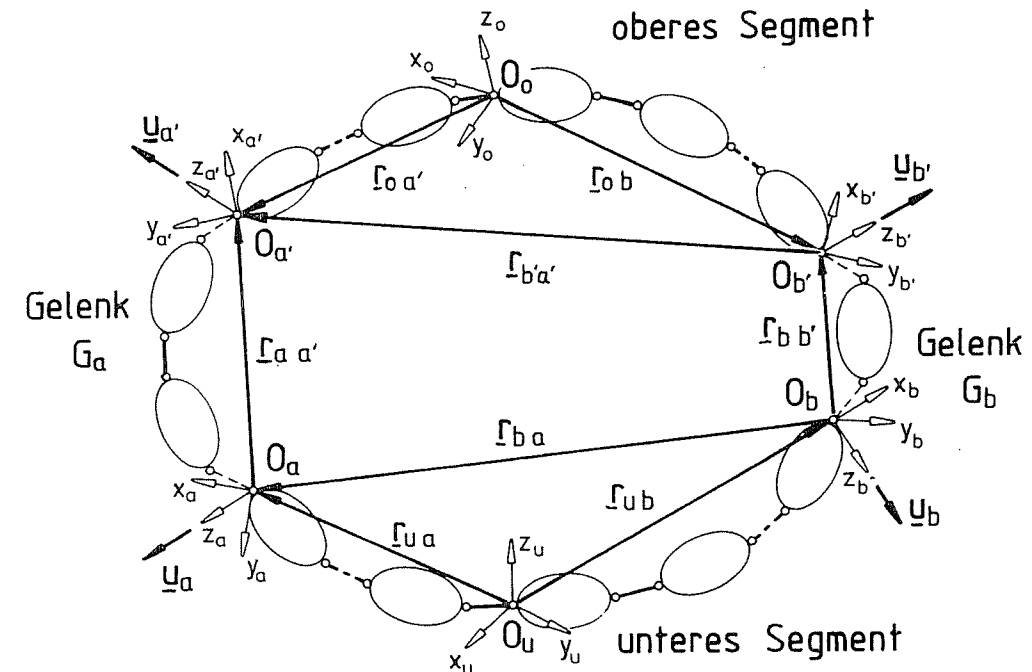
Die Aufstellung der Schließbedingungen (3.16) für konkrete Schnittgelenke wird in Abschnitt 3.3 betrachtet.

### 3.2.3 Auftrennen der Schleife an einem "charakteristischen Gelenkpaar"

Der Vorteil der Gelenkschnittmethode, nämlich die reduzierte Zahl von simultan zu lösenden Gleichungen, legt es nahe, diese Vorgehensweise weiter zu verallgemeinern. Zur Aufstellung der Schließbedingungen wird die kinematische Schleife an zwei Gelenken  $G_a$  und  $G_b$  geschnitten, deren Gelenkkoordinaten zu den gesuchten sechs abhängigen Gelenkkoordinaten  $\underline{y}$  gehören. Diese werden dadurch aufgeteilt in

- \*  $6 - f_{G_a} - f_{G_b}$  Gelenkkoordinaten  $\underline{y}_I$  außerhalb der geschnittenen Gelenke,
- \*  $f_{G_a} + f_{G_b}$  Gelenkkoordinaten  $\underline{y}_{II}$  der geschnittenen Gelenke.

Es werden dann zwei offene Teilketten erhalten, die als das "untere" und das "obere" Segment der Schleife bezeichnet werden sollen.



Auftrennen der Schleife an einem "charakteristischen Gelenkpaar"  
(Die Schnittgelenke haben i.a. Zwischenkörper; z.B. ebenes Gelenk, Kugelgelenk)

Besitzen die Schnittgelenke  $G_a$  und  $G_b$  jeweils  $f_{G_a}$  bzw.  $f_{G_b}$  Gelenkfreiheitsgrade, so werden mit dem Schnitt insgesamt

$$h' = (6 - f_{G_a}) + (6 - f_{G_b}) \quad (3.20)$$

geometrische Bindungen aufgelöst, die wie folgt zugeordnet werden können:

- Sechs der  $h'$  Bindungen beschränken die Bewegung des - als "starre Einheit" betrachteten - oberen Segments relativ zum unteren Segment.

- Die verbleibenden

$$h = h' - 6 = 6 - (f_{Ga} + f_{Gb}) \quad (3.21)$$

Bindungen beschränken zusätzlich die interessierenden Gelenkkoordinaten  $y_I$  innerhalb der Segmente.

Die ersten sechs der  $h'$  Bindungen können nun dadurch umgangen werden, daß solche Schließbedingungen aufstellt werden, die unabhängig von der Lage der beiden Segmente sind. Entsprechend Gl. (3.21) gibt es genau  $h$  solche Schließbedingungen.

Da die Lage der beiden Segmente noch nicht bekannt sind, müssen diese Schließbedingungen durch lageunabhängige, d.h. also skalare, Größen ausgedrückt werden, die hier als die Bindungsparameter" bezeichnet werden sollen. Diese Bindungsparameter werden gleichermaßen über die relative Lage der Gelenk-Bezugssysteme  $K_a'$  und  $K_b'$  an den Enden des oberen Segments und über die relative Lage der Gelenk-Bezugssysteme  $K_a$  und  $K_b$  an den Enden des unteren Segments ausgedrückt. Die Schließbedingungen verlangen dann, daß diese beiden Darstellungen des Bindungsparameters übereinstimmen. Da der Typ der Gelenke  $G_a$  und  $G_b$  die Auswahl der Bindungsparameter und damit die Schließbedingungen festlegt, werden diese Gelenke als das "charakteristische Gelenkpaar" der Schleife bezeichnet.

Die zur Darstellung des Bindungsparameters benötigten Vektoren werden ausgehend von zu wählenden Bezugssystemen  $K_u$  bzw.  $K_o$  auf den beiden Segmenten durch Vorwärtsrechnung ausgedrückt. Dabei werden nur die Übergänge an den Gelenken innerhalb der Segmente mit den Gelenkkoordinaten  $y_I$  benötigt, nicht aber die Übergänge an den geschnittenen Gelenken. Damit sind die  $h$  Schließbedingungen unabhängig von den Gelenkkoordinaten  $y_{II}$  der geschnittenen Gelenke. Diese müssen - ähnlich wie bei der Gelenkschnittmethode - durch zusätzliche gelenkspezifische Beziehungen ermittelt werden. Man erhält auf diese Weise ebenfalls eine Aufteilung des Gleichungssystems in zwei Teilsysteme.

- Ein "Kernsystem"

$$g_I(y_I, q) = 0 \quad (3.22)$$

mit  $h$  simultan zu lösenden Gleichungen ermöglicht die Bestimmung der  $h$  Gelenkkoordinaten  $y_I$ . Am günstigsten ist dabei der Fall  $f_{Ga} + f_{Gb} = 5$  (z.B. ein Kugel- und ein Kardangelenk als Schnittgelenke), da dann Gl. (3.22) lediglich aus  $h = 1$  Gleichung in einer unbekannten Gelenkkoordinate besteht. Umgekehrt erhält man im ungünstigsten Fall bei  $f_{Ga} + f_{Gb} = 2$  (z.B. zwei Drehgelenke als Schnittgelenke) ein System von  $h = 4$  Gleichungen (3.22), aus denen  $y_I$  numerisch zu bestimmen ist.

- Das zweite Teilsystem

$$g_{II}(y_{II}, y_I, q) = 0, \quad (3.23)$$

mit  $6-h$  Gleichungen liefert die  $6-h$  Gelenkkoordinaten  $y_{II}$  der beiden Schnittgelenke. Es zeigt sich, daß bei Standardgelenken (außer Schraubgelenk) dieses Teilsystem explizit nach den Gelenkkoordinaten  $y_{II}$  aufgelöst werden kann. Die beiden Segmente werden dazu - jeweils als starre Einheiten betrachtet - unter Verwendung weiterer Bindungsgleichungen "zusammengebaut".

Die Methode des Schnitts an zwei Gelenken hat u.a. die folgenden Vorteile:

- In Abhängigkeit von den Gelenken der Schleife ist das Gleichungssystem bereits im Ansatz in ein simultan zu lösendes Kernsystem und einen anschließend explizit lösbaren Teilsystem zerlegt. Ohne algebraische Umformungen kann die Zahl der Gleichungen des Kernsystems möglichst klein gemacht werden. Für viele praktische Anwendungen lassen sich unmittelbar explizit auflösbare Schließbedingungen aufstellen.
- Die Bindungsparameter lassen sich mit Hilfe von Vektoren als koordinatenunabhängige "Invarianten" der Schleife formulieren.

Die Berücksichtigung der speziellen Eigenschaften einer kinematischen Schleife erfordert auf der anderen Seite einen deutlich höheren Aufwand bei der Initialisierung und Steuerung der Rechnung (Auswahl des günstigsten charakteristischen Gelenkpaars, Zusammenstellung der charakteristischen Bindungsparameter, Festlegung der Rechenvorschrift für die Bestimmung der Gelenkkoordinaten der Schnittgelenke).

Die Aufstellung der Schließbedingungen für konkrete Gelenke wird in Abschnitt 3.4 betrachtet.



### 3.3 Schließbedingungen an einem geschnittenen Gelenk → Abschnitt 3.2.2

Zur Bestimmung der sechs abhängigen Gelenkkoordinaten gilt das folgende Schema.

#### 1. Schritt: Wahl der unabhängigen Gelenkkoordinaten und des Schnittgelenks $G_a$

Die  $n_p$  Gelenkkoordinaten der kinematischen Schleife werden in die sechs abhängigen Gelenkkoordinaten  $\underline{y}$  und die  $n_q = n_p - 6$  unabhängigen Gelenkkoordinaten  $\underline{q}$  aufgeteilt. Diese Aufteilung richtet sich zunächst nach der Aufgabenstellung, wobei der im allgemeinen begrenzte Definitionsbereich der Übertragungsfunktion  $\underline{y} = \underline{f}(\underline{q})$  bei Annäherung an die Grenzwerte der unabhängigen Koordinaten  $\underline{q}$  eine Neuaufeilung der Koordinaten erfordert. Als Schnittgelenk  $G_a$  wird ein Gelenk gewählt, dessen Gelenkkoordinaten zu den abhängigen Koordinaten  $\underline{y}$  gehören und das möglichst viele Gelenkfreiheitsgrade  $f_{G_a}$  hat. Hierdurch wird die Anzahl der  $6 - f_{G_a}$  simultan aufzulösenden Gleichungen (3.16) verringert.

Die sechs Schließbedingungen (3.1) bestehen dann aus einem Kernsystem mit  $h = 6 - f_{G_a}$  Gleichungen und einem explizit auflösbaren System mit  $f_{G_a}$  Gleichungen:

$$\underline{g}(\underline{y}, \underline{q}) = \underline{0}: \quad \begin{cases} \underline{g}_I(\underline{y}_I, \underline{q}) = \underline{0} & (3.16) \\ \underline{g}_{II}(\underline{y}_{II}, \underline{y}_I, \underline{q}) = \underline{0} & (3.18) \end{cases}$$

#### 2. Schritt: Aufstellen und Lösen des Kernsystems (3.16)

Die  $6 - f_{G_a}$  Schließbedingungen des Kernsystems (3.16) sind für einige Gelenke in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Da eine explizite Auflösung mit Hilfe algebraischer Umformungen meist nur schwierig zu erhalten ist, erfolgt die Auflösung nach den abhängigen Gelenkkoordinaten  $\underline{y}_I$  im allgemeinen numerisch.

#### 3. Schritt: Bestimmung der Gelenkkoordinaten des Schnittgelenks $G_a$

Mit der Auswertung von Gl. (3.16) sind alle relativen Gelenkkoordinaten der am Schnittgelenk aufgetrennten Schleife bekannt. Damit kann die Lage aller Körper durch kinematische Vorwärtsrechnung in Abhängigkeit der Gelenkkoordinaten  $\underline{q}$  und  $\underline{y}_I$  dargestellt werden. Die Bestimmung der noch fehlenden Gelenkkoordinaten  $\underline{y}_{II}$  des Schnittgelenks aus Gl. (3.18) ist deswegen im allgemeinen nicht mehr erforderlich.

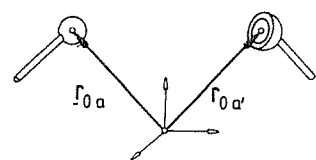
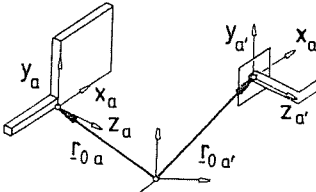
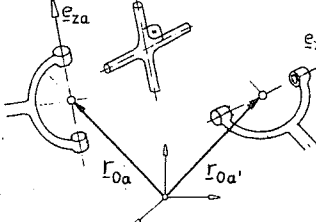
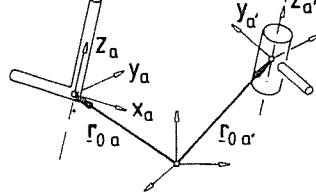
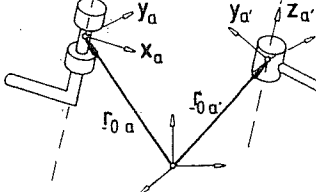
Falls  $\underline{y}_{II}$  dennoch bestimmt werden soll, wird zunächst die relative Lage der Koordinatensysteme  $K_a$  und  $K_{a'}$  am Schnittgelenk aus

$${}^{aa'}\underline{T}(\underline{q}, \underline{y}_I) = {}^{0a}\underline{T}^T {}^{0a'}\underline{T} \quad (3.24)$$

$${}^a\underline{r}_{aa'}(\underline{q}, \underline{y}_I) = {}^{0a}\underline{T}^T ({}^0\underline{r}_{0a'} - {}^0\underline{r}_{0a}) \quad (3.25)$$

berechnet und daraus anschließend  $\underline{y}_{II}$  durch gelenkspezifische Beziehungen bestimmt.

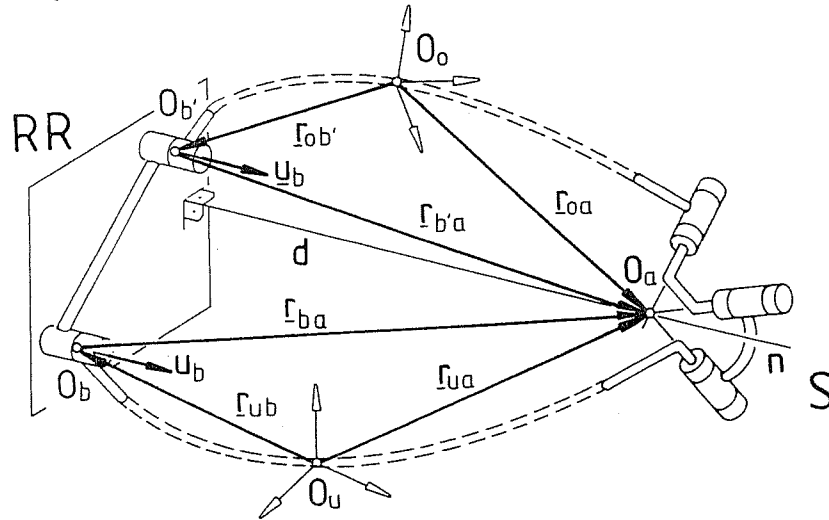
Werden beispielsweise die drei Gelenkkoordinaten  $\underline{y}_{II}$  an einem Kugelgelenk als EULER- oder KARDAN-Winkel eingeführt, so können diese aus der Transformationsmatrix  ${}^{aa'}\underline{T}$  mit Hilfe der Beziehungen aus den Abschnitten 4.3.1 (I) bzw. 4.4.1 (I) ermittelt werden.

Kugelgelenk S $f_{G_a} = 3$		$\underline{r}_{0a'} - \underline{r}_{0a} = \underline{0} \quad (3.26a-c)$
Ebenes Gelenk E $f_{G_a} = 3$		$(\underline{r}_{0a'} - \underline{r}_{0a})^T \underline{e}_{za} = 0 \quad (3.27a)$ $\underline{e}_{za}^T \underline{e}_{xa} = 0 \quad (3.27b)$ $\underline{e}_{za}^T \underline{e}_{ya} = 0 \quad (3.27c)$
Kardangelenk T $f_{G_a} = 2$		$\underline{r}_{0a'} - \underline{r}_{0a} = \underline{0} \quad (3.28a-c)$ $\underline{e}_{za'}^T \underline{e}_{za} = 0 \quad (3.28d)$
Dreh-schubgelenk C $f_{G_a} = 2$		$(\underline{r}_{0a'} - \underline{r}_{0a})^T \underline{e}_{xa} = 0 \quad (3.29a)$ $(\underline{r}_{0a'} - \underline{r}_{0a})^T \underline{e}_{ya} = 0 \quad (3.29b)$ $\underline{e}_{za'}^T \underline{e}_{xa} = 0 \quad (3.29c)$ $\underline{e}_{za'}^T \underline{e}_{ya} = 0 \quad (3.29d)$
Drehgelenk R $f_{G_a} = 1$		$\underline{r}_{0a'} - \underline{r}_{0a} = \underline{0} \quad (3.30a-c)$ $\underline{e}_{za'}^T \underline{e}_{xa} = 0 \quad (3.30d)$ $\underline{e}_{za'}^T \underline{e}_{ya} = 0 \quad (3.30e)$



## 2) Abstand eines Gelenkpunktes von einer Gelenkebene

Gelenkpaar Kugelgelenk (S) - "reduziertes" ebenes Gelenk (RR),  $f_{Ga} + f_{Gb} = 5$ .



Bindungsparameter:

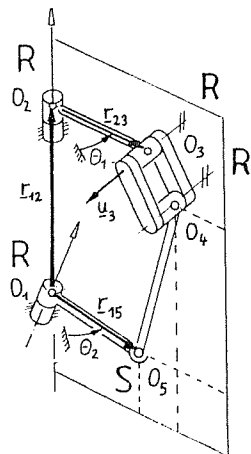
$${}^o\lambda_2 = d = {}^o\mathbf{r}_{b'a} \cdot {}^o\mathbf{u}_b,$$

$${}^u\lambda_2 = d = {}^u\mathbf{r}_{ba} \cdot {}^u\mathbf{u}_b.$$

Schließbedingung Typ 2:

$$g = {}^u\lambda_2 - {}^o\lambda_2 \equiv {}^u\mathbf{r}_{ba} \cdot {}^u\mathbf{u}_b - {}^o\mathbf{r}_{b'a} \cdot {}^o\mathbf{u}_b = 0. \quad (3.33)$$

Beispiel: Mitnehmermechanismus für die Taumelscheibe am Rotorkopf eines Hubschraubers



Abstand  $d \equiv 0$  des Punktes  $O_5$  von der Ebene  $\perp \mathbf{u}_3$  durch  $O_3$ .

