



Reiner Marchthaler · Sebastian Dingler

Kalman-Filter

Einführung in die Zustandsschätzung und
ihre Anwendung für eingebettete Systeme

2. Auflage



Springer Vieweg

Kalman-Filter

Reiner Marchthaler · Sebastian Dingler

Kalman-Filter

Einführung in die Zustandsschätzung und
ihre Anwendung für eingebettete Systeme

2. Auflage



Springer Vieweg

Reiner Marchthaler
Fakultät Informationstechnik
Hochschule Esslingen
Esslingen am Neckar, Deutschland

Sebastian Dingler
Stuttgart, Deutschland

ISBN 978-3-658-43215-7 ISBN 978-3-658-43216-4 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-43216-4>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://portal.dnb.de> abrufbar.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert an Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2017, 2024

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Leonardo Milla
Springer Vieweg ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Das Papier dieses Produkts ist recycelbar.

Vorwort zur 2. Auflage

Hauptaugenmerk der 1. Auflage war es, dem Leser eine Einführung in die Zustands schätzung zu geben. Der Schwerpunkt lag hier bei linearen Systemen. Um auch eine Zu standsschätzung nichtlinearer Systeme vornehmen zu können, wurden bei dieser 2. Auflage einerseits Inhalte aktualisiert und erweitert, andererseits auch weitere neue Anwendungsbeispiele aufgenommen.

Auch in der 2. Auflage wird die sehr weit verbreitete Software MATLAB® verwendet. Mit dieser Software lassen sich wieder die Beispiele sehr einfach nachvollziehen und eigene Filter entwickeln. Alternativ kann für die meisten Beispiele auch die kostenlose Software GNU Octave bzw. Scilab verwendet werden. Die in dem Buch verwendeten MATLAB®-Files können von der Internetseite <http://www.kalman-filter.de/> herunter geladen werden.

Wir bedanken uns recht herzlich bei den Lesern der 1. Auflage für die Anregungen und Korrekturen. Ebenso bei Leonardo Milla und dem Springer Vieweg Verlag für die Übernahme des Lektorats und die Veröffentlichung der überarbeiteten und erweiterten Version des Buchs.

Reiner Marchthaler
Sebastian Dingler

Vorwort zur 1. Auflage

Als wir die Idee zu diesem Buch mit anderen diskutierten, kam relativ schnell die Frage auf: „Weshalb ein neues Buch? Es gibt doch schon Bücher zu diesem Thema“. Betrachtet man die Liste aller Publikationen zum Thema Kalman-Filter, dann kann man diese Frage sehr gut nachvollziehen. Bei näherer Betrachtung stellt man jedoch fest, dass die meisten dieser Publikationen sehr spezielle Abhandlungen über Kalman-Filter sind. Derjenige, der sich noch nie mit Kalman-Filter beschäftigt hat, wird große Probleme haben, diese Publikationen zu verstehen. Grundlagenbücher zu diesem Thema beschreiben zwar die Grundlagen und die Herleitung des Kalman-Filters, haben jedoch oft keinerlei Beispiele zur Anwendung der Theorie. Die Tätigkeit als Hochschulprofessor und die Arbeit in der industriellen Forschung haben gezeigt, dass diese negative Erfahrung viele Studierende, Ingenieure und Wissenschaftler abschreckt, Kalman-Filter anzuwenden. Aus dieser Erkenntnis heraus kam die Motivation, ein Buch zu schreiben, welches zum einen die Grundlagen und die Annahmen, die einem Kalman-Filter zugrunde liegen, kurz und kompakt erklären und zum anderen dem Anwender die Angst anhand einfacher Beispiele nimmt, diese Filter auch in der Praxis einzusetzen.

Zu Beginn des Buchs werden an einem einführenden Beispiel die Grundzüge eines Entwurfs eines Kalman-Filters aufgezeigt. In den nächsten Grundlagenkapiteln wird auf die Möglichkeiten der Beschreibung von physikalischen Problemen im Zustandsraum und auf die für das Kalman-Filter wichtigsten Grundlagen der Wahrscheinlichkeits- und Signaltheorie eingegangen. Im Anschluss daran werden die Grundgleichungen des Kalman-Filters und darauf aufbauend die Gleichungen eines adaptiven Kalman-Filters (ROSE-Filter) hergeleitet. Darauf aufbauend wird anhand mehrerer Beispiele der Entwurf von Kalman-Filters gezeigt. Bei allen Beispielen wird darauf geachtet, dass jeder Teilschritt ausführlich erläutert wird.

Im Buch wird die sehr weit verbreitete Software MATLAB® verwendet, hierzu gibt es eine kostengünstige Studentenversion. Mit dieser Software lassen sich die Beispiele sehr einfach nachvollziehen und eigene Filter entwickeln. Alternativ kann für die meisten Beispiele auch die kostenlose Software GNU Octave bzw. Scilab verwendet werden. Die in dem Buch verwendeten MATLAB®-Files können von der Verlagsseite des Buchs heruntergeladen werden.

Recht herzlich möchten wir uns bei Prof. Dr. J. Goll, Prof. Dr. J. Koch, Prof. Dr. M. Stämpfle, Bharanidhar Duraisamy, Timo Wascheck, André-Marcel Hellmund und Verena Widmaier für die zahlreiche Anregungen und Korrekturen bedanken. Darüber hinaus bei Dr. Sabine Kathke und dem Springer Vieweg Verlag für die Übernahme des Lektorats und die Veröffentlichung dieses Buchs.

Reiner Marchthaler
Sebastian Dingler

Inhaltsverzeichnis

Teil I Einleitung

1 Einführendes Beispiel	3
1.1 Motivation	3
1.2 Zustandsraummodellierung	6
1.3 Rauschen	11
1.4 Kalman-Filter Gleichungen	13
Literatur	19

Teil II Grundlagen

2 Zustandsraumbeschreibung	23
2.1 Beschreibung dynamischer Systeme	24
2.2 Allg. Darstellung von Differenzialgleichungen	27
2.3 Systemeigenschaften	28
2.4 Lösung der Zustandsgleichung	34
2.5 Beschreibung zeitdiskreter Systeme	35
Literatur	42
3 Wahrscheinlichkeitstheorie	43
3.1 Definitionen und Begriffe	43
3.2 Dichtefunktion	47
3.3 Momente und zentrale Momente	54
Literatur	61
4 Signaltheorie	63
4.1 Stochastischer Prozess	63
4.2 Autokorrelation und Kreuzkorrelation	65
4.3 Spezielle Stochastische Prozesse	69
Literatur	71

Teil III Kalman-Filter

5 Klassisches Kalman-Filter	75
5.1 Struktur Kalman-Filter	75
5.2 Herleitung Kalman-Filter-Gleichungen	77
5.3 Alternative Berechnung der Kalman-Verstärkung	80
Literatur	82
6 Adaptiver Kalman-Filter (ROSE-Filter)	83
6.1 Grundprinzip	83
6.2 Adaptive Bestimmung des Messrauschens	85
6.3 Adaptive Bestimmung des Systemrauschens	86
6.4 Algorithmus	86
Literatur	87
7 Nichtlineare Kalman-Filter	89
7.1 Verallgemeinerte zeitdiskrete Systembeschreibung	89
7.2 Extended Kalman-Filter (EKF)	90
8 Systemrauschen	95
8.1 Ausgangspunkt	95
8.2 Direkte Diskretisierung	96
8.3 Partielles konstantes Rauschen	97
8.4 Diskretisiertes zeitkontinuierliches Modell	97
9 Gütemasse	101
9.1 Mittlerer quadratischer Fehler	101
9.2 Normalisiertes Schätzfehlerquadrat	102

Teil IV Anwendungsbeispiele

10 Prinzipielles Vorgehen	107
10.1 Zeitkontinuierliche Systembeschreibung	107
10.2 Zeitdiskrete Systembeschreibung	108
10.3 Beobachtbarkeit	109
10.4 Bestimmung des System- und Messrauschens	109
10.5 Gütemaße	110
Literatur	111
11 Beispiel: Bias-Schätzung	113
11.1 Filterentwurf	113
11.2 Kalman-Filter	118
11.3 Übergang in IIR-Filter 1. Ordnung	122
11.4 ROSE-Filter	123
Literatur	127

12 Beispiel: Kinematische Modelle	129
12.1 Modellierung	129
12.2 Kinematisches Modell 2. Ordnung	131
12.3 Modell 3. Ordnung	137
12.4 Modell höherer Ordnung	143
Literatur	143
13 Beispiel: Messrauschen mit Offset	145
13.1 Problematik	145
13.2 Filterentwurf	147
13.3 Implementierung und Ergebnisse.	150
14 Beispiel: Alternatives Bewegungsmodell der Mondfähre	155
14.1 Filterentwurf	155
14.2 Implementierung und Ergebnisse.	159
15 Beispiel: Kovarianzmatrix Messrauschen	163
15.1 Filterentwurf	163
15.2 Implementierung und Ergebnisse.	167
16 Beispiel: Umfeldsensor mit ROSE-Filter	171
16.1 Umfeldsensor	171
16.2 Implementierung und Ergebnisse.	178
Literatur	182
17 Beispiel: Fahrstreifenerkennung	183
17.1 Problembeschreibung	184
17.2 Filterentwurf	188
17.3 Implementierung und Ergebnisse.	192
18 Beispiel: Gleichstrommotor	195
18.1 Filterentwurf	195
18.2 Implementierung und Ergebnisse.	200
19 Beispiel: Positions- und Geschwindigkeitsschätzung mit EKF-Filter	205
19.1 Positionssensor.	205
19.2 Filterentwurf	206
19.3 Implementierung und Ergebnisse.	215
Literatur.	219
Vektor- und Matrizenrechnung	221
Sammlung wichtiger verwendeter Formeln	227

Lösung Matrix-Exponentialgleichungen – Einführendes Beispiel	229
Herleitung Kalman-Verstärkung für kinematisches Modell 2. Ordnung	231
Literatur	235
Stichwortverzeichnis	237

Notationen

Bezeichnung	Bedeutung
\hat{x}	prädizierte Größe
\tilde{x}	korrigierte Größe
A, B, \dots	Vektoren, Matrizen
$\underline{A}^T, \underline{B}^T, \dots$	transponierte Vektoren, Matrizen
$\underline{A}_d, \underline{B}_d, \dots$	zeitdiskrete Vektoren, Matrizen
$\underline{0}$	Nullmatrix
\underline{I}	Einheitsmatrix
$\text{Det}(\underline{A})$	Determinante einer Matrix
$\text{Adj}(\underline{A})$	Adjunkte einer Matrix
$\text{Tr}(\underline{A})$	Spur einer Matrix
$E(X)$	Erwartungswert der Zufallsvariable X
$\text{Var}(X)$	Varianz der Zufallsvariable X
$\text{Cov}(X, Y)$	Kovarianz der Zufallsvariablen X und Y
$\text{Rang}(\underline{S})$	Rang einer Matrix

Häufig verwendete Formelzeichen

Bezeichnung	Bedeutung
$f_X(x)$	Dichtefunktion der Zufallsvariable X
$\underline{A}, \underline{A}_d$	Systemmatrix (zeitkontinuierlich, zeitdiskret)
$\underline{B}, \underline{B}_d$	Eingangsmatrix (zeitkontinuierlich, zeitdiskret)
\underline{C}	Ausgangsmatrix
\underline{D}	Durchgangsmatrix
\underline{K}	Matrix der Kalman-Verstärkung
$\underline{G}, \underline{G}_d$	Matrix des Systemrauschens (zeitkontinuierlich, zeitdiskret)
\underline{P}	Kovarianzmatrix des Schätzfehlers
\underline{Q}	Kovarianzmatrix des Systemrauschens
\underline{R}	Kovarianzmatrix des Messrauschens
\underline{u}	Eingangsvektor des Zustandsbeobachters
\underline{y}	Ausgangsvektor des Zustandsbeobachters
T_s	Abtastzeit
\underline{x}	Zustandsvektor des Zustandsbeobachters (allgemein)
$\tilde{\underline{x}}$	korrigierter Zustandsvektor
$\hat{\underline{x}}$	prädizierter Zustandsvektor
$\underline{\varepsilon}$	Schätzfehler des korrigierten Zustandsvektors $\tilde{\underline{x}}$
$\hat{\underline{\varepsilon}}$	Schätzfehler des prädizierten Zustandsvektors $\hat{\underline{x}}$
\underline{z}	vektorielles Systemrauschen
\underline{v}	vektorielles Messrauschen
γ	Verstärkungsfaktor

Teil I

Einleitung

Einführendes Beispiel

1

Im Jahre 1960 entwickelte Rudolf E. Kalman für zeitdiskrete, lineare Systeme ein spezielles Filter, mit dem es möglich war, aus verrauschten und teils redundanten Messungen die Zustände und Parameter des Systems zu schätzen. Der Vorteil dieses (Kalman-)Filters gegenüber anderen stochastischen Schätzverfahren ist der iterative Aufbau des Filters, der besonders für Echtzeitanwendungen geeignet ist.

Zur Einführung in die Zustandsschätzung soll in diesem Kapitel der Entwurf eines solchen Kalman-Filters anhand eines historischen, nachgestellten Beispiels gezeigt werden. Das einführende Beispiel ist bewusst einfach gehalten, um den Fokus auf die Kernaspekte bei der Zustandsschätzung mittels Kalman-Filters zu lenken.

Viele der in diesem Beispiel verwendeten Formeln werden als bekannt vorausgesetzt, werden nicht hergeleitet und nur zum Teil erläutert. Sollten beim Lesen des Kapitels Formeln unbekannt sein oder Hintergrundinformationen fehlen, dienen die nachfolgenden Grundlagenkapitel dazu, diese Wissenslücken zu schließen. Sollten keinerlei Grundlagen vorhanden sein, dienen die Literaturhinweise jeweils zu Beginn der Grundlagenkapitel dazu, diese aufzubauen.

1.1 Motivation

Eines der wohl bekanntesten Einsatzgebiete des Kalman-Filters war die Verwendung bei der Mondlandung.

Hier bestand das Problem darin, Ort und Geschwindigkeit der Apollo-Mondlandefähre (Lunar Module Eagle, Abb. 1.1) durch Messung der Position der Mondlandefähre durch vier auf der Erde befindliche Dopplerradar-Stationen und die an Bord befindlichen Inertialsensorik (drei Gyroskope und drei Accelerometer [1]) zu schätzen [2]. Alle bis dahin bekannten Algorithmen hatten Probleme beim Schätzen von Ort und Geschwindigkeit. Das Kalman-Filter war prädestiniert für diese schwierige Aufgabe, denn es eliminierte



Abb. 1.1 Lunar Module Eagle im Mondorbit [3]

weitgehend statistische und systematische Messfehler und schätzte die Geschwindigkeit der Mondlandefähre.

Es wird angenommen, dass mithilfe von vier auf der Erde befindlichen Radaranlagen der Abstand der Mondlandefähre von der Mondoberfläche $h(t)$ bestimmt wird. Darüber hinaus liegt aus den an Bord befindlichen Sensoren die Beschleunigung $a(t)$ der Mondlandefähre senkrecht zur Mondoberfläche vor. Beispiellohaft zeigt die Abb. 1.2 den zeitlichen Verlauf der beiden messtechnisch erfassbaren Signale $a(t)$ und $h(t)$.

In diesem simulierten Beispiel befindet sich die Mondlandefähre zu Beginn der Messung in einer Höhe von etwa 1000 m und landet nach ca. 40 s ($k \approx 400$) auf der Mondoberfläche.

Die Mondlandefähre bewegt sich zu Beginn der Messung mit einer Geschwindigkeit von -10 m/s und wird im Laufe der Messung durch Zündung der Bremsraketen verzögert.

Dem Beschleunigungsverlauf ist zu entnehmen, dass zu Beginn der Messung die Mondlandefähre für eine kurze Zeit mit -10 m/s^2 beschleunigt wird und anschließend in drei Zündungsphasen der Bremsraketen jeweils mit $+10 \text{ m/s}^2$ verzögert wird. Zwischen den Zündungen der Bremsraketen werden diese nur schwach betrieben, sodass die durch den Mond hervorgerufene Anziehungskraft von ca. $+1.6 \text{ m/s}^2$ kompensiert wird.

Unbekannt ist nach wie vor die Geschwindigkeit $v(t)$ der Mondlandefähre. Theoretisch wäre es nun möglich, aus dem Signal $h(t)$ durch Differenzieren die unbekannte Geschwindigkeit der Mondlandefähre zu bestimmen. Dieses differenzierte Signal ist jedoch aufgrund des verrauschten Signals $h(t)$ nicht zu gebrauchen (siehe Abb. 1.3).

Hier liegt die Idee nahe, zuerst das Rauschen des Signals $h(t)$ durch Filtern zu eliminieren und anschließend zu differenzieren. Möglich wäre dies z. B. durch einen Tiefpass. Diese Art der Filterung weist jedoch eine Gruppenlaufzeit auf und führt dazu, dass die gefilterte Größe dem aktuellen Wert zeitlich nacheilt. Am Beispiel der Mondlandefähre wurde das Höhensi-

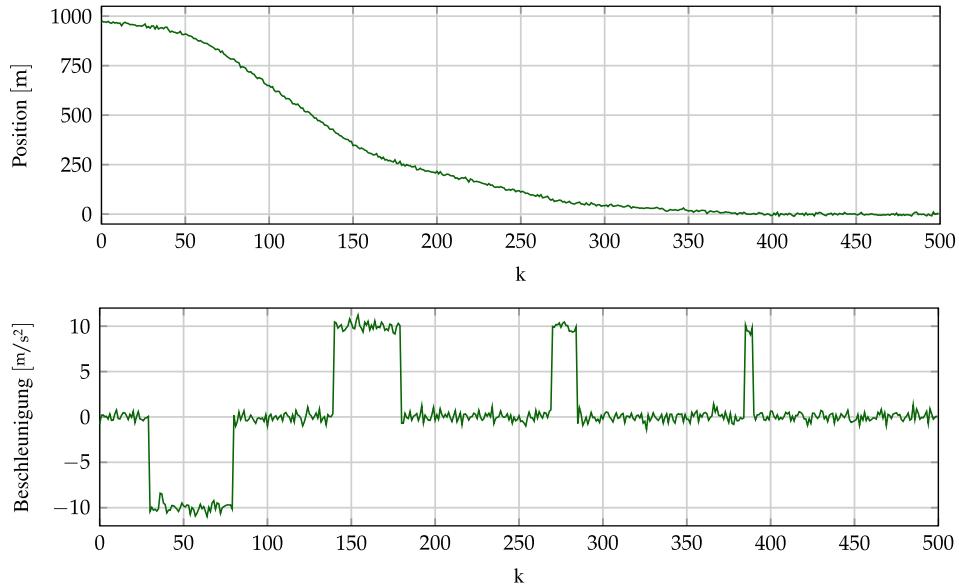


Abb. 1.2 Verlauf messtechnisch erfassbarer Größen der Mondlandefähre: Position (Abstand von der Mondoberfläche) und Beschleunigung

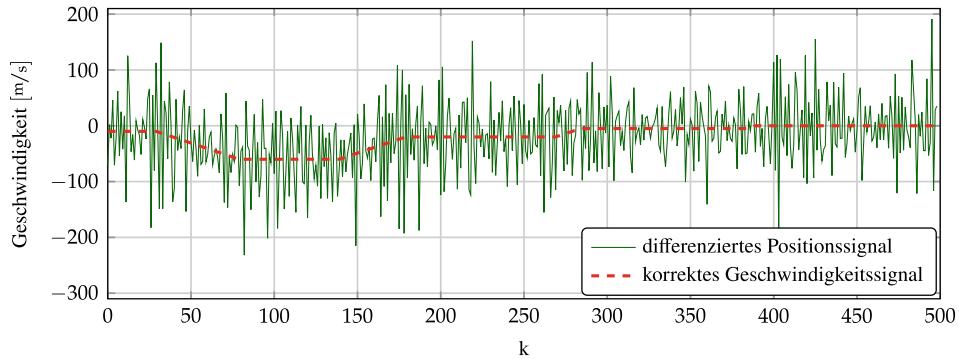


Abb. 1.3 Der durch Differenzierung erhaltene Verlauf der Geschwindigkeit der Mondlandefähre

gnal mit einem Tiefpassfilter (Finite Response Filter mit einer konstanten Gruppenlaufzeit von 3 s) gefiltert und anschließend differenziert.

Hierdurch erhält man eine Geschwindigkeit, die die Mondlandefähre noch vor 3 s hatte – jedoch nicht die aktuelle Geschwindigkeit (siehe Abb. 1.4). Dieser Effekt ist für Echtzeitanwendungen meist nicht tragbar.

Ebenso wäre es möglich, das Beschleunigungssignal $a(t)$ zu integrieren und hieraus die gesuchte Geschwindigkeit der Mondlandefähre zu ermitteln. Dabei stößt man bei der

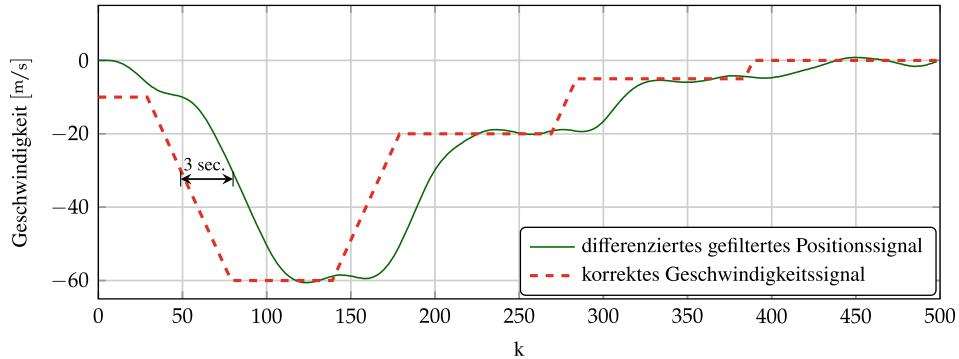


Abb. 1.4 Der durch Tiefpassfilterung und Differenzierung erhaltene Verlauf der Geschwindigkeit der Mondlandefähre

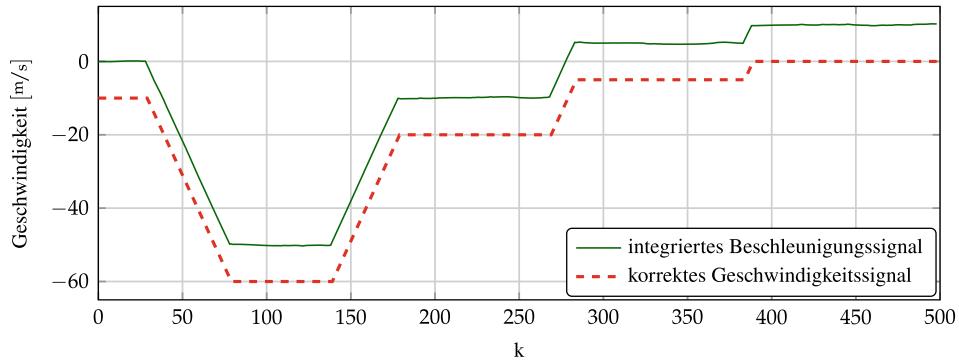


Abb. 1.5 Der durch Integration erhaltene Verlauf der Geschwindigkeit der Mondlandefähre

Integration auf das Problem der unbekannten Integrationskonstanten, sprich der unbekannten Anfangsgeschwindigkeit zu Beginn der Messung und der, in der Realität, immer vorhandenen Offsets in Beschleunigungssignalen.

In Abb. 1.5 ist ein solcher Verlauf eines aufintegrierten Signals dargestellt. Die unbekannte Integrationskonstante (Anfangsgeschwindigkeit) wurde hier mit 0 m/s definiert.

1.2 Zustandsraummodellierung

Als Erstes ist es notwendig, das dynamische Verhalten der Mondlandefähre in der Zustandsraumdarstellung zu modellieren. Dabei wird das dynamische Verhalten zuerst als zeitkontinuierliches System modelliert und anschließend diskretisiert. Am Ende erfolgt eine Überprüfung des Systems auf Beobachtbarkeit. Dadurch lässt sich sagen, inwieweit die unbekannten Größen auch geschätzt werden können.

1.2.1 Zeitkontinuierliche Systembeschreibung

Zuerst wird ein Modell benötigt, welches den Zusammenhang zwischen der gemessenen Beschleunigung $a(t)$, der geschätzten Geschwindigkeit $v(t)$ und der gemessenen Höhe der Mondlandefähre $h(t)$ beschreibt.

Wird die komplette Masse der Mondlandefähre in einem Massenpunkt vereint, so lässt sich das dynamische Verhalten dieses Massenpunkts durch

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{h}(t) \quad (1.1)$$

modellieren.

Als Nächstes muss das Modell in die Zustandsraumdarstellung überführt werden. In unserem Fall handelt es sich um ein zeitinvariantes, lineares System, das allgemein durch die beiden folgenden Gleichungen im Zustandsraum (siehe z. B. [4], [5]) beschrieben werden kann:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t) + \underline{G} \cdot \underline{z}(t) \quad (1.2)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot \underline{u}(t). \quad (1.3)$$

Bei $\underline{x}(t)$ spricht man vom Zustandsvektor, $\underline{u}(t)$ vom Eingangs- und $\underline{y}(t)$ vom Ausgangsvektor des Systems. Ungenauigkeiten in der Modellierung werden durch das Systemrauschen/Prozessrauschen $\underline{z}(t)$ abgebildet.

Bei der Wahl des Zustandsvektors $\underline{x}(t)$ ist man frei. Dabei gibt es „gute“ und „weniger gute“ Wahlmöglichkeiten. In Kap. 14 wird das Beispiel mit einem anderen Zustandsvektor erneut berechnet und die Konsequenz verdeutlicht.

Wählt man den Zustandsvektor $\underline{x}(t)$ zu

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

ist die Ableitung der Zustandsvariablen $\dot{\underline{x}}(t)$ gegeben durch

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{a}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ a(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot z(t). \quad (1.5)$$

Der Einfachheit halber wird angenommen, dass die Ableitung der Beschleunigung null ist. Mögliche Änderungen in der Beschleunigung werden durch die Einführung eines Systemrauschens $z(t)$ modelliert.