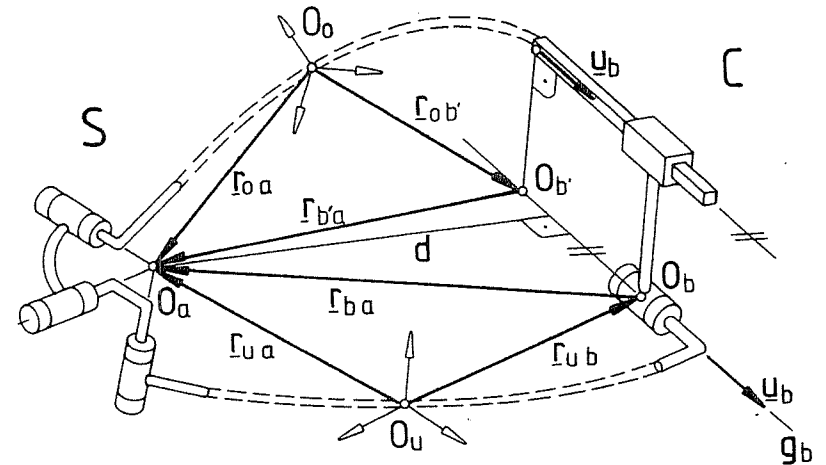
Schließbedingung:

$$g_1(\theta_1, \theta_2) \equiv (-\mathbf{r}_{15} + \mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{23})^T \mathbf{u}_3 = 0$$

→ Übertragungsfunktion  $\theta_2 = f_1(\theta_1)$

## 3) Abstand eines Gelenkpunktes von einer Gelenkachse

Gelenkpaar Kugelgelenk (S) - Dreh-Schubgelenk (C),  $f_{Ga} + f_{Gb} = 5$ .



Bindungsparameter:

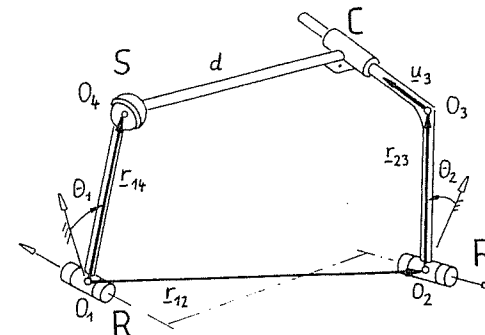
$${}^o\lambda_3 = d^2 = {}^o\mathbf{n}_{b'a} \cdot {}^o\mathbf{n}_{b'a} \quad \text{mit} \quad {}^o\mathbf{n}_{b'a} = {}^o(\mathbf{r}_{b'a} \times \mathbf{u}_b),$$

$${}^u\lambda_3 = d^2 = {}^u\mathbf{n}_{ba} \cdot {}^u\mathbf{n}_{ba} \quad \text{mit} \quad {}^u\mathbf{n}_{ba} = {}^u(\mathbf{r}_{ba} \times \mathbf{u}_b).$$

Schließbedingung Typ 3:

$$g = {}^u\lambda_3 - {}^o\lambda_3 \equiv {}^u\mathbf{n}_{b'a} \cdot {}^u\mathbf{n}_{b'a} - {}^o\mathbf{n}_{ba} \cdot {}^o\mathbf{n}_{ba} = 0. \quad (3.34)$$

Beispiel: RSCR-Mechanismus



Konstanter Abstand  $d$  des Punktes  $O_4$  von der Geraden  $\mathbf{u}_3$ .

Schließbedingung:

$$g_1(\theta_1, \theta_2) \equiv \mathbf{n}_{34} \cdot \mathbf{n}_{34} - d^2 = 0$$

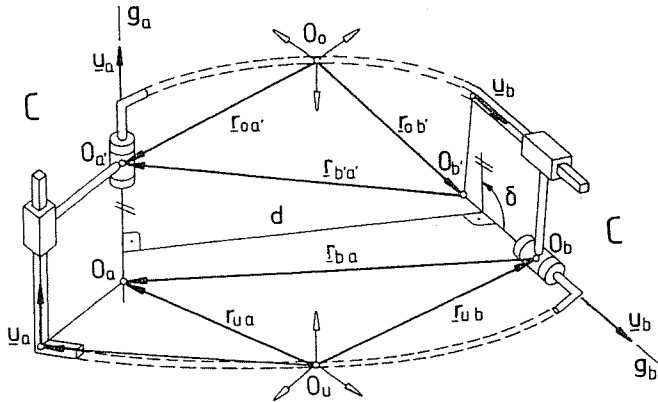
mit

$$\mathbf{n}_{34} = (-\mathbf{r}_{23} - \mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{14}) \times \mathbf{u}_3$$

→ Übertragungsfunktion  $\theta_2 = f_1(\theta_1)$

4) Winkel zwischen zwei Gelenkachsen oder Gelenkebenen5) Abstand zweier Gelenkachsen

Gelenkpaar Dreh-Schubgelenk (C) - Dreh-Schubgelenk (C),  $f_{Ga} + f_{Gb} = 4$ .



Bindungsparameter:

$${}^o\lambda_4 = \cos \delta = {}^o\mathbf{u}_b \cdot {}^o\mathbf{u}_a,$$

$${}^u\lambda_4 = \cos \delta = {}^u\mathbf{u}_b \cdot {}^u\mathbf{u}_a.$$

Schließbedingung Typ 4:

$$g = {}^u\lambda_4 - {}^o\lambda_4 = {}^u\mathbf{u}_b \cdot {}^u\mathbf{u}_a - {}^o\mathbf{u}_b \cdot {}^o\mathbf{u}_a = 0. \quad (3.35)$$

Bindungsparameter:

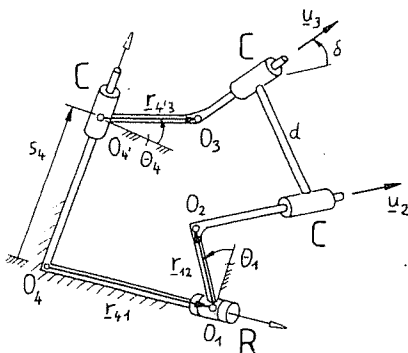
$${}^o\lambda_5 = d \sin \delta = ({}^o\mathbf{u}_b \times {}^o\mathbf{u}_a)^T \cdot {}^o\mathbf{r}_{b'a'},$$

$${}^u\lambda_5 = d \sin \delta = ({}^u\mathbf{u}_b \times {}^u\mathbf{u}_a)^T \cdot {}^u\mathbf{r}_{ba}.$$

Schließbedingung Typ 5:

$$g = {}^u\lambda_5 - {}^o\lambda_5 = ({}^u\mathbf{u}_b \times {}^u\mathbf{u}_a)^T \cdot {}^u\mathbf{r}_{ba} - ({}^o\mathbf{u}_b \times {}^o\mathbf{u}_a)^T \cdot {}^o\mathbf{r}_{b'a'} = 0. \quad (3.36)$$

Beispiel: RCCC-Mechanismus



Konstanter Abstand  $d$  und Winkel  $\delta$  zwischen den Geraden  $\mathbf{u}_2$  und  $\mathbf{u}_3$ .

Schließbedingungen:

$$g_{1,1}(\theta_1, \theta_4) = \mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_3 - \cos \delta = 0$$

$$g_{1,2}(\theta_1, \theta_4, s_4) = (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3)^T \mathbf{r}_{23} - (d) \sin \delta = 0$$

mit

$$\mathbf{r}_{23} = -\mathbf{r}_{12} - \mathbf{r}_{41} + s_4 \mathbf{u}_4 + \mathbf{r}_{4'3}$$

$$\rightarrow \text{Übertragungsfunktionen } \theta_4 = f_{1,1}(\theta_1) \\ s_4 = f_{1,2}(\theta_1)$$

## 3.4.2 Schema zur Bestimmung der sechs abhängigen Gelenkkoordinaten

## 1. Schritt: Wahl der Schnittgelenke (charakteristisches Gelenkpaar)

Die  $n_\beta$  Gelenkkoordinaten der kinematischen Schleife wird wieder in die sechs abhängigen Gelenkkoordinaten  $\mathbf{y}$  und die  $n_q = n_\beta - 6$  unabhängigen Gelenkkoordinaten  $\mathbf{q}$  aufgeteilt. Als charakteristisches Gelenkpaar werden zwei Gelenke  $G_a$  und  $G_b$  gewählt, deren Gelenkkoordinaten zu den abhängigen Koordinaten  $\mathbf{y}$  gehören und die möglichst viele Gelenkfreiheitsgrade haben. Hierdurch wird die Anzahl der  $6 - f_{Ga} - f_{Gb}$  simultan aufzulösenden Gleichungen (3.22) verringert.

Die sechs Schließbedingungen (3.1) bestehen dann aus einem Kern mit  $h = 6 - f_{Ga} - f_{Gb}$  Gleichungen und einen explizit auflösbaren Teil mit  $f_{Ga} + f_{Gb}$  Gleichungen:

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{q}) = \mathbf{0}: \quad \begin{cases} g_I(\mathbf{y}_I, \mathbf{q}) = 0 \\ g_{II}(\mathbf{y}_{II}, \mathbf{y}_I, \mathbf{q}) = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

$$(3.23)$$

Da mindestens eine Gleichung (3.22) vorhanden sein muß, ist  $f_{Ga} + f_{Gb} \leq 5$ . Bei Beschränkung auf Gelenke mit maximal drei Freiheitsgraden hat damit eines der beiden Schnittgelenke maximal zwei Freiheitsgrade. Dieses Schnittgelenk mit weniger Gelenkfreiheitsgraden wird im folgenden mit  $G_b$  bezeichnet.

## 2. Schritt: Aufstellen und Lösen des Kernsystems

Die  $h$  Schließbedingungen (3.22) werden aus den in Abschnitt 3.4.1 beschriebenen fünf Grundtypen zusammengestellt. Sie besitzen damit die allgemeine Form:

$$\mathbf{g}_I(\mathbf{y}_I, \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{y}_I, \mathbf{q}) \\ \vdots \\ g_h(\mathbf{y}_I, \mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^u\lambda_1 - {}^o\lambda_1 \\ \vdots \\ {}^u\lambda_h - {}^o\lambda_h \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.37)$$

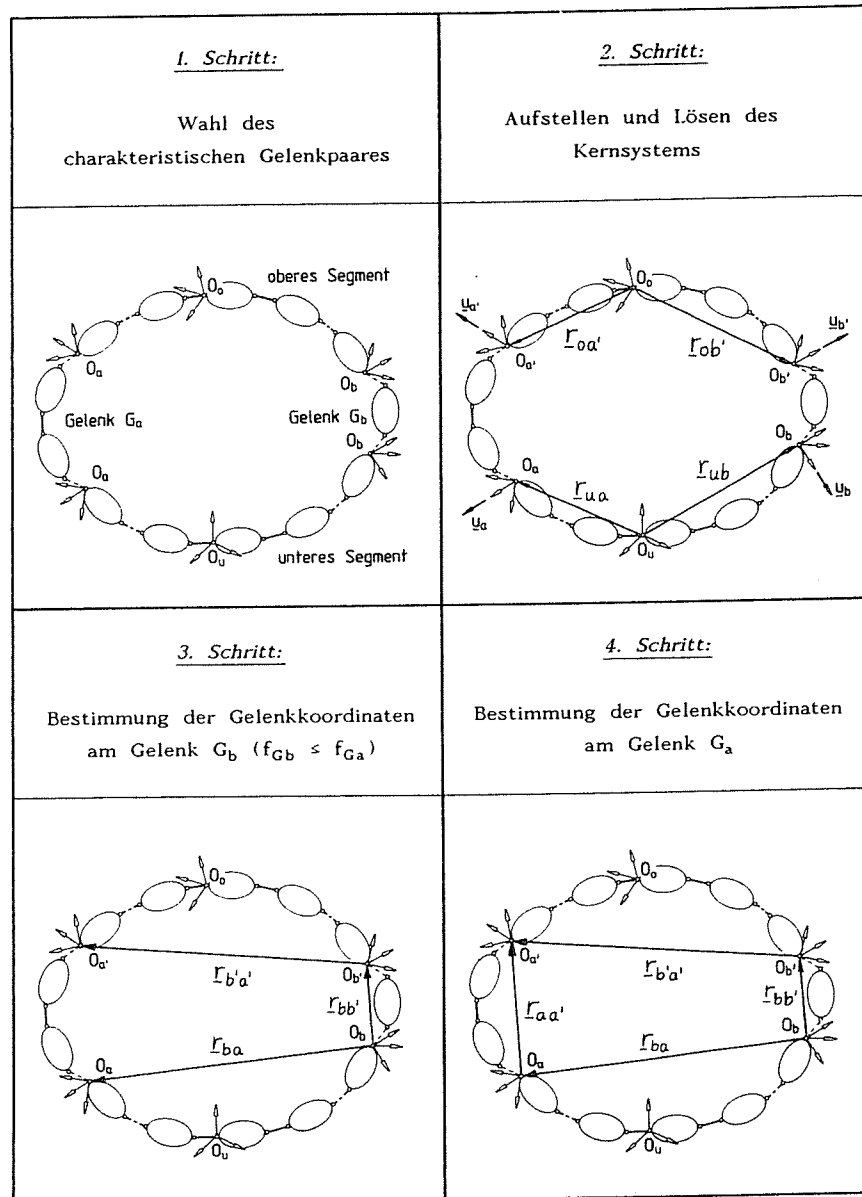
Die Anzahl und der Typ der impliziten Bindungsgleichungen sind für die möglichen Gelenkpaare in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Während das Gleichungssystem (3.37) im Fall  $h > 1$  wie bei der Gelenkschnittmethode im allgemeinen nur numerisch aufgelöst werden kann, ist es im Fall  $h = 1$  explizit auflösbar.

Bei Auflösung nach einem Gelenkwinkel  $\theta_i$  liefern die Schließbedingungen der Typen 1, 2, 4 und 5 jeweils eine Gleichung der Form

$$A \cos \theta_i + B \sin \theta_i + C = 0$$

mit maximal zwei Lösungen, während die Schließbedingung des Typs 3 eine in  $\sin \theta_i$  und  $\cos \theta_i$  quadratische Gleichung mit maximal vier Lösungen liefert.

Bei Auflösung nach einer Gelenkverschiebung  $s_i$  liefern die Schließbedingungen der Typen 1 und 3 jeweils eine in  $s_i$  quadratische Gleichung, diejenigen der Typen 2 und 5 eine in  $s_i$  lineare Gleichung, während in die "sphärische" Schließbedingung des Typs 4 Gelenkverschiebungen überhaupt nicht eingehen.



Schema zur Bestimmung der Gelenkkoordinaten beim Schnitt an einem "charakteristischen Gelenkpaar"

Gelenk $G_a$		Gelenk $G_b$		h	Typ der Schließbedingung				
Typ	$f_{Ga}$	Typ	$f_{Gb}$		1	2	3	4	5
S	3	T	2	1	1				
E	3	T	2	1		1			
S	3	$E_R$	2	1		1			
E	3	$E_P$	2	1				1	
S	3	C	2	1			1		
E	3	C	2	1				1	
C	2	C	2	2				1	1
S	3	R	1	2	1	1			
E	3	R	1	2		1		1	
C	2	R	1	3			1	1	1
R	1	R	1	4	1	2		1	
S	3	P	1	2		2			
E	3	P	1	2				2	
C	2	P	1	3				2	1
R	1	P	1	4		2		2	
P	1	P	1	4				3	1

- R: Drehgelenk
- P: Schubgelenk
- C: Dreh-Schubgelenk
- S: Kugelgelenk
- T: Kardangelenk (zwei Drehgelenke mit sich schneidenden Achsen)
- E: Ebenes Gelenk
- $E_R$ : Zwei Drehgelenke mit parallelen Achsen (RR) oder ein Dreh- und ein Schubgelenk mit orthogonalen Achsen (RP) oder zwei Schubgelenke mit nichtparallelen Achsen (PP)
- $E_P$ : Zwei Drehgelenke mit parallelen Achsen (RR) oder ein Dreh- und ein Schubgelenk mit orthogonalen Achsen (RP)

Schließbedingungen des Kernsystems für alle Gelenkpaare

### 3. Schritt: Bestimmung der Gelenkkoordinaten im Gelenk $G_b$

Nach der Bestimmung der abhängigen Gelenkkoordinaten  $y_1$  aus Gl. (3.37) sind alle Gelenkkoordinaten innerhalb des oberen und des unteren Segments bekannt. Damit können die direkten Übergänge zwischen den Koordinatensystemen  $K_a$  und  $K_b$  an den Enden des oberen Segments sowie  $K_a$  und  $K_b$  an den Enden des unteren Segments berechnet werden (vgl. Bild in Abschnitt 3.2.3):

$${}^{ba}\underline{T} = {}^{bu}\underline{T} {}^{ua}\underline{T}, \quad {}^{b'}\underline{r}_{ba} = {}^{bu}\underline{T} ({}^u\underline{r}_{ua} - {}^u\underline{r}_{ub}), \quad (3.38)$$

$${}^{b'a'}\underline{T} = {}^{b'o}\underline{T} {}^{oa'}\underline{T}, \quad {}^{b'}\underline{r}_{b'a'} = {}^{b'o}\underline{T} ({}^o\underline{r}_{oa'} - {}^o\underline{r}_{ob'}). \quad (3.39)$$

Zur Bestimmung der Gelenkkoordinaten an den Schnittgelenken  $G_a$  und  $G_b$  muß zusätzlich die Lage des oberen Segments relativ zum unteren Segment betrachtet werden, die bisher überhaupt noch nicht benötigt wurde. Dazu müssen die beiden Segmente unter Erfüllung der Schließbedingungen (3.23) »zusammengebaut« werden.

Hierbei zeigt sich, daß zunächst die maximal zwei Gelenkkoordinaten des Schnittgelenks  $G_b$  mit weniger Gelenkkoordinaten bestimmt werden können. Danach liegen am Gelenk  $G_b$  die Matrizen

$${}^{bb'}\underline{T} \text{ und } {}^{b'}\underline{r}_{bb'}$$

vor, welche den Übergang vom Koordinatensystem  $K_b$  nach  $K_b'$  beschreiben.

### 4. Schritt: Bestimmung der Gelenkkoordinaten des Gelenks $G_a$

Nach dem 3. Schritt kann die Lage aller Körper durch kinematische Vorwärtsrechnung dargestellt werden. Die Bestimmung der noch fehlenden Gelenkkoordinaten des zweiten Schnittgelenks  $G_a$  ist deswegen im allgemeinen nicht mehr erforderlich.

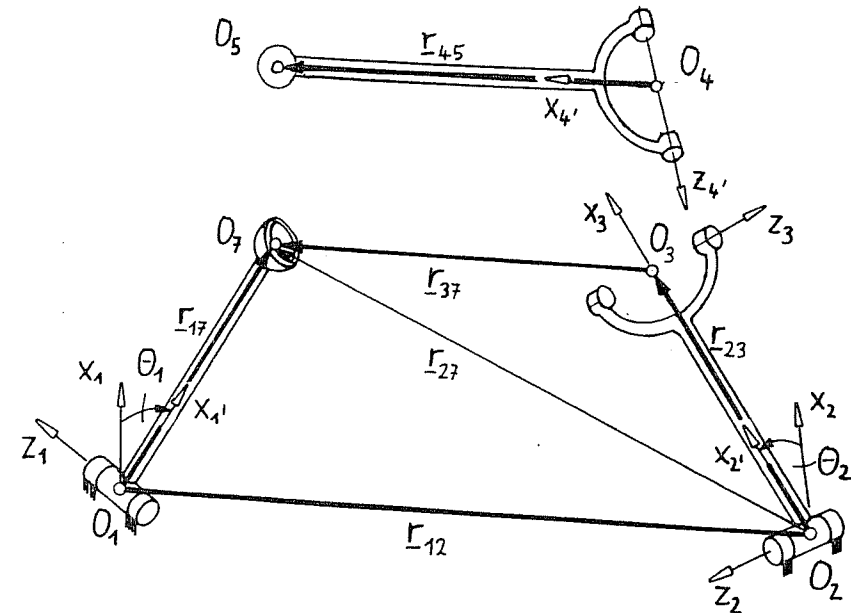
Falls die Gelenkkoordinaten von  $G_a$  dennoch bestimmt werden sollen, wird zunächst die relative Lage der Koordinatensysteme  $K_a$  und  $K_a'$  mit Hilfe der Beziehungen

$${}^{aa'}\underline{T} = {}^{ab}\underline{T} {}^{bb'}\underline{T} {}^{b'a'}\underline{T}, \quad (3.40)$$

$${}^a\underline{r}_{aa'} = {}^{ab}\underline{T} [-{}^{b'}\underline{r}_{ba} - {}^{b'}\underline{r}_{bb'} + {}^{bb'}\underline{T} {}^{b'}\underline{r}_{b'a'}] \quad (3.41)$$

berechnet. Die Gelenkkoordinaten von  $G_a$  können daraus mit weiteren gelenkspezifischen Beziehungen ermittelt werden.