Des Weiteren ist bekannt, dass die Größen $h(t)$ und $a(t)$ messtechnisch erfasst werden. Damit ist $\underline{y}(t) = [h(t), a(t)]^T$. Somit ergeben sich die beiden Zustandsgleichungen zu:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{a}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot z(t) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \cdot u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{G}} \cdot z(t)\end{aligned}\quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}\underline{y}(t) &= \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot u(t).\end{aligned}\quad (1.7)$$

1.2.2 Zeitdiskrete Systembeschreibung

Für die Implementierung in digitalen Schaltungen/Mikroprozessoren ist es notwendig, die Beschreibung des Systems im Zustandsraum im diskreten Zeitbereich darzustellen. Hierbei wird angenommen, dass bei der Digitalisierung durch einen Digital-/Analogwandler die analogen Signale alle T_s Sekunden abgetastet werden.

Ein lineares zeitdiskretes System wird allgemein im Zustandsraum beschrieben durch:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{x}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) + \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k) \quad (1.8)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) \quad (1.9)$$

mit

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s}, \quad \underline{B}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{B} dv, \quad \underline{G}_d = \underline{A}_d \cdot \underline{G}. \quad (1.10)$$

Für die Berechnung der Matrix \underline{G}_d werden in der Literatur mehrere Modelle genannt (siehe Kap. 8 und [6]). Die Herleitung der Gleichungen zur Bestimmung von \underline{A}_d und \underline{B}_d ist dem Kap. 2 zu entnehmen. Die Berechnung der Matrix \underline{A}_d kann allgemein z.B. mithilfe der Laplace-Transformation erfolgen (siehe Anhang: C). Alternativ kann die Berechnung mit dem Programm MATLAB® durchgeführt werden, mit welchem sich über folgende Befehle die Matrix \underline{A}_d , \underline{B}_d und \underline{G}_d bestimmen lässt:

MATLAB: Berechnung A_d , B_d und G_d

```

syms Ts 'real';

A = [0 1 0;
      0 0 1;
      0 0 0];
B = [0; 0; 0];
G = [0; 0; 1];

Ad = simplify(expm(Ts*A))
Bd = simplify(int(expm(Ts*A)*B))
Gd = Ad*G

```

Die Berechnung ergibt:

$$\underline{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & T_s & \frac{T_s^2}{2} \\ 0 & 1 & T_s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{G}_d = \begin{bmatrix} \frac{T_s^2}{2} \\ T_s \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Setzt man die hiermit bestimmten Größen \underline{A}_d , \underline{B}_d und \underline{G}_d in die Gl.(1.8) ein, so folgt:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} h(k+1) \\ v(k+1) \\ a(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T_s & \frac{T_s^2}{2} \\ 0 & 1 & T_s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}_d} \cdot \begin{bmatrix} h(k) \\ v(k) \\ a(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{T_s^2}{2} \\ T_s \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{G}_d} \cdot z(k). \quad (1.11)$$

Ausformuliert erhält man die bekannten diskreten Gleichungen einer Bewegung eines Punkt-Masse-Modells inkl. der unbekannten Größe $z(k)$:

$$\begin{aligned} h(k+1) &= h(k) + T_s \cdot v(k) + \frac{T_s^2}{2} \cdot (a(k) + z(k)) \\ v(k+1) &= v(k) + T_s \cdot (a(k) + z(k)) \\ a(k+1) &= a(k) + z(k). \end{aligned}$$

1.2.3 Beobachtbarkeit

Nicht mit allen Systembeschreibungen ist es möglich, die Größen des Zustandsvektors zu schätzen. Man spricht hier von der Beobachtbarkeit des Systems. Allgemein gesprochen ist ein System beobachtbar, wenn jeder Zustand des Systems in einem endlichen Zeitbereich aus Kenntnis der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$ bestimmt werden kann.

Die Beobachtbarkeit ist gegeben, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix S_B bei einem System der Ordnung n den Rang n besitzt:

$$\underline{S}_B = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Prinzipiell ist es möglich, dass ein System im kontinuierlichen Zeitbereich noch beobachtbar ist, jedoch bei bestimmten Abtastzeiten nicht mehr beobachtbar ist. Es ist deshalb sinnvoll, die Überprüfung der Beobachtbarkeit mit der Beobachtbarkeitsmatrix \underline{S}_B^* durchzuführen. Diese ist definiert zu:

$$\underline{S}_B^* = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d^2 \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

Das System ist beobachtbar, sobald die Beobachtbarkeitsmatrix \underline{S}_B^* den Rang n besitzt [4].

Im Beispiel der Mondlandefähre ist die Ordnung des Systems $n = 3$ und somit die Beobachtbarkeitsmatrix \underline{S}_B^* gegeben durch:

$$\text{Rang}(\underline{S}_B^*) = \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d^2 \end{bmatrix}\right) = \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & T_s & \frac{T_s^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2T_s & 2T_s^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3.$$

Mit der Annahme $T_s > 0$ lässt sich das überbestimmte Gleichungssystem auflösen und man erhält drei unabhängige Zeilenvektoren.

Zur Bestimmung des Rangs muss die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren der Beobachtbarkeitsmatrix \underline{S}_B^* gleich n sein. In dem Beispiel der Mondlandefähre ist dies drei. Somit ist die Anzahl der Elemente des Zustandsvektors gleich dem Rang der Beobachtbarkeitsmatrix \underline{S}_B^* und das beschriebene System ist beobachtbar.

Alternativ lässt sich der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix \underline{S}_B^* auch mit MATLAB® bestimmen.

Dies wird im Folgenden gezeigt:

MATLAB: Berechnung Rang der Beobachtbarkeitsmatrix S_B^*

```
syms Ts 'real';

A = [0 1 0;
      0 0 1;
      0 0 0];
C = [1 0 0;
      0 0 1];

Ad = simplify(expm(Ts*A));

SB=C;
for n=1:length(A)-1
    SB = [SB; C*Ad^n];
end

rank(SB)
```

1.3 Rauschen

Neben der Modellierung des Systems im Zustandsraum ist es für den Entwurf eines Kalman-Filters notwendig, die Fehler in der Systembeschreibung (Modellungenauigkeiten) und die Fehler bei der Messdatenerfassung in Form von Rauschen zu bestimmen. Bei beiden Größen, dem System- und dem Messrauschen, genügt es, die Varianz zu bestimmen. Die Erwartungswerte der Rauschgrößen werden zu null angenommen. Man spricht hier von mittelwertfreien Rauschquellen.

1.3.1 Systemrauschen

Ungenauigkeiten bei der Modellierung eines Systems lassen sich durch das Systemrauschen beschreiben. In dem gezeigten einführenden Beispiel wurde angenommen, dass die Ableitung der Beschleunigung null ist und dass mögliche Änderungen in der Beschleunigung durch die Einführung der Rauschgröße z_k beschrieben werden.

Die Varianz des Systemrauschens ist definiert durch:

$$Q(k) = \text{Var}(z(k)) = \sigma_v^2. \quad (1.14)$$

In dem einführenden Beispiel gab es nur eine Rauschgröße bei der Systemmodellierung, d.h., die Zufallsgröße $z(k)$ ist in diesem Fall ein Skalar. Daraus folgt, dass somit auch die Varianz $Q(k)$ ein Skalar ist.

Das Kalman-Filter legt die Annahme zugrunde, dass der Schätzfehler und das Systemrauschen unkorreliert sind. Erweitert man diese Annahme noch, dass es sich um ein nor-

malverteiltes, mittelwertfreies, weißes Rauschen handelt, so lässt sich die Varianz $Q(k)$ in diesem Beispiel wie folgt abschätzen.

Man geht davon aus, dass sich die Beschleunigung um maximal 10 m/s^2 innerhalb eines Abtastintervalls ändert und die Änderung der Beschleunigung normalverteilt ist. Ferner wird angenommen, dass diese maximale Änderung des Beschleunigungssignals z. B. einem Wert von $3 \cdot \sigma$ entspricht, d. h., man weiß, dass sich die Beschleunigung bei 99 % aller Messungen weniger als 10 m/s^2 von Messung zu Messung ändert.

Aus diesen Annahmen folgt:

$$Q(k) = \sigma_v^2 = \left(\frac{10}{3} \text{ m/s}^2 \right)^2 \approx 11,1 \text{ m}^2/\text{s}^4. \quad (1.15)$$

1.3.2 Messrauschen

Alle erfassbaren Messgrößen weisen in realen Systemen ein Rauschen auf. Diese sind beispielsweise bedingt durch die Quantisierung im Analog/Digital-Wandler oder durch andere Störgrößen. Zur Berücksichtigung dieses Effekts wird der Ausgangsvektor $\underline{y}(k)$ von einem Messrauschen $\underline{v}(k)$ überlagert. So lassen sich lineare zeitdiskrete Systeme mit System- und Messrauschen beschreiben durch:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{x}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) + \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k) \quad (1.16)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) + \underline{v}(k). \quad (1.17)$$

Anzumerken ist, dass der Eingangsvektor $\underline{u}(k)$ unverrauscht und nur der Ausgangsvektor $\underline{y}(k)$ verrauscht ist. Bei der Beschreibung des Messrauschens ist wichtig zu wissen, dass, bei des von Rudolf E. Kalman entwickelten Filters, der Schätzfehler und das Messrauschen $\underline{v}(k)$ unkorreliert sein müssen. Diese Annahme wird oft damit verknüpft, dass es sich bei dem Messrauschen um ein mittelwertfreies, normalverteiltes, weißes Rauschen handelt, d. h. der Erwartungswert $E(\underline{v}(k)) = 0$ ist.

Die Varianz des Messrauschens wird durch

$$\underline{R}(k) = \text{Var}(\underline{v}(k)) \quad (1.18)$$

beschrieben.

Unter der Annahme, dass auch in dem einführenden Beispiel das Messrauschen mittelwertfrei und normalverteilt ist, ist die Varianz des Höhensignals gegeben durch $\text{Var}(\underline{v}_h(k)) = \sigma_h^2$ und die des Beschleunigungssignals durch $\text{Var}(\underline{v}_a(k)) = \sigma_a^2$.

Des Weiteren wird angenommen, dass die beiden Messrauschgrößen $\underline{v}_h(k)$ und $\underline{v}_a(k)$ stochastisch unabhängig sind. Mit dieser Annahme beeinflusst die eine Rauschgröße die andere nicht. Dies ist in dem einführenden Beispiel sicherlich der Fall, da das Rauschen des Beschleunigungssignals z. B. durch Vibration und die des Höhensignals z. B. durch

Ungenauigkeiten in der Radarmessung aufgrund der großen Entfernung entstehen. So ist anzunehmen, dass sich diese beiden Rauschgrößen gegenseitig nicht beeinflussen, d. h., dass $\underline{v}_h(k)$ und $\underline{v}_a(k)$ unkorreliert sind und somit die Kovarianz¹ $\text{Cov}(\underline{v}_h(k), \underline{v}_a(k))$ gleich null ist.

Ist davon auszugehen, dass sich das Messrauschen über die Zeit nur unwesentlich ändert, so lässt sich die Varianz σ_h^2 und σ_a^2 mithilfe der Gleichung (siehe Abschn. 3.3.2)

$$\text{Var}(x) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n (x(k) - \bar{x})^2 \quad (1.19)$$

empirisch abschätzen.

Vorteilhaft ist für die Schätzung der Varianzen in diesem Beispiel der Bereich zwischen 40 s und 50 s aus der Abb. 1.2. Dort sind die Erwartungswerte jeweils null. Mit dieser Methode wird in dem einführenden Beispiel $\sigma_h^2 \approx 20 \text{ m}^2$ und $\sigma_a^2 \approx 0.2 \text{ m}^2/\text{s}^4$ abgeschätzt.

So gilt:

$$\underline{R}(k) = \text{Var}(\underline{v}(k)) = \begin{bmatrix} \text{Var}(\underline{v}_h(k)) & \text{Cov}(\underline{v}_h(k), \underline{v}_a(k)) \\ \text{Cov}(\underline{v}_h(k), \underline{v}_a(k)) & \text{Var}(\underline{v}_a(k)) \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_h^2 & 0 \\ 0 & \sigma_a^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

Hinweis für den Praktiker: Werden diese Größen nicht korrekt abgeschätzt, ändern sich in den meisten Fällen die durch das Kalman-Filter abgeschätzten Zustandsgrößen nur unwesentlich. Salopp gesprochen legt man mit der Varianz fest, wie „vertrauenswürdig“ die beiden Größen $a(k)$ und $h(k)$ sind.

Ist davon auszugehen, dass das Messrauschen über die Zeit stark variiert, so muss die Varianz des Messrauschens laufend geschätzt werden. Hierzu sei auf das in Kap. 6 ROSE-Filter verwiesen, welches adaptiv die Varianz des Messrauschens und die des Systemrauschens schätzt.

1.4 Kalman-Filter Gleichungen

Rudolf E. Kalman stellte nachfolgende Grundgleichungen für ein Kalman-Filter auf. Die Herleitung dieser Gleichungen ist für den interessierten Leser dem Abschn. 5.2 zu entnehmen.

¹ Kovarianz: Maß für den linearen Zusammenhang zweier Zufallsvariablen

Korrektur:

$$\hat{y}(k) = \underline{C} \cdot \hat{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) \quad (1.22)$$

$$\Delta \underline{y}(k) = \underline{y}(k) - \hat{y}(k) \quad (1.23)$$

$$\underline{K}(k) = \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot (\underline{C} \cdot \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k))^{-1} \quad (1.24)$$

$$\tilde{x}(k) = \hat{x}(k) + \underline{K}(k) \cdot \Delta \underline{y}(k) \quad (1.25)$$

$$\hat{P}(k) = (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \hat{P}(k) \quad (1.26)$$

Prädiktion:

$$\hat{x}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \tilde{x}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) \quad (1.27)$$

$$\hat{P}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \hat{P}(k) \cdot \underline{A}_d^T + \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T \quad (1.28)$$

Um den zeitlichen Verlauf der gesuchten Größen zu bestimmen, werden diese Grundgleichungen des Kalman-Filters zyklisch berechnet. Abb. 1.6 visualisiert die zeitliche Berechnung der Grundgleichungen des Kalman-Filters.

Bei den Gleichungen fällt auf, dass es zwei Größen gibt, die den Zustandsvektor $\underline{x}(k)$ beschreiben. $\hat{x}(k)$ ist der prädizierte Zustandsvektor und $\tilde{x}(k)$ der korrigierte Zustandsvektor.

Betrachtet man die für die Berechnung des Kalman-Filters notwendigen Gleichungen näher, wird zuerst mit Gl. (1.23) die Differenz $\Delta \underline{y}(k)$ zwischen der prädizierten Ausgangsgröße $\hat{y}(k)$ Gl. (1.22) und der aktuell vorliegenden Messung $\underline{y}(k)$ bestimmt. Passen die prädizierte und aktuell gemessene Größe gut überein, so wird die Differenz $\Delta \underline{y}(k)$ sehr klein.

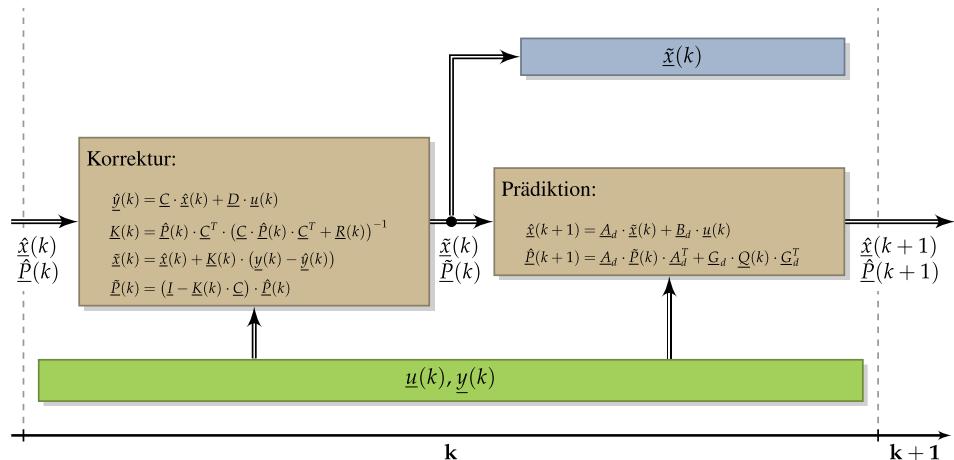


Abb. 1.6 Zeitliche Berechnung der Grundgleichungen des Kalman-Filters

Die Gl. (1.24) bestimmt die Kalman-Verstärkung $\underline{K}(k)$ zum Zeitpunkt k . Diese Verstärkung wird benötigt, um in Gl. (1.25) den korrigierten Zustandsvektor $\tilde{\underline{x}}(k)$ zu berechnen. Die Größe der Korrektur des Zustandsvektors hängt zum einen von der Kalman-Verstärkung $\underline{K}(k)$ und zum anderen von der Differenz $\Delta \underline{y}(k)$ ab. Je kleiner diese Differenz ist, umso kleiner fällt die Korrektur des Zustandsvektors aus.

$\underline{P}(k)$ stellt die Kovarianz des Schätzfehlers $\underline{\varepsilon}(k)$ dar. Der Schätzfehler ist die Differenz zwischen dem wahren Wert und dem geschätzten Wert. Somit ist $\underline{\varepsilon}(k) = \underline{x}(k) - \tilde{\underline{x}}(k)$ die Differenz zwischen dem wahren Wert $\underline{x}(k)$ und dem korrigierten Zustandsvektor $\tilde{\underline{x}}(k)$. $\tilde{\underline{\varepsilon}}(k) = \underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k)$ ist die Differenz zwischen dem wahren Wert $\underline{x}(k)$ und dem prädizierten Zustandsvektor $\hat{\underline{x}}(k)$.

In diesem Beispiel wird der Schätzfehler $\tilde{\underline{\varepsilon}}(k)$ durch die Differenz des wahren Höhensignals $x_h(k)$ und des korrigierten Höhensignals $\tilde{x}_h(k)$, durch die Differenz des wahren Geschwindigkeitssignals $x_v(k)$ und des korrigierten Geschwindigkeitssignals $\tilde{x}_v(k)$ und durch die Differenz des wahren Beschleunigungssignals $x_a(k)$ und des korrigierten Beschleunigungssignals $\tilde{x}_a(k)$ beschrieben.

$$\tilde{\underline{\varepsilon}}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_h(k) \\ \tilde{\varepsilon}_v(k) \\ \tilde{\varepsilon}_a(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_h(k) - \tilde{x}_h(k) \\ x_v(k) - \tilde{x}_v(k) \\ x_a(k) - \tilde{x}_a(k) \end{bmatrix}$$

Mithilfe der Gl. (1.26) wird die korrigierte Kovarianz des Schätzfehlers $\tilde{\underline{P}}(k) = \text{Var}(\tilde{\underline{\varepsilon}}(k))$ ermittelt. Durch die Gl. (1.28) wird auf Basis der Systemengenauigkeiten $\underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T$ die Kovarianz des Schätzfehlers extrapoliert und mit $\hat{\underline{P}}(k)$ bezeichnet. Die Matrix $\tilde{\underline{P}}$ bzw. $\hat{\underline{P}}$ hat die Dimension $n \times n$, wobei n die Anzahl der Elemente des Zustandsvektors ist.

In diesem Beispiel haben die Matrizen somit die Dimension 3×3 . Betrachtet man die Matrix $\tilde{\underline{P}}$ genauer, hat diese den folgenden Aufbau:

$$\tilde{\underline{P}}(k) = \begin{bmatrix} \text{Var}(\tilde{\varepsilon}_h(k)) & \text{Cov}(\tilde{\varepsilon}_h(k), \tilde{\varepsilon}_v(k)) & \text{Cov}(\tilde{\varepsilon}_h(k), \tilde{\varepsilon}_a(k)) \\ \text{Cov}(\tilde{\varepsilon}_h(k), \tilde{\varepsilon}_v(k)) & \text{Var}(\tilde{\varepsilon}_v(k)) & \text{Cov}(\tilde{\varepsilon}_v(k), \tilde{\varepsilon}_a(k)) \\ \text{Cov}(\tilde{\varepsilon}_h(k), \tilde{\varepsilon}_a(k)) & \text{Cov}(\tilde{\varepsilon}_v(k), \tilde{\varepsilon}_a(k)) & \text{Var}(\tilde{\varepsilon}_a(k)) \end{bmatrix}.$$

Das Element $\tilde{P}_{1,1}(k)$ stellt z. B. die Varianz des prädizierten Schätzfehlers des Höhensignals dar. Unterstellt man, dass das Rauschen normalverteilt ist, gilt:

$$\text{Var}(\tilde{\varepsilon}_h(k)) = \tilde{\sigma}_h^2(k).$$

Ein Wert von $\pm \tilde{\sigma}_h(k) = \sqrt{\text{Var}(\tilde{\varepsilon}_h(k))}$ repräsentiert einen Bereich um das prädizierte Höhenignal, in welchem der wahre Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 68% liegt. Somit liefern die Elemente auf der Spur der Kovarianzmatrix \underline{P} ein Maß, wie vertrauenswürdig die Schätzung des Zustandsvektor \underline{x} ist.

In Abb. 1.7 ist dieser Bereich, in welchem der wahre Wert $x(k)$ mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 68% liegt, schraffiert dargestellt. Generell rückt bei einem klassischen

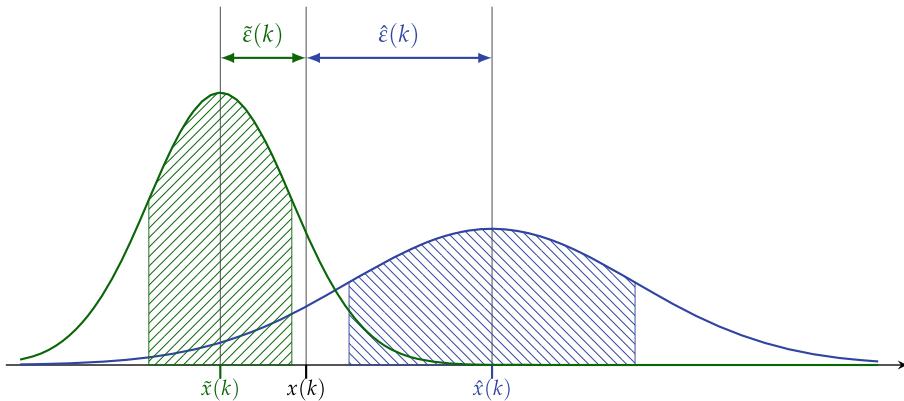


Abb. 1.7 Verkleinerung der Varianzen des Schätzfehlers vor und nach der Korrektur

Kalman-Filter der geschätzte Wert nach der Korrektur näher an den wahren Wert und die Streuung/Varianz des Schätzfehlers nimmt ab. Es gilt $\tilde{P}(k) \leq \hat{P}(k)$. Je besser das Modell (ausgedrückt durch eine kleine Varianz des Systemrauschen \underline{Q}) bzw. je kleiner das Messrauschen (in Form einer kleinen Varianz des Messrauschen \underline{R}) ist, desto kleiner wird der Schätzfehler und somit auch die Kovarianz des Schätzfehlers. Bei guten Modellen bewirkt die Korrektur keine große Verbesserung des Schätzwerts und es gilt $\hat{P}(k) \approx \tilde{P}(k)$.

Unter Verwendung der Gl. (1.22), (1.23), (1.24), (1.25), (1.26), (1.27) und (1.28) lassen sich die geschätzte Geschwindigkeit und die Position der Mondlandefähre sowie die entsprechenden Kovarianzen berechnen. Mit diesen Gleichungen lassen sich die Werte für die prädizierte Höhe $\tilde{h}_1 = \tilde{h}$, die prädizierte Varianz des Schätzfehlers $\tilde{P}_{1,1} = \tilde{\sigma}_h^2$, die korrigierte Höhe $\hat{h}_1 = \hat{h}$ und die korrigierte Varianz des Schätzfehlers $\hat{P}_{1,1} = \hat{\sigma}_h^2$ bestimmen (siehe Tab. 1.1).

Tab. 1.1 Auszug aus den berechneten Größen des Kalman-Filters

k	prädizierte Größen		korrigierte Größen	
	$\hat{h}(k) = \hat{x}_1(k)$	$\hat{\sigma}_h(k) = \sqrt{\hat{P}_{1,1}(k)}$	$\tilde{h}(k) = \tilde{x}_1(k)$	$\tilde{\sigma}_h(k) = \sqrt{\tilde{P}_{1,1}(k)}$
:	:	:	:	:
260	91,92 m	0,96 m	92,09 m	0,93 m
261	90,10 m	0,96 m	89,93 m	0,93 m
262	87,92 m	0,96 m	87,68 m	0,93 m
:	:	:	:	:

In diesem Beispiel ist bei $k = 261$ die korrigierte Position (Höhe) 89,93 m. Betrachtet man das Intervall von $\pm 3 \cdot \sigma$, so liegt der wahre Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,7% innerhalb des Intervalls von 87,14 m und 92,72 m. Die Schätzung des Intervalls basiert maßgeblich auf der richtigen Bestimmung der Kovarianzen des System- und Messrauschens. Werden die Kovarianzen dieser Rauschgrößen falsch abgeschätzt, wird die Kovarianz des Schätzfehlers und somit das Intervall inkorrekt bestimmt.

Der in diesem Kapitel verwendete Code des Kalman-Filters ist im Nachfolgenden aufgeführt.