### 3.4.3 Beispiel: Räumliches Gelenkviereck (RSTR-Mechanismus)



#### 1. Schritt: Wahl der unabhängigen Gelenkkoordinaten und der Schnittgelenke

Aufteilung der Gelenkkoordinaten:

$$q = \theta_1, \quad y = [\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]^T, \quad \theta_5 - \text{Gelenkkoordinaten des Kugelgelenks.}$$

Das Kugelgelenk und das Kardangeln werden als charakteristisches Gelenkpaar gewählt. Damit ist

$$y_1 = \theta_2$$

#### 2. Schritt: Bestimmung von $\theta_2$ aus dem Kernsystem

Die Schließbedingung (3.32) für den Schnitt am Gelenkpaar Kugelgelenk-Kardangeln wird so ausgewertet, daß der gesuchte Winkel  $\theta_2$  herausgelöst werden kann:

$$g_1(\theta_1, \theta_2) = {}^u\lambda_1(\theta_1, \theta_2) - {}^o\lambda_1 = 0$$

mit  $(K_u \hat{=} K_2, K_o \hat{=} K_4)$

$${}^o\lambda = {}^4\underline{r}_{45}^T {}^4\underline{r}_{45} = r_{45}^2 = \text{const}$$

und

$${}^u\lambda_1 = {}^2\mathbf{r}_{37}^T {}^2\mathbf{r}_{27} = \left( -{}^2\mathbf{r}_{23} + {}^2\mathbf{r}_{27} \right)^T \left( -{}^2\mathbf{r}_{23} + {}^2\mathbf{r}_{27} \right) =$$

$$= {}^2\mathbf{r}_{23}^T {}^2\mathbf{r}_{23} + {}^2\mathbf{r}_{27}^T {}^2\mathbf{r}_{27} - 2 {}^2\mathbf{r}_{27}^T {}^{22'}\mathbf{I}(\Theta_2) {}^2\mathbf{r}_{23}$$

$$\text{mit } {}^2\mathbf{r}_{27} = {}^{21}\mathbf{I} \left( -{}^1\mathbf{r}_{12} + {}^{11'}\mathbf{I}(\Theta_1) {}^1\mathbf{r}_{17} \right),$$

$${}^2\mathbf{r}_{23}^T {}^2\mathbf{r}_{23} = {}^{2'}\mathbf{r}_{23}^T {}^{2'}\mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_{23}^2 = \text{const.}$$

Die Schließbedingung lautet damit

$${}^2\mathbf{r}_{27}^T {}^{22'}\mathbf{I}(\Theta_2) {}^{2'}\mathbf{r}_{23} = \frac{1}{2} \left( {}^2\mathbf{r}_{27}^T {}^2\mathbf{r}_{27} + \mathbf{r}_{23}^2 - \mathbf{r}_{45}^2 \right). \quad (3.42)$$

Sie läßt sich nach Abschnitt 3.4.4a in eine Gleichung der Form

$$A_2(\Theta_1) \cos \Theta_2 + B_2(\Theta_1) \sin \Theta_2 + C_2(\Theta_1) = 0$$

mit zwei Lösungen entsprechend Gl. (3.46) umformen.

### 3. Schritt: Bestimmung der Winkel $\Theta_3$ und $\Theta_4$ am Kardangeln

Der direkte Übergang vom Kardan- zum Kugelgelenk im unteren Segment lautet, vgl. Gl. (3.38):

$${}^3\mathbf{r}_{37} = {}^{32'}\mathbf{I} \left( {}^{22'}\mathbf{I}(\Theta_2) {}^2\mathbf{r}_{27} - {}^{2'}\mathbf{r}_{23} \right)$$

Zur Bestimmung des Winkels  $\Theta_3$  kann durch einen Schnitt am Kugelgelenk und an der zweiten Drehachse des Kardangelns die folgende Schließbedingung des Typs 4 aufgestellt werden:

$$g_{II,1}(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) \equiv {}^u\lambda_4(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) - {}^o\lambda_4 = 0$$

mit

$${}^o\lambda_4 = {}^{4'}\mathbf{r}_{45}^T {}^{4'}\mathbf{u}_4 = \cos \delta_{45} = \text{const}$$

und  $(x_3, = x_4$  Achse fest auf dem Kardankreuz)

$${}^u\lambda_4 = {}^3\mathbf{r}_{37}^T {}^3\mathbf{u}_4 \quad \text{mit} \quad {}^3\mathbf{u}_4 = {}^{33'}\mathbf{I}(\Theta_3) {}^{3'}\mathbf{u}_4.$$

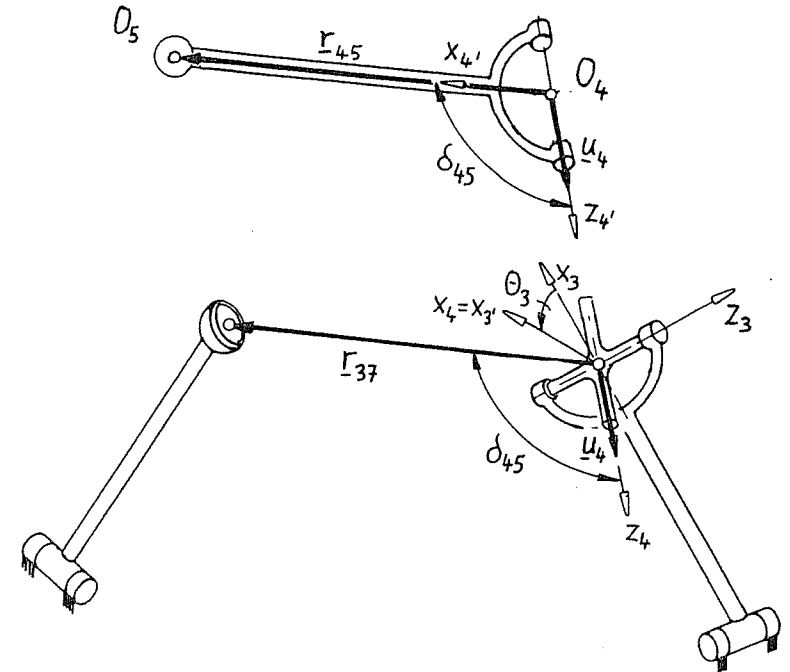
Die Schließbedingung ergibt damit

$${}^3\mathbf{r}_{37}^T {}^{33'}\mathbf{I}(\Theta_3) {}^{3'}\mathbf{u}_4 = \cos \delta_{45}. \quad (3.43)$$

Dies ist wieder eine Gleichung der Form

$$A_3(\Theta_1, \Theta_2) \cos \Theta_3 + B_3(\Theta_1, \Theta_2) \sin \Theta_3 + C_3(\Theta_1, \Theta_2) = 0$$

mit zwei Lösungen für den Winkel  $\Theta_3$ .

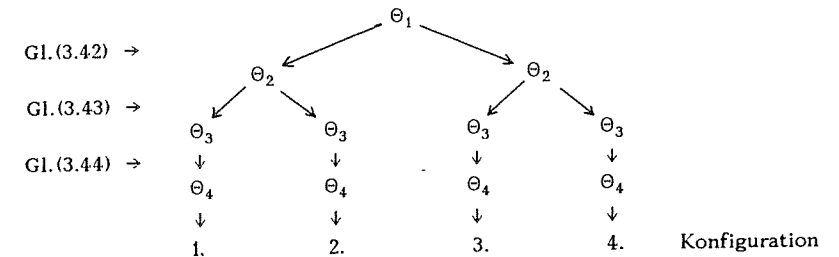


Der Winkel  $\Theta_4$  ergibt sich aus der Bedingung der Übereinstimmung der Vektoren  $\mathbf{r}_{37}$  und  $\mathbf{r}_{45}$  in den beiden Segmenten:

$${}^4\mathbf{r}_{37} = {}^{44'}\mathbf{I}(\Theta_4) {}^{4'}\mathbf{r}_{45} \quad \text{mit} \quad {}^4\mathbf{r}_{37} = {}^{43'}\mathbf{I} {}^{33'}\mathbf{I}(\Theta_3) {}^3\mathbf{r}_{37}. \quad (3.44)$$

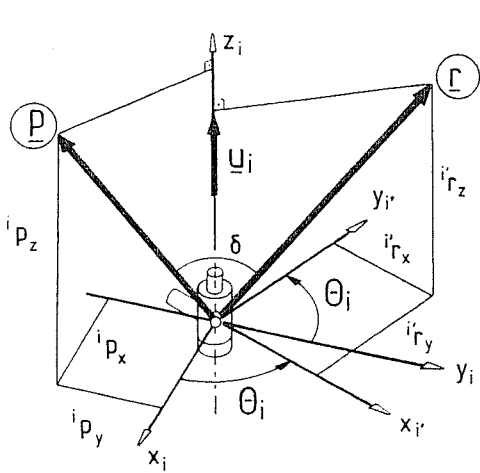
Entsprechend Abschnitt 3.4.4b liefert diese Beziehung eindeutig den Winkel  $\Theta_4$ .

Insgesamt ergibt sich damit der folgende Lösungsfluß:

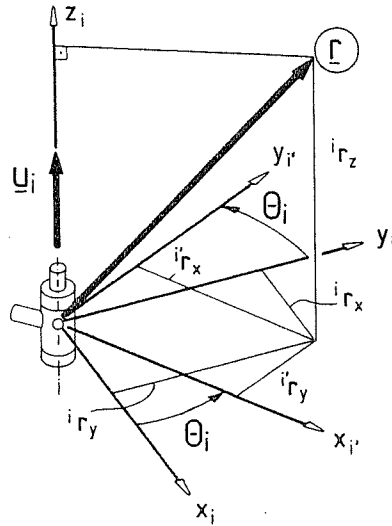


Die Berechnung der drei Gelenkwinkel  $\Theta_5, \Theta_6, \Theta_7$  am Kugelgelenk z.B. als KARDAN-Winkel würde zu insgesamt 8 Konfigurationen führen (für jede der Lösungen bis Gl. (3.44) jeweils zwei Lösungen für diese Winkel). Diese besitzen aber nur dann eine praktische Bedeutung, wenn das Kugelgelenk tatsächlich aus drei Drehgelenken aufgebaut ist.

### 3.4.4 Auflösungsvorschriften für einzelne Gelenkkoordinaten



zu 3.4.4a



zu 3.4.4b

#### a) Herauslösen eines Gelenkwinkels aus einem Skalarprodukt

Aus einer Schließbedingung sei der Wert  $S$  des Skalarprodukts

$$\underline{p}^T \underline{r} = S$$

zweier beliebiger Vektoren  $\underline{p}$  und  $\underline{r}$  bekannt. Ferner liegen die Koordinaten von  $\underline{p}$  im Koordinatensystem  $K_i$  sowie die Koordinaten von  $\underline{r}$  im Koordinatensystem  $K_i'$  eines Drehgelenks  $G_i$  vor:

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} i p_x \\ i p_y \\ i p_z \end{bmatrix}, \quad \underline{r} = \begin{bmatrix} i' r_x \\ i' r_y \\ i' r_z \end{bmatrix}.$$

Unter Berücksichtigung von

$${}^{ii'}\underline{T}(\Theta_i) = \begin{bmatrix} \cos \Theta_i & -\sin \Theta_i & 0 \\ \sin \Theta_i & \cos \Theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ergibt sich eine skalare Bestimmungsgleichung für den Gelenkwinkel  $\Theta_i$ :

$$i \underline{p}^T {}^{ii'}\underline{T}(\Theta_i) i' \underline{r} = S. \quad (3.45)$$

Die Auswertung von Gl. (3.48) liefert

$$A \cos \Theta_i + B \sin \Theta_i + C = 0, \quad (3.46)$$

mit den Koeffizienten

$$\left. \begin{aligned} A &= i p_x i' r_x + i p_y i' r_y \\ B &= i p_y i' r_x - i p_x i' r_y \\ C &= i p_z i' r_z - S \end{aligned} \right\}.$$

Der Übergang auf die Variable  $\tan \frac{\Theta_i}{2}$  zeigt, daß Gl. (3.46) eine quadratische Struktur besitzt. Um Schwierigkeiten bei Winkelwerten  $\Theta_i = \pi$  zu umgehen, werden jedoch die Lösungen günstiger direkt aus der Form (3.46) bestimmt. Es werden zwei Lösungen für den Gelenkwinkel  $\Theta_i$  erhalten:

$$\left. \begin{aligned} \cos \Theta_i &= \frac{-AC - (-1)^k B \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2} \\ \sin \Theta_i &= \frac{-BC + (-1)^k A \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2} \end{aligned} \right\}, \quad k = 1, 2. \quad (3.47)$$

#### b) Herauslösen eines Gelenkwinkels aus zwei Koordinatendarstellungen eines Vektors

Gegeben seien die Koordinaten eines beliebigen Vektors  $\underline{r}$  in den Koordinatensystemen  $K_i$  und  $K_i'$  eines Drehgelenks  $G_i$ :

$$i \underline{r} = \begin{bmatrix} i r_x \\ i r_y \\ i r_z \end{bmatrix}, \quad i' \underline{r} = \begin{bmatrix} i' r_x \\ i' r_y \\ i' r_z \end{bmatrix}.$$

Der Vektor  $\underline{r}$  soll dabei nicht parallel zur Gelenkachse  $\underline{u}_i$  liegen. Aus den x- und y-Komponenten der Transformationsgleichung

$$i \underline{r} = {}^{ii'}\underline{T}(\Theta_i) i' \underline{r} \quad (3.48)$$

ergibt sich mit der Transformationsmatrix  ${}^{ii'}\underline{T}(\Theta_i)$  eindeutig der Gelenkwinkel  $\Theta_i$  (die z-Komponente von Gl. (3.48),  $i r_z = i' r_z$ , ist trivial):

$$\left. \begin{aligned} \cos \Theta_i &= \frac{i r_x i' r_x + i r_y i' r_y}{i r_x^2 + i r_y^2} \\ \sin \Theta_i &= \frac{i r_y i' r_x - i r_x i' r_y}{i r_x^2 + i r_y^2} \end{aligned} \right\}. \quad (3.49)$$



### c) Herauslösen von Gelenkverschiebungen aus Linearkombinationen von Vektoren

Die Bestimmungsgleichungen für Verschiebungen  $s_i$  bei Schubgelenken können als Linearkombinationen von bereits vorliegenden Vektoren formuliert werden, wobei die gesuchten Gelenkverschiebungen als Linearfaktoren auftreten. Bei der Auflösung nach den Gelenkverschiebungen sind drei Fälle zu unterscheiden.

#### - Eine unbekannte Gelenkverschiebung

Aus der Bestimmungsgleichung

$$s_1 \underline{p}_1 = \underline{r} \quad (3.50)$$

mit bekannten Vektoren  $\underline{p}_1$  und  $\underline{r}$  ergibt sich die Gelenkverschiebung  $s_1$  durch skalare Multiplikation mit dem Vektor  $\underline{p}_1$ :

$$s_1 = \frac{\underline{p}_1^T \underline{r}}{\underline{p}_1^T \underline{p}_1} \quad (3.51)$$

#### - Zwei unbekannte Gelenkverschiebungen

Aus der Bestimmungsgleichung

$$s_1 \underline{p}_1 + s_2 \underline{p}_2 = \underline{r} \quad (3.52)$$

mit bekannten Vektoren  $\underline{p}_1, \underline{p}_2$  und  $\underline{r}$  erhält man die Gelenkverschiebung  $s_1$  durch skalare Multiplikation mit einem Vektor  $\underline{c}_1$ , der senkrecht auf  $\underline{p}_2$  steht ( $s_2$  durch Indextausch 1-2):

$$s_1 = \frac{\underline{c}_1^T \underline{r}}{\underline{c}_1^T \underline{p}_1} \quad \text{mit} \quad \underline{c}_1 = \underline{p}_2 \times (\underline{p}_1 \times \underline{p}_2) \quad (3.53)$$

#### - Drei unbekannte Gelenkverschiebungen

Die Bestimmungsgleichung

$$s_1 \underline{p}_1 + s_2 \underline{p}_2 + s_3 \underline{p}_3 = \underline{r} \quad (3.54)$$

stellt bei bekannten Vektoren  $\underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3$  und  $\underline{r}$  ein lineares Gleichungssystem für die drei Gelenkverschiebungen  $s_1, s_2$  und  $s_3$  dar. Eine geschlossene Lösungsdarstellung z.B. für die Gelenkkoordinate  $s_1$  wird durch skalare Multiplikation mit dem Vektor  $\underline{p}_2 \times \underline{p}_3$  ( $s_2$  und  $s_3$  durch zyklischen Indextausch 1-2-3) erhalten:

$$s_1 = \frac{(\underline{p}_2 \times \underline{p}_3)^T \underline{r}}{(\underline{p}_2 \times \underline{p}_3)^T \underline{p}_1} \quad (3.55)$$

Dies entspricht der Lösung des linearen Gleichungssystems (3.54) mit Hilfe der CRAMERSchen Regel.

### 3.5 Analyse der Geschwindigkeiten in einer kinematischen Schleife

Bei der Geschwindigkeitsanalyse in einer kinematischen Schleife werden für eine gegebene Position die sechs Geschwindigkeiten  $\dot{\underline{y}}$  in Abhängigkeit der  $n_B - 6$  unabhängigen Geschwindigkeiten  $\dot{\underline{q}}$  aus dem linearen Gleichungssystem (3.3) bestimmt:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{g}}(\underline{y}, \underline{q}, \dot{\underline{y}}, \dot{\underline{q}}) &= \underline{J}_y \dot{\underline{y}} + \underline{J}_q \dot{\underline{q}} = \underline{0} \\ \rightarrow \underline{J}_y \dot{\underline{y}} &= - \underline{J}_q \dot{\underline{q}} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Im folgenden Abschnitt wird das Gleichungssystem (3.56) mit Hilfe der Methode des Auftrennens der Schleife an einem Körper aufgestellt. Die anschließend beschriebenen Methoden des Auftrennens der Schleife an einem Gelenk bzw. an einem Gelenkpaar ermöglichen wieder die Aufstellung eines reduzierten Kernsystems, in das die Gelenkkoordinaten der Schnittgelenke nicht eingehen. Da (3.56) linear in den Unbekannten  $\dot{\underline{y}}$  ist, haben diese Vorgehensweisen bei der Geschwindigkeitsanalyse allerdings keine so große Bedeutung wie bei der Positionsanalyse. Dennoch können sie insbesondere dann vorteilhaft angewandt werden, wenn nicht sämtliche Unbekannten  $\dot{\underline{y}}$  bestimmt werden müssen. Die reduzierte Anzahl von Gleichungen des Kernsystems ermöglicht es ferner, Strecklagen (vertikale Tangenten der Übertragungsfunktionen  $\dot{\underline{y}} = \underline{f}(\dot{\underline{q}})$ ) einfacher zu erkennen und zu interpretieren.