MATLAB: Kalman-Filter

```
load -ascii data_y.csv; y = data_y; u = zeros(1,length(y));

Ts = 0.1;
R = [20 0; 0 0.2];
Q = 100/9;

Ad = [1 Ts 0.5*Ts^2; 0 1 Ts; 0 0 1];
Bd = [0; 0; 0];
C = [1 0 0; 0 0 1];
G = [0.5*Ts^2; Ts; 1];

%%%% INITIALISIERUNG KALMAN-FILTER %%%
x = [y(1,1); 0; y(1,2)];
P = 3*[1 0 0; 0 1 0; 0 0 1];

%%%% ZYKLISCHE BERECHNUNG KALMAN-FILTER %%%
for k=1:length(y)
    K = P*C'*pinv(C*P*C' + R);
    x = x + K*(y(k,:)' - C*x);
    P = (eye(length(Bd)) - K*C)*P;

    s(k)=x(1); v(k)=x(2); a(k)=x(3);

    x = Ad*x + Bd*u(k);
    P = Ad*P*Ad' + G*Q*G';
end
```

Die Abb. 1.8 zeigt die mithilfe des Kalman-Filters geschätzten (korrigierten) Größen des Zustandsvektors. Hierbei sieht man, dass die Größen zeitlich den tatsächlich gemessenen Größen nicht nacheilen und somit keine Gruppenlaufzeit besitzen. Auch hat das Kalman-Filter die Geschwindigkeit nach 3 s sehr gut abgeschätzt, obwohl die Anfangsgeschwindigkeit unbekannt war und diese fälschlicherweise bei der Initialisierung zu null angenommen wurde.

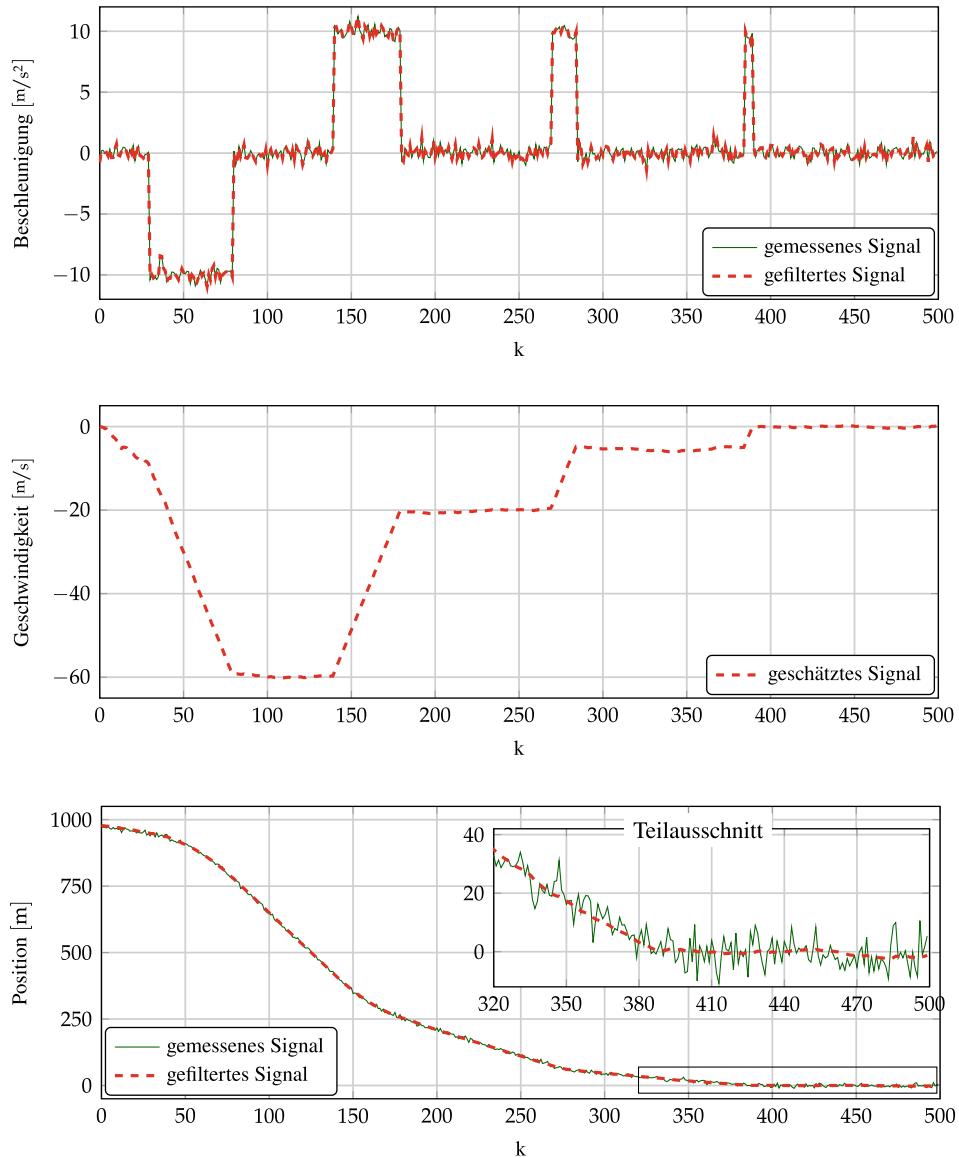


Abb. 1.8 Verlauf der Größen des korrigierten Zustandsvektors

Literatur

1. WIKIPEDIA ; ONLINE- NACHSCHLAGEWERK: *Primary Guidance, Navigation and Control System*. Online aufgerufen bei: http://de.wikipedia.org/wiki/Primary_Guidance%2C_Navigation_and_Control_System, 04. Mai 2013
2. WENZEL, L. : Kalman-Filter – Ein mathematisches Modell zur Auswertung von Messdaten für Regelungstechnik, Teil 1. In: *Elektronik* (2000), Juni
3. ROSSKOTHEN, M. : *Abbildung: Mondlandefähre*. online aufgerufen bei: <https://de.fotolia.com/id/22825496>, 18. Februar 2016
4. UNBEHAUEN, H. : *Regelungstechnik II: Zustandsregelungen, digitale und nichtlineare Regelsysteme*. 9., durchgesehene und korrigierte Auflage. Wiesbaden : Vieweg + Teubner Verlag, 2007 (Studium). – ISBN 978 – 3 – 528 – 83348 – 0
5. UNBEHAUEN, R. : *Systemtheorie 1: Allgemeine Grundlagen, Signale und lineare Systeme im Zeit- und Frequenzbereich*. 8., korr. Aufl. München : Oldenbourg, 2002 (Systemtheorie). – ISBN 3 – 486 – 25999 – 7
6. BAR- SHALOM, Y. ; KIRUBARAJAN, T. ; LI, X. : *Estimation with applications to tracking and navigation: [theory algorithms and software]*. New York (u.a.) : Wiley, 2001. – ISBN 0 – 471 – 41655 – X

Teil II

Grundlagen

Zustandsraumbeschreibung

2

Es gibt mehrere Möglichkeiten zur Beschreibung dynamischer Systeme. Eine ist die Darstellung physikalischer Systeme im Frequenzbereich z. B. durch die Übertragungsfunktion. Alternativ lassen sich dynamische Systeme auch mittels Differentialgleichungen charakterisieren.

Der Vorteil gegenüber der Systemcharakterisierung im Frequenzbereich ist nach [1]:

- Es sind detaillierte Einblicke in das innere Verhalten des Systems möglich. Hierzu zählen Steuerbarkeit und die Beobachtbarkeit, die mit dieser Beschreibungsform definiert und überprüft werden kann.
- Die Darstellungsart ist sowohl für analytische Beschreibungen als auch für numerische Berechnungen gut geeignet.
- Die Bestimmung des Verhaltens des homogenen Systems ist mittels der Anfangsbedingung $x(t_0)$ sehr einfach.
- Ein- und Mehrgrößensysteme können formal gleich behandelt werden.

Kalman-Filter basieren auf der Beschreibung eines physikalischen dynamischen Systems im Zustandsraum und nutzen somit diese Vorteile. Aufgrund dessen wird im nachfolgenden Kapitel auf die Beschreibung solcher Systeme im Zustandsraum eingegangen. Dazu wird ausgeführt, wie Differentialgleichungen in die Zustandsraumbeschreibung überführt werden können und wie die beiden Systemeigenschaften „Beobachtbarkeit“ und „Steuerbarkeit“ definiert sind. Da Kalman-Filter in Rechnern verwendet werden, in denen nur zeitdiskrete Werte vorliegen, wird im Speziellen nach der Lösung der Zustandsgleichung auf die für Kalman-Filter wichtige Beschreibung zeitdiskreter Systeme am Ende des Kapitels eingegangen.

Weiterführende Literatur zur Beschreibung von Systemen im Zustandsraum findet man z. B. bei J. Lunze [2] und H. Unbehauen [3].

2.1 Beschreibung dynamischer Systeme

Bei der Beschreibung im Zustandsraum wird das physikalische System durch einen Satz von Differentialgleichungen dargestellt. Hierbei können sowohl zeitvariante Systeme sowie nichtlineare Systeme beschrieben werden. Diese Methode beschreibt somit dynamische Systeme im Zeitbereich durch Zustandsgleichungen.

Veranschaulichen lässt sich dies, in dem man sich ein physikalisches System vorstellt, auf das eine Eingangsgröße $u(t)$ wirkt und auf welches das System mit der Ausgangsgröße $y(t)$ „reagiert“ (Abb. 2.1). Die Ein- und Ausgangsgröße kann aus mehreren Signalen bestehen und wird deshalb zu einem Vektor $\underline{u}(t)$ bzw. $\underline{y}(t)$ zusammengefasst. Das interne Verhalten des Systems wird durch Differentialgleichungen beschrieben.

Betrachtet man nur zeitinvariante, lineare Systeme, so kann dieses Verhalten allgemein in der Zustandsraumbeschreibung durch die beiden folgenden Gleichungen beschrieben werden (siehe z.B. [3], [4]):

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t) \quad (2.1)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot \underline{u}(t). \quad (2.2)$$

Hierbei bezeichnet man die Gl. (2.1) als Zustandsdifferentialgleichung und die Gl. (2.2) als Ausgangsgleichung. $\underline{x}(t)$ wird Zustandsvariable oder auch Zustandsgröße genannt. Besteht die Zustandsvariable $x(t)$ aus mehr als einer Größe, so geht diese Zustandsvariable in einen Zustandsvektor $\underline{x}(t)$ über. $\underline{u}(t)$ ist der Eingangs- und $\underline{y}(t)$ der Ausgangsvektor des Systems.

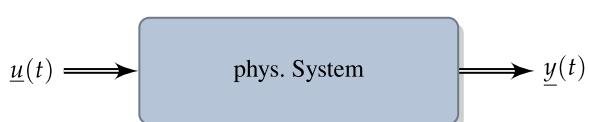
Die Matrix \underline{A} wird als Systemmatrix, \underline{B} als Eingangsmatrix oder Steuermatrix bezeichnet. Die Ausgangsmatrix oder auch Beobachtungsmatrix \underline{C} beschreibt die Auswirkungen des Systems auf den Ausgang. Die Durchgangsmatrix \underline{D} beschreibt den Durchgriff des Systems, bei nicht sprungfähigen Systemen ist die Durchgangsmatrix null. Ist die Durchgangsmatrix nicht null, reagiert das System unmittelbar (in unendlich kurzer Zeit) auf eine Änderung des Eingangsvektors $\underline{u}(t)$ und wird als sprungfähig bezeichnet [5].

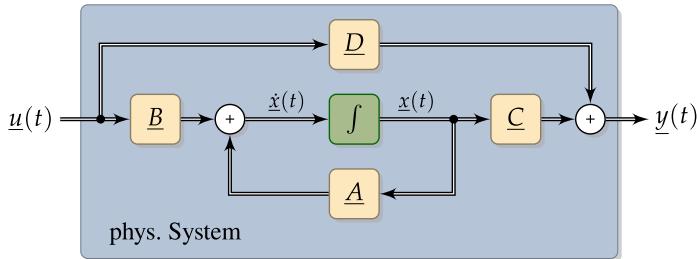
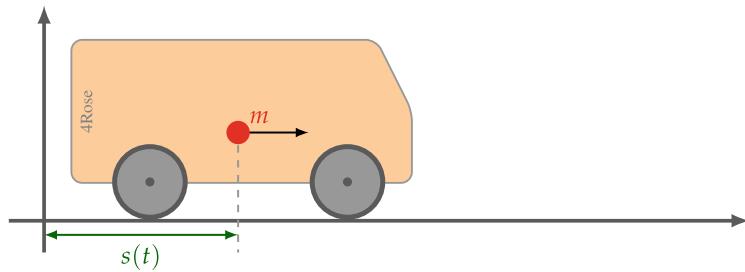
Eine solche allgemeine Systembeschreibung im Zustandsraum ist in Abb. 2.2 dargestellt.

Beispiele

Im Folgenden soll das Aufstellen der Zustandsgleichungen anhand von zwei einfachen kinematischen Beispielen verdeutlicht werden. Bei dem ersten Beispiel reduziert sich die Zustandsgröße auf eine skalare Variable, bei dem zweiten Beispiel liegt die Zustandsvariable als Vektor vor.

Abb. 2.1 Allgemeine Beschreibung von Systemen



**Abb. 2.2** Allgemeine Beschreibung von Systemen im Zustandsraum**Abb. 2.3** Beschreibung der Dynamik eines Fahrzeugs durch eine Punktmasse**Beispiel 1 Aufstellen der Zustandsgleichungen**

Stellt man sich vor, dass die komplette Masse des Fahrzeugs im Massepunkt m vereint ist und sich dieser Massepunkt horizontal vom Koordinatenursprung fortbewegt, so beschreibt $s(t)$ den Abstand vom Koordinatenursprung zum Massepunkt des Fahrzeugs (Abb. 2.3). Messtechnisch erfassbar sind der Abstand $s(t)$ und die Geschwindigkeit $v(t)$ des Fahrzeugs im Massepunkt.

Der Zusammenhang zwischen dem Weg s und der Geschwindigkeit v einer Punktmasse lässt sich durch die lineare Differenzialgleichung

$$v(t) = \dot{s}(t)$$

beschreiben. Durch die Wahl der Zustandsvariable $x(t)$ zu

$$x(t) = s(t)$$

ist die Ableitung der Zustandsvariable $\dot{x}(t)$ gegeben durch

$$\dot{x}(t) = \dot{s}(t) = v(t).$$

Wie bei der Wahl der Zustandsvariable gibt es auch bei der Festlegung der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$ mehrere sinnvolle Möglichkeiten. In der Regel beinhaltet die Ausgangsgröße $y(t)$ die messtechnisch erfassbaren Größen.

Da in diesem Beispiel die Zustandsvariable zu $x(t) = s(t)$ gewählt wurde, liegt es nahe, dieses physikalische System, abweichend von der oben genannten Regel, mit $u(t) = v(t)$ und $y(t) = s(t)$ zu beschreiben. Hierdurch erhält man eine einfache Möglichkeit, die Größen A, B, C und D zu bestimmen.

Bringt man diese beiden Gleichungen in die Form der Zustandsdifferenzialgleichung (2.1) bzw. Ausgangsgleichung (2.2), so ergeben sich die unbekannten Größen durch Koeffizientenvergleich zu $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$ und $D = 0$.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \dot{s}(t) = v(t) = u(t) = \underbrace{0}_{A} \cdot x(t) + \underbrace{1}_{B} \cdot u(t) \\ y(t) &= s(t) = x(t) = \underbrace{1}_{C} \cdot x(t) + \underbrace{0}_{D} \cdot u(t)\end{aligned}$$

In diesem einfachen Beispiel reduzieren sich somit die Matrizen und Vektoren zu Skalaren.

Beispiel 2 Aufstellen der Zustandsgleichungen

Nun wird angenommen, dass statt der Geschwindigkeit $v(t)$ die Beschleunigung $a(t)$ messtechnisch erfassbar ist.

Der Zusammenhang zwischen der zurückgelegten Strecke $s(t)$, der Geschwindigkeit $v(t)$ und der Beschleunigung $a(t)$ eines Massepunkts wird durch die Gleichung

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$$

modelliert.

Bei der Wahl der Zustandsvariable $\underline{x}(t)$ ist man auch hier wieder frei. Wählt man diese zu

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix},$$

ist die Ableitung der Zustandsvariable $\dot{\underline{x}}(t)$ gegeben durch

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{s}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ a(t) \end{bmatrix}.$$

In diesem zweiten Beispiel ist nun $u(t) = a(t)$ und $y(t) = s(t)$. Somit ergeben sich die beiden Zustandsgleichungen zu:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{s}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{a}(t)} \cdot a(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \cdot a(t) \\ \underline{y}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot a(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot a(t).\end{aligned}$$

2.2 Allg. Darstellung von Differenzialgleichungen

Die Darstellung von Differenzialgleichungen im Zustandsraum ist auch für lineare Differenzialgleichungen n-ter Ordnung möglich. So wird ein zeitinvariantes lineares System mit der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$ durch die lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_0u(t) \quad (2.3)$$

beschrieben. Durch die Wahl der Zustandsvariable zu

$$\begin{aligned}x_0(t) &= y(t) \\ x_1(t) &= \dot{y}(t) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(t) &= y^{(n-1)}(t)\end{aligned} \quad (2.4)$$

kann die lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung (Gl. 2.3) durch ein Gleichungssystem von n Differenzialgleichungen 1. Ordnung und einer weiteren Gleichung (Ausgangsgleichung) beschrieben werden:

$$\begin{aligned}\dot{x}_0(t) &= x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= -a_{n-1}x_{n-1}(t) - \dots - a_1x_1(t) - a_0x_0(t) + b_0u(t) \\ y(t) &= x_0(t).\end{aligned} \quad (2.5)$$

In Matrixform lautet das Gleichungssystem (2.5):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 \cdot u(t) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Verallgemeinert man die Zustandsgleichungen (2.6) und (2.7) auf ein zeitinvariantes lineares System der Ordnung n mit i Eingangs- und j Ausgangsgrößen, erhält man in Matrixform folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & a_{0,n-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} & \dots & b_{0,i-1} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1,0} & b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & b_{n-1,i-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_{i-1}(t) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \\ \vdots \\ y_{j-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & c_{0,2} & \dots & c_{0,n-1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{j-1,0} & c_{j-1,1} & c_{j-1,2} & \dots & c_{j-1,n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{0,0} & d_{0,1} & d_{0,2} & \dots & d_{0,i-1} \\ d_{1,0} & d_{1,1} & d_{1,2} & \dots & d_{1,i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{j-1,0} & d_{j-1,1} & d_{j-1,2} & \dots & d_{j-1,i-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_{i-1}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

2.3 Systemeigenschaften

Im folgenden Kapitel sollen die beiden wichtigsten Systemeigenschaften bei der Beschreibung von physikalischen Systemen im Zustandsraum eingegangen werden. Diese dienen dazu, mehr über das Verhalten des Systems bezüglich der Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit der internen Zustandsgrößen sagen zu können. Im Speziellen die Beobachtbarkeit ist bei dem Entwurf von Kalman-Filtern von großer Wichtigkeit.

2.3.1 Beobachtbarkeit

Die im vorigen Abschn. 2.1 beschriebene Darstellung von dynamischen Systemen im Zustandsraum ist dadurch gekennzeichnet, dass von außen betrachtet nur die Eingangsgrößen $\underline{u}(t)$ und die Ausgangsgrößen $\underline{y}(t)$ sichtbar sind. Die internen Zustandsgrößen, die im Zustandsvektor $\underline{x}(t)$ vereint sind, sind von außen nicht sichtbar.

Für die Benutzung eines Kalman-Filters ist es notwendig, dass mithilfe der von außen sichtbaren Größen $\underline{u}(t)$ und $\underline{y}(t)$ auf den Zustandsvektor $\underline{x}(t)$ geschlossen werden kann. Ist dies möglich, wird ein solches System als beobachtbar bezeichnet.

Definition 1.: Beobachtbarkeit

Ein lineares zeitinvariantes System, im Zustandsraum beschrieben durch

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot \underline{u}(t)\end{aligned}$$

heißt vollständig beobachtbar, wenn es möglich ist, innerhalb eines endlichen Intervalls $[t_0, t_1]$, aus Kenntnis der Eingangsgrößen $\underline{u}(t)$ und der Ausgangsgrößen $\underline{y}(t)$ jeden Anfangszustand des Zustandsvektors $\underline{x}(t_0)$ zu bestimmen.

Rudolf E. Kalman entwickelte hieraus eine Bedingung, mit der überprüft werden kann, ob ein im Zustandsraum beschriebenes System beobachtbar ist. Diese Bedingung kann mithilfe der Bewegungsgleichung und des Cayley-Hamilton-Theorems hergeleitet werden [6].

Das nach Kalman entwickelte Kriterium für die Beobachtbarkeitsbedingung besagt, dass ein lineares zeitinvariantes System der Ordnung n dann beobachtbar ist, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix \underline{S}_B

$$\underline{S}_B = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

den Rang n besitzt.

Zur Bestimmung des Rangs der Matrix \underline{S}_B wird die Matrix in Zeilenvektoren zerlegt. Der Rang ist die maximale Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren. Dieser Rang wird auch als Zeilenrang einer Matrix bezeichnet.

Alternativ kann die Matrix in Spaltenvektoren zerlegt werden. In diesem Fall ist der Rang (Spaltenrang) die maximale Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren. Da der

Spaltenrang und Zeilenrang einer Matrix immer gleich sind, kann der Rang über beide Berechnungsmethoden bestimmt werden.

Definition 2.: Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix \underline{A} ist die maximale Anzahl an linear unabhängigen Spalten- bzw. Zeilenvektoren.

Es gilt: $\text{Rang}(\underline{A}) = \text{Rang}(\underline{A}^T)$.

Der Rang einer $(k \times l)$ -Matrix ist immer $\leq \min(k, l)$.

Ist der Rang $= \min(k, l)$ so hat die Matrix einen vollen Rang.

Beispiel 3 Bestimmung Rang einer Matrix

$$\begin{array}{ccc} \text{Rang} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \right) = 3 & \text{Rang} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix} \right) = 2 & \text{Rang} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \right) = 1 \\ \text{Rang} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2 & \text{Rang} \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2 & \text{Rang} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \right) = 1 \end{array}$$

Ist es nicht sofort ersichtlich, ob die Zeilenvektoren linear unabhängig sind, kann die Matrix z. B. mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens in eine äquivalente Matrix in Stufenform umgeformt werden.

In den letzten drei Beispielen lag eine (4×2) -Matrix vor. Hier besteht somit eine gewisse Auswahlmöglichkeit bei der Bestimmung der linear unabhängigen Zeilenvektoren. Liegt ein im Zustandsraum beschriebenes lineares zeitinvariantes System der Ordnung n mit j Ausgangsgrößen vor, so besitzt die Beobachtbarkeitsmatrix \underline{S}_B (n, j)-Zeilenvektoren der Länge n . Dadurch besteht bei mehr als einer Ausgangsgröße ($j > 1$) ebenso eine Auswahlmöglichkeit n passende linear unabhängige Zeilenvektoren auszusuchen.

Beispiel 4 Bestimmung der Beobachtbarkeit

Bezug nehmend auf das Beispiel 1, bei dem das physikalische System mit $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$ und $D = 0$ modelliert wurde, folgt $n = 1$. Für den Rang der Beobachtbarkeitsmatrix \underline{S}_B gilt:

$$\text{Rang}(\underline{S}_B) = \text{Rang} \begin{pmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^{n-1} \end{pmatrix} = \text{Rang}([C]) = \text{Rang}([1]) = 1.$$

Somit ist der Rang gleich der Ordnung n und das System ist beobachtbar.

Beispiel 5 Bestimmung der Beobachtbarkeit

Im vorigen Beispiel 2 war

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{C} = [1 \ 0].$$

Die Ordnung ist somit $n = 2$ und der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix \underline{S}_B berechnet sich zu:

$$\text{Rang}(\underline{S}_B) = \text{Rang} \begin{pmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A} \end{pmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Auch in diesem Beispiel ist der Rang gleich der Ordnung n und das System ist beobachtbar.

Wäre jetzt abweichend von dem Beispiel $y(t) = v(t)$, ändert sich die Ausgangsmatrix zu:

$$\underline{C} = [0 \ 1].$$

Der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix \underline{S}_B wäre dann:

$$\text{Rang}(\underline{S}_B) = \text{Rang} \begin{pmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A} \end{pmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Der Rang ist nun kleiner als die Ordnung des Systems. Das System ist somit nicht vollständig beobachtbar. Da in diesem Fall $v(t)$ messtechnisch erfassbar ist, ist nur diese Größe $v(t)$ auch beobachtbar.

Beispiel 6 Bestimmung der Beobachtbarkeit

In dem einführenden Beispiel aus Kap. 10 war die Ordnung des Systems $n = 3$ und

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Geht man nun davon aus, dass messtechnisch nur die Geschwindigkeit erfassbar wäre, ändert sich die Ausgangsmatrix \underline{C} zu:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Für die Beobachtbarkeitsmatrix folgt:

$$\text{Rang}(\underline{S}_B) = \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^2 \end{bmatrix}\right) = \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

Der Rang ist kleiner als die Ordnung des Systems. Somit ist das System nicht vollständig beobachtbar. Es wären hier nur die Größen $v(t)$ und $a(t)$ beobachtbar.

Wäre nur die Beschleunigung messtechnisch erfassbar, ergibt sich die Ausgangsmatrix \underline{C} zu:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Für den Rang der Beobachtbarkeitsmatrix folgt:

$$\text{Rang}(\underline{S}_B) = \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^2 \end{bmatrix}\right) = \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1.$$

Es wäre hier nur die Größe $a(t)$ beobachtbar und das System wäre somit nicht vollständig beobachtbar.

Der Vollständigkeit halber ist angemerkt, dass neben diesem relativ einfach zu bestimmenden Kriterium nach Kalman noch das Gilbert- und das Hautus-Kriterium zur Bestimmung der Beobachtbarkeit existieren. Mit den beiden Kriterien ist es möglich, nicht nur festzustellen, ob das System vollständig beobachtbar ist, sondern sie geben gegebenenfalls auch an, welche Eigenwerte der Systemmatrix \underline{A} nicht beobachtbar sind [2].

2.3.2 Steuerbarkeit

Neben der Beobachtbarkeit gibt es noch die Eigenschaft der Steuerbarkeit. Diese Eigenschaft ist in allen Regelungstechnischen Problemen von großer Wichtigkeit. Hier ist die Frage, ob es möglich ist, durch geeignete Eingangsgrößen \underline{u} die Größen des Zustandsvektors \underline{x} zu verändern.