#### 3.5.1 Auftrennen der Schleife an einem Körper → Abschnitt 3.2.1

Auf Geschwindigkeitsebene gelten die Schließbedingungen (3.12) und (3.13), die zu einer Matrixengleichung zusammengefaßt werden können:

$$\begin{bmatrix} {}^0\underline{\omega}_{0A} \\ {}^0\underline{v}_{0A} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^0\underline{\omega}_{0B} \\ {}^0\underline{v}_{0B} \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (3.57a)$$

$${}^0\dot{\underline{z}}_{0A} - {}^0\dot{\underline{z}}_{0B} = \underline{0} \quad (3.57b)$$

Werden die Gelenkkoordinaten der zwischen  $K_0$  und  $K_A$  und der zwischen  $K_0$  und  $K_B$  liegenden Gelenke in den Vektoren  $\underline{\dot{p}}_{0A}$  bzw.  $\underline{\dot{p}}_{0B}$  zusammengefaßt, so lassen sich die Geschwindigkeiten gemäß Gl. (2.27) in Matrizenform darstellen:

$${}^0\dot{\underline{z}}_{0A} = {}^0\underline{J}_{0A} \underline{\dot{p}}_{0A} \quad (3.58)$$

$${}^0\dot{\underline{z}}_{0B} = {}^0\underline{J}_{0B} \underline{\dot{p}}_{0B} \quad (3.59)$$

Hierbei sind  $\underline{J}_{0A}$  und  $\underline{J}_{0B}$  die JACOBI-Matrizen der Bewegungen von  $K_A$  bzw.  $K_B$  relativ zu  $K_0$ . Mit (3.58)/(3.59) geht (3.57) über in

$$\begin{aligned} {}^0\underline{J}_{0A} \underline{\dot{p}}_{0A} - {}^0\underline{J}_{0B} \underline{\dot{p}}_{0B} &= \underline{0} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} \underline{J}_{0A} & - \underline{J}_{0B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{p}}_{0A} \\ \underline{\dot{p}}_{0B} \end{bmatrix} &= \underline{0} \end{aligned} \quad (3.60a)$$

$${}^0\underline{J}_B \underline{\dot{p}} = \underline{0} \quad (3.60b)$$

Dies ist ein unterbestimmtes homogenes System mit 6 linearen Gleichungen für die  $n_B$  Geschwindigkeiten  $\dot{\underline{p}}$  aller Gelenkkoordinaten der Schleife. Die  $(6, n_B)$ -Matrix  $\underline{J}_B$  wird als die "JACOBI-Matrix der Schleife" bezeichnet.

Für die Lösung von (3.60) werden die  $n_B$  Gelenkkoordinaten  $\underline{p}$  in die 6 abhängigen Koordinaten  $\underline{y}$  und die 6 -  $n_B$  unabhängigen Koordinaten (Minimalkoordinaten)  $\underline{q}$  aufgeteilt. Nach entsprechender Umordnung wird dann ein lineares Gleichungssystem der Form (3.56) für die sechs Unbekannten  $\dot{\underline{y}}$  erhalten:

$${}^0 \begin{bmatrix} \underline{J}_y & \underline{J}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{y}} \\ \dot{\underline{q}} \end{bmatrix} = \underline{0} \quad \rightarrow \quad {}^0 \underline{J}_y \dot{\underline{y}} = - {}^0 \underline{J}_q \dot{\underline{q}}. \quad (3.61)$$

Als Anforderung an die Auswahl der unabhängigen Gelenkkoordinaten  $\underline{q}$  ergibt sich daraus, daß die  $(6,6)$ -Matrix  ${}^0 \underline{J}_y$  regulär sein muß. Mit einer einmaligen Festlegung von  $\underline{q}$  kann diese Bedingung im allgemeinen jedoch nicht im gesamten Definitionsbereich der unabhängigen Koordinaten  $\underline{q}$  erfüllt werden. Dies erfordert dann während der Bewegung ein Umschalten auf einen anderen Satz von unabhängigen Koordinaten  $\underline{q}$ , siehe Beispiele in den folgenden Abschnitten 3.5.2 und 3.5.3.

#### Bemerkungen:

- Die Zeitableitung der rotatorischen Lage-Schließbedingung (3.9),  $\underline{g}^r \equiv {}^{0A}\underline{T} - {}^{0B}\underline{T} = \underline{0}$ , im Sinne von Gl. (3.3) ergibt

$$\dot{\underline{g}}^r \equiv {}^{0A}\dot{\underline{T}} - {}^{0B}\dot{\underline{T}} = \underline{0}.$$

Die einfachere Schließbedingung (3.12),  ${}^0 \underline{\omega}_A - {}^0 \underline{\omega}_B = \underline{0}$ , entsteht daraus durch Multiplikation mit  ${}^{0A}\underline{T}^T = {}^{0B}\underline{T}^T$  von rechts, vgl. Gl. (3.18) (I). Die Formulierung der Geschwindigkeits-Schließbedingung (3.3) als direkte Zeitableitung der Lage-Schließbedingung (3.1) ist damit in diesem Fall zu speziell. Tatsächlich kann (3.3) durch jedes andere lineare Gleichungssystem, das aus (3.3) durch äquivalente Umformungen entsteht, ersetzt werden. Dies wurde in (3.12)/(3.57) dazu ausgenutzt, die rotatorische Schließbedingung direkt mit Hilfe der Winkelgeschwindigkeiten zu formulieren.

- Die JACOBI-Matrizen in (3.58)/(3.59) können gemäß (2.27) unmittelbar mit Hilfe von Vektoren, die aus der vorhergegangenen Positionsanalyse bekannt sind, analytisch dargestellt werden. Eine "symbolische" Differentiation der Lage-Schließbedingungen (3.1),  $\underline{g}(\underline{y}, \underline{q}) = \underline{0}$ , ist deswegen nicht erforderlich.

### 3.5.2 Auftrennen der Schleife an einem Gelenk $\rightarrow$ Abschnitt 3.2.2

Die gelenkspezifischen Schließbedingungen, z.B. (3.26) bis (3.30), ergeben das Kernsystem (3.16),  $\underline{g}_1(\underline{y}_1, \underline{q}) = \underline{0}$ , in das nur die  $n_B - f_{G_A}$  Gelenkkoordinaten  $\underline{\beta}_1 = [\underline{y}_1, \underline{q}]^T$  außerhalb des Schnittgelenks  $G_A$  eingehen. Die Zeitableitung von (3.16) ergibt ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der 6 -  $f_{G_A}$  Ableitungen  $\dot{\underline{y}}_1$  der abhängigen Gelenkkoordinaten:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{g}}_1(\underline{y}_1, \underline{q}; \dot{\underline{y}}_1, \dot{\underline{q}}) &= \underline{J}_{y1} \dot{\underline{y}}_1 + \underline{J}_{q1} \dot{\underline{q}} = \underline{0}, \\ \rightarrow \underline{J}_{y1} \dot{\underline{y}}_1 &= - \underline{J}_{q1} \dot{\underline{q}}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Entsprechend den Überlegungen des vorhergehenden Abschnitts müssen die unabhängigen Koordinaten  $\underline{q}$  so gewählt werden, daß die  $(6-f_{G_A}, 6-f_{G_A})$ -Matrix  $\underline{J}_{y1}$  regulär ist.

Zur Aufstellung von (3.62) können die Schließbedingungen (3.26) bis (3.30) stets so umgeformt werden, daß die analog zu (3.58)/(3.59) ausgedrückten Geschwindigkeiten

$${}^0 \dot{\underline{z}}_{0a'} = {}^0 \underline{J}_{0a'} \dot{\underline{\beta}}_{0a'} : \quad {}^0 \begin{bmatrix} \underline{\omega}_{0a'} \\ \underline{v}_{0a'} \end{bmatrix} = {}^0 \begin{bmatrix} \underline{J}_{0a'}^r \\ \underline{J}_{0a'}^t \end{bmatrix} \dot{\underline{\beta}}_{0a'}, \quad (3.63)$$

$${}^0 \dot{\underline{z}}_{0a} = {}^0 \underline{J}_{0a} \dot{\underline{\beta}}_{0a} : \quad {}^0 \begin{bmatrix} \underline{\omega}_{0a} \\ \underline{v}_{0a} \end{bmatrix} = {}^0 \begin{bmatrix} \underline{J}_{0a}^r \\ \underline{J}_{0a}^t \end{bmatrix} \dot{\underline{\beta}}_{0a} \quad (3.64)$$

der Koordinatensysteme  $K_{a'}$  bzw.  $K_a$  relativ zu  $K_0$  eingesetzt werden können.

#### Beispiel:

Am Kardangelenk ergibt sich ausgehend von den Schließbedingungen (3.28) (Koordinatenindex 0 oben links weggelassen):

$$\begin{aligned} \underline{r}_{0a'} - \underline{r}_{0a} &= \underline{0} \quad \rightarrow \quad {}^0 \underline{r}_{0a'} - {}^0 \underline{r}_{0a} = \underline{0}, \\ &\rightarrow \quad \underline{v}_{0a'} - \underline{v}_{0a} = \underline{0}, \end{aligned} \quad (i)$$

$$\begin{aligned} \underline{e}_{za'}^T \underline{e}_{za} &= 0 \quad \rightarrow \quad {}^0 \underline{e}_{za'}^T \underline{e}_{za} + \underline{e}_{za'}^T {}^0 \dot{\underline{e}}_{za} = 0, \\ &\rightarrow \quad (\underline{\omega}_{0a'} \times \underline{e}_{za'})^T \underline{e}_{za} + \underline{e}_{za'}^T (\underline{\omega}_{0a} \times \underline{e}_{za}) = 0, \\ &\rightarrow \quad (\underline{e}_{za'} \times \underline{e}_{za})^T (\underline{\omega}_{0a'} - \underline{\omega}_{0a}) = 0. \end{aligned} \quad (ii)$$

Einsetzen der Geschwindigkeiten aus (3.63) und (3.64) in (i) und (ii) ergibt insgesamt ein unterbestimmtes System mit 6 -  $f_{G_A}$  Gleichungen in  $n_B - f_{G_A}$  Variablen  $\dot{\underline{\beta}}_1$ :

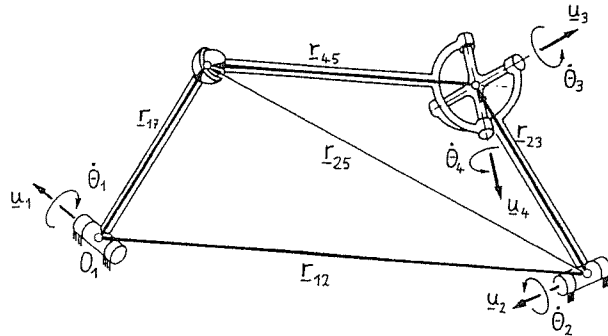
$$\begin{bmatrix} \underline{J}_{0a'}^t \\ (\underline{e}_{za'} \times \underline{e}_{za})^T \underline{J}_{0a'}^r \end{bmatrix} \dot{\underline{\beta}}_1 - \begin{bmatrix} \underline{J}_{0a}^t \\ (\underline{e}_{za} \times \underline{e}_{za})^T \underline{J}_{0a}^r \end{bmatrix} \dot{\underline{\beta}}_1 = \underline{0}, \quad (iii)$$

Durch die Aufteilung von  $\dot{\underline{\beta}}_1$  in  $\dot{\underline{y}}_1$  und  $\dot{\underline{q}}$  kann (iii) in ein Gleichungssystem der Form (3.62) zur Bestimmung von  $\dot{\underline{y}}_1$  umgeordnet werden.

Für die noch fehlenden  $f_{G_A}$  Geschwindigkeiten  $\dot{\underline{y}}_1$  am Schnittgelenk können weitere Bestimmungsgleichungen aufgestellt werden. Sie werden häufig jedoch überhaupt nicht benötigt, da bereits mit der Kenntnis von  $\dot{\underline{y}}_1$  die Geschwindigkeiten aller Körper in Abhängigkeit von  $\dot{\underline{q}}$  ausgedrückt werden können.

**Beispiel:** Räumliches Gelenkviereck (RSTR-Mechanismus,  $f = 1$ )

Schnitt am Kugelgelenk.



Gelenkkoordinaten des Kernsystems:

$$\beta_1 = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4]^T.$$

Schließbedingungen (Bezugssystem für Zeitableitungen im Grundgestell):

$$\underline{v}_{15} - \underline{v}_{17} = \underline{0} \quad \text{mit} \quad \underline{v}_{17} = \dot{\theta}_1 \underline{u}_1 \times \underline{r}_{17},$$

$$\underline{v}_{15} = \dot{\theta}_2 \underline{u}_2 \times \underline{r}_{25} + \dot{\theta}_3 \underline{u}_3 \times \underline{r}_{35} + \dot{\theta}_4 \underline{u}_4 \times \underline{r}_{45},$$

$\uparrow$   
 $\underline{r}_{45}$

$$\rightarrow \left[ \underline{u}_2 \times \underline{r}_{25} \mid \underline{u}_3 \times \underline{r}_{35} \mid \underline{u}_4 \times \underline{r}_{45} \mid -\underline{u}_1 \times \underline{r}_{17} \right] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \underline{0},$$

$$\underline{J}_{\beta 1} \dot{\beta}_1 = \underline{0}.$$

Mit der Wahl von  $q = \theta_1$  ergibt sich durch Umordnen das Gleichungssystem (3.62):

$$\left[ \underline{u}_2 \times \underline{r}_{25} \mid \underline{u}_3 \times \underline{r}_{35} \mid \underline{u}_4 \times \underline{r}_{45} \right] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \left[ \underline{u}_1 \times \underline{r}_{17} \right] \dot{\theta}_1,$$

$$\underline{J}_{y1} \dot{\underline{y}}_1 = -\underline{J}_{q1} \dot{q},$$

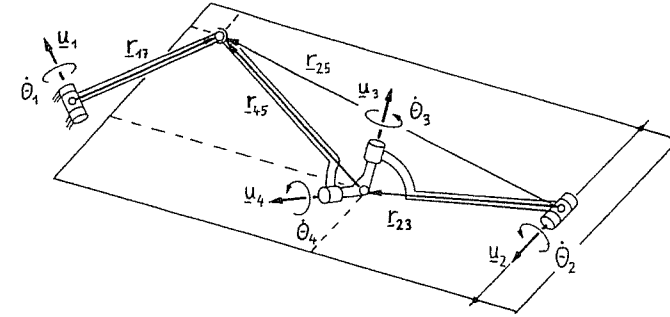
$$\rightarrow \dot{\underline{y}}_1 = -\underline{J}_{y1}^{-1} \underline{J}_{q1} \dot{q}.$$

Die Wahl von  $q = \theta_1$  ist möglich, solange  $\det(\underline{J}_{y1}) \neq 0$  gilt.

Der Fall  $\det(\underline{J}_{y1}) = 0$  tritt ein, wenn die Spalten von  $\underline{J}_{y1}$  linear abhängig sind. Das Gelenkviereck befindet sich dann in einer *Strecklage*. Werden die Sonderfälle  $|\underline{r}_{23}| = 0$ ,  $|\underline{r}_{45}| = 0$  und  $\underline{u}_3 \parallel \underline{u}_4$  ausgeschlossen, gibt es hierfür zwei Möglichkeiten:

(i) Die Vektoren  $\underline{u}_2 \times \underline{r}_{25}$ ,  $\underline{u}_3 \times \underline{r}_{35}$  und  $\underline{u}_4 \times \underline{r}_{45}$  sind linear abhängig.

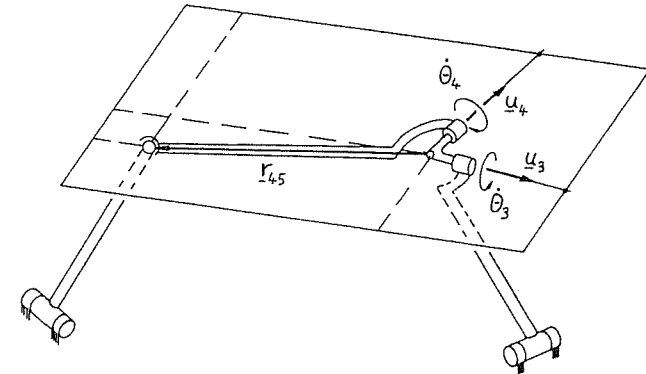
$\rightarrow$  Die Vektoren  $\underline{r}_{25}$  und  $\underline{r}_{45}$  liegen in einer Ebene.



$\rightarrow$  Umschalten auf  $q = \theta_2$ .

(ii) Die Vektoren  $\underline{u}_3 \times \underline{r}_{35}$  und  $\underline{u}_4 \times \underline{r}_{45}$  sind linear abhängig.

$\rightarrow$  Die Koppel  $\underline{r}_{45}$  liegt in der Ebene der Kardanachsen  $\underline{u}_3$  und  $\underline{u}_4$ .



$\rightarrow$  Umschalten auf  $q = \theta_3$  oder  $q = \theta_4$ .

Aus numerischen Gründen sollte bereits in einer gewissen Umgebung dieser Strecklagen auf die neue unabhängige Koordinate umgeschaltet werden.

### 3.5.3 Auftrennen der Schleife an einem Gelenkpaar → Abschnitt 3.2.3

Die fünf elementaren Schließbedingungen (3.32) bis (3.36) ergeben das Kernsystem (3.37),  $\underline{g}_I(\underline{y}_I, \underline{q}) = \underline{0}$ , in das nur die  $n_B - f_{Ga} - f_{Gb}$  Gelenkkoordinaten  $\underline{\beta}_I = [\underline{y}_I, \underline{q}]^T$  außerhalb der Schnittgelenke  $G_a$  und  $G_b$  eingehen. Die Zeitableitung von (3.37) ergibt ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der  $h = 6 - f_{Ga} - f_{Gb}$  abhängigen Geschwindigkeiten  $\dot{\underline{y}}_I$ :

$$\dot{\underline{g}}_I(\underline{y}_I, \underline{q}; \dot{\underline{y}}_I, \dot{\underline{q}}) = \begin{bmatrix} {}^u\dot{\lambda}_1 & {}^o\dot{\lambda}_1 \\ \vdots & \vdots \\ {}^u\dot{\lambda}_h & {}^o\dot{\lambda}_h \end{bmatrix} = \underline{J}_{yI} \dot{\underline{y}}_I + \underline{J}_{qI} \dot{\underline{q}} = \underline{0},$$

$$\Rightarrow \underline{J}_{yI} \dot{\underline{y}}_I = - \underline{J}_{qI} \dot{\underline{q}}. \quad (3.65)$$

Die unabhängigen Koordinaten  $\underline{q}$  müssen so gewählt werden, daß die  $(h, h)$ -Matrix  $\underline{J}_{yI}$  regulär ist.

Die Zeitableitungen der fünf elementaren Schließbedingungen lauten im einzelnen:

Typ 1: → Gl. (3.32)

$$\dot{\underline{g}} = 2 \begin{pmatrix} {}^u\dot{\lambda}_1 \\ {}^o\dot{\lambda}_1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} {}^u(\underline{f}_{ba}^T \underline{f}_{ba}) \\ {}^o(\underline{f}_{ba}^T \underline{f}_{ba}) \end{pmatrix} = 0. \quad (3.66)$$

Typ 2: → Gl. (3.33)

$$\dot{\underline{g}} = \begin{pmatrix} {}^u\dot{\lambda}_2 \\ {}^o\dot{\lambda}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^u(\underline{f}_{ba}^T \underline{u}_b + \underline{f}_{ba}^T \underline{u}_a) \\ {}^o(\underline{f}_{ba}^T \underline{u}_b + \underline{f}_{ba}^T \underline{u}_a) \end{pmatrix} = 0. \quad (3.67)$$

Typ 3: → Gl. (3.34)

$$\dot{\underline{g}} = 2 \begin{pmatrix} {}^u\dot{\lambda}_3 \\ {}^o\dot{\lambda}_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} {}^u(\underline{f}_{ba} \times \underline{u}_b + \underline{f}_{ba} \times \underline{u}_a)^T \\ {}^o(\underline{f}_{ba} \times \underline{u}_b + \underline{f}_{ba} \times \underline{u}_a)^T \end{pmatrix} = 0. \quad (3.68)$$

Typ 4: → Gl. (3.35)

$$\dot{\underline{g}} = \begin{pmatrix} {}^u\dot{\lambda}_4 \\ {}^o\dot{\lambda}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^u(\underline{u}_b^T \underline{u}_a + \underline{u}_b^T \underline{u}_a) \\ {}^o(\underline{u}_b^T \underline{u}_a + \underline{u}_b^T \underline{u}_a) \end{pmatrix} = 0. \quad (3.69)$$

Typ 5: → Gl. (3.36)

$$\dot{\underline{g}} = \begin{pmatrix} {}^u\dot{\lambda}_5 \\ {}^o\dot{\lambda}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^u((\underline{u}_b \times \underline{u}_a + \underline{u}_b \times \underline{u}_a)^T \underline{f}_{ba} + (\underline{u}_b \times \underline{u}_a)^T \underline{f}_{ba}) \\ {}^o((\underline{u}_b \times \underline{u}_a + \underline{u}_b \times \underline{u}_a)^T \underline{f}_{ba} + (\underline{u}_b \times \underline{u}_a)^T \underline{f}_{ba}) \end{pmatrix} = 0. \quad (3.70)$$

Mit Hilfe der analog zu (3.58)/(3.59) ausgedrückten Geschwindigkeiten

$${}^u\dot{\underline{z}}_{ua} = {}^u\underline{J}_{ua} \dot{\underline{\beta}}_{ua}, \quad {}^u\dot{\underline{z}}_{ub} = {}^u\underline{J}_{ub} \dot{\underline{\beta}}_{ub}, \quad (3.71)$$

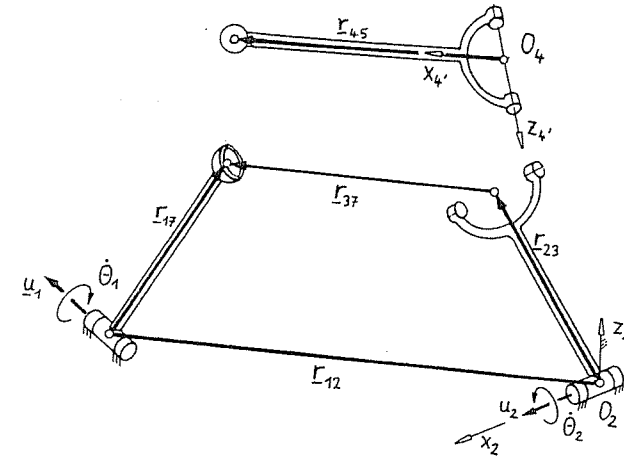
$${}^o\dot{\underline{z}}_{oa} = {}^o\underline{J}_{oa} \dot{\underline{\beta}}_{ua}, \quad {}^o\dot{\underline{z}}_{ob} = {}^o\underline{J}_{ob} \dot{\underline{\beta}}_{ob}, \quad (3.72)$$

können die Schließbedingungen (3.66) bis (3.70) so umgeformt werden, daß Gl. (3.65) aufgebaut werden kann, vgl. Abschnitt 3.5.2.

Die noch fehlenden  $f_{Ga} + f_{Gb}$  Geschwindigkeiten  $\dot{\underline{y}}_{II}$  an den beiden Schnittgelenken können anschließend aus weiteren Schließbedingungen bestimmt werden, die hier jedoch nicht betrachtet werden.

**Beispiel:** Räumliches Gelenkviereck (RSTR-Mechanismus,  $f = 1$ )

Schnitt am Gelenkpaar Kugelgelenk - Kardangelenk.



Gelenkkoordinaten des Kernsystems:

$$\underline{\beta}_I = [\theta_1, \theta_2]^T.$$

Schließbedingung Typ 1 ( $K_u \hat{=} K_2$ ,  $K_o \hat{=} K_4$ ):

$$2 \underline{f}_{37}^T \underline{f}_{37} - 2 \underline{f}_{45}^T \underline{f}_{45} = 0 \quad \text{mit} \quad \underline{f}_{37} = \dot{\theta}_1 \underline{u}_1 \times \underline{r}_{17} - \dot{\theta}_2 \underline{u}_2 \times \underline{r}_{23},$$

$$\underline{f}_{45} = \underline{0} \text{ (feste Koppellänge)},$$

$$\rightarrow \left[ -(\underline{u}_2 \times \underline{r}_{23})^T \underline{f}_{37} \mid (\underline{u}_1 \times \underline{r}_{17})^T \underline{f}_{37} \right] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\underline{J}_{\beta I} \dot{\underline{\beta}}_I = 0.$$

Mit der Wahl von  $q = \theta_1$  gilt entsprechend Gl. (3.65):

$$\begin{aligned} -(\underline{u}_2 \times \underline{r}_{23})^T \underline{r}_{37} \dot{\theta}_2 &= -(\underline{u}_1 \times \underline{r}_{17})^T \underline{r}_{37} \dot{\theta}_1, \\ J_{y1} \dot{y}_1 &= -J_{q1} \dot{q}, \\ \Rightarrow \dot{y}_1 &= -J_{y1}^{-1} J_{q1} \dot{q}; \quad \dot{\theta}_2 = \frac{(\underline{u}_1 \times \underline{r}_{17})^T \underline{r}_{37}}{(\underline{u}_2 \times \underline{r}_{23})^T \underline{r}_{37}} \dot{\theta}_1. \end{aligned}$$

Der Fall  $J_{y1} = 0$  tritt ein, wenn  $\underline{u}_2$ ,  $\underline{r}_{23}$  und  $\underline{r}_{37} = \underline{r}_{45}$  komplanar sind. Dies entspricht dem bereits im Beispiel in Abschnitt 3.5.2 betrachteten Fall (i).

### 3.6 Analyse der Beschleunigungen in einer kinematischen Schleife

Bei der Beschleunigungsanalyse in einer kinematischen Schleife werden für eine gegebene Position und gegebene Geschwindigkeiten die sechs Beschleunigungen  $\ddot{y}$  in Abhängigkeit der  $n_\beta - 6$  unabhängigen Beschleunigungen  $\ddot{q}$  aus dem linearen Gleichungssystem (3.4) bestimmt:

$$\begin{aligned} \ddot{g}(y, q, \dot{y}, \dot{q}, \ddot{y}, \ddot{q}) &= J_y \ddot{y} + J_q \ddot{q} + \ddot{g} = \underline{0}, \\ \Rightarrow J_y \ddot{y} &= - (J_q \ddot{q} + \ddot{g}). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Ausgehend von den Geschwindigkeitsbeziehungen aus Abschnitt 3.5.1 wird im folgenden Abschnitt das Gleichungssystem (3.73) mit Hilfe der Methode des Auftrennens der Schleife an einem Körper aufgestellt. Die Methoden des Auftrennens der Schleife an einem Gelenk bzw. an einem Gelenkpaar können durch Ableiten der entsprechenden Geschwindigkeitsbeziehungen aus den Abschnitten 3.5.2 und 3.5.3 ebenfalls angewandt werden. Hier werden allerdings lediglich die Beispiele aus diesen Abschnitten weitergeführt.

#### 3.6.1 Auftrennen der Schleife an einem Körper → Abschnitt 3.5.1

Auf Beschleunigungsebene gelten die Schließbedingungen (3.14) und (3.15), die entsprechend (3.57) zu einer Matrixengleichung zusammengefaßt werden können:

$${}^0 \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_{0A} \\ \underline{a}_{0A} \end{bmatrix} - {}^0 \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_{0B} \\ \underline{a}_{0B} \end{bmatrix} = \underline{0}, \quad (3.74a)$$

$${}^0 \underline{\ddot{z}}_{0A} - {}^0 \underline{\ddot{z}}_{0B} = \underline{0}. \quad (3.74b)$$

Mit den Zeitableitungen der Geschwindigkeitsbeziehungen (3.58)/(3.59)

$${}^0 \underline{\ddot{z}}_{0A} = {}^0 J_{0A} \ddot{\underline{\beta}}_{0A} + {}^0 \dot{J}_{0A} \dot{\underline{\beta}}_{0A}, \quad (3.75)$$

$${}^0 \underline{\ddot{z}}_{0B} = {}^0 J_{0B} \ddot{\underline{\beta}}_{0B} + {}^0 \dot{J}_{0B} \dot{\underline{\beta}}_{0B}, \quad (3.76)$$

vgl. Gl. (2.31), gehen die Schließbedingungen (3.74) über in

$${}^0 J_{0A} \ddot{\underline{\beta}}_{0A} - {}^0 J_{0B} \ddot{\underline{\beta}}_{0B} + {}^0 \dot{J}_{0A} \dot{\underline{\beta}}_{0A} - {}^0 \dot{J}_{0B} \dot{\underline{\beta}}_{0B} = \underline{0}$$

bzw.

$${}^0 \begin{bmatrix} J_{0A} & | & -J_{0B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{\beta}}_{0A} \\ \ddot{\underline{\beta}}_{0B} \end{bmatrix} = - {}^0 \begin{bmatrix} \dot{J}_{0A} & | & -\dot{J}_{0B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{\beta}}_{0A} \\ \dot{\underline{\beta}}_{0B} \end{bmatrix}, \quad (3.77a)$$

$${}^0 J_\beta \ddot{\underline{\beta}} = - {}^0 \dot{J}_\beta \dot{\underline{\beta}}. \quad (3.77b)$$

Dies ist ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem mit 6 Gleichungen für die  $n_\beta$  Beschleunigungen  $\ddot{\underline{\beta}}$  aller Gelenkkordinaten der Schleife. Als Koeffizientenmatrix tritt wieder die  $(6, n_\beta)$ -JACOBI-Matrix  $J_\beta$  der Schleife aus Gl. (3.60) auf.

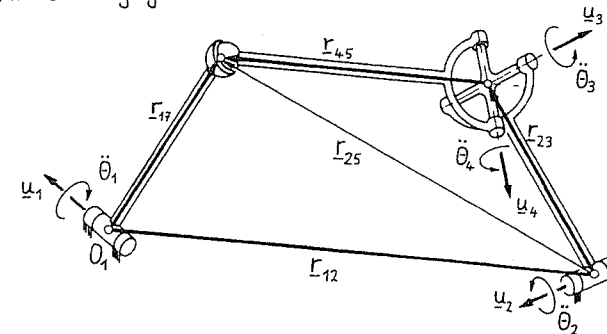
Mit der Aufteilung der  $n_\beta$  Gelenkkordinaten  $\underline{\beta}$  in die 6 abhängigen Koordinaten  $\underline{y}$  und die  $6 - n_\beta$  unabhängigen Koordinaten (Minimalkordinaten)  $\underline{q}$  ergibt sich daraus nach entsprechender Umordnung ein lineares Gleichungssystem der Form (3.73) für die sechs Beschleunigungen  $\ddot{y}$ , vgl. Gl. (3.61):

$${}^0 \begin{bmatrix} J_y & | & J_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = - {}^0 \ddot{g} \Rightarrow {}^0 J_y \ddot{y} = - ({}^0 J_q \ddot{q} + {}^0 \ddot{g}). \quad (3.78)$$

#### 3.6.2 Auftrennen der Schleife an einem Gelenk → Abschnitt 3.5.2

Beispiel: Räumliches Gelenkviereck (RSTR-Mechanismus,  $f = 1$ )

Schnitt am Kugelgelenk



Schließbedingungen:

$$\begin{aligned} \underline{a}_{15} - \underline{a}_{17} &= \underline{0} \quad \text{mit} \quad \underline{a}_{17} = \ddot{\theta}_1 \underline{u}_1 \times \underline{r}_{17} + \ddot{\underline{a}}_{17}, \\ \underline{a}_{15} &= \ddot{\theta}_2 \underline{u}_2 \times \underline{r}_{25} + \ddot{\theta}_3 \underline{u}_3 \times \underline{r}_{35} + \ddot{\theta}_4 \underline{u}_4 \times \underline{r}_{45} + \ddot{\underline{a}}_{15}. \end{aligned}$$

$\uparrow \underline{r}_{45}$

Die von den Gelenkbeschleunigungen  $\ddot{\theta}_i$  unabhängigen Terme sind:

$$\bar{\underline{a}}_{17} = \dot{\theta}_1 \frac{\underline{u}_1}{\underline{Q}} \times \underline{r}_{17} + \dot{\theta}_1 \underline{u}_1 \times \dot{\underline{r}}_{17},$$

$$\bar{\underline{a}}_{15} = \dot{\theta}_2 \left( \frac{\underline{u}_2}{\underline{Q}} \times \underline{r}_{25} + \underline{u}_2 \times \dot{\underline{r}}_{25} \right) + \dot{\theta}_3 \left( \underline{u}_3 \times \underline{r}_{45} + \underline{u}_3 \times \dot{\underline{r}}_{45} \right) + \dot{\theta}_4 \left( \underline{u}_4 \times \underline{r}_{45} + \underline{u}_4 \times \dot{\underline{r}}_{45} \right),$$

mit

$$\dot{\underline{r}}_{17} = \dot{\theta}_1 \underline{u}_1 \times \underline{r}_{17}, \quad \dot{\underline{u}}_3 = \dot{\theta}_2 \underline{u}_2 \times \underline{u}_3, \quad \dot{\underline{u}}_4 = (\dot{\theta}_2 \underline{u}_2 + \dot{\theta}_3 \underline{u}_3) \times \underline{u}_4$$

$$\dot{\underline{r}}_{45} = \dot{\underline{r}}_{17} - \dot{\underline{r}}_{23}, \quad \dot{\underline{r}}_{23} = \dot{\theta}_2 \underline{u}_2 \times \underline{r}_{23}.$$

Damit lauten die Schließbedingungen:

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_2 \times \underline{r}_{25} & | & \underline{u}_3 \times \underline{r}_{35} & | & \underline{u}_4 \times \underline{r}_{45} & | & -\underline{u}_1 \times \underline{r}_{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = -(\bar{\underline{a}}_{15} - \bar{\underline{a}}_{17}),$$

$$\underline{J}_{\beta 1} \quad \underline{\ddot{\theta}}_1 = - \quad \underline{\ddot{g}}_1.$$

Mit der Wahl von  $\underline{q} = \theta_1$  ergibt sich daraus durch Umordnen:

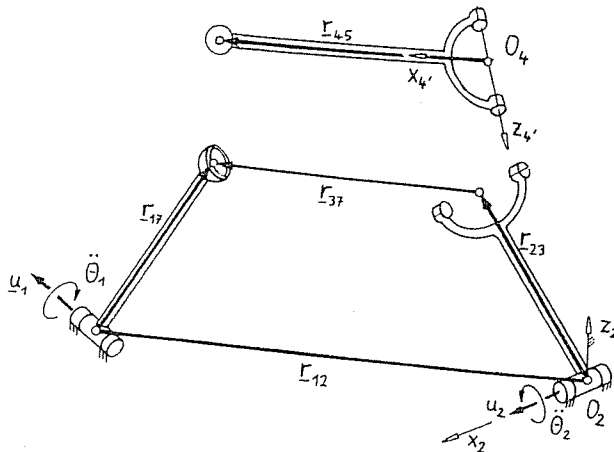
$$\begin{bmatrix} \underline{u}_2 \times \underline{r}_{25} & | & \underline{u}_3 \times \underline{r}_{45} & | & \underline{u}_4 \times \underline{r}_{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{u}_1 \times \underline{r}_{17} \end{bmatrix} \ddot{\theta}_1 - (\bar{\underline{a}}_{15} - \bar{\underline{a}}_{17}),$$

$$\underline{J}_{y1} \quad \underline{\ddot{y}}_1 = - \underline{J}_{q1} \quad \ddot{q} - \underline{\ddot{g}}_1,$$

$$\rightarrow \underline{\ddot{y}}_1 = - \underline{J}_{y1}^{-1} (\underline{J}_{q1} \ddot{q} - \underline{\ddot{g}}_1).$$

### 3.6.2 Auftrennen der Schleife an einem Gelenkpaar → Abschnitt 3.5.3

**Beispiel:** Räumliches Gelenkviereck (RSTR-Mechanismus,  $f = 1$ )



Schließbedingung Typ 1:

$$2 \left( \underline{2\ddot{r}}_{37}^T \underline{r}_{37} + \underline{2\dot{r}}_{37}^T \underline{2\dot{r}}_{37} \right) - 2 \left( \underline{4\ddot{r}}_{45}^T \underline{r}_{45} + \underline{4\dot{r}}_{45}^T \underline{4\dot{r}}_{45} \right) = 0$$

$$\text{mit } \underline{2\ddot{r}}_{37} = \ddot{\theta}_1 \underline{u}_1 \times \underline{r}_{17} - \ddot{\theta}_2 \underline{u}_2 \times \underline{r}_{23} + \underline{2\ddot{r}}_{37},$$

$$\underline{4\ddot{r}}_{45} = \underline{Q} \quad (\text{konstante Koppellänge}).$$

Der von den Gelenkbeschleunigungen  $\ddot{\theta}_i$  unabhängige Term  $\underline{2\ddot{r}}_{37}$  ist:

$$\underline{2\ddot{r}}_{37} = \dot{\theta}_1 \left( \frac{\underline{u}_1}{\underline{Q}} \times \underline{r}_{17} + \underline{u}_1 \times \dot{\underline{r}}_{17} \right) - \dot{\theta}_2 \left( \frac{\underline{u}_2}{\underline{Q}} \times \underline{r}_{23} + \underline{u}_2 \times \dot{\underline{r}}_{23} \right),$$

$$\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$$

$$\quad \quad \quad \dot{\theta}_1 \underline{u}_1 \times \underline{r}_{17} \quad \quad \quad \dot{\theta}_2 \underline{u}_2 \times \underline{r}_{23}$$

Damit lautet die Schließbedingung:

$$\begin{bmatrix} -(\underline{u}_2 \times \underline{r}_{23})^T \underline{r}_{37} & | & (\underline{u}_1 \times \underline{r}_{17})^T \underline{r}_{37} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = - \left( \underline{2\ddot{r}}_{37}^T \underline{r}_{37} + \underline{2\dot{r}}_{37}^T \underline{2\dot{r}}_{37} \right)$$

$$\underline{J}_{\beta 1} \quad \underline{\ddot{\theta}}_1 = - \quad \underline{\ddot{g}}_1$$

Mit der Wahl von  $\underline{q} = \theta_1$  ergibt sich:

$$-(\underline{u}_2 \times \underline{r}_{23})^T \underline{r}_{37} \ddot{\theta}_2 = -(\underline{u}_1 \times \underline{r}_{17})^T \underline{r}_{37} \ddot{\theta}_1 - \left( \underline{2\ddot{r}}_{37}^T \underline{r}_{37} + \underline{2\dot{r}}_{37}^T \underline{2\dot{r}}_{37} \right).$$

$$\underline{J}_{y1} \quad \underline{\ddot{y}}_1 = - \underline{J}_{q1} \quad \ddot{q} - \underline{\ddot{g}}_1.$$

$$\rightarrow \underline{\ddot{y}}_1 = - \underline{J}_{y1}^{-1} (\underline{J}_{q1} \ddot{q} + \underline{\ddot{g}}_1):$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{(\underline{u}_1 \times \underline{r}_{17})^T \underline{r}_{37}}{(\underline{u}_2 \times \underline{r}_{23})^T \underline{r}_{37}} \ddot{\theta}_1 + \frac{\underline{2\ddot{r}}_{37}^T \underline{r}_{37} + \underline{2\dot{r}}_{37}^T \underline{2\dot{r}}_{37}}{(\underline{u}_2 \times \underline{r}_{23})^T \underline{r}_{37}}.$$

#### 4 Kinematik mehrschleifiger Mechanismen

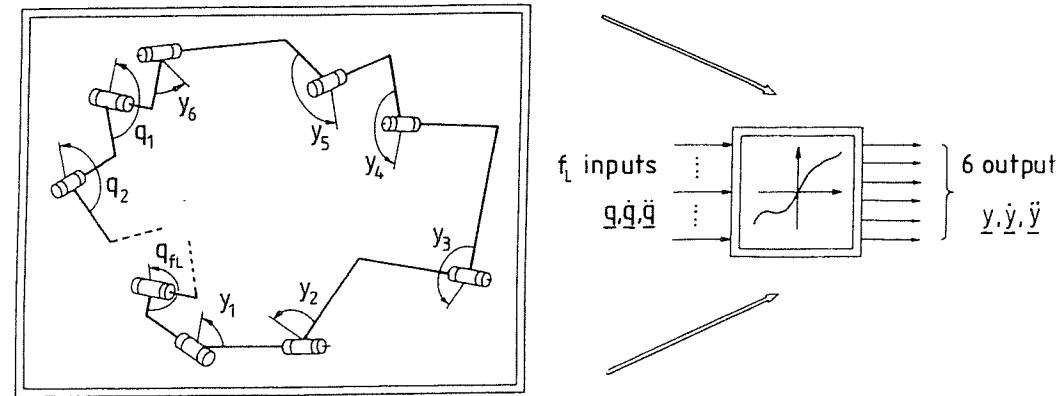
Bei der kinematischen Analyse von Mechanismen mit mehreren kinematischen Schleifen besteht wie bereits bei der Analyse der Einzelschleife die zentrale Aufgabe darin, die Bindungen zwischen den relativen Gelenkkoordinaten infolge der Schließbedingungen der einzelnen Schleifen zu bestimmen. Die effiziente Aufstellung und Lösung der Schließbedingungen einer Einzelschleife ist deswegen zugleich die Grundlage für die kinematische Analyse allgemeiner mehrschleifiger Mechanismen. Die gegenüber der Einzelschleife wesentliche Erweiterung ist dabei die Kopplung der Schließbedingungen mehrerer Schleifen durch Gelenkkoordinaten, die diesen Schleifen gemeinsam angehören. Die Schließbedingungen der einzelnen Schleifen können dadurch nicht unabhängig voneinander gelöst werden. Diese Verkopplung der Schleifen bzw. der dazugehörigen Schließbedingungen hängt sowohl von der topologischen Struktur des Mechanismus als auch von der Auswahl der unabhängigen Schleifen und der unabhängigen Koordinaten (Minimalkoordinaten) des Gesamtsystems ab.