Definition 3.: Steuerbarkeit

Ein lineares zeitinvariantes System, im Zustandsraum beschrieben durch

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot \underline{u}(t)\end{aligned}$$

heißt vollständig steuerbar, wenn es möglich ist, innerhalb eines endlichen Intervalls $[t_0, t_1]$, durch geeignete Eingangsgrößen $\underline{u}(t)$ jeden Anfangszustand des Zustandsvektors $\underline{x}(t_0)$ in jeden Zustand $\underline{x}(t_1)$ zu überführen.

Auch hier entwickelte R. E. Kalman eine Bedingung, mit der überprüft werden kann, ob ein im Zustandsraum beschriebenes System steuerbar ist. Dieses Kriterium für die Steuerbarkeitsbedingung besagt, dass ein lineares zeitinvariantes System der Ordnung n dann steuerbar ist, wenn die Steuerbarkeitsmatrix \underline{S}_S

$$\underline{S}_S = [\underline{B}, \underline{A} \cdot \underline{B}, \underline{A}^2 \cdot \underline{B}, \dots, \underline{A}^{n-1} \cdot \underline{B}] \quad (2.11)$$

den Rang n besitzt.

Beispiel 7 Bestimmung der Steuerbarkeit

Zur Berechnung der Steuerbarkeit des Beispiels 1, bei dem das physikalische System mit $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$ und $D = 0$ modelliert wurde, folgt $n = 1$ und für den Rang der Steuerbarkeitsmatrix \underline{S}_S gilt:

$$\text{Rang}([\underline{B}, \underline{A} \cdot \underline{B}, \underline{A}^2 \cdot \underline{B}, \dots, \underline{A}^{n-1} \cdot \underline{B}]) = \text{Rang}([\underline{B}]) = \text{Rang}([1]) = 1.$$

Das System ist somit steuerbar, da der Rang gleich der Ordnung n des Systems ist.

Beispiel 8 Bestimmung der Steuerbarkeit

Mit

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

aus dem vorigen Beispiel 2 folgt $n=2$. Der Rang der Steuerbarkeitsmatrix \underline{S}_S berechnet sich zu:

$$\text{Rang}(\underline{S}_S) = \text{Rang}([\underline{B}, \underline{A} \cdot \underline{B}]) = \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

Auch in diesem Beispiel ist der Rang gleich der Ordnung n und das System ist steuerbar.

Beispiel 9 Bestimmung der Steuerbarkeit

In dem einführenden Beispiel aus Kap. 10 war die Ordnung des Systems $n = 3$ und

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Für den Rang der Steuerbarkeitsmatrix folgt:

$$\text{Rang}(\underline{S}_S) = \text{Rang}([\underline{B}, \underline{A} \cdot \underline{B}, \underline{A}^2 \cdot \underline{B}]) = \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Der Rang ist null und somit kleiner als die Ordnung des Systems. Somit ist das System nicht steuerbar.

2.4 Lösung der Zustandsgleichung

Für die Überführung eines zeitkontinuierlichen Systems im Zustandsraum in ein zeitdiskretes System ist es notwendig, zuerst die Lösung der Zustandsgleichungen zu bestimmen. Siehe hierzu auch O. Föllinger, S. 423, Abschn. 12.2 [7].

Hierzu wird die Zustandsdifferenzialgleichung $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t)$ umgestellt und mit $e^{-\underline{A} \cdot t}$ multipliziert:

$$e^{-\underline{A} \cdot t} \cdot \dot{\underline{x}}(t) - e^{-\underline{A} \cdot t} \cdot \underline{A} \cdot \underline{x}(t) = e^{-\underline{A} \cdot t} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(t). \quad (2.12)$$

Leitet man $e^{-\underline{A} \cdot t} \cdot \underline{x}(t)$ ab, erhält man mithilfe der Produktregel $(g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h'$:

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\underline{A} \cdot t} \cdot \underline{x}(t) \right) = \underbrace{-\underline{A} \cdot e^{-\underline{A} \cdot t} \cdot \underline{x}(t)}_{\dot{g}} + \underbrace{e^{-\underline{A} \cdot t} \cdot \dot{\underline{x}}(t)}_{h'}. \quad (2.13)$$

Somit lässt sich die Gl. (2.12) mit (2.13) schreiben:

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\underline{A} \cdot t} \cdot \underline{x}(t) \right) = e^{-\underline{A} \cdot t} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(t). \quad (2.14)$$

Durch Integration folgt:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \left(\frac{d}{d\tau} \left(e^{-\underline{A} \cdot \tau} \cdot \underline{x}(\tau) \right) \right) d\tau &= \int_{t_0}^t e^{-\underline{A} \cdot \tau} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau \\ e^{-\underline{A} \cdot t} \cdot \underline{x}(t) - e^{-\underline{A} \cdot t_0} \cdot \underline{x}(t_0) &= \int_{t_0}^t e^{-\underline{A} \cdot \tau} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.15)$$

und die Gleichung lässt sich nach $\underline{x}(t)$ auflösen.

$$\underline{x}(t) = \underbrace{e^{\underline{A} \cdot (t-t_0)} \cdot \underline{x}(t_0)}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{\int_{t_0}^t e^{\underline{A} \cdot (t-\tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau}_{\text{partikuläre Lösung}} \quad (2.16)$$

Die Gl. (2.16) bezeichnet man als Bewegungsgleichung. Der linke Ausdruck beschreibt die homogene Lösung und der rechte Ausdruck die partikuläre Lösung der Differenzialgleichung. Neben dieser Herleitung existieren noch zahlreiche weitere Ansätze zur Herleitung dieser Bewegungsgleichung, z. B. der von Jan Lunze (siehe [8]).

Oft wird die Bewegungsgleichung in der folgenden Form geschrieben, bei der die e-Funktion durch

$$\underline{\Phi}(t - \tau) = e^{\underline{A} \cdot (t-\tau)} \quad (2.17)$$

substituiert wird. Man spricht bei dieser Gleichung auch von der Transitionsmatrix.

Die Bewegungsgleichung schreibt sich mit dieser Substitution:

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t - t_0) \cdot \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(t - \tau) \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau. \quad (2.18)$$

Die Ausgangsgleichungen $\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot \underline{u}(t)$ der Ausgangsgröße $\underline{y}(t)$ lassen sich mithilfe der Bewegungsgleichung beschreiben:

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{\Phi}(t - t_0) \cdot \underline{x}(t_0) + \underline{C} \cdot \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(t - \tau) \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau + \underline{D} \cdot \underline{u}(t). \quad (2.19)$$

2.5 Beschreibung zeitdiskreter Systeme

In den vorigen Abschnitten dieses Kapitels wurde gezeigt, wie man physikalische Systeme im kontinuierlichen Zeitbereich beschreibt. Für die Implementierung in digitalen Schaltungen/Mikroprozessoren ist es notwendig, diese im diskreten Zeitbereich darzustellen. Zur Digitalisierung werden die kontinuierlichen Signale alle $t = n \cdot T_s$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) Sekunden abgetastet.

Setzt man die Anfangszeit $t_0 = 0$ und $t = n \cdot T_s$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$, geht die Bewegungsgleichung über in:

$$\underline{x}(n \cdot T_s) = e^{\underline{A} \cdot n \cdot T_s} \cdot \underline{x}(0) + \int_0^{n \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot (n \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau. \quad (2.20)$$

Für $t = (n+1) \cdot T_s$ folgt für die Bewegungsgleichung:

$$\underline{x}((n+1) \cdot T_s) = e^{\underline{A} \cdot (n+1) \cdot T_s} \cdot \underline{x}(0) + \int_0^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau. \quad (2.21)$$

Teilt man das Integral in zwei Integrale auf und klammert den Term $e^{\underline{A} \cdot T_s}$ aus, folgt:

$$\begin{aligned}
\underline{x}((n+1) \cdot T_s) &= e^{\underline{A} \cdot (n+1) \cdot T_s} \cdot \underline{x}(0) + \int_0^{n \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau \\
&\quad + \int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau \\
&= e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot e^{\underline{A} \cdot n \cdot T_s} \cdot \underline{x}(0) + \int_0^{n \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot e^{\underline{A} \cdot ((n \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau \\
&\quad + \int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau \\
&= e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \left(\underbrace{e^{\underline{A} \cdot n \cdot T_s} \cdot \underline{x}(0) + \int_0^{n \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau}_{\underline{x}(n \cdot T_s)} \right) \\
&\quad + \int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau \\
&= e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{x}(n \cdot T_s) + \int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau. \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Zur weiteren Vereinfachung der Gl. 2.22 müssen weitere Annahmen zum Verlauf des Signals $\underline{u}(t)$ im Intervall zwischen $n \cdot T_s$ und $(n+1) \cdot T_s$ vorgenommen werden. Dies ist deshalb notwendig, da durch die Abtastung nur der Wert zu den Abtastzeitpunkten $t = n \cdot T_s$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$ bekannt ist.

Im Folgenden sollen die beiden bekanntesten Annahmen zum Verlauf des Signals $\underline{u}(t)$ vorgestellt werden. Das eine geht von einer idealen Abtastung aus, das andere von einer realen Abtastung des Signals.

Ideale Abtastung

Bei der idealen Abtastung wird ein kontinuierliches Signal $u(t)$ mit einer Folge von Dirac-Impulsen multipliziert (siehe Abb. 2.4).

Mathematisch lässt sich das ideal abgetastete Signal $u_d(t)$ beschreiben durch:

$$u_d(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} u(n \cdot T_s) \cdot \delta(t - n \cdot T_s). \quad (2.23)$$

Im Intervall $n \cdot T_s \leq t < (n+1) \cdot T_s$ ist das Signal folglich:

$$u_d(t) = u(n \cdot T_s) \cdot \delta(t - n \cdot T_s). \quad (2.24)$$

Nähert man $u(t)$ mit $u(t) \approx u_d(t)$ an und setzt die Gl. (2.24) in Gl. (2.22) ein, folgt:

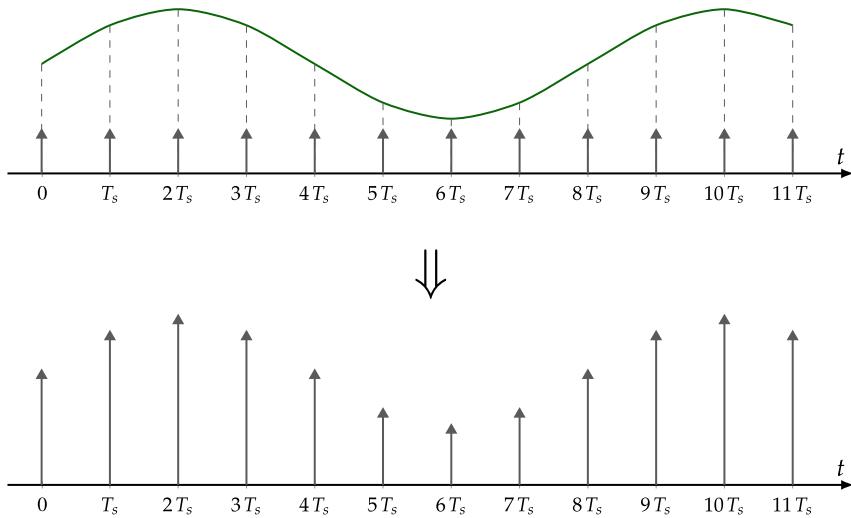


Abb. 2.4 Abtastung eines kontinuierlichen Signals

$$\underline{x}((n+1) \cdot T_s) = e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{x}(n \cdot T_s) + \int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) \cdot \delta(\tau - n \cdot T_s) d\tau. \quad (2.25)$$

Durch die Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses lässt sich die Gleichung weiter vereinfachen.

$$\begin{aligned} \underline{x}((n+1) \cdot T_s) &= e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{x}(n \cdot T_s) + e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - nT_s)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(n \cdot T_s) \\ &= e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{x}(n \cdot T_s) + e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(n \cdot T_s). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Betrachtet man nur die Folge der abgetasteten Werte und weist den Abtastwerten den Index k zu, folgt:

$$\underline{x}(k+1) = \underbrace{e^{\underline{A} \cdot T_s}}_{\underline{A}_d} \cdot \underline{x}(k) + \underbrace{e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{B}}_{\underline{B}_d} \cdot \underline{u}(k). \quad (2.27)$$

Das lineare zeitdiskrete System wird somit beschrieben durch:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{x}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) \quad (2.28)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) \quad (2.29)$$

mit

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s}, \quad \underline{B}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{B}. \quad (2.30)$$

Die Berechnung der Matrix \underline{A}_d kann z. B. mithilfe der Laplace-Transformation erfolgen.

Reale Abtastung (Abtast-Halteglied)

In der Realität ist es nicht möglich, ideale Dirac-Impulse zu erzeugen. Technisch benötigt man eine endliche Zeit, um den abgetasteten Wert eines Signals zu bestimmen. Daher besteht der zweite Ansatz darin, den Abtastvorgang nach einem Dirac-Impuls durch ein zusätzliches Halteglied zu modellieren (siehe Abb. 2.5).

Unter der Annahme, dass sich das abgetastete Signal nicht verändert, ist $u(t) = u(n \cdot T_s)$ im Intervall $n \cdot T_s \leq t < (n+1) \cdot T_s$ konstant. Der Term $\underline{u}(\tau)$ geht in $\underline{u}(n \cdot T_s)$ über und die Gl. (2.22) lässt sich schreiben mit:

$$\underline{x}((n+1) \cdot T_s) = e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{x}(n \cdot T_s) + \int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} d\tau \cdot \underline{u}(n \cdot T_s). \quad (2.31)$$

Das Integral lässt sich mithilfe der Substitution $v(\tau) = (n+1) \cdot T_s - \tau$ vereinfachen.

Die Ableitung nach τ ergibt $\frac{dv}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}((n+1) \cdot T_s - \tau) = -1$. Somit ist $d\tau = -dv$.

Die Integrationsgrenzen des Integrals ändern sich mit dieser Substitution zu:

- Untere Integrationsgrenze: $v(n \cdot T_s) = (n+1) \cdot T_s - n \cdot T_s = T_s$
- Obere Integrationsgrenze: $v((n+1) \cdot T_s) = (n+1) \cdot T_s - (n+1) \cdot T_s = 0$

Durch diese Substitution lässt sich Gl. (2.31) vereinfachen:

$$\begin{aligned} \underline{x}((n+1) \cdot T_s) &= e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{x}(n \cdot T_s) - \int_{T_s}^0 e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{B} dv \cdot \underline{u}(n \cdot T_s) \\ &= e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{x}(n \cdot T_s) + \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{B} dv \cdot \underline{u}(n \cdot T_s). \end{aligned} \quad (2.32)$$

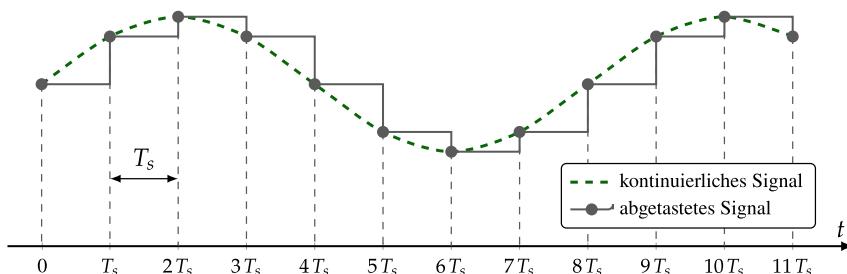


Abb. 2.5 Abtastung eines kontinuierlichen Signals durch ein Abtast-Halteglied

Weist man den Abtastwerten den Index k zu, lässt sich die Gl. (2.32) weiter vereinfachen:

$$\underline{x}(k+1) = \underbrace{e^{\underline{A} \cdot T_s}}_{\underline{A}_d} \cdot \underline{x}(k) + \underbrace{\int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{B} dv}_{\underline{B}_d} \cdot \underline{u}(k). \quad (2.33)$$

Das lineare zeitdiskrete System wird somit beschrieben durch:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{x}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) \quad (2.34)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) \quad (2.35)$$

mit

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s}, \quad \underline{B}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{B} dv. \quad (2.36)$$

Je nach Modellierung des abgetasteten Signals ergibt sich eine unterschiedliche Berechnung der diskretisierten Eingangsmatrix \underline{B}_d . In der Praxis wird oft die Näherung der realen Abtastung verwendet, wobei es auch Anwendungen gibt, die durch die ideale Abtastung besser beschrieben werden.

Das in Abb. 2.2 beschriebene System geht im diskreten Zeitbereich in das in Abb. 2.6 dargestellte System über. Dabei wird der Integrator durch ein Verzögerungsglied q^{-1} ersetzt, welches die Werte des Zustandsvektors zeitlich um einen Abtastwert verzögert.

Unter Berücksichtigung, dass reale Systeme durch ein Systemrauschen $\underline{z}(k)$ und ein Messrauschen $\underline{v}(k)$ verändert werden, lassen sich diese Systeme im diskreten Zeitbereich wie in Abb. 2.7 dargestellt modellieren. Das Systemrauschen $\underline{z}(k)$ wird mit der Matrix \underline{G}_d multipliziert und additiv dem Zustandsvektor zugeführt. Das Messrauschen $\underline{v}(k)$ wird direkt dem Ausgangsvektor $\underline{y}(k)$ überlagert.

Dieses lineare zeitdiskrete System mit Rauschen ist beschrieben durch:

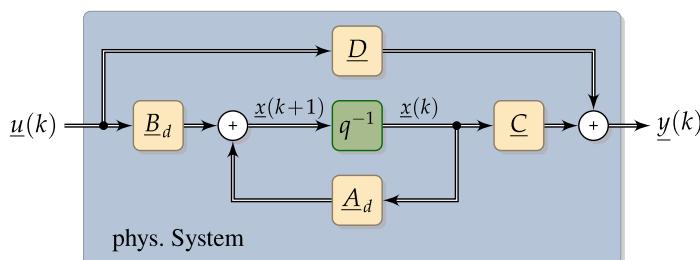


Abb. 2.6 Beschreibung zeitdiskreter, linearer Systeme im Zustandsraum

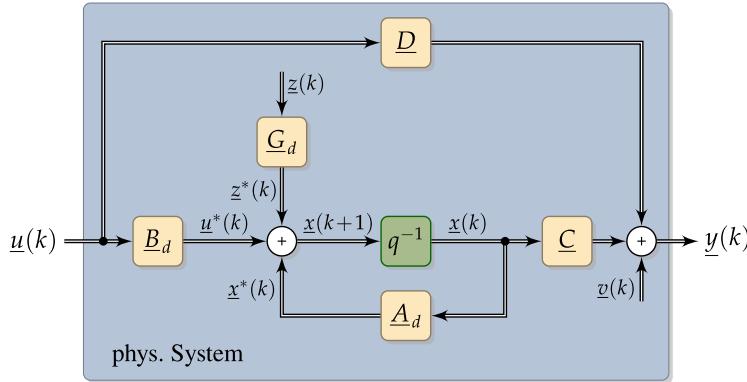


Abb. 2.7 Beschreibung realer, zeitdiskreter, linearer Systeme im Zustandsraum

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{x}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) + \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k) \quad (2.37)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) + \underline{v}(k) \quad (2.38)$$

und

$$\underline{x}^*(k) = \underline{A}_d \cdot \underline{x}(k), \quad \underline{u}^*(k) = \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k), \quad \underline{z}^*(k) = \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k).$$

Beispiel 10 Bestimmung von \underline{A}_d und \underline{B}_d

Bezug nehmend auf das Beispiel 1, bei dem das physikalische System mit $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$ und $D = 0$ modelliert wurde:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underbrace{0}_A \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{1}_B \cdot \underline{u}(t), \quad \underline{y}(t) = \underbrace{1}_C \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{0}_D \cdot \underline{u}(t),$$

folgt mit Gl. (2.36):

$$\underline{A}_d = e^{A \cdot T_s} = e^0 = 1, \quad \underline{B}_d = \int_0^{T_s} e^{A \cdot v} \cdot B \, dv = \int_0^{T_s} e^0 \cdot 1 \, dv = T_s$$

$$\underline{x}(k+1) = \underline{x}(k) + T_s \cdot \underline{u}(k).$$

Diese Gleichung stellt die bekannte Bewegungsgleichung eines Punkt-Masse-Objekts mit $s(k+1) = s(k) + T_s \cdot v(k)$ dar.

Beispiel 11 Bestimmung von \underline{A}_d und \underline{B}_d

In dem Beispiel 2 war

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B \cdot a(t), \quad \underline{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D \cdot a(t).$$

Die Berechnung der Systemmatrix \underline{A}_d und der Eingangsmatrix \underline{B}_d kann wie im einführenden Beispiel z.B. mithilfe von MATLAB® oder mit der Laplace-Transformation erfolgen. Für einfache Systemmatrizen wie in Beispiel 2 bietet sich eine weitere Berechnungsmethode über die Reihenentwicklung der e-Funktion an.

Die e-Funktion lässt sich über eine Reihe entwickeln.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{für } n=0 \text{ gilt: } \frac{x^0}{0!} = 1$$

Diese Reihenentwicklung ist auch mit Matrizen möglich. Somit lässt sich die Transitionsmatrix schreiben durch:

$$e^{\underline{A} \cdot T_s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \underline{A}^n \cdot T_s^n \quad \text{für } n=0 \text{ gilt: } \frac{1}{0!} \cdot \underline{A}^0 \cdot T_s^0 = \underline{I} = \text{Einheitsmatrix.}$$

In diesem Beispiel ist für $n > 1$ der Ausdruck $\underline{A}^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Somit verschwinden, bis auf den ersten Term, alle weiteren Terme der Summe. Es folgt:

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot T_s = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{B} dv = \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dv = \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} v \\ 1 \end{bmatrix} dv = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix} \cdot \underline{u}(k) \\ \underline{y}(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}(k). \end{aligned}$$

Plausibilisieren lässt sich die Gleichung für $\underline{x}(k+1)$, indem man den Zustandsvektor $\underline{x}(k)$ ausschreibt und für $\underline{u}(k) = a(k)$ einsetzt.

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} s(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix} \cdot a(k)$$

$$s(k+1) = s(k) + T_s \cdot v(k) + \frac{T_s^2}{2} \cdot a(k)$$

$$v(k+1) = v(k) + T_s \cdot a(k)$$

Diese beiden Gleichungen stellen die bekannten Bewegungsgleichungen für den Weg bzw. für die Geschwindigkeit eines Punkt-Masse-Objekts unter der Berücksichtigung einer Beschleunigung dar.

Literatur

1. UNBEHAUEN, H. : *Regelungstechnik I: Klassische Verfahren zur Analyse und Synthese linearer kontinuierlicher Regelsysteme, Fuzzy-Regelsysteme*. 15., überarbeitete und erweiterte Auflage. Wiesbaden : Vieweg + Teubner Verlag, 2008 (Studium). – ISBN 978 – 3 – 8348 – 0497 – 6
2. LUNZE, J. : *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. 4., neu bearbeitete Auflage. Berlin, Heidelberg, New York : Springer Verlag, 2006 (Studium). – ISBN 978 – 3 – 540 – 32335 – 8
3. UNBEHAUEN, H. : *Regelungstechnik II: Zustandsregelungen, digitale und nichtlineare Regelsysteme*. 9., durchgesehene und korrigierte Auflage. Wiesbaden : Vieweg + Teubner Verlag, 2007 (Studium). – ISBN 978 – 3 – 528 – 83348 – 0
4. UNBEHAUEN, R. : *Systemtheorie 1: Allgemeine Grundlagen, Signale und lineare Systeme im Zeit- und Frequenzbereich*. 8., korr. Aufl. München : Oldenbourg, 2002 (Systemtheorie). – ISBN 3 – 486 – 25999 – 7
5. PHILIPPSEN, H. : *Einstieg in die Regelungstechnik: Vorgehensmodell für den praktischen Reglerentwurf*. 2. Auflage. Carl Hanser Verlag München, 2015. – ISBN 978 – 3 – 446 – 43261 – 1
6. FREUND, E. ; HOYER, H. : *Regelungssysteme im Zustandsraum I: Kurseinheit 6/7: Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit*. Hagen : FernUniversität Fachbereich Elektrotechnik, 1981 (Vorlesungs-skript)
7. FÖLLINGER, O. ; DÖRRSCHEIDT, F. ; KLITTICH, M. : *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 10., durchges. Aufl., [Nachdr. der 8. überarb. Aufl. 1994]. Heidelberg : Hüthig, 2008 (Studium). – ISBN 978 – 3 – 7785 – 2970 – 6
8. LUNZE, J. : *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. 5., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Berlin, Heidelberg, New York : Springer Verlag, 2006 (Studium). – ISBN 978 – 3 – 540 – 28326 – 3



Wahrscheinlichkeitstheorie

3

Die Wahrscheinlichkeitstheorie stellt das zweite wichtige Grundlagenkapitel dieses Buchs dar. Das Kapitel dient dazu, die Grundlagen zu erarbeiten, um später die Mechanismen zu verstehen, wie es mit dem Kalman-Filter möglich ist, die messtechnisch erfassbaren, verrauschten Größen zu filtern und die unbekannten Größen zu schätzen.

Hierzu werden in diesem Kapitel die wichtigsten Grundlagen für die Zustandsschätzung dargelegt. Es wurde bewusst nur auf den Teil der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik eingegangen, der für die Zustandsschätzung mit Kalman-Filtern relevant ist.

Interessierte Leser, die einen kompletten Überblick über diesen Themenbereich bekommen möchten, sind auf die einschlägige Literatur verwiesen. Beispielhaft zählen hierzu die Bücher von H. Georgii „Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik“ [1], von O. Beucher „Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik mit MATLAB“ [2] oder von L. Papula „Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik oder Fehler- und Ausgleichsrechnung“ [3].