Eine übersichtliche Darstellung der Verkopplung der Schleifen läßt sich durch die Betrachtung der einzelnen Schleifen als "kinematische Transformatoren" erreichen. Der gesamte Mechanismus läßt sich dann mit Hilfe von miteinander gekoppelten kinematischen Transformatoren als ein Blockschaltbild darstellen, das in übersichtlicher Form die Kopplungen der Schließbedingungen der Schleifen über gemeinsame Gelenkkoordinaten wiedergibt. In Verbindung mit der Wahl der Minimalkoordinaten läßt sich daraus erkennen, ob die Schließbedingungen simultan oder rekursiv aufgelöst werden können. Während im ersten Fall mehrere Schleifen zu einen komplexeren "kinematischen Transformator" zusammengefaßt werden können, kann im zweiten Fall der Übertragungscharakter der einzelnen Mehrkörperschleife voll ausgenutzt werden. Insgesamt ergibt sich dann ein Auflösungsfluß für die kinematische Analyse, bei dem die Schließbedingungen in Abhängigkeit von der topologischen Struktur teilweise simultan und teilweise hintereinander aufgelöst werden.

#### 4.1 Darstellung der kinematischen Struktur von Mechanismen

##### 4.1.1 Die Mehrkörperschleife als "kinematischer Transformator"

In einer kinematischen Schleife können die in den Schließbedingungen (3.1), (3.2) und (3.3) für Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung festgelegten Abbildungen der unabhängigen Variablen  $\underline{q}$  auf die sechs abhängigen Variablen  $\underline{y}$  in einem nichtlinearen Übertragungselement zusammengefaßt werden. Aufgrund der Beschreibung in relativen Gelenkkoordinaten sind die Übertragungsfunktionen unabhängig von der globalen Lage und Bewegung der Schleife. Die kinematische Schleife kann deswegen innerhalb von allgemeinen Mechanismen als "kinematischer Transformator" verstanden werden, der relative "Eingangskoordinaten"  $\underline{q}$  (und deren Zeitableitungen) auf relative "Ausgangskoordinaten"  $\underline{y}$  (und deren Zeitableitungen) in nichtlinearer Form überträgt.

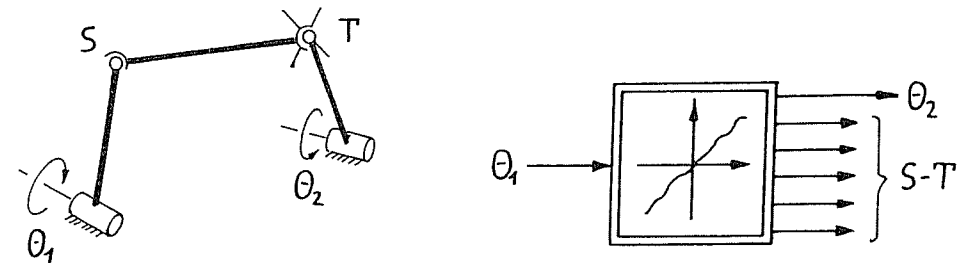


Schema des kinematischen Transformators für eine räumliche Einzelschleife

Der kinematische Transformator kann als "black-box" mit  $f_L$  Eingängen (entsprechend der Anzahl von Freiheitsgraden  $f_L$  der "freigeschnittenen" Schleife) und sechs Ausgängen (entsprechend den sechs abhängigen Koordinaten der Schleife) dargestellt werden. Bei ebenen und sphärischen kinematischen Schleifen, bei denen alle nicht benötigten Gelenkfreiheitsgrade entfernt worden sind, ist die Zahl der Ausgänge nur drei, vgl. Abschnitt 1.3.2.

##### Beispiele:

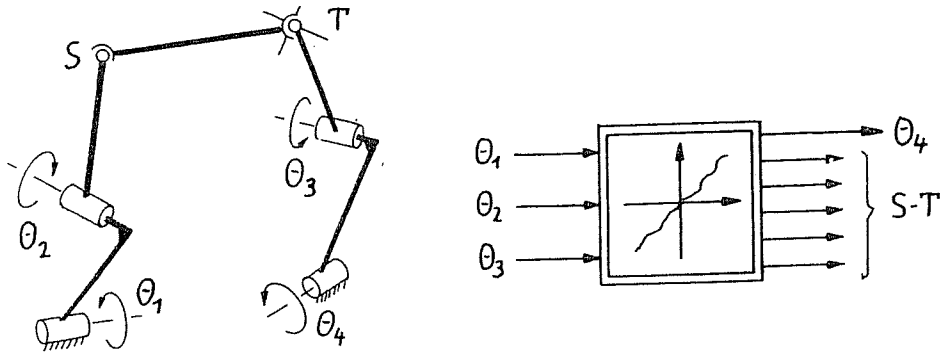
###### a) Räumliches Gelenkviereck



$f_L = 1$  Schleifenfreiheitsgrad  $\rightarrow$  1 "Schleifeneingang", z.B.  $q = \theta_1$

Wird das Kardangeln durch ein Kugelgelenk ersetzt, so erhält die Schleife einen "isolierten" Freiheitsgrad für die Drehung der Koppel um ihre Längsachse, der dann durch einen zusätzlichen Schleifeneingang zu berücksichtigen ist.

b) Räumliches "Gelenksehseck"



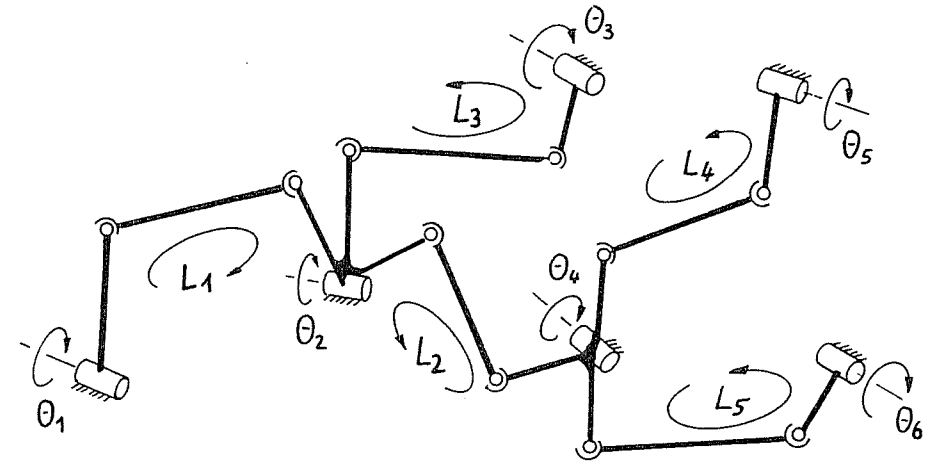
$f_L = 3$  Schleifenfreiheitsgrade  $\rightarrow 3$  "Schleifeneingänge", z.B.  $\underline{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$

#### 4.1.2 Aufbau von Blockschaltbildern am Beispiel von Übertragungsmechanismen

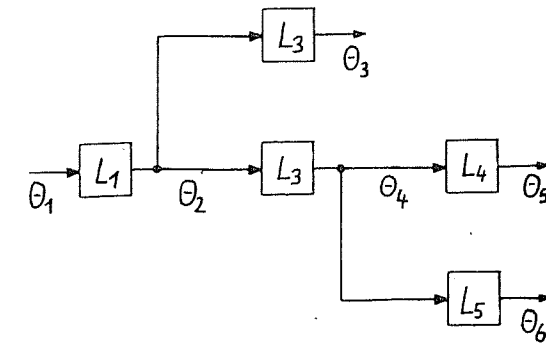
Bei Übertragungsmechanismen werden einzelnen Mehrkörperschleifen hintereinandergeschaltet, um Bewegungen über eine räumliche Entfernung zu übertragen und dabei bestimmte Übertragungsfunktionen zu realisieren. Als Übertragungselemente werden im einfachsten Fall Gelenkvierecke verwendet, die so hintereinandergeschaltet werden, daß jeweils der Ausgangshebel eines Gelenkvierecks mit dem Eingangshebel eines weiteren Gelenkvierecks zu einem gemeinsamen Körper ("Winkelhebel") verbunden wird. Der Drehwinkel eines solchen Winkelhebels tritt dadurch in beiden Schleifen als Gelenkkoordinate auf. Dies bedeutet, daß die beiden Schleifen über diesen Winkel miteinander verkoppelt sind, während die jeweils fünf Gelenkkoordinaten an den Koppelstangen (Kugel- und Kardangelenke) nur einer Schleife angehören.

Im Blockschaltbild wird der gemeinsame Winkel durch eine Verbindung zwischen den Transformatoren der beiden Schleifen dargestellt, während die fünf Gelenkkoordinaten an der Koppelstange keine Verbindung zu anderen Schleifen haben. Bei verzweigten Gelenkviereckketten sind mehrere Gelenkvierecke über einen gemeinsamen Winkelhebel miteinander verbunden. Die Schleifen dieser Gelenkvierecke sind dann über den Drehwinkel dieses Winkelhebels miteinander verkoppelt. Insgesamt können auf diese Weise die kinematischen Transformatoren der einzelnen Gelenkvierecke zu einem Blockschaltbild zusammengebaut werden, das losgelöst von der konkreten Ausführung der einzelnen Gelenkvierecke die Verknüpfung der Schleifenschließbedingungen über die Gelenkwinkel  $\theta_i$  wiedergibt.

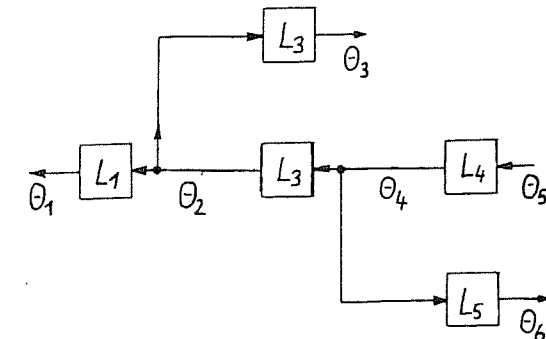
Durch Wahl eines Gelenkwinkels als Minimalkoordinate des Gesamtsystems ergibt sich in diesem Beispiel unmittelbar ein "Auflösungsfluß" für die Schließbedingungen der einzelnen Gelenkvierecke, der durch gerichtete Verbindungen der kinematischen Transformatoren gekennzeichnet wird.



Verzweigte Gelenkviereckkette



Blockschaltbild mit Auflösungsfluß für die Minimalkoordinate  $q = \theta_1$   
(isolierte Koppelfreiheitsgrade nicht berücksichtigt)



Blockschaltbild mit Auflösungsfluß für die Minimalkoordinate  $q = \theta_5$



Die Kopplung zweier Mehrkörperschleifen über eine einzelne Gelenkkoordinate stellt den einfachsten und für die Auflösung der Schließbedingungen günstigsten Fall dar. Im allgemeinen sind jedoch in Mechanismen die einzelnen Schleifen über mehrere Gelenkkoordinaten miteinander verkoppelt. Hierdurch kann die Übertragungseigenschaft der einzelnen Mehrkörperschleife teilweise verlorengehen. Die Schließbedingungen mehrerer Schleifen müssen dann unter Umständen simultan gelöst werden. Werden jedoch solche Gruppen von Schleifen mit simultan zu lösenden Schließbedingungen zu einem neuen, komplexeren kinematischen Transformator zusammengefaßt, so kann der Fluß der kinematischen Information auch in diesen Fällen vorteilhaft in einem Blockschaltbild dargestellt werden.

#### 4.2 Topologische Aufbereitung der Relativkinematik

Prinzipiell läßt sich zu jeden mehrschleifigen Mechanismus ein Blockschaltbild konstruieren, das die Kopplung der Schließbedingungen über Gelenkkoordinaten und einen dazugehörigen Auflösungsfluß wiedergibt. Der Aufbau eines solchen Blockschaltbildes erfolgt in drei Schritten:

- Auswahl eines unabhängigen "Fundamentalsystems" von Mehrkörperschleifen, deren Schließbedingungen in einen "kinematischen Transformator" zusammengefaßt werden können.
- Bestimmung der Kopplung der Schleifenschließbedingungen bzw. der kinematischen Transformatoren über Gelenkkoordinaten, die mehreren Schleifen angehören.
- Bestimmung des Auflösungsflusses für das Gesamtsystem der Schließbedingungen, repräsentiert durch gerichtete Verbindungen der Transformatoren im Blockschaltbild.

##### 4.2.1 Fundamentalsystem von Schleifen

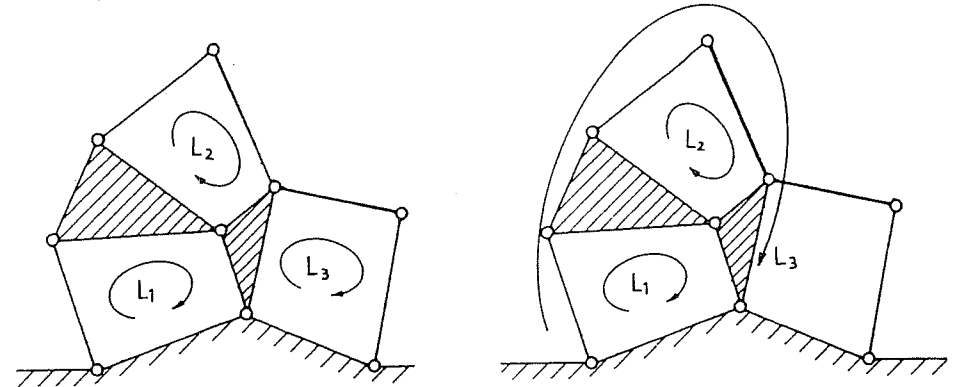
Ein "Fundamentalsystem" von Schleifen ist dadurch definiert, daß sich jeder weitere Schleife des Systems aus der Überlagerung der Schleifen des Fundamentalsystems ergibt. Damit ist allein die Anzahl  $n_L$  der unabhängigen Schleifen eindeutig. Die Wahl der unabhängigen Schleifen ist dagegen zunächst willkürlich.

Nach Gl. (1.2) ergibt sich die Anzahl  $n_L$  der unabhängigen Schleifen eines Mechanismus eindeutig zu

$$n_L = n_G - n_B \quad (1.2)$$

mit  $n_G$  - Anzahl Gelenke,  
 $n_B$  - Anzahl von Körpern (ohne Bezugskörper) .

**Beispiel:** Mechanismus mit  $n_B = 7$  Körpern und  $n_G = 10$  Gelenken.  
 $\rightarrow n_L = n_G - n_B = 3$  unabhängige Schleifen.



Richtige Auswahl:

$L_1, L_2, L_3$  sind unabhängig.

Falsche Auswahl:

$L_1, L_2, L_3$  sind nicht unabhängig  
 $(L_3 = L_1 + L_2)$ .

Kriterien für die Auswahl der unabhängigen Schleifen des Fundamentalsystems ergeben sich aus der Zielvorgabe, möglichst einfach auszuwertende Schleifenschließbedingungen zu erhalten, siehe Abschnitt 4.2.2.

##### 4.2.2 Kopplung der Schleifenschließbedingungen über Gelenkkoordinaten

Nach der Auswahl geeigneter unabhängiger Schleifen liegen die "kinematischen Transformatoren" fest. Für die weiteren Schritte ist neben der Anzahl  $f$  der Freiheitsgrade des Gesamtsystems die Anzahl der Schleifenfreiheitsgrade  $f_{Li}$  wichtig, die sich durch Anwendung von Gl. (1.4) auf die "freigeschnittene" Schleife  $L_i$  ergibt:

$$f_{Li} = \sum_{k=1}^{n_G(L_i)} f_{Gk} - 6 \quad \left( \text{eben/sphärisch: } f_{Li} = \sum_{k=1}^{n_G(L_i)} f_{Gk} - 3 \right) \quad (4.1)$$

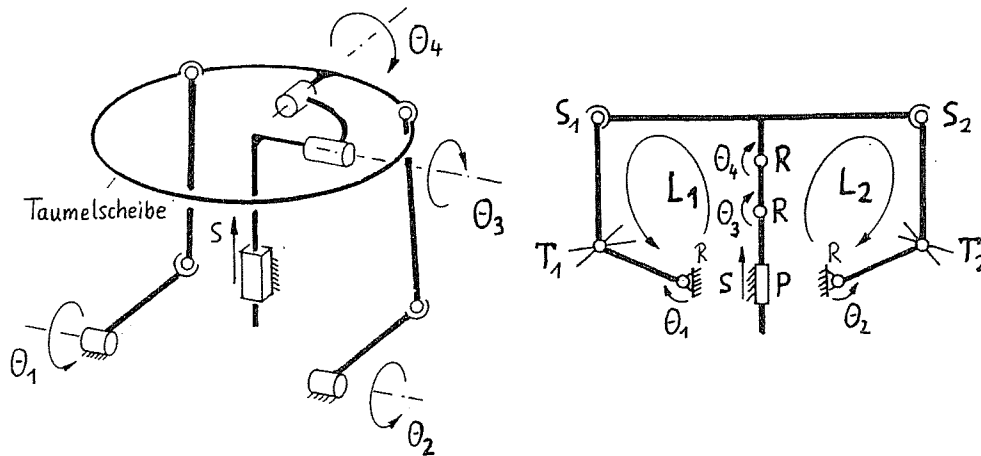
mit  $n_G(L_i)$  - Anzahl Gelenke in der Schleife  $L_i$ ,  
 $f_{Gk}$  - Anzahl der Freiheitsgrade der Gelenke  $G_k$ ,  $k = 1, \dots, n_G(L_i)$   
in der Schleife  $L_i$ .

Gelenkkoordinaten, die mehreren Schleifen angehören, führen zur Verkopplung der Schließbedingungen dieser Schleifen. Im Blockschaltbild werden nun solche gemeinsamen Gelenkkoordinaten durch Verbindungen zwischen den Transformatoren der entsprechenden Schleifen dargestellt. Gelenkkoordinaten, die nur einer einzelnen Schleife angehören, bekommen keine Verbindung zu anderen Schleifen.

Beispiel: Mechanismus zur Ansteuerung der Taumelscheibe eines Hubschraubers

$$\left. \begin{array}{l} n_B = 7 \text{ Körper} \\ n_G = 9 \text{ Gelenke} \end{array} \right\} \rightarrow n_L = n_G - n_B = 2 \text{ unabhängige Schleifen.}$$

$$f = \sum_{k=1}^{n_G} f_{Gk} - 6 n_L = \begin{array}{cccc} (3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1) & - & 6 \cdot 2 & = & 3 \text{ Freiheitsgrade.} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow & & & & \\ S \quad T \quad R \quad P & & & & \end{array}$$

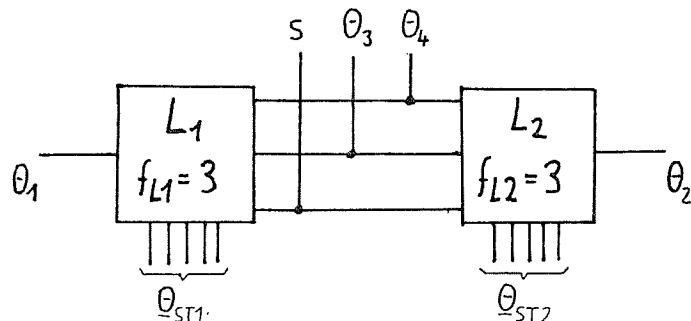


Wahl der unabhängigen Schleifen  $L_1$  und  $L_2$ .

$$\text{Zahl der Schleifenfreiheitsgrade: } f_{Li} = \begin{array}{cccc} (1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1) & - & 6 & = & 3, \quad i = 1, 2. \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow & & & & \\ S \quad T \quad R \quad P & & & & \end{array}$$

Durch die Einführung der Kardangelenke werden isolierte Freiheitsgrade der Koppelstangen vermieden.

Kopplung der Schleifen  $L_1$  und  $L_2$  über  $s, \theta_3$  und  $\theta_4$ :



Die beiden kinematischen Transformatoren repräsentieren die Schließbedingungen der Schleifen  $L_1$  bzw.  $L_2$ . Sie können nach Abschnitt 2.2 jeweils günstig durch Schnitte an den Gelenkpaaren  $S_1-T_1$  bzw.  $S_2-T_2$  aufgestellt werden. Ein besonderer Vorteil ergibt sich nun daraus, daß die Gelenkkoordinaten dieser Gelenkpaare jeweils nur einer Schleife angehören, da die Kopplung der Schleifen nur über  $s, \theta_3$  und  $\theta_4$  erfolgt. Für die Analyse des Zusammenhangs zwischen den Gelenkkoordinaten  $s, \theta_1, \theta_2, \theta_3$  und  $\theta_4$  muß damit für jede Schleife nur das "Kernsystem" (3.16) aufgestellt werden, in das die Gelenkkoordinaten  $\theta_{ST1}$  und  $\theta_{ST2}$  der geschnittenen Gelenke nicht eingehen. Da beim Gelenkpaar Kugelgelenk-Kardangelgelenk das Kernsystem aus nur einer Gleichung besteht, erhält man insgesamt zwei Gleichungen der Form

$$g_{L1}(\theta_1, \theta_3, \theta_4, s) = 0, \quad (4.2)$$

$$g_{L2}(\theta_2, \theta_3, \theta_4, s) = 0. \quad (4.3)$$

Diese Schließbedingungen können nach Wahl von  $f = 3$  Minimalkoordinaten nach den beiden jeweils verbleibenden Koordinaten aufgelöst werden. Eine rekursive Auflösung der Schließbedingungen wie im Beispiel aus Abschnitt 4.1.2 ist dabei allerdings nicht für jede Kombination von Eingangsgrößen möglich, siehe Abschnitt 4.2.3.

Die Betrachtung dieses Beispiels liefert Kriterien für die Auswahl der unabhängigen Schleifen des Fundamentalsystems:

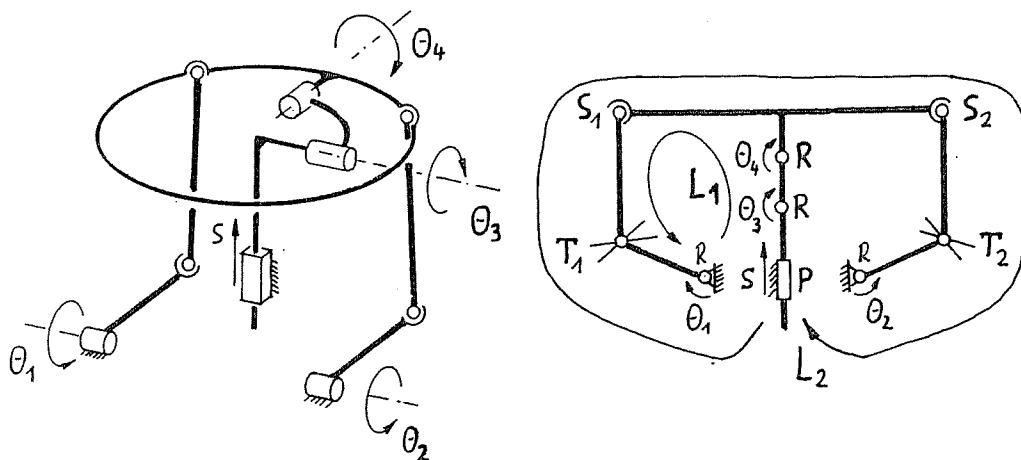
#### - Auswahl von Schleifen mit möglichst wenigen Schließbedingungen:

Die unabhängigen Schleifen sollten hierzu an einem Gelenk oder an einem Gelenkpaar mit möglichst vielen Gelenkfreiheitsgraden geschnitten werden können. Nach den Überlegungen aus Abschnitt 2.2 sollten die Schleifen damit z.B. ein Kugelgelenk oder ein ein ebenes Gelenk oder - noch günstiger - z.B. ein Gelenkpaar Kugelgelenk - Kardangelgelenk besitzen.

#### - Auswahl von solchen Schleifen, die nicht über ein Schnittgelenk oder ein Schnittgelenkpaar mit anderen Schleifen gekoppelt sind:

Hierdurch sind nur die "Kernsysteme" der Schließbedingungen miteinander verkoppelt, während die Gelenkkoordinaten der Schnittgelenke überhaupt nicht bestimmt werden müssen.

Die Auswahl der unabhängigen Schleifen im vorangehenden Beispiel erfüllt diese Kriterien. Eine andere Wahl der unabhängigen Schleife  $L_2$  ergibt dagegen:



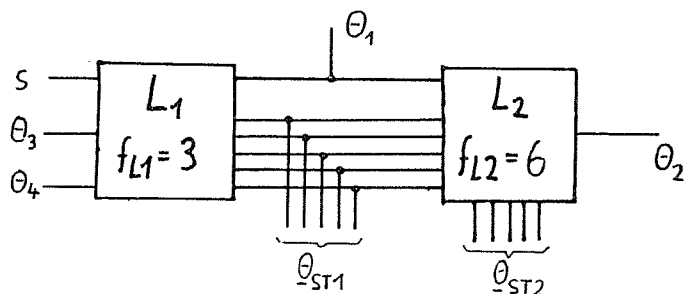
Zahl der Schleifenfreiheitsgrade:  $f_{L1} = (1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1) - 6 = 3$ ,

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ S & T & R & P \end{matrix}$

$f_{L2} = (2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1) - 6 = 6$ .

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ S & T & R \end{matrix}$

Kopplung von  $L_1$  und  $L_2$  über  $\theta_1$  und die 5 Gelenkkoordinaten  $\underline{\theta}_{ST1}$  des Gelenkpaars  $S_1-T_1$ :



Für Schleife  $L_1$  müssen alle sechs Schließbedingungen aufgestellt werden, da die fünf Gelenkkoordinaten  $\underline{\theta}_{ST1}$  des Gelenkpaars  $S_1-T_1$  auch in Schleife  $L_2$  enthalten sind. Für Schleife  $L_2$  ist die Gleichung des Kernsystems für den Schnitt am Gelenkpaar  $S_2-T_2$  ausreichend, da die Gelenkkoordinaten  $\underline{\theta}_{ST2}$  dieses Gelenkpaars nur zu  $L_2$  gehören und deswegen nicht ausgewertet werden müssen:

$$\underline{g}_{L1}(\theta_1, \theta_3, \theta_4, s, \underline{\theta}_{ST1}) = \underline{0} \quad (6 \text{ Gleichungen}) \quad (4.4)$$

$$\underline{g}_{L2}(\theta_1, \theta_2, \underline{\theta}_{ST1}) = 0 \quad (1 \text{ Gleichung}) \quad (4.5)$$

Diese Schließbedingungen sind im Vergleich zu (4.2)/(4.3) wesentlich aufwendiger.

### 4.2.3 Auflösungsfluß

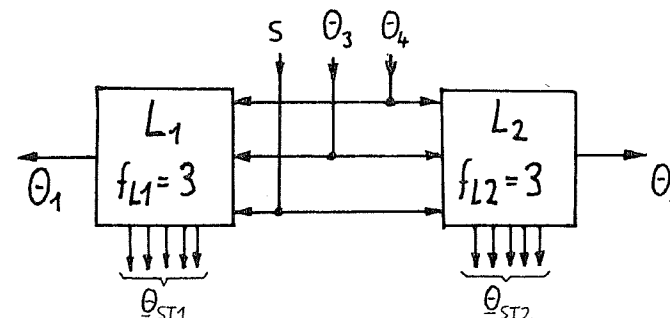
Mit der Wahl der unabhängigen kinematischen Schleifen und der Aufstellung der dazugehörigen Schleifenschließbedingungen sind die kinematischen Systemeigenschaften festgelegt. Zur Lösung der Schließbedingungen müssen nun die Minimalkoordinaten  $\underline{q}$  des gesamten Systems gewählt werden.

Die Auswahl der Minimalkoordinaten ist nicht eindeutig, vgl. Abschnitt 1.3.3. Speziell bei kinematischen Analysen sind die Minimalkoordinaten allerdings häufig bereits von der Aufgabenstellung her gegeben. In diesem Fall wird eine möglichst effiziente Auflösung der Schließbedingungen gesucht. Am günstigsten ist dabei die Möglichkeit einer vollständig "expliziten" Auflösung, d.h. die Schließbedingungen können hintereinander explizit nach den Ausgangsgrößen der jeweiligen Schleifen aufgelöst werden, vgl. Beispiel in Abschnitt 4.1.2. Im allgemeinen besteht diese Möglichkeit jedoch nicht. In diesen Fällen kann man nach einem "möglichst expliziten" Auflösungsfluß suchen, bei dem ein möglichst großer Teil der Schließbedingungen rekursiv abgearbeitet werden kann. Im ungünstigsten Fall sind alle Schließbedingungen als nichtlineares Gleichungssystem simultan zu lösen, wobei der Vorteil der reduzierten Zahl von Schließbedingungen durch Schnitte der Schleifen an Gelenken oder Gelenkpaaren weiterhin ausgenutzt werden kann.

Im Blockschaltbild kann der Auflösungsfluß dadurch dargestellt werden, daß jedem kinematischen Transformator mit  $f_{Li}$  Schleifenfreiheitsgraden eine entsprechende Zahl von Eingängen bereitgestellt wird. Diese Eingänge können entweder unmittelbar die gegebenen Minimalkoordinaten sein oder sich als "Ausgänge" anderer Schleifen ergeben, deren Schließbedingungen bereits gelöst sind. Durch entsprechende Darstellung der Schleifeneingänge und -ausgänge entsteht ein gerichtetes Blockschaltbild, das den Lösungsfluß wiedergibt, vgl. auch Beispiel in Abschnitt 4.1.2.

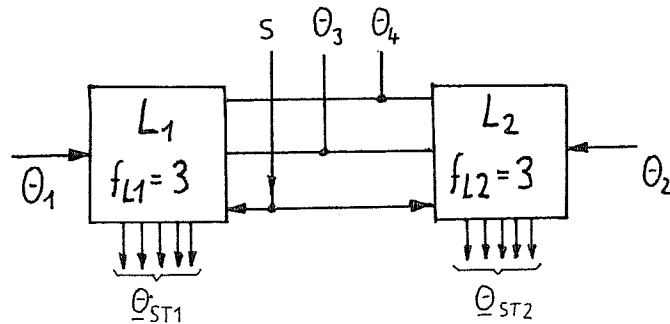
**Beispiel:** Mechanismus zur Ansteuerung der Taumelscheibe eines Hubschraubers  
(Fortsetzung aus Abschnitt 4.2.2)

a) Minimalkoordinaten  $\underline{q} = [s, \theta_3, \theta_4]^T$



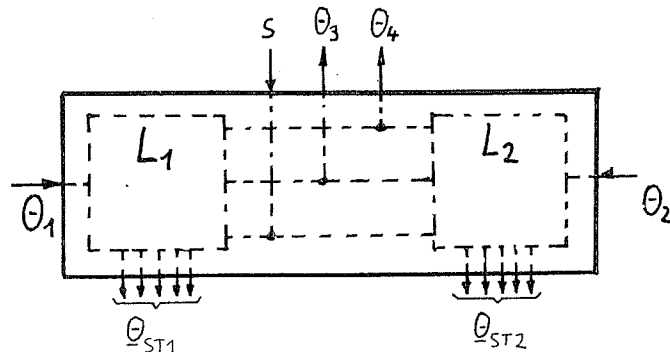
Mit der Vorgabe von  $q$  sind für jede Schleife drei Eingänge festgelegt. Mit jeweils  $f_{Li} = 3$ ,  $i = 1, 2$ , Schleifeneingängen kann jede der beiden Schleifenschließbedingungen (4.2) und (4.3) explizit nach der Auflösungsvorschrift aus Abschnitt 2.4.4a nach den verbleibenden Gelenkkoordinaten  $\theta_1$  bzw.  $\theta_2$  aufgelöst werden, die damit Schleifenausgänge werden. Die weiteren Ausgangskordinaten  $\theta_{ST1}$  und  $\theta_{ST2}$  an den Schnittgelenkpaaren können anschließend, falls überhaupt benötigt, "lokal" innerhalb der beiden Schleifen bestimmt werden.

b) Minimalkoordinaten  $q = [s, \theta_1, \theta_2]^T$



Nach Vorgabe von  $q$  sind für jede Schleife nur zwei Eingänge festgelegt. Mit jeweils  $f_{Li} = 3$ ,  $i = 1, 2$ , Schleifeneingängen kann keine der beiden Schleifen für sich aufgelöst werden. Die beiden Schleifenschließbedingungen (4.2) und (4.3) können nur simultan nach den Unbekannten  $\theta_3$  und  $\theta_4$  aufgelöst werden. Hierzu ist ein numerisches (iteratives) Verfahren einzusetzen.

Die Übertragungseigenschaft der beiden kinematischen Schleifen kann in diesem Fall nicht direkt für die Lösung ausgenutzt werden. Es ist sinnvoll, die beiden Schleifen zu einem neuen komplexeren kinematischen Transformator zusammenzufassen, der die Eingänge  $q = [s, \theta_1, \theta_2]^T$  nichtlinear in die Ausgänge  $\theta_3$  und  $\theta_4$  (sowie die insgesamt 10 Gelenkkoordinaten der Schnittgelenke) umsetzt.



### 4.3 Einführung zusätzlicher Hilfskoordinaten

In manchen Fällen ist es sinnvoll, neben den in die Schleifenschließbedingungen eingehenden Koordinaten weitere Koordinaten zu bestimmen, für die dann zusätzliche Bindungsgleichungen formuliert werden können. Im folgenden werden zwei Fälle betrachtet, in denen die Verwendung solcher "Hilfskoordinaten" sinnvoll ist.

#### 4.3.1 Hilfskoordinaten an Mehrfachgelenken

Als "Mehrfachgelenke" werden hier Drehgelenke oder Schubgelenke mit zusammenfallenden Gelenkachsen bezeichnet. Sie treten speziell in ebenen Mechanismen häufig auf. Die dargestellten Zweifachgelenke verbinden drei Körper 1, 2 und 3. Sie beinhalten zwei "unabhängige" Dreh- bzw. Schubgelenke z.B. für die Relativbewegungen

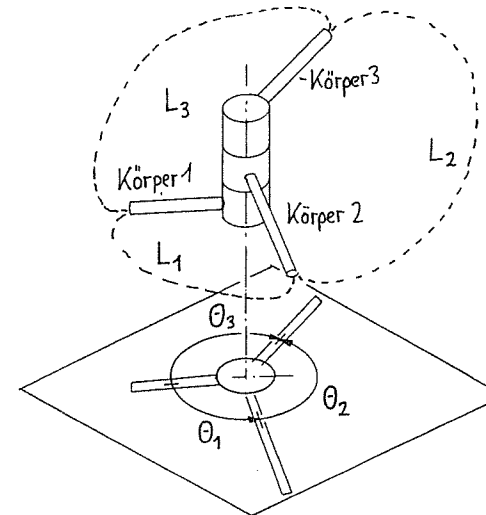
Körper 2 relativ zu Körper 1:  $\theta_1$  bzw.  $s_1$ ,

Körper 3 relativ zu Körper 2:  $\theta_2$  bzw.  $s_2$ .

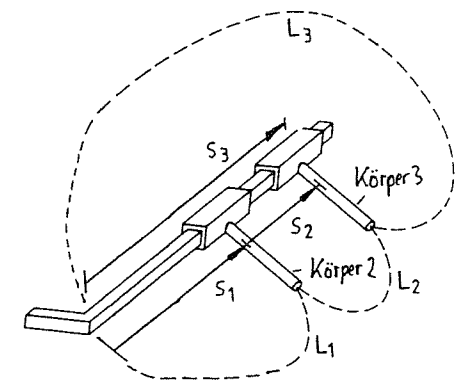
Daraus ergibt sich unmittelbar ein "abhängiges" Dreh- bzw. Schubgelenk mit der Relativbewegung

$$\text{Körper 3 relativ zu Körper 1: } \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 = 2\pi \rightarrow \theta_3 = \theta_1 + \theta_2 - 2\pi, \quad (4.6a)$$

$$s_1 + s_2 - s_3 = 0 \rightarrow s_3 = s_1 + s_2. \quad (4.6b)$$



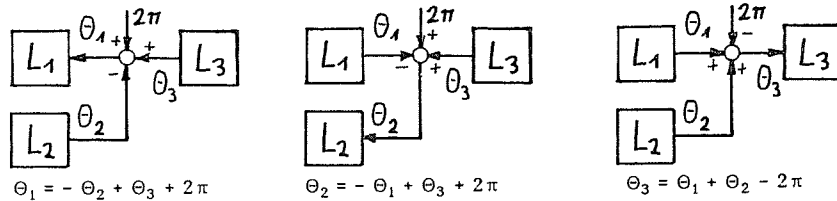
Zweifach-Drehgelenk



Zweifach-Schubgelenk

Die Gelenkkoordinaten  $\theta_3$  bzw.  $s_3$  stellen Hilfskoordinaten dar, die über die Bindungsgleichungen (4.6) von den Gelenkkoordinaten der beiden "unabhängigen" Gelenke abhängen. Die Verwendung dieser Hilfskoordinaten ist sinnvoll, um den drei anliegenden Schleifen  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  jeweils eine Gelenkkoordinate zuzuordnen zu können. Die Kopplung der Gelenkkoordinaten erfolgt dann über die Bindungsgleichungen (4.6).