3.1 Definitionen und Begriffe

Zu Beginn werden die für die Wahrscheinlichkeitstheorie wichtigsten Definitionen und Begrifflichkeiten festgelegt. Diese sind die Basis für das Verständnis der Wahrscheinlichkeitstheorie und der darauf aufbauenden Theorie der Zustandsschätzung mittels Kalman-Filter.

3.1.1 Zufälliges Experiment

In der Natur gibt es Experimente, auch Versuche genannt, bei denen der Ausgang des Experiments mehrere verschiedene „Ausgänge/Ergebnisse“ hat, die **nicht vorhersehbar** sind. Liegt ein solches Experiment vor, spricht man von einem zufälligen Experiment/Versuch.

Ein sehr oft zitiertes Beispiel ist das Benutzen eines Würfels. Das Experiment hat in diesem Fall sechs verschiedene Ausgänge. Welcher der sechs Ausgänge am Ende eines solchen Experiments eintritt, ist nicht vorhersehbar.

Aber auch das Bestimmen der Länge eines Gegenstands mit einem Lineal kann als zufälliges Experiment betrachtet werden. Durch Messungenauigkeiten wird nicht der wahre Wert bestimmt, sondern es entstehen verschiedene Längenergebnisse, die um den wahren Wert schwanken.

3.1.2 Ergebnis und Ergebnismenge

Der Ausgang eines zufälligen Experiments wird allgemein als elementares Ereignis ω bezeichnet. Die Menge aller möglichen Ausgänge/Ergebnisse eines zufälligen Experiments wird mit der Menge Ω beschrieben.

Besteht ein zufälliges Experiment aus L Elementarereignissen, ist

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_L\}. \quad (3.1)$$

Beim Würfelexperiment gilt somit $\Omega = \{\square, \blacksquare, \boxdot, \boxtimes, \boxcirc, \boxminus\}$.

Ein Ereignis besteht nicht zwangsläufig aus einem Elementarereignis, sondern kann allgemein eine Teilmenge von Ω sein.

$A \subseteq \Omega$ heißt Ereignis und tritt dann ein, wenn ein Zufallsexperiment/Versuch ein Elementarereignis aus A ergibt. Für die Menge A gilt:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_M\} \quad \text{mit } M \leq L. \quad (3.2)$$

Beispielsweise sei $A = \{\square, \blacksquare, \boxdot\}$ die Menge aller Primzahlen von Ω oder $B = \{\boxtimes\}$ sei die Menge, dass eine Sechs gewürfelt wird.

Spezielle Ereignisse:

- Gilt $A = \Omega$, tritt das Ereignis sicher ein. Man spricht von einem sicheren Ereignis.
- Ist $A = \emptyset$ eine leere Menge, kann das Ereignis nie eintreten. Dies wird als unmögliches Ereignis bezeichnet.
- A^C heißt Komplementärereignis. Ist z. B. $A = \{\square, \blacksquare, \boxdot\}$, so folgt $A^C = \{\boxtimes, \boxcirc, \boxminus\}$.
- A, B heißen unvereinbar oder disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$ ist.

3.1.3 Zufallsvariablen

Für das Rechnen mit zufälligen Ereignissen werden Zufallsvariablen eingeführt. Diese werden durch Abbildungen/Zuordnungen eines Elementarereignisses zu einer Variable gebildet.

Mit anderen Worten ordnet die Zufallsvariable X jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl zu. Es gilt:

$$\begin{aligned} X: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Vor der Durchführung eines Zufallsexperiments bildet die Zufallsvariable X eine reelle Zahl ab, deren Wert unbekannt ist. Nach der Durchführung wird die Zufallsvariable X im dem Wert x realisiert. Man spricht deshalb in diesem Zusammenhang bei x von der Realisierung der Zufallsvariable X nach der Durchführung eines Zufallsexperiments.

Eine solche Abbildungsvorschrift könnte z. B. bei einem Zufallsexperiment mit einmaligem Würfeln wie folgt definiert sein:

$$X = \text{Augenzahl des Würfelergebnisses}$$

Dann wäre $X(\square) = 1$, $X(\bullet) = 2$, $X(\circ) = 3$, $X(\blacksquare) = 4$, $X(\blacksquare\bullet) = 5$ und $X(\blacksquare\circ) = 6$.

3.1.4 Wahrscheinlichkeit

Im Folgenden soll wieder das Zufallsexperiment mit einmaligem Würfeln betrachtet werden. Hierbei wird der Zufallsvariable X jedem Ereignis die Augenzahl des Würfelergebnisses zugeordnet. Führt man dieses Experiment mehrmals durch, erhält man nach jedem Versuch einen Wert der Zufallsvariable X . Abb. 3.1 zeigt beispielhaft den Verlauf der Zufallsvariable X über 60 durchgeführten Versuche.

Oft ist nicht von Interesse zu, welchem Zeitpunkt der Ausgang des Zufallsexperiments aufgetreten ist, sondern die Anzahl der gleichartigen Ereignisse. Abb. 3.2 zeigt die Häufigkeitsverteilung der Zufallsvariable X über die 120 durchgeführten Versuche.

Wiederholt man diesen Versuch mit einem idealen (nicht gezinkten) Würfel n -mal, so wird der relative Unterschied zwischen den Häufigkeiten für große n immer kleiner.

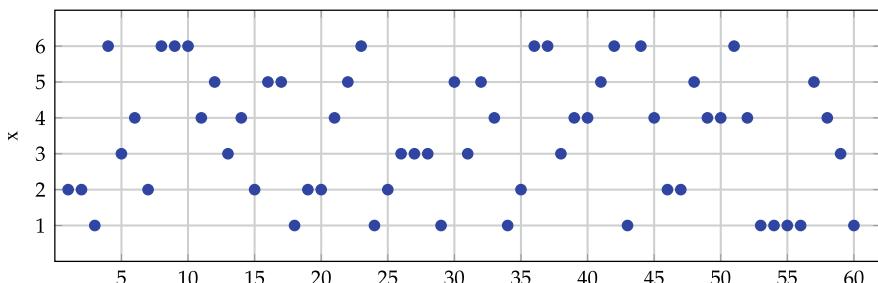


Abb. 3.1 Verlauf der Zufallsvariable beim Würfeln mit einem Würfel



Abb. 3.2 Häufigkeit der Zufallsvariable X nach 120-maligem Würfeln

Werden die Häufigkeiten mit der Anzahl der n -mal durchgeführten Experimente geteilt, entsteht eine relative Häufigkeit. Allgemein lässt sich die relative Häufigkeit h_n eines Ereignisses $A \subseteq \Omega$, welches n -mal durchgeführt wird, schreiben als

$$h_n(A) = \frac{\text{Anzahl der Experimente mit Ereignis } A}{n}. \quad (3.4)$$

Für $n \rightarrow \infty$ treten alle Häufigkeiten bei einem Würfelexperiment mit einem idealen Würfel gleich oft auf.

Bei einem idealen Würfel beträgt die relative Häufigkeit eines jeden Ereignisses $1/6$.

Für $n \rightarrow \infty$ strebt die relative Häufigkeit gegen die Wahrscheinlichkeit $P(A)$.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(A) \quad (3.5)$$

Diese Größe gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Ereignis auftritt. Anders ausgedrückt ist die Wahrscheinlichkeit das Verhältnis zwischen der Anzahl der für A günstigen Elementarereignisse zu der Anzahl aller möglichen Elementarereignisse.

Die Zuordnung eines jeden Ereignisses A einer Wahrscheinlichkeit $P(A)$ wird in der Wahrscheinlichkeitstheorie Wahrscheinlichkeitsmaß genannt. Das Wahrscheinlichkeitsmaß muss hierbei die drei Axiome nach Kolmogorov erfüllen:

1. Jedem Ereignis A ist eine reelle Zahl (Wahrscheinlichkeit von A) zwischen 0 und 1 zugeordnet: $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Ein sicheres Ereignis Ω hat die Wahrscheinlichkeit 1: $P(\Omega) = 1$.
3. Für zwei disjunkte Ereignisse gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, falls $A \cap B = \emptyset$.

Aus den Axiomen nach Kolmogorov folgt:

- Für die Wahrscheinlichkeit eines komplementären Ereignisses folgt:
 $P(A^C) = 1 - P(A)$.
- Ein unmögliches Ereignis $A = \emptyset$ hat die Wahrscheinlichkeit: $P(\emptyset) = 0$.
- Für die Vereinigung nicht disjunkter Ereignisse gilt:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

3.2 Dichtefunktion

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Häufigkeitsverteilungen von Zufallszahlen vorgestellt. Hierzu zählen die Gleich- und die Normalverteilung.

3.2.1 Gleichverteilung

Bezug nehmend auf das Zufallsexperiment mit einmaligen Würfeln sind bei einem idealen Würfel alle Wahrscheinlichkeiten eines jeden Elementarereignisses gleich. Solche Häufigkeitsverteilungen, bei denen alle Werte der Zufallsvariable gleich oft auftreten, werden als gleichverteilt bezeichnet.

Allgemein spricht man in diesem Zusammenhang von einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion oder kurz Dichtefunktion. Die Beschreibung geschieht durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Bei einem zufälligen Experiment mit diskreten Ausgängen wird diese durch eine Folge von Dirac-Impulsen beschrieben.

Der Dirac-Impuls, auch Delta-Distribution, Dirac-Funktion, Dirac-Puls, Dirac-Stoß, Stoßfunktion oder Impulsfunktion genannt, ist wie folgt definiert:

Definition 4.: Dirac-Funktion

Die von Paul A. M. Dirac in der Physik eingeführte δ -Funktion (δ -Distribution) ist vereinfachend geschrieben definiert durch:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \int_G \delta(x) dx = \begin{cases} 1 & 0 \in G \\ 0 & 0 \notin G \end{cases}$$

Im strengen Sinn ist die Dirac-Funktion keine mathematische Funktion. Jedoch sind die meisten Rechengesetze für die Dirac-Funktion gültig. Die für diesen Themenbereich wichtigste Eigenschaft ist die Ausblendeigenschaft.

Ausblendeigenschaft der Dirac-Funktion:

$$\int_G \delta(x - a) \cdot f(x) dx = \begin{cases} f(a) & a \in G \\ 0 & a \notin G. \end{cases}$$

Bei dem beschriebenen Würfelexperiment gilt für die Dichtefunktion (siehe auch Abb. 3.3):

$$f_X(x) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 \delta(x - i). \quad (3.6)$$

Hat die Zufallsvariable unendlich viele anzunehmende Werte, spricht man von einer kontinuierlichen Zufallsvariable. Für eine solche Zufallsvariable ist die Dichtefunktion einer Gleichverteilung definiert mit:

Definition 5.: Dichtefunktion Gleichverteilung

Die Dichtefunktion einer gleichverteilten Zufallsvariable ist definiert durch die Funktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \quad \text{für } a < b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

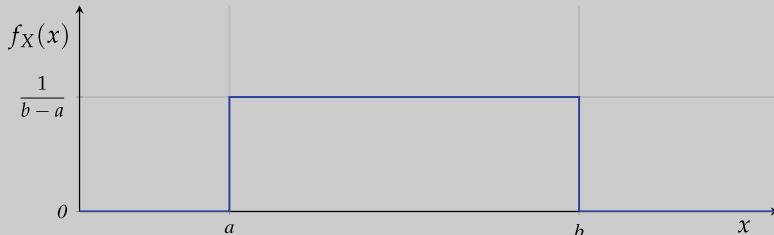
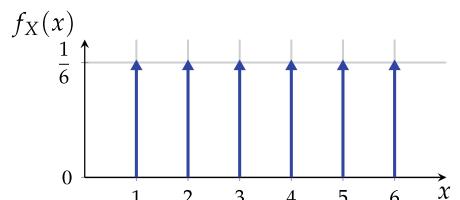


Abb. 3.3 Beschreibung der Gleichverteilung des Würfelexperiments durch Dirac-Impulse



3.2.2 Normalverteilung

Viele Experimente in der Natur weisen Zufallsprozesse auf, deren Dichtefunktion nicht gleichverteilt ist. Eine häufig auftretende Verteilung der Zufallszahlen stellt die Normalverteilung, auch Gauß-Verteilung dar.

Ein Beispiel hierfür ist z.B. das thermische Rauschen eines Widerstands. Misst man den Spannungsabfall eines Widerstands bei einer Temperatur $> 0K$, so ist eine kleine, stark schwankende Spannung messbar.

Dies röhrt daher, dass jeder Widerstand ein Elektronengas (bedingt durch die thermische Energie) besitzt, aufgrund dessen die Elektronen sich im Leiter bewegen und somit eine Spannung (Rauschspannung) hervorrufen. Die Rauschspannung lässt sich als Zufallszahl interpretieren, deren Werte normalverteilt sind [4]. Abb. 3.4 zeigt einen solchen beispielhaften Verlauf des Spannungsabfalls an einem Widerstand und Abb. 3.5 die dazugehörige Häufigkeitsverteilung.

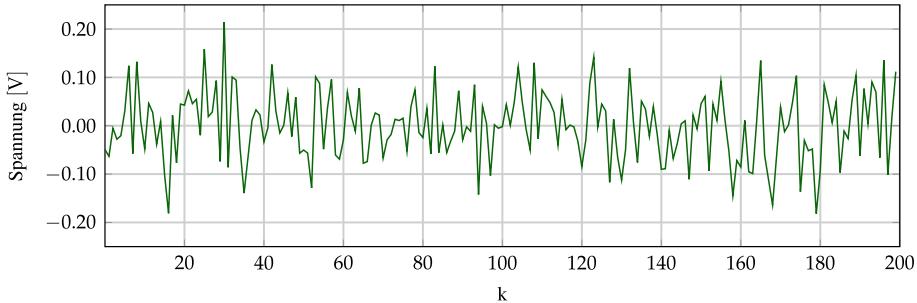


Abb. 3.4 Beispielhafter Verlauf der Spannung an einem Widerstand, bedingt durch thermisches Rauschen

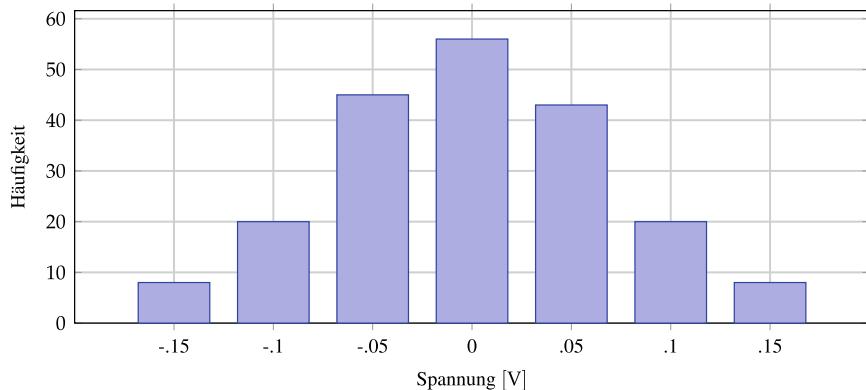


Abb. 3.5 Häufigkeitsverteilung der Spannungswerte

Die Normalverteilung, auch nach Carl Friedrich Gauß benannte Gaußsche Normalverteilung oder Gaußsche Glockenkurve, hat eine große Bedeutung in vielen Bereichen der Natur-, Wirtschafts- und Ingenieurwissenschaften. Ein Grund für die herausstehende Bedeutung der Normalverteilung ist nicht nur, dass viele Zufallsprozesse normalverteilt sind, sondern auch die Gültigkeit des zentralen Grenzwertsatzes in der Wahrscheinlichkeitstheorie. So besagt der zentrale Grenzwertsatz, dass der Mittelwert verschiedener Stichproben mit zunehmenden Umfang der Stichproben einer Gauß-Verteilung folgt [1].

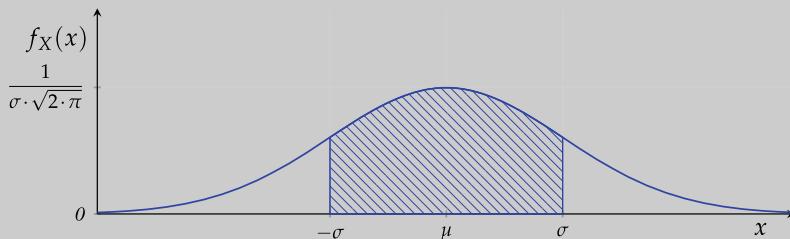
Definition 6.: Dichtefunktion Normalverteilung

Die Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsvariable ist definiert durch die Funktion:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \quad \sigma > 0;$$

μ : Erwartungswert (Mittelwert)

σ : Standardabweichung (Streumaß für die Breite/Abweichung der Verteilung um den Erwartungswert μ).



In dem Intervall zwischen $-\sigma$ und σ liegen 68,27% aller Zufallszahlen

3.2.3 Chi-Quadrat-Verteilung

Die Chi-Quadrat-Verteilung ist eine wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilung, um Konfidenzintervalle für die Varianz einer Normalverteilung zu berechnen. Sie ist eng mit der Normalverteilung verbunden.

Definition 7.: Chi-Quadrat-Verteilung

Eine Chi-Quadrat-Verteilung folgt der Verteilung der Summe von $n \in \mathbb{N}^*$ unabhängigen, quadrierten, normalverteilten Zufallsvariablen X_i :

$$\chi_n^2 \sim X_1^2 + \dots + X_n^2.$$

Das Symbol \sim ist eine Kurzform von folgt der Verteilung. Der einzige Parameter der Chi-Quadrat-Verteilung ist n und wird als die Anzahl der Freiheitsgrade bezeichnet. Die Anzahl der Freiheitsgrade bestimmt die Form der Chi-Quadrat-Verteilung $f_n(x)$.

Weitere Eigenschaften sind:

- Der Erwartungswert der Verteilung ist $E(\chi_n^2) = n$.
- Die Varianz der Verteilung mit n Freiheitsgraden beträgt $2 \cdot n$.
- Für große n nähert sich die Chi-Quadrat-Verteilung einer Normalverteilung an.
- Die Chi-Quadrat-Verteilung ist nichtsymmetrisch und rechtsschief.

Für spätere Berechnungen ist die kumulative Verteilungsfunktion $F_n(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ wichtig:

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt = p.$$

Diese gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit p ein Ergebnis aller reellen Zahlen kleiner oder gleich x eintritt.

Die Umkehrfunktion von $F_n(x)$, die inverse kumulative Verteilungsfunktion $F_n^{-1}(p)$ kann dazu verwendet werden, um p -Quantile zu berechnen. Sie ermöglicht die Beantwortung der Frage: Für welches x besitzt $F_n(x)$ die Wahrscheinlichkeit p .

3.2.4 Weitere Verteilungen

In der Natur gibt es neben der Gleichverteilung und der Normalverteilung von Zufallszahlen noch viele weitere Verteilungen von Zufallszahlen. Im Folgenden sind weitere für die Modellierung wichtige kontinuierliche Verteilungen in Abb. 3.6 aufgeführt.

Beobachtet man den Zeitpunkt des Ausfalls gleichartiger elektrischer Bauelemente über die Zeit, so kann die Lebensdauer über eine Exponentialverteilung angenähert werden. Die Cauchy-Verteilung beschreibt z. B. in der Physik Resonanzkurven oder die Verteilung von optischen Spektrallinien. In idealen Gasen folgt die statische Verteilung der Geschwindigkeit einzelner Gasteilchen der Maxwell-Boltzmann-Verteilung. Bei der Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen treten z. B. durch zufällige Reflexion und Streuungen Amplitudenschwankungen auf, welche oft einer Rayleigh-Verteilung entsprechen.

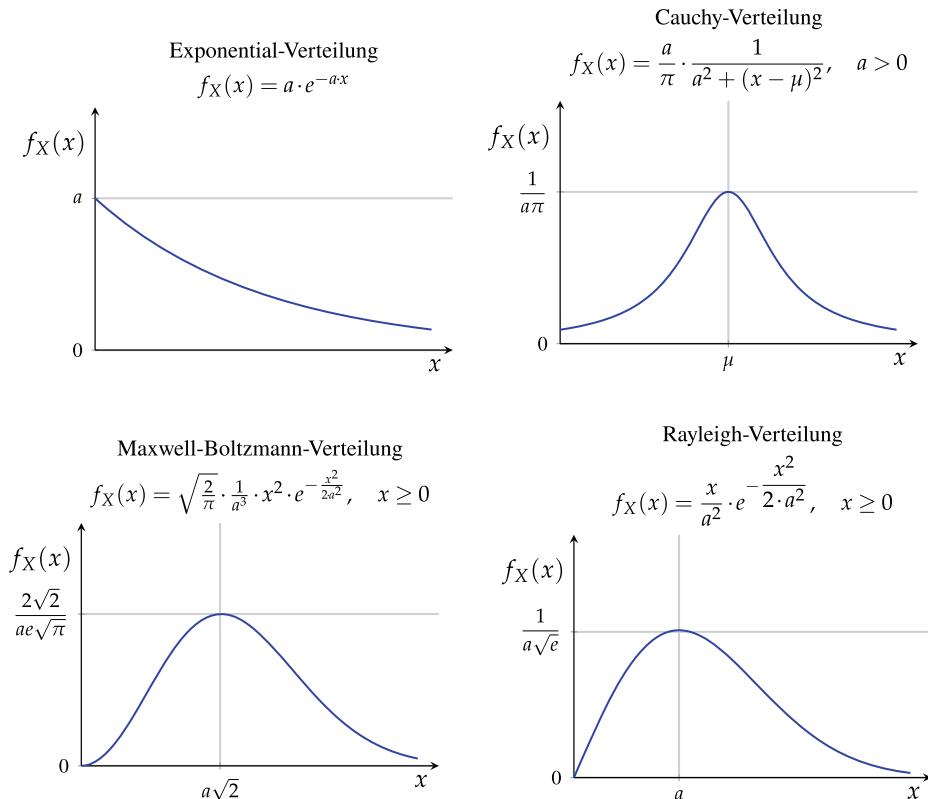


Abb. 3.6 Verlauf weiterer kontinuierlicher Dichtefunktionen

Neben den kontinuierlichen Verteilungen existieren auch noch zwei wichtige diskrete Verteilungen, die Binomialverteilung und die Poisson-Verteilung.

Binomialverteilungen treten dann auf, wenn ein Experiment genau zwei Elementarereignisse aufweist. Das eine tritt mit der Wahrscheinlichkeit p , das andere mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ auf. Als Beispiel lässt sich das Werfen einer Münze, welche mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.45$ „Kopf“ und mit $1 - p = 0.55$ „Zahl“ erscheint¹. Werden nun zwölf Münzen hochgeworfen und wird der Zufallszahl die Anzahl der Münzen mit „Kopf“ zugeordnet, erhält man eine Binomialverteilung wie in Abb. 3.7 (linke Grafik) dargestellt.

Ein weiterer sehr anschaulicher Versuch zur Verdeutlichung der Binomialverteilung ist das Galton-Brett (nach Francis Galton) [1] (siehe Abb. 3.8). Bei diesem fallen Kugeln auf ein Brett, welches in mehreren Reihen Nägel aufweist. Fällt eine Kugel zufällig auf einen Nagel wird diese entweder nach rechts oder links abgelenkt. Am Ende des Bretts befinden sich

¹ Anmerkung: bei einer idealen Münze wäre $p=0.5$.

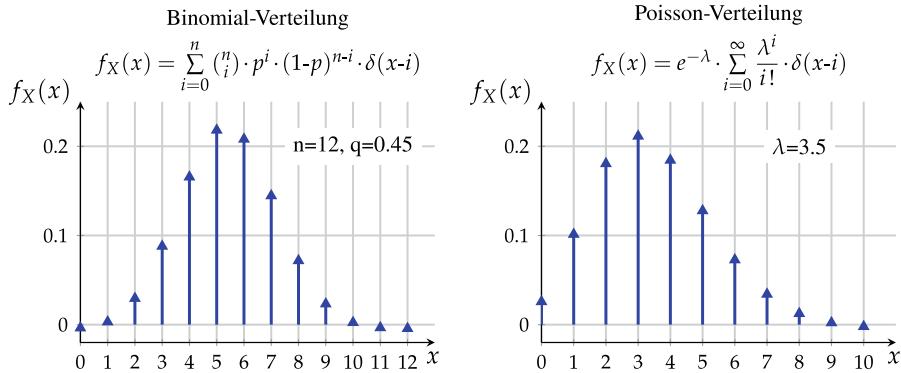
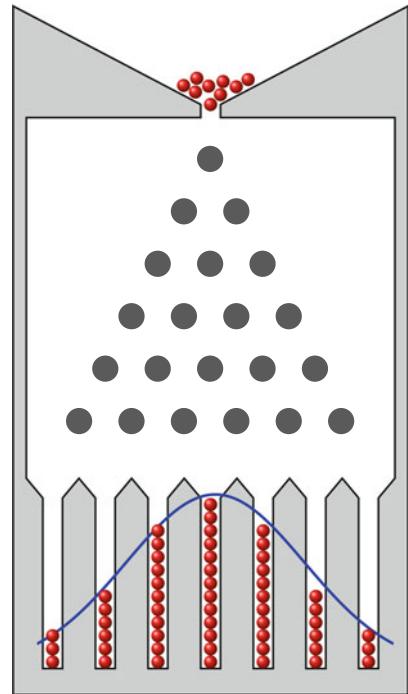


Abb. 3.7 Diskrete Dichtefunktion Binomial- und Poisson-Verteilung

Abb. 3.8 Schematischer Aufbau des Galton-Bretts



n -Auffangbehälter, die die Kugel auffangen. Die in den n -Behältern aufgefangen Kugeln besitzen hierbei eine Binomialverteilung. Für einen großen Stichprobenumfang ($n \rightarrow \infty$) strebt die Binomialverteilung gegen die Normalverteilung.

Werden Ereignisse über eine bestimmte Zeit beobachtet, wird oft die Poisson-Verteilung zur Beschreibung des Auftretens eines Ereignisses verwendet. So werden z. B. viele zufällige

Prozesse im Zusammenhang mit Warteschlangenproblemen und Markov-Ketten durch eine Poisson-Verteilung modelliert [5].

3.3 Momente und zentrale Momente

Wie vorab gezeigt, charakterisieren Häufigkeitsverteilungen Zufallsexperimente. Neben dieser Charakterisierung existieren noch Kennwerte, die jedoch in unvollständiger Weise einen Zufallsprozess beschreiben. Zu diesen Kennwerten zählen die Momente und zentralen Momente eines Zufallsexperiments.

3.3.1 Erwartungswert und Mittelwert

Zur Beschreibung von Zufallsprozessen spielen die Momente von Zufallsvariablen eine wichtige Rolle. Sie sind nicht nur in der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik sehr verbreitet, sondern auch in anderen Bereichen wie z.B. in der technischen Mechanik.

Allgemein ist das i-te Moment definiert durch:

Definition 8.: i-tes Moment einer Zufallsvariable X

Für eine Zufallsvariable X mit der Dichtefunktion $f_X(x)$ gilt für das i-te Moment:

$$\alpha_i = E(X^i) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x^i \cdot f_X(x) dx & \text{falls } X \text{ stetig ist} \\ \sum_{k \in \mathbb{N}} x(k)^i \cdot f_X(x(k)) & \text{falls } X \text{ diskret ist.} \end{cases}$$

Das wichtigste Moment stellt das **erste Moment** dar, welches auch als **Erwartungswert** $E(X)$ der Zufallsvariable X bezeichnet wird.

Definition 9.: Erwartungswert einer Zufallsvariable X

Für eine Zufallsvariable X mit der Dichtefunktion $f_X(x)$ gilt für den Erwartungswert:

$$\alpha = E(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx & \text{falls } X \text{ stetig ist} \\ \sum_{k \in \mathbb{N}} x(k) \cdot f_X(x(k)) & \text{falls } X \text{ diskret ist.} \end{cases}$$

Sind X und Y Zufallsvariablen sowie a und b Konstanten, so gelten folgende **Rechenregeln**:

$$\mathbb{E}(a) = a \quad (3.7)$$

$$\mathbb{E}(a \cdot X) = a \cdot \mathbb{E}(X) \quad (3.8)$$

$$\mathbb{E}(a + b \cdot X) = a + b \cdot \mathbb{E}(X) \quad (3.9)$$

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \quad (3.10)$$

Die Bestimmung des Erwartungswerts einer Zufallszahl ist in der Praxis nicht immer einfach, da die Dichtefunktion $f_X(x)$ nicht bekannt ist. Oft behilft man sich, indem man den Erwartungswert durch eine Mittelwertbildung annähert. Hierbei wird das Zufallsexperiment n mal durchgeführt und die Summe der bei jedem Versuch bestimmten einzelnen Werte der Zufallsvariable durch die Anzahl n geteilt.

Definition 10.: Mittelwert

Der Mittelwert einer Zahlenfolge $x(k)$ berechnet sich durch:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n x(k).$$

Beispiel 12 Mittelwertbestimmung Würfelexperiment

Betrachtet man wieder das Beispiel des Werfens eines Würfels und definiert die Zufallszahl X mit der erzielten Augenzahl eines Würfelergebnisses, so ergeben sich z. B. nach 20-maliger Wiederholung des Experiments folgende Zufallszahlen:

$$x = \{2, 3, 5, 3, 4, 1, 6, 2, 3, 4, 5, 2, 4, 6, 5, 1, 1, 3, 3, 3\}.$$

Der Mittelwert der Zufallsvariable X berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{20} \cdot (2+3+5+3+4+1+6+2+3+4+5+2+4+6+5+1+1+3+3+3) \\ &= \frac{66}{20} = 3.3. \end{aligned}$$

Werden die gleichen Würfelergebnisse zusammengefasst, so lässt sich der Mittelwert auch schreiben mit:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{20} \cdot (3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6) = \frac{66}{20} = 3.3 \\ &= \frac{3}{20} \cdot 1 + \frac{3}{20} \cdot 2 + \frac{6}{20} \cdot 3 + \frac{3}{20} \cdot 4 + \frac{3}{20} \cdot 5 + \frac{2}{20} \cdot 6 = \frac{66}{20} = 3.3 \\ &= \sum_{k=1}^L \frac{m(k)}{n} \cdot \omega(k). \end{aligned}$$

Allgemein lässt sich der Mittelwert auch berechnen durch die Summe:

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^L \frac{m(k)}{n} \cdot \omega(k) = \sum_{k=1}^L h_n(\omega(k)) \cdot \omega(k);$$

L Anzahl der möglichen Elementarereignisse,
 $m(k)$ Auftreten eines Elementarereignisses,
 n Anzahl der durchgeführten Versuche,
 $\omega(k)$ Elementarereignis,
 $h_n(\omega(k))$ relative Häufigkeit des Auftretens des Elementarereignisses $\omega(k)$.

Für $n \rightarrow \infty$ strebt die relative Häufigkeit gegen die Wahrscheinlichkeit $P(\omega(k)) = P(X = x(k))$. Der aus $n \rightarrow \infty$ berechnete Mittelwert der Zufallszahl X entspricht dem Erwartungswert $E(X)$.

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n x(k)$$

Für das Würfelexperiment erwartet man bei einem idealen Würfel, dass alle Augenzahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit $P(X = x(k)) = 1/6$ auftreten, somit ist der Erwartungswert:

$$E(X) = \sum_{k=1}^6 \omega(k) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot (1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3.5.$$

3.3.2 Varianz und Kovarianz

Weitere Kennwerte zur Charakterisierung von Zufallsexperimenten stellen die zentralen Momente eines Zufallsexperiments dar.

Definition 11.: i-tes zentrales Moment einer Zufallsvariable X

Für eine Zufallsvariable X mit der Dichtefunktion $f_X(x)$ gilt für das i-te zentrale Moment:

$$\mu_i = E((X - E(X))^i) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} (X - E(X))^i \cdot f_X(x) dx & \text{falls } X \text{ stetig} \\ \sum_{k \in \mathbb{N}} (x(k) - E(X))^i \cdot f_X(x(k)) & \text{falls } X \text{ diskret.} \end{cases}$$

Das wichtigste zentrale Moment stellt das **zweite zentrale Moment** dar, welches auch als **Varianz** der Zufallsvariable X bezeichnet wird.

Definition 12.: Varianz

Für eine Zufallsvariable X mit der Dichtefunktion $f_X(x)$ gilt für die Varianz:

$$\text{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} (X - E(X))^2 \cdot f_X(x) dx & \text{falls } X \text{ stetig} \\ \sum_{k \in \mathbb{N}} (x(k) - E(X))^2 \cdot f_X(x(k)) & \text{falls } X \text{ diskret.} \end{cases}$$

Ist die Dichtefunktion $f_X(x)$ unbekannt, so kann die Varianz mittels einer Stichprobe über die empirische Varianz angenähert werden.

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n (x(k) - \bar{x})^2 \quad (3.11)$$

Es ist zu beachten, dass im Gegensatz zum Erwartungswert, bei dem mit $1/n$ gerechnet wird, bei der empirischen Varianz $1/(n+1)$ verwendet wird.

Die Streuung oder Standardabweichung einer Zufallsvariable X ist definiert durch:

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

Sind X und Y Zufallsvariablen sowie a und b Konstanten, so gelten folgende **Rechenregeln**:

$$\text{Var}(a) = 0 \quad (3.12)$$

$$\text{Var}(a + X) = \text{Var}(X) \quad (3.13)$$

$$\text{Var}(a + b \cdot X) = b^2 \cdot \text{Var}(X) \quad (3.14)$$

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \cdot \underbrace{(\text{E}(X \cdot Y) - \text{E}(X) \cdot \text{E}(Y))}_{\text{Cov}(X, Y)} \quad (3.15)$$

Haben Zufallsexperimente mehrere Zufallsvariablen, entstehen Momente 2. Ordnung. Sind X und Y Zufallsvariablen, so ist $\text{Cov}(X, Y)$ die Kovarianz der beiden Zufallsvariablen. Diese beschreibt die lineare statistische Abhängigkeit der Zufallsvariable X von Y .

Definition 13.: Kovarianz

Allgemein ist die Kovarianz zweier Zufallsvariablen X und Y definiert zu:

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y).$$

Für stetige Zufallsvariablen X und Y mit der zweidimensionalen Dichtefunktion $f_{XY}(x, y)$ gilt:

$$\text{Cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X)) \cdot (y - E(Y)) \cdot f_{XY}(x, y) dx dy.$$

Für die Stichprobe diskreter Zufallsvariablen X und Y gilt:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n (x(k) - \bar{x}) \cdot (y(k) - \bar{y}) \\ &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n (x(k) \cdot y(k)) - \frac{n}{n-1} \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}. \end{aligned}$$

Sind zwei Zufallsvariablen X und Y unkorreliert, d.h., sie sind linear unabhängig, so ist die Kovarianz der beiden Zufallsvariablen $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Sind X , Y und Z Zufallsvariablen sowie a , b , c und d Konstanten, so gelten für die Kovarianz folgende **Rechenregeln**:

$$\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X) \tag{3.16}$$

$$\text{Cov}(a + b \cdot X, c + d \cdot Y) = b \cdot d \cdot \text{Cov}(X, Y) \tag{3.17}$$

$$\text{Cov}(X + Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z) \tag{3.18}$$

Zur Charakterisierung wird die Kovarianz mit den Standardabweichungen auf Werte zwischen -1 und +1 normiert. Diese dimensionslose Größe bezeichnet man als Korrelationskoeffizient r_{XY} .

Definition 14.: Korrelationskoeffizient

Der Korrelationskoeffizient zweier Zufallsvariablen X und Y ist definiert zu:

$$r_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}}.$$

Beispiel 13 Bestimmung der Kovarianz zweier Sensorsignale

Zwei Sensoren X und Y liefern jeweils zum Zeitpunkt k die in der Tab. 3.1 dargestellten Messwerte.

Die Mittelwerte (Erwartungswerte) berechnen sich zu:

$$\bar{x} = \frac{1}{11} \cdot \sum_{k=1}^{11} x(k) = 2 \quad \bar{y} = \frac{1}{11} \cdot \sum_{k=1}^{11} y(k) = 4$$

und die Varianzen zu:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \frac{1}{10} \cdot \sum_{k=1}^{11} (x(k) - \bar{x})^2 \\ &= \frac{0.6^2 + 1^2 + 1.6^2 + 1.5^2 + 0.4^2 + 0.1^2 + 0.9^2 + 0.2^2 + 1.1^2 + 0.8^2 + 0^2}{10} \\ &= 0.904 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \frac{1}{10} \cdot \sum_{k=1}^{11} (y(k) - \bar{y})^2 \\ &= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2}{10} \\ &= 3.2. \end{aligned}$$

Die Kovarianz ist in diesem Beispiel:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \frac{1}{10} \cdot \sum_{k=1}^{11} (x(k) \cdot y(k)) - \frac{11}{10} \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} \\ &= \frac{13 + 2 + 25.2 + 0.5 + 6.4 + 5.7 + 14.5 + 6.6 + 2.7 + 16.8 + 10}{10} - \frac{88}{10} \\ &= 1.54. \end{aligned}$$

Tab. 3.1 Messwerte zweier Sensoren

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Sensor X	2.6	1.0	3.6	0.5	1.6	1.9	2.9	2.2	0.9	2.8	2.0
Sensor Y	5	2	7	1	4	3	5	3	3	6	5

Für den Korrelationskoeffizient folgt:

$$r_{X Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}} = \frac{1.54}{\sqrt{0.904 \cdot 3.2}} \approx 0.9.$$

Zur Veranschaulichung werden die beiden Sensorwerte in den folgenden Diagrammen einmal über die Zeit und einmal in einem Streudiagramm dargestellt.

Der Korrelationskoeffizient von $r_{X Y} = 0.9$ besagt, dass eine starke lineare Abhängigkeit zwischen den beiden Sensorwerten besteht. Dies verdeutlicht auch die rechte Grafik der Abb. 3.9. Je stärker die Abhängigkeit zweier Größen, desto mehr liegen diese auf einer Geraden.

Bei einem Korrelationskoeffizienten von $r_{X Y} = 0.0$ sind die beiden Werte unkorreliert, es besteht kein linearer Zusammenhang. Bei $r_{X Y} = -1$ verhalten sich die beiden Werte gegenläufig, d.h., wenn der eine Wert größer wird, wird der andere kleiner und umgekehrt (siehe Abb. 3.10).

Zusammenfassend lässt sich für den Korrelationskoeffizienten sagen:

- Der Korrelationskoeffizient $r_{X Y}$ beschreibt die lineare statistische Abhängigkeit der Zufallsvariable X von Y .
- Der Korrelationskoeffizient $r_{X Y}$ kann Werte zwischen $+1$ und -1 annehmen.
- Bei einem Korrelationskoeffizienten $r_{X Y} = 1$ liegen alle Punkte auf einer Geraden mit positiver Steigung, die Zufallsvariable X von Y sind statistisch linear abhängig.
- Bei einem Korrelationskoeffizienten $r_{X Y} = -1$ liegen alle Punkte auf einer Geraden mit negativer Steigung, die Zufallsvariable X von Y sind „negativ“ statistisch linear abhängig.
- Bei einem Korrelationskoeffizienten $r_{X Y} = 0$ liegen die Punkte auf keiner Geraden, es besteht keine lineare statistische Abhängigkeit der Zufallsvariable X von Y , die beiden Zufallsvariablen sind unkorreliert.

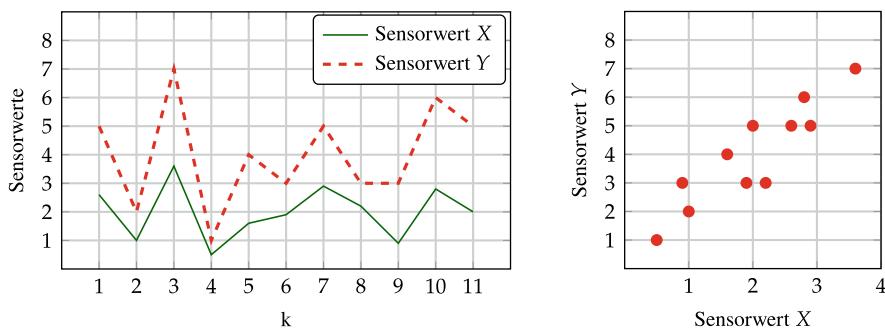


Abb. 3.9 Sensorwert X und Sensorwert Y mit dem Korrelationskoeffizienten $r_{X Y}=0.9$

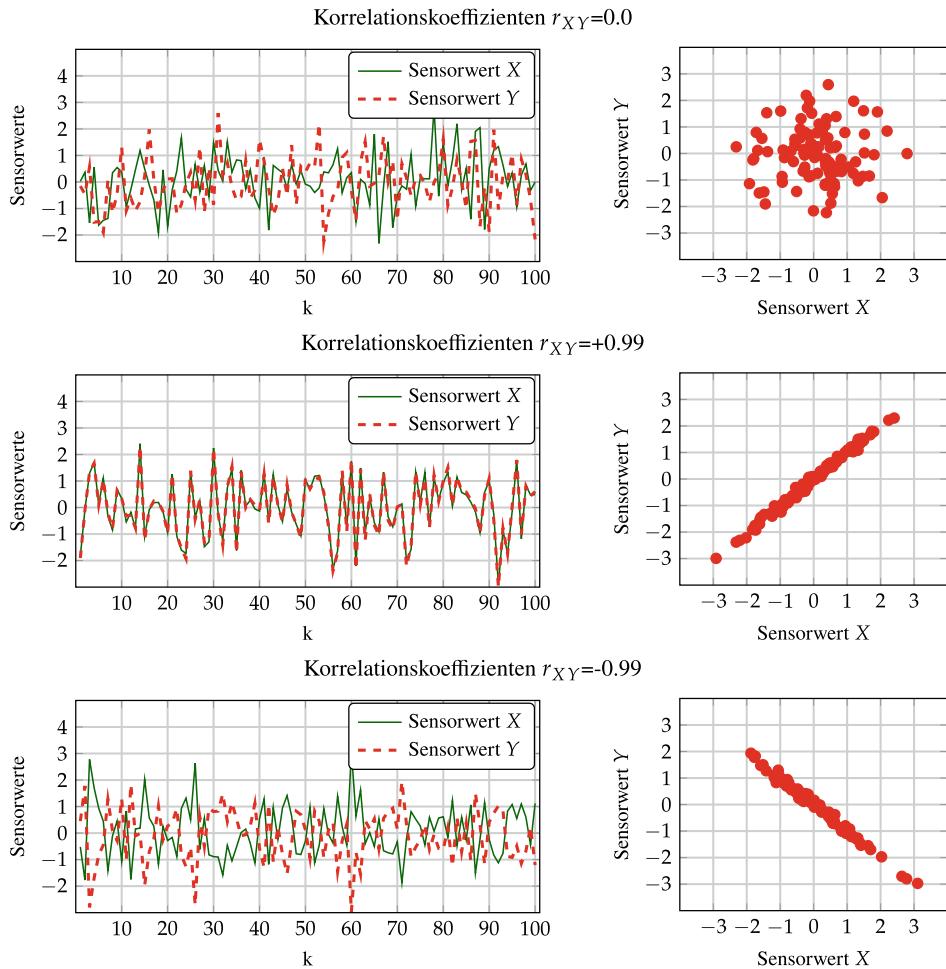


Abb. 3.10 Verschiedene Sensorwerte mit unterschiedlichen Korrelationskoeffizienten

Literatur

1. GEORGII, H. : *Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. 5. Auflage. Berlin, Boston : Walter de Gruyter, 2015 (De-Gruyter-Lehrbuch). – ISBN 978 – 3 – 11 – 035969 – 5
2. BEUCHER, O. : *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik mit MATLAB*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2005. – ISBN 3 – 540 – 23416 – 0
3. PAPULA, L. : *Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung*. 6. Auflage. Wiesbaden : Vieweg + Teubner Verlag, Springer Fachmedien,

- 2011 (Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler). – ISBN 978 – 3 – 8348 – 1227 – 8
4. ZIMMER, G. : *Hochfrequenztechnik – Lineare Modelle*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2000. – ISBN 978 – 3 – 642 – 63082 – 8
5. LUNZE, J. : *Ereignisdiskrete Systeme – Modellierung und Analyse dynamischer Systeme mit Automaten, Markovketten und Petrinetzen*. München, Wien : Oldenbourg Verlag, 2006 (Studium). – ISBN 3 – 486 – 58071 – X

Signaltheorie

4

In diesem Kapitel werden die aus dem Bereich der Signaltheorie für die Zustandsschätzung mit Kalman-Filter relevanten Teile kurz angerissen. Dieses Kapitel steht in einem engen Zusammenhang mit dem Grundlagenkapitel 3. Es wird deshalb empfohlen, vorab dieses Kapitel zu lesen.

Aufbauend auf das vorige Kap. 3 werden in diesem Kapitel die Begriffe stochastischer Prozess, Autokorrelation und Kreuzkorrelation eingeführt und am Ende noch weitere spezielle Stochastische Prozesse wie das „weiße Rauschen“ beschrieben.

Weiterführende Informationen zu dem Themenbereich der Signaltheorie findet man in der einschlägigen Literatur z. B. in A. Mertins „Signaltheorie“ [1], in D. Wolf „Signaltheorie: Modelle und Strukturen“ [2] oder in R. G. Brown und P. Y. C. Hwang „Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering“ [3].

4.1 Stochastischer Prozess

Wird ein Zufallsexperiment parallel k-mal durchgeführt und jedes der k Experimente zeitlich wiederholt, so lässt sich der Ausgang aller k Experimente einer Zufallsvariable zuordnen. Die Zufallsvariable geht über in einen Zufallsvektor $\underline{X}(t)$, der von der Zeit abhängt.

$$\underline{X}(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_k(t) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Man spricht in diesem Zusammenhang von einem stochastischen Prozess. Dieser wird durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (Dichtefunktion) $f_X(\underline{x}(t))$ beschrieben.

Als Beispiel kann man sich z. B. einen Prozess vorstellen, bei dem k Spieler (Schar von Spielern) jede Sekunde mit k Würfeln gleichzeitig würfeln. Somit erhält man zu einem beliebigen Zeitpunkt t_1 k Zufallszahlen, die dem Vektor $\underline{x}(t_1)$ zugeordnet werden (siehe Abb. 4.1).

Ein anderes Beispiel für einen stochastischen Prozess ist der Verlauf der Spannung an k Widerständen, bedingt durch thermisches Rauschen (siehe Abb. 3.4).

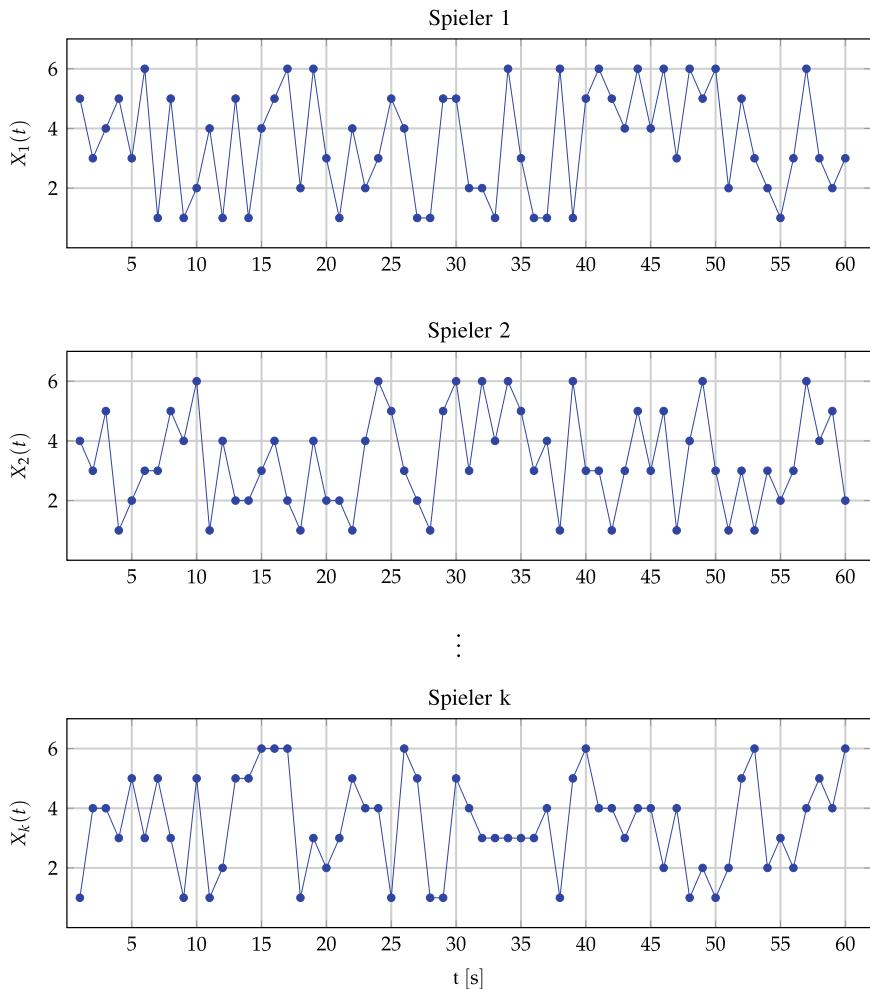


Abb. 4.1 Stochastischer Prozess: Würfelexperiment, bestehend aus k Würfelspielern

In der Natur gibt es Prozesse, bei denen die Dichtefunktion $f_X(\underline{x}(t))$ nicht von der augenblicklichen Zeit abhängt. Folglich haben die beiden Vektoren bei $\underline{x}(t)$ und $\underline{x}(t + t_0)$ für jedes t_0 dieselben statistischen Eigenschaften. Bei solchen stochastischen Prozessen ist:

$$f_X(\underline{x}(t)) = f_X(\underline{x}(t + t_0)) = f_X(\underline{x}). \quad (4.2)$$

Solche stochastische Prozesse werden als **stationär** bezeichnet.

Der Erwartungswert für diesen speziellen Prozess ist:

$$E(\underline{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{x} \cdot f_X(\underline{x}) d\underline{x} = \text{const.} \quad (4.3)$$

Darüber hinaus gibt es stochastische Prozesse, bei denen der Scharmittelwert des Prozesses zu einem beliebigen Zeitpunkt t mit dem Zeitmittelwert jedes Einzelexperiments übereinstimmt. Solche Prozesse werden als **ergodisch** bezeichnet. Dies hat in der Praxis eine große Bedeutung, da hierdurch die statistischen Momente anhand der zeitlichen Wiederholung eines einzelnen Zufallsexperiments bestimmt werden können [4].

Ein Beispiel für einen solchen ergodischen stochastischen Prozess ist das Würfeln mit k Spielern. Es ist anzunehmen, dass es bei idealen Würfeln keine Rolle spielt, ob man mit k Würfeln gleichzeitig würfelt oder mit einem einzelnen Würfel k -mal würfelt. Man erwartet in beiden Fällen die selben statistischen Momente.

4.2 Autokorrelation und Kreuzkorrelation

Ein stochastischer Prozess liefert zu jedem Zeitpunkt t einen Vektor mit Zufallszahlen $\underline{x}(t)$. Betrachtet man zum Zeitpunkt t_1 und t_2 die Zufallsvariablen $\underline{X}(t_1)$ und $\underline{X}(t_2)$, so lässt sich der Erwartungswert des Produkts der beiden Zufallsvektoren bestimmen. Dieses spezielle Moment wird als Autokorrelationsfunktion (AKF) bezeichnet.