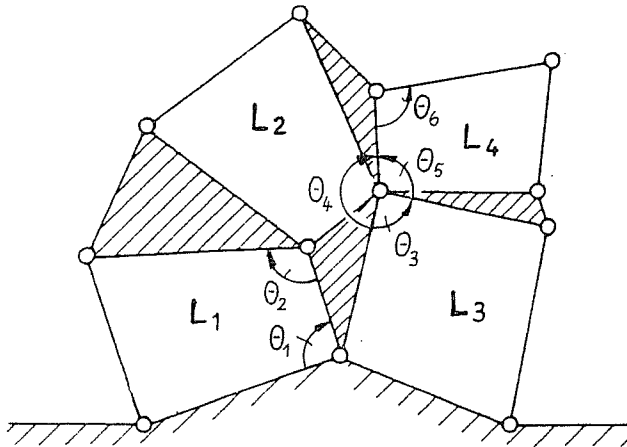
Da die Bindungsgleichungen (4.6) linear sind, können sie im Blockschaltbild anschaulich durch eine "Additionsstelle" repräsentiert werden, die in die möglichen Auflösungsflüsse eingebunden werden kann. Aus Gl. (4.6a) ergeben sich die folgenden Möglichkeiten:



Beispiele:

a) Ebener Mechanismus

$$\left. \begin{array}{l} n_B = 9 \text{ Körper} \\ n_G = 13 \text{ Drehgelenke} \end{array} \right\} \rightarrow n_L = n_G - n_B = 4 \text{ unabhängige Schleifen.}$$



Bei der Bestimmung der Anzahl  $f$  der Freiheitsgrade des Gesamtsystems gemäß Gl. (1.5) ("ebene" Berechnung) werden für das Zweifach-Drehgelenk zwei Einzel-Drehgelenke mit je einem Gelenkfreiheitsgrad gezählt, vgl. Abschnitt 1.3.2:

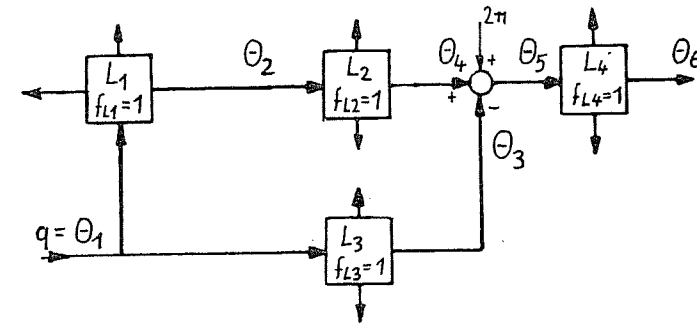
$$f = \sum_{k=1}^{n_G} f_{Gk} - 3n_L = 13 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = 1 \text{ Freiheitsgrad.}$$

Dagegen wird bei der Bestimmung der Anzahl  $f_{Li}$  der Freiheitsgrade der gewählten vier unabhängigen Einzelschleifen für jede der am Zweifach-Drehgelenk anliegenden Schleifen ein Drehgelenk gezählt. Entsprechend Gl. (4.1) hat damit jede der vier Schleifen

$$f_{Li} = \sum_{k=1}^{n_G(L_i)} f_{Gk} - 3 = 4 - 3 = 1, \quad i = 1, \dots, 4,$$

Schleifenfreiheitsgrade.

Das Blockschaltbild für die Minimalkoordinate  $q = \Theta_1$  zeigt einen vollständig rekursiven Auflösungsfluß.



$$\text{Kopplungsgleichung: } \Theta_3 + \Theta_5 - \Theta_4 = 2\pi \rightarrow \Theta_5 = -\Theta_3 + \Theta_4 + 2\pi.$$

Bei Wahl von  $q = \Theta_6$  ist keine rekursive Auflösung über die Additionsstelle hinweg möglich. Die Schließbedingungen der Schleifen  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  sind dann zusammen mit der Kopplungsgleichung simultan zu lösen.

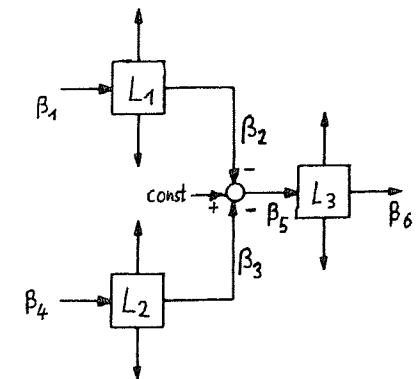
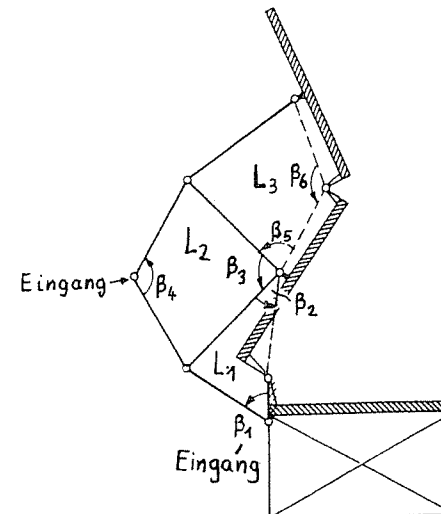
b) SAR-Antenne, vgl. Abschnitt 1.3.2, Beispiel b

$$n_B = 8 \text{ Körper, } n_G = 11 \text{ Drehgelenke}$$

$$\rightarrow n_L = n_G - n_B = 3 \text{ unabhängige Schleifen,}$$

$$\rightarrow f = 2 \text{ Gesamtfreiheitsgrade,}$$

$$\rightarrow f_{Li} = 1 \text{ Schleifenfreiheitsgrade für die gewählten Schleifen } L_1, L_2 \text{ und } L_3.$$



$$\text{Kopplungsgleichung: } \beta_{31} + \beta_{13} + \beta_{23} = \text{const} \rightarrow \beta_{31} = -\beta_{13} - \beta_{23} + \text{const.}$$

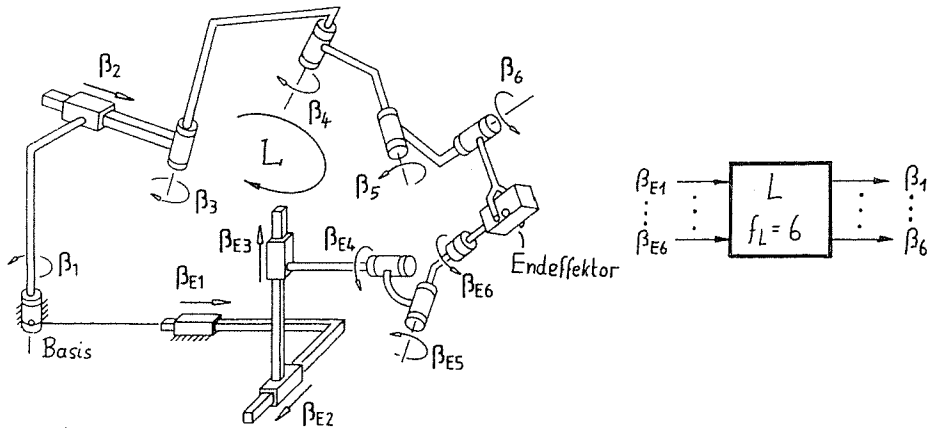
### 4.3.2 Hilfskoordinaten in gedachten kinematischen Ketten

In manchen Anwendungsfällen ist es sinnvoll, über die "physikalisch" vorhandenen kinematischen Schleifen hinaus zusätzliche "gedachte" Schleifen einzuführen, um Zusammenhänge für problemspezifische Koordinaten auszudrücken.

#### Beispiele:

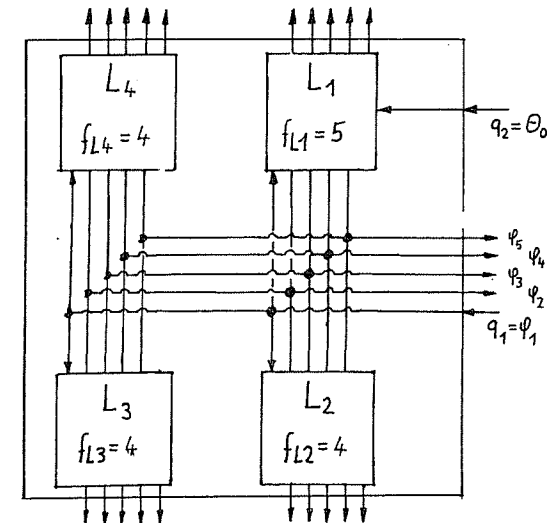
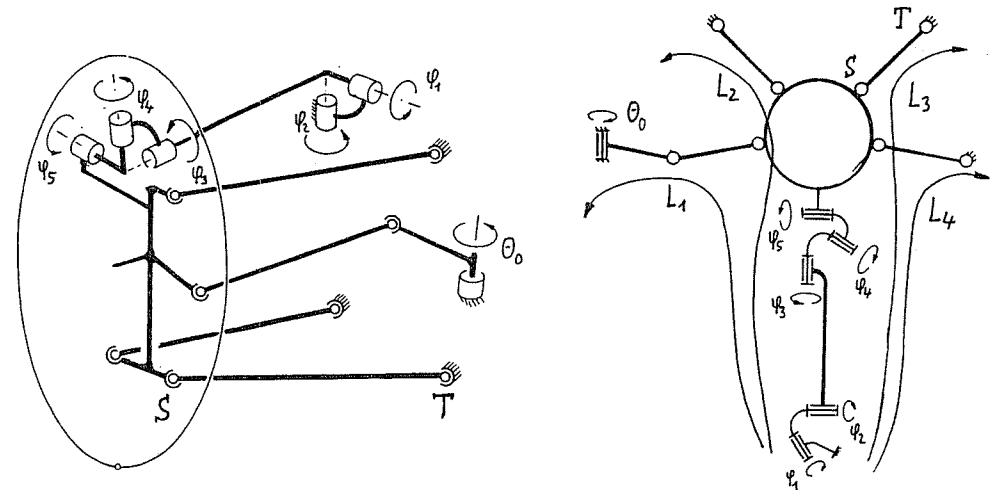
##### a) Rückwärtstransformation bei Robotern

Gesucht ist der Zusammenhang zwischen den sechs Lagekoordinaten  $\beta_{E1}$  bis  $\beta_{E6}$  des Endeffektors und den sechs Roboterkoordinaten  $\beta_1$  bis  $\beta_6$ . Durch Schließen der offenen kinematischen Kette des Roboters über eine gedachte kinematische Kette, deren Gelenkkoordinaten die sechs Lagekoordinaten  $\beta_{E1}$  bis  $\beta_{E6}$  des Endeffektors sind, läßt sich diese Aufgabe auf die Analyse einer kinematischen Schleife zurückführen.



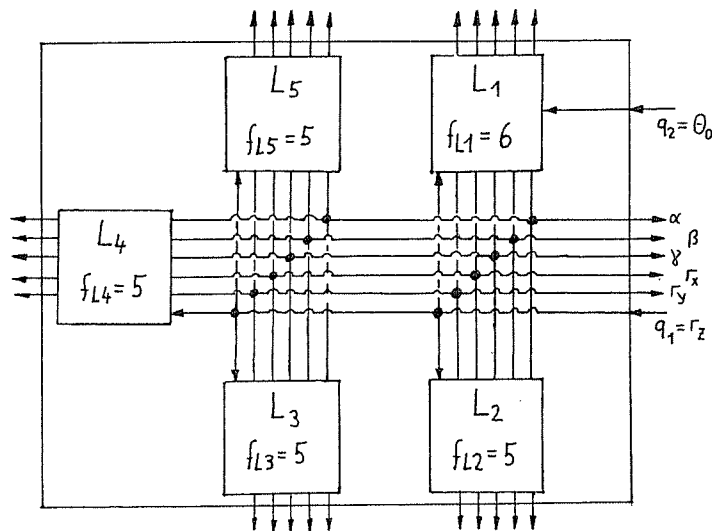
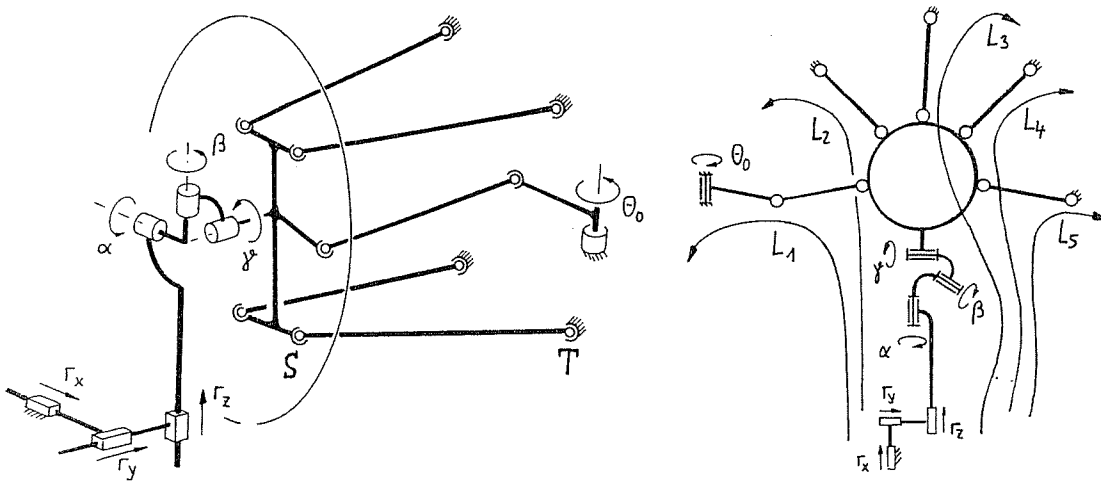
##### b) Fünfpunkt-Radaufhängung, vgl. Abschnitt 1.3.1

Der Mechanismus besitzt  $n_L = 4$  unabhängige Schleifen  $L_1$  bis  $L_4$ , deren Schließbedingungen (jeweils Schnitt am Gelenkpaar Kugelgelenk-Kardangeln) über die Winkel  $\varphi_1$  bis  $\varphi_5$  miteinander verkoppelt sind. Ausgehend von den beiden Minimalkoordinaten  $q_1 = \varphi_1$  (Federbewegung) und  $q_2 = \theta_0$  (Lenkbewegung) müssen alle vier Schließbedingungen simultan (numerisch) aufgelöst werden, eine rekursive Auflösung ist nicht möglich. Die interessierende Radträgerposition muß nach der Lösung der Schließbedingungen durch Vorwärtskinematik aus den Winkeln  $\varphi_1$  bis  $\varphi_5$  berechnet werden.



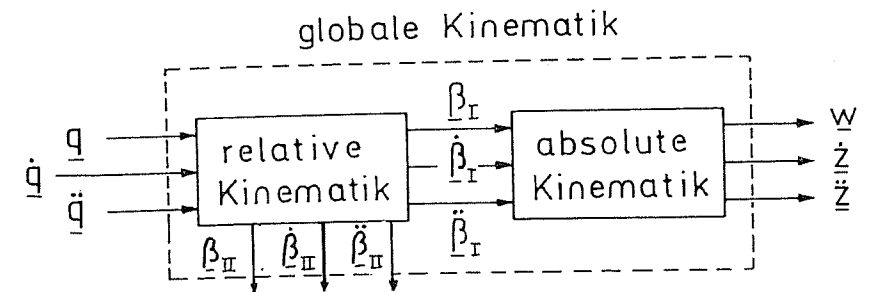
Die Verwendung der Winkel  $\varphi_1$  bis  $\varphi_5$  ist hier allerdings nicht sehr günstig, da zur Berechnung der Radträgerposition jedes Mal die Auswertung von fünf Drehungen um räumlich angeordnete Achsen erforderlich ist. Es ist deswegen sinnvoll, die gesuchten sechs Lagekoordinaten des Radträgers (Ortsvektorkoordinaten  $r_x, r_y, r_z$ , Drehwinkel  $\alpha, \beta, \gamma$  um festgelegte Achsen) als Unbekannte der Schließbedingungen zu verwenden, um nach deren Lösung sofort die Radträgerposition zu erhalten.

Dies läßt sich durch Einführung einer gedachten kinematischen Kette mit drei Dreh- und drei Schubgelenken erreichen, deren Gelenkkoordinaten die Lagekoordinaten des Radträgers sind. Man erhält nun fünf Schleifen  $L_1$  bis  $L_5$ , deren Schließbedingungen über die sechs Lagekoordinaten des Radträgers miteinander verknüpft sind. Dem Nachteil der zusätzlichen Schließbedingung steht der Vorteil gegenüber, daß zur Berechnung der Radträgerposition nur noch drei Drehungen um räumlich angeordnete Achsen notwendig sind.



#### 4.4 Globale Kinematik

Die kinematische Analyse von Mehrkörpersystemen umfaßt die Darstellung der Bewegungen sämtlicher Körper in Abhängigkeit von den Minimalkoordinaten. Während diese Aufgabe bei offenen kinematischen Ketten mit der Lösung der Vorwärtskinematik entsprechend Kapitel 2 erledigt ist, müssen bei Systemen mit kinematischen Schleifen zusätzlich die in den Schleifenschließbedingungen festgelegten Abhängigkeiten zwischen den Gelenkkoordinaten berücksichtigt werden. Die Betrachtungen der vorangegangenen Abschnitte zeigen, daß in der Aufstellung und Lösung der Schleifenschließbedingungen der größte Aufwand bei der kinematischen Analyse steckt. Nach der Auswertung dieser "relativen Kinematik" sind die relativen Gelenkkoordinaten bekannt, so daß die Bewegungen aller Körper durch Vorwärtskinematik ausgehend vom Bezugskörper im Rahmen der "absoluten Kinematik" bestimmt werden können. Die Auswertung der relativen und der absoluten Kinematik ermöglicht damit die Analyse der "globalen Kinematik".



- $q$  - Minimalkoordinaten bei Schleifensystemen,
- $\beta_I$  - Gelenkkoordinaten des "aufspannenden Baumes" nach Auftrennen aller Schleifen (ohne Gelenkkoordinaten der Schnittgelenke), zugleich Minimalkoordinaten bei baumstrukturierten Systemen,
- $\beta_{II}$  - Gelenkkoordinaten der Schnittgelenke, können nach der Bestimmung von  $\beta_I$  in jeder Schleife "lokal" bestimmt werden,
- $w$  - Lagekoordinaten aller Körper (z.B. Ortsvektoren und Drehparameter),
- $\dot{w}$  - Winkel- und Translationsgeschwindigkeiten aller Körper, vgl. Abschnitt 2.4a,
- $\ddot{w}$  - Winkel- und Translationsbeschleunigungen aller Körper, vgl. Abschnitt 2.4c.

Bem.: Beim Schnitt an einem "charakteristischen Gelenkpaar" sind für die Auswertung der Absolutkinematik die Gelenkkoordinaten eines der beiden Schnittgelenke erforderlich.