Definition 15.: Autokorrelationsfunktion

Die Autokorrelationsfunktion eines stochastischen Prozesses, beschrieben durch die Dichtefunktion $f_X(\underline{X}(t))$ und den Zufallsvektor $\underline{X}(t)$, ist definiert durch:

$$\gamma_{\underline{X}\underline{X}}(t_1, t_2) = E(\underline{X}(t_1) \cdot \underline{X}(t_2)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{x}(t_1) \cdot \underline{x}(t_2) \cdot f_X(\underline{x}(t)) d\underline{x}(t_1) d\underline{x}(t_2).$$

Für stationäre stochastische Prozesse hängt die Autokorrelationsfunktion nur von der Zeitdifferenz τ ab. Somit folgt für $t_2 = t + \tau$:

$$\gamma_{\underline{X} \underline{X}}(\tau) = E(\underline{X}(t) \cdot \underline{X}(t + \tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{x}(t) \cdot \underline{x}(t + \tau) \cdot f_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x}(t) d\underline{x}(t + \tau).$$

Für ergodische, stationäre stochastische Prozesse berechnet sich die Autokorrelationsfunktion zu:

$$\gamma_{X X}(\tau) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \cdot \int_{-0.5 \cdot \Delta T}^{0.5 \cdot \Delta T} x(t) \cdot x(t + \tau) dt.$$

Die normierte Autokorrelationsfunktion (Autokorrelationskoeffizienten) für stationäre stochastische Prozesse berechnet sich zu:

$$\gamma_{\underline{X} \underline{X}}^*(\tau) = \frac{\gamma_{\underline{X} \underline{X}}(\tau)}{\gamma_{\underline{X} \underline{X}}(0)}.$$

Der Betrag dieser Autokorrelationskoeffizienten nimmt nur Werte zwischen 0 und 1 an.

Bei einem ergodischen, streng stationären stochastischen Prozess wird für $\tau = 0$ das Originalsignal mit einem um $\tau = 0$ verschobenen Signal verglichen. Diese beiden sind genau identisch, folglich besitzt die Autokorrelationsfunktion bei $\tau = 0$ das Maximum.

Definition 16.: Diskrete Autokorrelationsfunktion

Die Autokorrelationsfunktion eines diskreten ergodischen, stationären stochastischen Prozesses berechnet sich zu:

$$\gamma_{X X}(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-k-1} x(n) \cdot x(n+k) & k \geq 0 \\ \gamma_{X X}(-k) & k < 0. \end{cases}$$

Beispiel 14 Autokorrelation zweier Sensorwerte

Zur Verdeutlichung ist im Folgenden die normierte Autokorrelationsfunktion zweier diskreter ergodischer, stationärer stochastischer Prozesse $X(k)$ und $Y(k)$ abgebildet (Abb. 4.2).

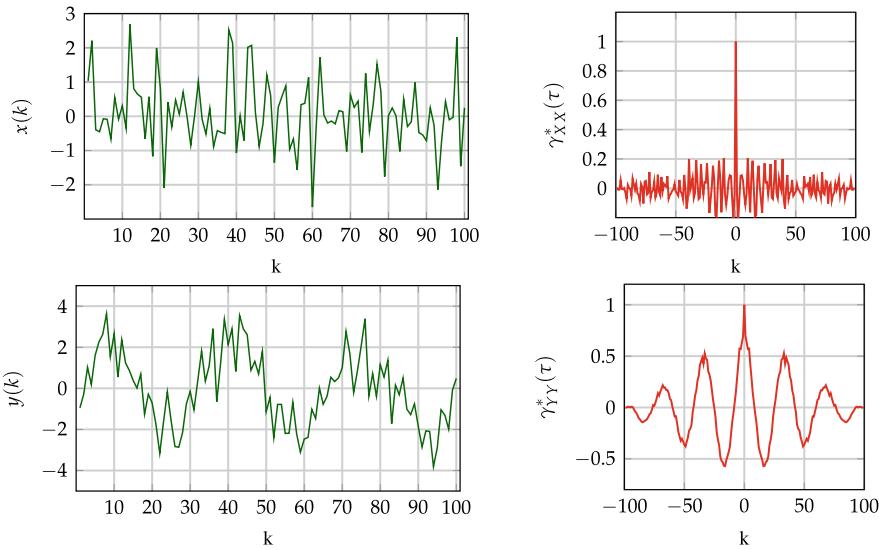


Abb. 4.2 Normierte Autokorrelationsfunktion zweier stochastischer Prozesse

Betrachtet man zwei stochastische Prozesse $\underline{X}(t)$ und $\underline{Y}(t)$, so lässt sich wieder der Erwartungswert aus dem Produkt der beiden Zufallsvektoren bestimmen. Dieses Moment wird als Kreuzkorrelationsfunktion bezeichnet.

Definition 17.: Kreuzkorrelationsfunktion

Die Kreuzkorrelationsfunktion eines stochastischen Prozesses, beschrieben durch die Dichtefunktion $f_{X Y}(\underline{x}(t), \underline{y}(t))$ und die beiden Zufallsvektoren $\underline{X}(t), \underline{Y}(t)$, ist definiert durch:

$$\gamma_{\underline{X} \underline{Y}}(t_1, t_2) = E(\underline{X}(t_1) \cdot \underline{Y}(t_2)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{x}(t_1) \cdot \underline{y}(t_2) \cdot f_{X Y}(\underline{x}(t), \underline{y}(t)) d\underline{x}(t_1) d\underline{y}(t_2).$$

Für stationäre stochastische Prozesse hängt die Kreuzkorrelationsfunktion nur von der Zeitdifferenz τ ab. Somit folgt für $t_2 = t + \tau$:

$$\gamma_{\underline{X} \underline{Y}}(\tau) = E(\underline{X}(t) \cdot \underline{Y}(t + \tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{x}(t) \cdot \underline{y}(t + \tau) \cdot f_{X Y}(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{x}(t) d\underline{y}(t + \tau).$$

Für ergodische, streng stationäre stochastische Prozesse berechnet sich die Kreuzkorrelationsfunktion zu:

$$\gamma_{XY}(\tau) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \cdot \int_{-0.5 \cdot \Delta T}^{0.5 \cdot \Delta T} x(t) \cdot y(t + \tau) dt.$$

Für stationäre stochastische Prozesse ist die normierte Kreuzkorrelationsfunktion definiert mit:

$$\gamma_{\underline{X}\underline{Y}}^*(\tau) = \frac{\gamma_{\underline{X}\underline{Y}}(\tau)}{\sqrt{\gamma_{\underline{X}\underline{X}}(0) \cdot \gamma_{\underline{Y}\underline{Y}}(0)}}.$$

Für $\tau = 0$ folgt für stationäre stochastische Prozesse:

$$\gamma_{\underline{X}\underline{Y}}(0) = E(\underline{X}(t) \cdot \underline{Y}(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{x}(t) \cdot \underline{y}(t) \cdot f_{XY}(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{x}(t) d\underline{y}(t).$$

Somit entspricht die Kreuzkorrelation zweier Zufallsvektoren mit dem Erwartungswert $E(\underline{X}(t)) = 0$ und $E(\underline{Y}(t)) = 0$ der Kovarianz dieser beiden Zufallsvektoren $\underline{X}(t)$ und $\underline{Y}(t)$.

Mit anderen Worten berechnet die Kreuzkorrelation die Kovarianz zweier Zufallsvektoren für $\tau = 0$. Für Werte $\tau > 0$ wird ein Zufallsvektor um $t = \tau$ verschoben und daraus die Kovarianz bestimmt. Somit lässt sich die Kreuzkorrelation (analog der Kovarianz) als ein von $t = \tau$ abhängiges Ähnlichkeitsmaß interpretieren.

Definition 18.: Diskrete Kreuzkorrelationsfunktion

Die Kreuzkorrelationsfunktion eines diskreten ergodischen, stationären stochastischen Prozesses berechnet sich zu:

$$\gamma_{XY}(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-k-1} x(n) \cdot y(n+k) & k \geq 0 \\ \gamma_{YX}(-k) & k < 0. \end{cases}$$

Beispiel 15 Kreuzkorrelationsfunktion zweier Sensorwerte

Erfasst man die Werte zweier Sensoren, so können diese als zwei diskrete ergodische, stationäre stochastische Prozesse $X(k)$ und $Y(k)$ interpretiert werden. Aus diesen beiden Signalen lässt sich dann die normierte Kreuzkorrelationsfunktion berechnen (siehe Abb. 4.3).

Bei $\gamma_{XY}^*(0)$ lässt sich die Ähnlichkeit der beiden Signale ablesen.

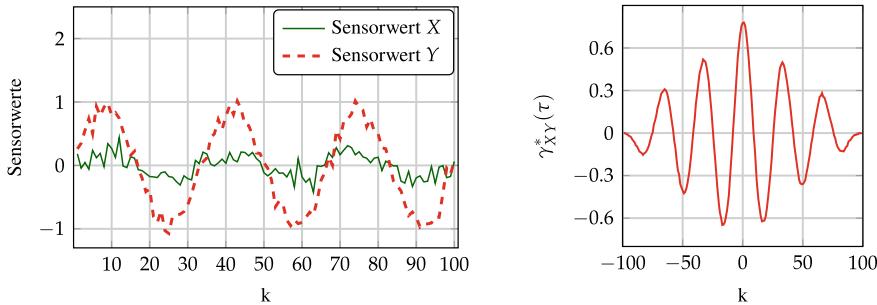


Abb. 4.3 Normierte Kreuzkorrelationsfunktion zweier stochastischer Prozesse

4.3 Spezielle Stochastische Prozesse

Im Kontext von Kalman-Filters werden immer wieder zwei wichtige stochastische Prozesse genannt: der Prozess mit „weißem Rauschen“ und der „Gauß-Markov-Prozess“. Diese werden im Folgenden kurz vorgestellt.

4.3.1 Weißes Rauschen

Bei weißem Rauschen handelt es sich um einen stationären stochastischen Prozess, dessen Autokorrelationsfunktion eine Dirac-Funktion ist (Abb. 4.4 links)

$$\gamma_{\underline{X}\underline{X}}(\tau) = A \cdot \delta(\tau). \quad (4.4)$$

„Rauschen“ wird oft in der Signalttheorie für ein Signal (Störgröße) benutzt, welches durch einen stochastischen Prozess beschrieben wird. Der Begriff „weiß“ hat seinen Namen aus der Optik. Die Dirac-Funktion ist im Frequenzbereich eine Konstante und besitzt somit alle Frequenzen, genau wie „weißes“ Licht alle Farbfrequenzen enthält.

Für die Fourier-Transformierte $\Gamma_{\underline{X}\underline{X}}(j \cdot \omega)$ für weißes Rauschen gilt (Abb. 4.4 rechts):

$$\Gamma_{\underline{X}\underline{X}}(j \cdot \omega) = \mathcal{F}(\gamma_{\underline{X}\underline{X}}(\tau)) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\underline{X}\underline{X}}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = A. \quad (4.5)$$

Unendlich hohe Frequenzen lassen sich natürlich nicht in der Praxis realisieren. Weißes Rauschen wird trotzdem zur Modellierung stochastischer Prozesse verwendet, da im interessierenden Frequenzbereich die Eigenschaft von weißem Rauschen vorliegt.

Weißes Rauschen bezieht sich auf die Art, wie sich das Signal über die Zeit verhält. Es sagt nichts über die Art der Verteilung/Dichtefunktion $f_X(\underline{x}(t))$ aus. Deshalb muss ein normalverteiltes Rauschen nicht automatisch ein weißes Rauschen sein.

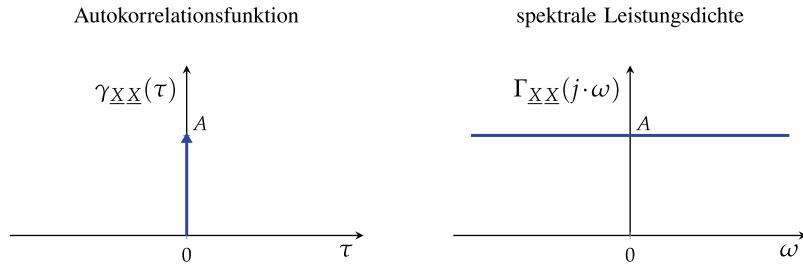


Abb. 4.4 Weißes Rauschen

4.3.2 Gauß-Markov-Prozess

Ein stationärer Gauß-Markov-Prozess mit der Varianz $\text{Var}(\underline{X}) = E(\underline{X}(t) \cdot \underline{X}(t)^T) = \sigma^2$ besitzt eine exponentiell abklingende Autokorrelationsfunktion (Abb. 4.5 links)

$$\gamma_{\underline{X}\underline{X}}(\tau) = \sigma^2 \cdot e^{-\beta \cdot |\tau|}. \quad (4.6)$$

Dies bedeutet, sämtliche statistischen Informationen der Vergangenheit haben Auswirkung auf die Gegenwart. Jedoch exponentiell abnehmend, also die Auswirkung wird immer kleiner.

Für die Fourier-Transformierte $\Gamma_{\underline{X}\underline{X}}(j \cdot \omega)$ gilt (Abb. 4.5 rechts):

$$\Gamma_{\underline{X}\underline{X}}(j \cdot \omega) = \mathcal{F}(\gamma_{\underline{X}\underline{X}}(\tau)) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\underline{X}\underline{X}}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{2 \cdot \sigma^2 \cdot \beta}{\omega^2 + \beta^2}. \quad (4.7)$$

Somit hat die Fourier-Transformierte denselben Verlauf wie die Cauchy-Verteilung.

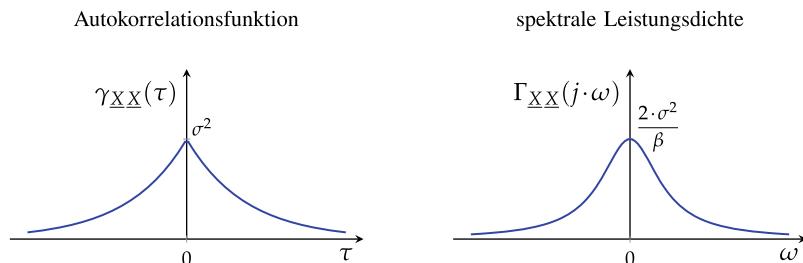


Abb. 4.5 Gauß-Markov-Prozess

Literatur

1. MERTINS, A. : *Signaltheorie: Grundlagen der Signalbeschreibung, Filterbänke, Wavelets, Zeit-Frequenz-Analyse, Parameter- und Signalschätzung*. 3., überarbeitete und erweiterte Auflage. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2012 (SpringerLink: Bücher). – ISBN 978 – 3 – 8348 – 8109 – 0
2. WOLF, D. : *Signaltheorie: Modelle und Strukturen*. Springer Berlin Heidelberg, 1999 (SpringerLink: Bücher). – ISBN 978 – 3 – 642 – 58540 – 1
3. BROWN, R. G. ; HWANG, P. Y. C.: *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. Fourth Edition. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, Weinheim : John Wiley & Sons, Inc., 2012. – ISBN 978 – 0 – 470 – 60969 – 9
4. WENDEL, J. : *Integrierte Navigationssysteme: Sensordatenfusion GPS und inertiale Navigation*. 2. Auflage. München : Oldenbourg, 2011. – ISBN 978 – 3 – 486 – 70572 – 6

Teil III
Kalman-Filter

Klassisches Kalman-Filter

5

Damit Kalman-Filter korrekt eingesetzt werden können, ist es wichtig, die Randbedingungen zu kennen, unter denen die Kalman-Gleichungen verwendet werden dürfen. Dies bedeutet, dass die jeweilig zu lösende Aufgabe dahingehend zu überprüfen ist. Sind diese Voraussetzungen nicht gegeben, liefern die Kalman-Gleichungen nicht das gewünschte Ergebnis. Hierzu werden in diesem Kapitel die Grundgleichungen der Kalman-Filter hergeleitet und an den jeweiligen Stellen darauf hingewiesen, welche Voraussetzungen gelten.

Zu Beginn wird die Struktur eines klassischen Kalman-Filters beschrieben, welches auf die Zustandsraumbeschreibung eines realen Systems inkl. Mess- und Systemrauschen aufbaut (siehe hierzu Abschn. 2.5). Im Anschluss daran werden die Grundgleichungen, aufgeteilt in Prädiktion und Korrektur, hergeleitet. Am Ende wird noch eine alternative Berechnung der Kalman-Verstärkung vorgestellt. Diese stellt im Speziellen für das adaptive Kalman-Filter (ROSE-Filter) eine wichtige Grundgleichung dar.

5.1 Struktur Kalman-Filter

Nach der Publikation des Kalman-Filters durch R. E. Kalman [1] wurden seither viele weitere Unterarten des ursprünglichen Kalman-Filters entwickelt. In Anlehnung an das von R. E. Kalman entwickelte Filter ist in Abb. 5.1 eine solche Struktur zur Schätzung des Zustandsvektors $\underline{x}(k)$ eines physikalischen Systems dargestellt.

Das in dieser Struktur verwendete lineare Modell schätzt die Ausgangsgröße $\hat{y}(k)$ ab und vergleicht diese mit der gemessenen Ausgangsgröße $\underline{y}(k)$ des physikalischen Systems. Die Differenz $\Delta \underline{y}(k)$ dieser beiden Größen wird mit der Kalman-Verstärkung $\underline{K}(k)$ gewichtet und zur Korrektur des geschätzten Zustandsvektors $\hat{x}(k)$ verwendet. Dieser korrigierte Zustandsvektor ist mit $\underline{\hat{x}}(k)$ bezeichnet.

Aus dieser Struktur heraus hat Rudolf E. Kalman folgende fünf Grundgleichungen (zwei für die Prädiktion und drei für die Korrektur) des Kalman-Filters abgeleitet.

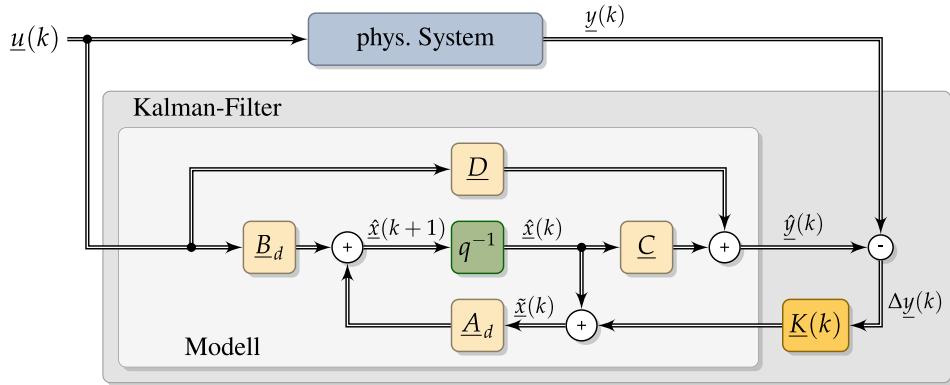


Abb. 5.1 Struktur des Kalman-Filters

Prädiktion:

$$\hat{x}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \tilde{x}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) \quad (5.1)$$

$$\hat{P}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \hat{P}(k) \cdot \underline{A}_d^T + \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T \quad \text{mit} \quad \underline{Q}(k) = \text{Var}(\underline{z}(k)) \quad (5.2)$$

Korrektur:

$$\underline{K}(k) = \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot (\underline{C} \cdot \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k))^{-1} \quad \text{mit} \quad \underline{R}(k) = \text{Var}(\underline{v}(k)) \quad (5.3)$$

$$\tilde{x}(k) = \hat{x}(k) + \underline{K}(k) \cdot (y(k) - \underline{C} \cdot \hat{x}(k) - \underline{D} \cdot \underline{u}(k)) \quad (5.4)$$

$$\tilde{P}(k) = (I - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \hat{P}(k) \quad (5.5)$$

Die Gl. (5.1) und (5.4) können direkt aus der Abb. 5.1 entnommen werden. Die Herleitung der Gl. (5.2), (5.3) und (5.5) ist für den interessierten Leser im nachfolgenden Kapitel beschrieben.

Wichtig ist anzumerken, dass diese Gleichungen nur unter den folgenden Randbedingungen gelten:

- Der Schätzfehler $\tilde{\varepsilon}(k)$ und das Systemrauschen $\underline{z}(k)$ sind unkorreliert, somit gilt $\text{Cov}(\tilde{\varepsilon}(k), \underline{z}(k)) = \underline{0}$.
- Der Schätzfehler $\hat{\varepsilon}(k)$ und das Messrauschen $\underline{v}(k)$ sind unkorreliert, folglich ist die Kovarianz der beiden Größen $\text{Cov}(\hat{\varepsilon}(k), \underline{v}(k)) = \underline{0}$.

- Die Rauschgröße $\underline{v}(k)$ und der Schätzfehler $\hat{\underline{x}}(k)$ sind mittelwertfrei und somit sind die Erwartungswerte $E(\underline{v}(k)) = \underline{0}$ und $E(\hat{\underline{x}}(k)) = \underline{0}$.

5.2 Herleitung Kalman-Filter-Gleichungen

Ausgangsbasis zur Herleitung der Kalman-Filter-Gleichungen sind zum einen die Struktur des klassischen Kalman-Filters aus der Abb. 5.1 und zum anderen die Beschreibung eines verrauschten physikalischen Systems (siehe Abb. 2.7). Mithilfe dieser beiden Beschreibungen lassen sich die Kalman-Filter-Gleichungen herleiten.

Wie beschrieben lassen sich die Gl. (5.1) und (5.4) direkt aus der Abb. 5.1 ableiten. Die weiteren Gleichungen für die Prädiktion und die Korrektur der Größen, sowie eine alternative Berechnung der Kalman-Verstärkung, werden in den nachfolgenden Ausführungen hergeleitet.

5.2.1 Prädiktion

Im Folgenden wird die Prädiktion der Kovarianz des Schätzfehlers Gl. (5.2) hergeleitet.

Aus der Struktur aus Abb. 5.1 folgt:

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{x}}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) \quad (5.6)$$

$$\tilde{\underline{x}}(k) = \hat{\underline{x}}(k) + \underline{K}(k) \cdot (\underline{y}(k) - \underline{C} \cdot \hat{\underline{x}}(k) - \underline{D} \cdot \underline{u}(k)). \quad (5.7)$$

Der Schätzfehler $\hat{\underline{x}}(k+1)$ zum Zeitpunkt $k+1$ ist definiert als die Differenz zwischen dem wahren Zustandsvektor $\underline{x}(k+1)$ und dem geschätzten Zustandsvektor $\hat{\underline{x}}(k+1)$.

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = \underline{x}(k+1) - \hat{\underline{x}}(k+1) \quad (5.8)$$

Unter Verwendung der Gl. (2.37) und (5.6) folgt:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}(k+1) &= \underline{A}_d \cdot \underline{x}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) + \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k) - \underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{x}}(k) - \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) \\ &= \underline{A}_d \cdot (\underline{x}(k) - \tilde{\underline{x}}(k)) + \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k) \\ &= \underline{A}_d \cdot \hat{\underline{x}}(k) + \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k) \end{aligned} \quad (5.9)$$

mit

$$\hat{\underline{x}}(k) = \underline{x}(k) - \tilde{\underline{x}}(k). \quad (5.10)$$

Bildet man die Kovarianz des Schätzfehlers $\hat{\underline{x}}(k+1)$ mithilfe der Gl. (5.9), folgt mit Gl. (B.6), (B.7), (B.9) und der Annahme, dass der Schätzfehler $\hat{\underline{x}}(k)$ und das Systemrauschen $\underline{z}(k)$ unkorreliert sind, d.h. $\text{Cov}(\hat{\underline{x}}(k), \underline{z}(k)) = \underline{0}$:

$$\begin{aligned}
\hat{\underline{P}}(k+1) &= \text{Cov}(\hat{\underline{\varepsilon}}(k+1), \hat{\underline{\varepsilon}}(k+1)) \\
&= \text{Var}(\hat{\underline{\varepsilon}}(k+1)) \\
&= \text{Var}(\underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{\varepsilon}}(k) + \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k)) \\
&= \text{Var}(\underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{\varepsilon}}(k)) + \text{Var}(\underline{G}_d \cdot \underline{z}(k)) + 2 \cdot \underbrace{\text{Cov}(\underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{\varepsilon}}(k), \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k))}_{=0} \\
&= \underline{A}_d \cdot \text{Var}(\tilde{\underline{\varepsilon}}(k)) \cdot \underline{A}_d^T + \underline{G}_d \cdot \text{Var}(\underline{z}(k)) \cdot \underline{G}_d^T.
\end{aligned}$$

$$\hat{\underline{P}}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{P}}(k) \cdot \underline{A}_d^T + \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T \quad \text{mit } \underline{Q}(k) = \text{Var}(\underline{z}(k))$$

5.2.2 Korrektur

Die letzten beiden noch fehlenden Formeln Gl. (5.3) und (5.5) des Kalman-Filters lassen sich durch die folgenden Rechenschritte herleiten.

Der Schätzfehler $\tilde{\underline{\varepsilon}}(k)$ zum Zeitpunkt k , beschrieben durch die Gl. (5.10), lässt sich mithilfe der beiden Gl. (1.17) und (5.7) ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\tilde{\underline{\varepsilon}}(k) &= \underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k) \\
&= \underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k) - \underline{K}(k) \cdot (\underline{y}(k) - \underline{C} \cdot \hat{\underline{x}}(k) - \underline{D} \cdot \underline{u}(k)) \\
&= \underline{x}(k) - (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \hat{\underline{x}}(k) - \underline{K}(k) \cdot \underline{y}(k) + \underline{K}(k) \cdot \underline{D} \cdot \underline{u}(k) \\
&= \underline{x}(k) - (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \hat{\underline{x}}(k) - \underline{K}(k) \cdot \underline{C} \cdot \underline{x}(k) - \underline{K}(k) \cdot \underline{D} \cdot \underline{u}(k) \\
&\quad - \underline{K}(k) \cdot \underline{v}(k) + \underline{K}(k) \cdot \underline{D} \cdot \underline{u}(k) \\
&= (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \underline{x}(k) - (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \hat{\underline{x}}(k) - \underline{K}(k) \cdot \underline{v}(k) \\
&= (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot (\underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k)) - \underline{K}(k) \cdot \underline{v}(k) \\
&= (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \hat{\underline{\varepsilon}}(k) - \underline{K}(k) \cdot \underline{v}(k).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Die Kovarianz $\tilde{\underline{P}}(k)$ des Schätzfehlers $\tilde{\underline{\varepsilon}}(k)$ lässt sich auch mithilfe der Gl. (B.6) darstellen. Unter der Annahme, dass $\hat{\underline{\varepsilon}}(k)$ und $\underline{v}(k)$ unkorreliert sind, und unter Verwendung von Gl. (B.7) folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{\underline{P}}(k) &= \text{Cov}(\tilde{\underline{\varepsilon}}(k), \tilde{\underline{\varepsilon}}(k)) = \text{Var}(\tilde{\underline{\varepsilon}}(k)) \\
&= \text{Var}\left((\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \hat{\underline{\varepsilon}}(k) - \underline{K}(k) \cdot \underline{v}(k)\right) \\
&= \text{Var}\left((\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \hat{\underline{\varepsilon}}(k)\right) + \text{Var}(-\underline{K}(k) \cdot \underline{v}(k)) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{2 \cdot \text{Cov}((I - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \hat{\underline{\varepsilon}}(k), (-\underline{K}(k) \cdot \underline{v}(k)))}_{=0, \text{ da } \hat{\underline{\varepsilon}}(k) \text{ und } \underline{v}(k) \text{ unkorreliert}} \\
& = (I - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \underbrace{\text{Var}(\hat{\underline{\varepsilon}}(k))}_{\hat{P}(k)} \cdot (I - \underline{K}(k) \cdot \underline{C})^T + \underline{K}(k) \cdot \underbrace{\text{Var}(\underline{v}(k))}_{\underline{R}(k)} \cdot \underline{K}(k)^T \\
& = (I - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \hat{P}(k) \cdot (I - \underline{K}(k) \cdot \underline{C})^T + \underline{K}(k) \cdot \underline{R}(k) \cdot \underline{K}(k)^T \quad (5.12)
\end{aligned}$$

mit

$$\underline{R}(k) = \text{Var}(\underline{v}(k)). \quad (5.13)$$

Die Gl. (5.12) wird in der Literatur auch als „Joseph-Formel“ bezeichnet, hergeleitet von P. D. Joseph [2]. Diese Formel stellt bei der Herleitung des Kalman-Filters eine Basisgleichung dar, mit der sich die Matrix $\underline{K}(k)$ sowie die Korrektur der Kovarianz des Schätzfehlers bestimmen lassen.

Zur Bestimmung der Kalman-Verstärkung $\underline{K}(k)$ muss die Gl. (5.12) weiter umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(k) & = (\hat{P}(k) - \underline{K}(k) \cdot \underline{C} \cdot \hat{P}(k)) \cdot (I - \underline{K}(k) \cdot \underline{C})^T + \underline{K}(k) \cdot \underline{R}(k) \cdot \underline{K}(k)^T \\
& = (\hat{P}(k) - \underline{K}(k) \cdot \underline{C} \cdot \hat{P}(k)) \cdot (I - \underline{C}^T \cdot \underline{K}(k)^T) + \underline{K}(k) \cdot \underline{R}(k) \cdot \underline{K}(k)^T \\
& = \hat{P}(k) - \underline{K}(k) \cdot \underline{C} \cdot \hat{P}(k) - \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot \underline{K}(k)^T + \underline{K}(k) \cdot \underline{C} \cdot \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot \underline{K}(k)^T \\
& \quad + \underline{K}(k) \cdot \underline{R}(k) \cdot \underline{K}(k)^T. \quad (5.14)
\end{aligned}$$

Um aus statistischer Sicht eine bestmögliche Schätzung für den Zustandsvektor \tilde{x} zu bekommen, ist die Aufgabe, ein geeignetes $\underline{K}(k)$ zu finden, bei dem die Kovarianz des Schätzfehlers $\tilde{P}(k)$ minimal wird. Dieses Optimum lässt sich mit der Ableitung $\frac{\partial \text{Tr}(\tilde{P}(k))}{\partial \underline{K}} = 0$ bestimmen. Unter Verwendung der Gl. (B.2), (B.10), (B.11), (B.12) und unter Berücksichtigung der Symmetrie der Matrix $\hat{P}(k)$ ($\hat{P}(k) = \hat{P}(k)^T$) folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \text{Tr}(\tilde{P}(k))}{\partial \underline{K}} & = -\hat{P}(k)^T \cdot \underline{C}^T - \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T + 2 \cdot \underline{K}(k) \cdot \underline{C} \cdot \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T + 2 \cdot \underline{K}(k) \cdot \underline{R}(k) \\
0 & = -2 \cdot \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T + 2 \cdot \underline{K}(k) \cdot \underline{C} \cdot \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T + 2 \cdot \underline{K}(k) \cdot \underline{R}(k) \\
\hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T & = \underline{K}(k) \cdot (\underline{C} \cdot \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k)). \quad (5.15)
\end{aligned}$$

$$K(k) = \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot (\underline{C} \cdot \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k))^{-1}$$

Um zu beweisen, dass es sich hier um ein Minimum handelt, muss die zweite Ableitung $\frac{\partial^2 \text{Tr}(\tilde{P}(k))}{\partial^2 \underline{K}}$ positiv definit¹ sein.

$$\frac{\partial^2 \text{Tr}(\tilde{P}(k))}{\partial^2 \underline{K}} = 2 \cdot (\underline{C} \cdot \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k))^T \quad (5.16)$$

Diese Bedingung gilt immer, da die Kovarianzmatrizen \hat{P} und \underline{R} quadratisch, symmetrisch, diagonal dominant und somit positiv definit sind. Folglich ist auch der Ausdruck $\underline{C} \cdot \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k)$ positiv definit.

Durch Umstellen der Gl. (5.14) lässt sich diese, unter Verwendung der Gl. (5.15), weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(k) &= (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \hat{P}(k) - \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot \underline{K}(k)^T \\ &\quad + \underbrace{\underline{K}(k) \cdot (\underline{C} \cdot \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k)) \cdot \underline{K}(k)^T}_{=\hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T} \\ &= (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \hat{P}(k) - \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot \underline{K}(k)^T + \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot \underline{K}(k)^T. \end{aligned}$$

$$\tilde{P}(k) = (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \hat{P}(k)$$

5.3 Alternative Berechnung der Kalman-Verstärkung

Betrachtet man die Fehler $\Delta \underline{y}(k)$ zwischen der geschätzten Ausgangsgröße $\hat{y}(k)$ und der gemessenen Größe $\underline{y}(k)$, so werden diese, unter Berücksichtigung des Zusammenhangs mit $\hat{y}(k) = \underline{C} \cdot \hat{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k)$, berechnet zu:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{y}(k) &= \underline{y}(k) - \hat{y}(k) \\ \Delta \underline{y}(k) &= \underline{y}(k) - \underline{C} \cdot \hat{x}(k) - \underline{D} \cdot \underline{u}(k). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Mithilfe der Gl. (2.38) $\underline{y}(k) = \underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) + \underline{v}(k)$ folgt:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{y}(k) &= \underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) + \underline{v}(k) - \underline{C} \cdot \hat{x}(k) - \underline{D} \cdot \underline{u}(k) \\ &= \underline{C} \cdot \underbrace{(\underline{x}(k) - \hat{x}(k))}_{\hat{\epsilon}(k)} + \underline{v}(k) \\ &= \underline{C} \cdot \hat{\epsilon}(k) + \underline{v}(k). \end{aligned} \quad (5.18)$$

¹ Definition: siehe Anhang A „Vektor- und Matrizenrechnung“

Für die Kovarianz $\underline{M}(k)$ der Größe $\Delta \underline{y}(k)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\underline{M}(k) &= \text{Cov}(\Delta \underline{y}(k), \Delta \underline{y}(k)) \\
&= \text{Var}(\Delta \underline{y}(k)) \\
&= \text{Var}(\underline{C} \cdot \hat{\underline{\varepsilon}}(k) + \underline{v}(k)) \\
&= \text{Var}(\underline{C} \cdot \hat{\underline{\varepsilon}}(k)) + \text{Var}(\underline{v}(k)) + 2 \cdot \underbrace{\text{Cov}(\underline{C} \cdot \hat{\underline{\varepsilon}}(k), \underline{v}(k))}_{=0, \text{ da unkorreliert}} \\
&= \underbrace{\underline{C} \cdot \text{Var}(\hat{\underline{\varepsilon}}(k)) \cdot \underline{C}^T}_{\hat{\underline{P}}(k)} + \underbrace{\text{Var}(\underline{v}(k))}_{\underline{R}(k)} \\
&= \underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k).
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Wie schon bei der Herleitung der Kalman-Filter-Gleichungen liegt die Annahme zugrunde, dass $\hat{\underline{\varepsilon}}(k)$ und $\underline{v}(k)$ unkorreliert sind und somit die Kovarianz $\text{Cov}(\underline{C} \cdot \hat{\underline{\varepsilon}}(k), \underline{v}(k)) = 0$ ist.

Mit Gl. (5.18), (B.4) und der vorab getroffenen Annahme, dass die Größen $\hat{\underline{\varepsilon}}(k)$, $\underline{v}(k)$ mittelwertfrei sind, gilt für den Erwartungswert $E(\Delta \underline{y}(k))$:

$$\begin{aligned}
E(\Delta \underline{y}(k)) &= E(\underline{C} \cdot \hat{\underline{\varepsilon}}(k) + \underline{v}(k)) \\
&= \underbrace{\underline{C} \cdot E(\hat{\underline{\varepsilon}}(k))}_{=0} + \underbrace{E(\underline{v}(k))}_{=0} = 0.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Die Kovarianz $\underline{M}(k)$ lässt sich mit Gl. (B.9) und (5.20) schreiben zu:

$$\begin{aligned}
\underline{M}(k) &= \text{Cov}(\Delta \underline{y}(k), \Delta \underline{y}(k)) \\
&= E(\Delta \underline{y}(k) \cdot \Delta \underline{y}(k)^T) - \underbrace{E(\Delta \underline{y}(k)) \cdot E(\Delta \underline{y}(k)^T)}_{=0} \\
&= E(\Delta \underline{y}(k) \cdot \Delta \underline{y}(k)^T).
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Somit folgt mit Gl. (5.19) und (5.21):

$$\underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k) = E(\Delta \underline{y}(k) \cdot \Delta \underline{y}(k)^T). \tag{5.22}$$

Durch diesen Zusammenhang lässt sich die Kalman-Verstärkung schreiben zu:

$$\underline{K}(k) = \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot \underline{M}(k)^{-1} \quad \text{mit} \quad \underline{M}(k) = E(\Delta \underline{y}(k) \cdot \Delta \underline{y}(k)^T) \tag{5.23}$$

Bei dieser alternativen Berechnung muss, statt der Größe $\underline{R}(k)$, die Größe $\underline{M}(k) = \mathbb{E}(\Delta\underline{y}(k) \cdot \Delta\underline{y}(k)^T)$ bestimmt werden.

Literatur

1. KALMAN, R. E. ; BUCY, R. S.: New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. In: *Journal of Basic Engineering* (1961), S. 95–108
2. GREWAL, M. S. ; ANDREWS, P. A.: *Kalman filtering: theory and practice using Matlab*. Second Edition. New York : Wiley-Interscience Publication, 2001

Adaptiver Kalman-Filter (ROSE-Filter)

6

Um das Kalman-Filter optimal zu nutzen, ist es von großer Wichtigkeit, die Kovarianz des Messrauschens $\underline{R}(k)$ und des Systemrauschens $\underline{Q}(k)$ möglichst exakt zu bestimmen. Erst durch eine exakte Bestimmung der beiden Kovarianzen ist es möglich, eine optimale Zustandsschätzung und eine korrekte Schätzung der Kovarianz der Schätzfehler zu erreichen. Für viele Anwendungen reicht es nicht aus, diese beiden Größen einmal abzuschätzen, da sie sich im Laufe der Zeit zum Teil stark ändern.

Im Folgenden wird ein Ansatz gezeigt, mit dem schnell und adaptiv das Mess- und das Systemrauschen bestimmt werden können. Dieses lineare Kalman-Filter mit adaptiver Bestimmung der beiden Kovarianzmatrizen wird im Folgenden als ROSE-Filter (Rapid Ongoing Stochastic covariance Estimation-Filter) bezeichnet.

6.1 Grundprinzip

Die Grundidee basiert darauf, die Kovarianz des Messrauschens $\underline{R}(k)$ über die Beobachtung der messtechnisch erfassbaren Größe $\underline{y}(k)$ mittels zweier eingebetteter einfacher (Kalman)-Filter (mit konstantem Kalman-Verstärkung) kontinuierlich abzuschätzen.

Ebenso wird die Kovarianz des Systemrauschens $\underline{Q}(k)$ mithilfe der Größe $\Delta \underline{y}(k)$ (Differenz zwischen der geschätzten Ausgangsgröße $\hat{\underline{y}}(k)$ und der gemessenen Größe $\underline{y}(k)$), der Kovarianz des Schätzfehlers $\tilde{P}(k-1)$, der vorab bestimmten Kovarianz des Messrauschens $\underline{R}(k)$ und eines weiteren eingebetteten einfachen (Kalman)-Filter fortlaufend bestimmt.

Abb. 6.1 zeigt schematisch die Struktur des ROSE-Filters. Bei den drei zusätzlichen Kalman-Filttern handelt es sich um Kalman-Filter mit fester Verstärkung. Hierdurch reduziert sich die Berechnung in Echtzeit auf ein paar wenige, einfach in Echtzeit zu

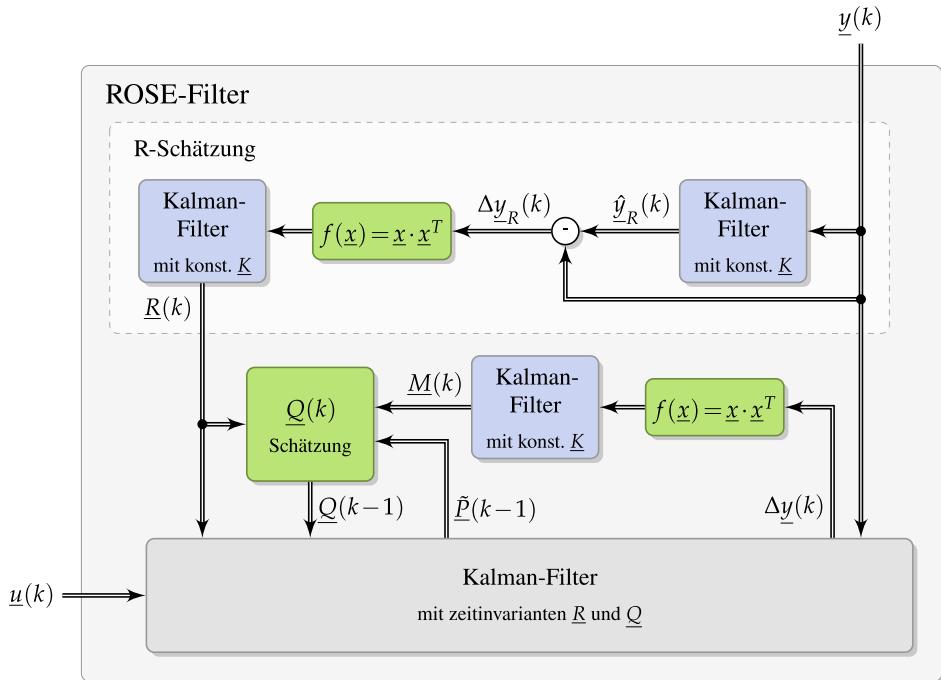


Abb. 6.1 Struktur ROSE-Filter

realisierende Formeln. Im Speziellen entfällt die aufwendige Berechnung der Matrixinversion in Echtzeit. Für Systeme mit geringer Dynamik ist z. B. die Implementierung eines Kalman-Filters basierend auf einem kinematischen Modell 1. Ordnung bzw. für Systeme mit großer Dynamik der Einsatz eines Kalman-Filters basierend auf einem kinematischen Modell 2. Ordnung zu empfehlen (siehe auch Abschn. 1).

Die Kalman-Verstärkung berechnet sich für ein Kalman-Filter basierend auf einem kinematischen Modell 1. Ordnung mit der folgenden Gl. (siehe Kap. 11):

$$K = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Q_\alpha}{R_\alpha} + \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{Q_\alpha}{R_\alpha}\right)^2 + \frac{Q_\alpha}{R_\alpha}}. \quad (6.1)$$

Die Kalman-Verstärkung für ein Kalman-Filter basierend auf einem kinematischen Modell 2. Ordnung lässt sich mit

$$K = \frac{0.125}{T_s} \cdot \begin{bmatrix} T_s \cdot (-\lambda^2 - 8 \cdot \lambda + (\lambda + 4) \cdot \sqrt{\lambda^2 + 8 \cdot \lambda}) \\ 2 \cdot (\lambda^2 + 4 \cdot \lambda - \lambda \cdot \sqrt{\lambda^2 + 8 \cdot \lambda}) \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

und

$$\lambda = T_s \cdot \sqrt{\frac{Q_{\alpha\beta}}{R_{\alpha\beta}}} \quad (6.3)$$

bestimmen (siehe Anhang D, Kap. 16 und [1]).

Im unteren Teil der Abb. 6.1 befindet sich das eigentliche „Haupt-Kalman-Filter“, dessen Kovarianz des Messrauschen $\underline{R}(k)$ und des Systemrauschen $\underline{Q}(k)$ adaptiv bestimmt wird. Die anderen für die Berechnung notwendigen Gleichungen werden in den folgenden Kapiteln hergeleitet.

6.2 Adaptive Bestimmung des Messrauschen

Zuerst wird die Varianz (Kovarianz) der messtechnisch erfassbaren Größe $\underline{y}(k)$ bestimmt. Mit $\underline{y}(k) = \underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) + \underline{v}(k)$ und der Annahme, dass die Größe $\underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k)$ und das Messrauschen $\underline{v}(k)$ unkorreliert sind, folgt:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\underline{y}(k)) &= \text{Var}(\underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) + \underline{v}(k)) \\ &= \underbrace{\text{Var}(\underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k))}_{=0} + \text{Var}(\underline{v}(k)). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Da der Term $\underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k)$ zum Zeitpunkt k für die Varianzberechnung als eine Konstante betrachtet werden kann, ist $\text{Var}(\underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k)) = 0$ und es folgt:

$$\underline{R}(k) = \text{Var}(\underline{y}(k)) \quad (6.5)$$

$$= E\left(\left(\underline{y}(k) - E(\underline{y}(k))\right) \cdot \left(\underline{y}(k) - E(\underline{y}(k))\right)^T\right) \quad (6.6)$$

$$\approx E\left(\left(\underline{y}(k) - \hat{\underline{y}}_R(k)\right) \cdot \left(\underline{y}(k) - \hat{\underline{y}}_R(k)\right)^T\right) \quad (6.7)$$

$$\approx E\left(\Delta \hat{\underline{y}}_R(k) \cdot \Delta \hat{\underline{y}}_R(k)^T\right). \quad (6.8)$$

Alternativ lässt sich die Kovarianz des Messrauschen auch berechnen mit:

$$\begin{aligned} \underline{R}(k) &= \text{Var}(\underline{y}(k)) \\ &= E(\underline{y}(k) \cdot \underline{y}(k)^T) - E(\underline{y}(k)) \cdot E(\underline{y}(k))^T. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Betrachtet man ein kurzes Zeitintervall, so kann man innerhalb dieses Intervalls die Annahme eines ergodischen Prozesses treffen. Unter dieser Annahme lässt sich der Erwartungswert durch eine Mittelwertbildung annähern.

Sehr vorteilhaft bezüglich einer Implementierung in einem Mikrocontroller ist die Realisierung mittels eines IIR-Filters (englisch: *infinite impulse response filter*) 1. Ordnung. Dieses Filter kann auch als ein simples Kalman-Filter interpretiert werden, welches somit den Erwartungswert schätzt (siehe Kap. 11).

6.3 Adaptive Bestimmung des Systemrauschen

Mithilfe der in Abschn. 5.3 bestimmten Kovarianz $\underline{M}(k)$ der Größe $\Delta \underline{y}(k)$ ist es möglich, das Systemrauschen zu bestimmen.

Mit Gl. (5.22): $\underline{M}(k) = E(\Delta \underline{y}(k) \cdot \Delta \underline{y}(k)^T) = \underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k)$ folgt:

$$\underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T = \underline{M}(k) - \underline{R}(k). \quad (6.10)$$

Wird Gl. (5.2): $\hat{\underline{P}}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{P}}(k) \cdot \underline{A}_d^T + \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T$ mit \underline{C} und \underline{C}^T multipliziert, folgt mithilfe der obigen Gl. (6.10) und einer Indexverschiebung:

$$\begin{aligned} \underline{C} \cdot \underline{Q}^*(k-1) \cdot \underline{C}^T &= \underline{C} \cdot \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k-1) \cdot \underline{G}_d^T \cdot \underline{C}^T \\ &= \underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T - \underline{C} \cdot \underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{P}}(k-1) \cdot \underline{A}_d^T \cdot \underline{C}^T \\ &= \underline{M}(k) - \underline{R}(k) - \underline{C} \cdot \underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{P}}(k-1) \cdot \underline{A}_d^T \cdot \underline{C}^T \end{aligned} \quad (6.11)$$

mit

$$\underline{M}(k) = E(\Delta \underline{y}(k) \cdot \Delta \underline{y}(k)^T). \quad (6.12)$$

Auch hier kann unter der Annahme, dass es sich in einem kurzen Beobachtungsintervall um einen ergodischen Prozess handelt, der Erwartungswert, bei der Bestimmung von $\underline{M}(k)$, durch eine Mittelwertbildung (z. B. ein IIR-Filter 1. Ordnung) ersetzt werden.

Die Berechnung der Varianz des Systemrauschen \underline{Q}^* geschieht durch Koeffizientenvergleich der einzelnen Elemente der linken und der rechten Seite der Gl. (6.11).

6.4 Algorithmus

Mit den in den vorigen Kapiteln hergeleiteten Gleichungen lässt sich das ROSE-Filter durch die nachfolgenden Gleichungen beschreiben. Erwähnenswert ist, dass im Gegensatz zu dem klassischen Kalman-Filter die Kovarianz des Schätzfehlers $\hat{\underline{P}}$ nicht sofort prädiziert wird, sondern erst dann berechnet wird, nachdem eine neue Messung vorliegt. Dies ist möglich, da die Kovarianz des Systemrauschen zu jedem Zeitpunkt bestimmt wird. Hierdurch steigt die Genauigkeit der Korrektur und somit der Schätzung des Zustandsvektors.

Berechnung von $\underline{R}(k)$ und $\underline{Q}(k)$:

$$\underline{R}(k) = \mathbb{E}(\underline{y}(k) \cdot \underline{y}(k)^T) - \mathbb{E}(\underline{y}(k)) \cdot \mathbb{E}(\underline{y}(k))^T \quad \text{bzw.} \quad (6.13)$$

$$= \mathbb{E}\left(\left(\underline{y}(k) - \mathbb{E}(\underline{y}(k))\right) \cdot \left(\underline{y}(k) - \mathbb{E}(\underline{y}(k))\right)^T\right) \quad (6.14)$$

$$\Delta \underline{y}(k) = \underline{y}(k) - \underline{C} \cdot \hat{\underline{x}}(k) - \underline{D} \cdot \underline{u}(k) \quad (6.15)$$

$$\underline{M}(k) = \mathbb{E}(\Delta \underline{y}(k) \cdot \Delta \underline{y}(k)^T) \quad (6.16)$$

$$\underline{C} \cdot \underline{Q}^*(k-1) \cdot \underline{C}^T = \underline{M}(k) - \underline{R}(k) - \underline{C} \cdot \underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{P}}(k-1) \cdot \underline{A}_d^T \cdot \underline{C}^T \quad (6.17)$$

Prädiktion:

$$\hat{\underline{x}}(k) = \underline{A}_d \cdot \hat{\underline{x}}(k-1) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k-1) \quad (6.18)$$

$$\hat{\underline{P}}(k) = \underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{P}}(k-1) \cdot \underline{A}_d^T + \underline{Q}^*(k-1) \quad (6.19)$$

Korrektur:

$$\underline{K}(k) = \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot (\underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k))^{-1} \quad (6.20)$$

$$\tilde{\underline{x}}(k) = \hat{\underline{x}}(k) + \underline{K}(k) \cdot \Delta \underline{y}(k) \quad (6.21)$$

$$\tilde{\underline{P}}(k) = (I - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \hat{\underline{P}}(k) \quad (6.22)$$

Dadurch, dass die Größen $\underline{R}(k)$ und $\underline{M}(k)$ nur abgeschätzt werden, kann dies dazu führen, dass negative Werte für die Größe $\underline{Q}^*(k-1)$ berechnet werden. Diese unplausiblen Werte müssen auf null gesetzt werden. Siehe Beispiele in Abschn. 11.4 und Kap. 16.

Literatur

1. BAR-SHALOM, Y. ; LI, X.-R. : *Estimation and tracking: Principles Techniques and Software*. Boston : Artech House, 1993. – ISBN 0 – 89006 – 643 – 4

Nichtlineare Kalman-Filter

7

Nicht alle Differenzialgleichungssysteme lassen sich mit der linearen Zustandsraumdarstellung darstellen. Für solche Problemstellungen muss eine allgemeingültige Systembeschreibung gefunden werden. Mit dieser verallgemeinerten Beschreibung lässt sich das „klassische Kalman-Filter“ zu einem „Extended Kalman-Filter“ entwickeln.

7.1 Verallgemeinerte zeitdiskrete Systembeschreibung

Die bisher betrachtete Systembeschreibung beruht auf den linearen Zusammenhängen zwischen der Systemmatrix \underline{A}_d und dem Zustandsvektor $\underline{x}(k)$ sowie der Eingangsmatrix \underline{B}_d und dem Eingangsvektor $\underline{u}(k)$. Diese lineare Zustandsraumbeschreibung ist durch die beiden Gl. (7.1) und (7.2) beschrieben:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{x}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) + \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k) \quad (7.1)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C} \cdot \underline{x}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) + \underline{v}(k). \quad (7.2)$$

Um auch nichtlineare Systeme modellieren zu können, ist es notwendig, die lineare Zustandsraumbeschreibung zu verallgemeinern. Zur Modellierung nichtlinearer Differenzialgleichungssysteme geht die Systembeschreibung über in:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{f}(\underline{x}(k), \underline{u}(k)) + \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k) \quad (7.3)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{h}(\underline{x}(k), \underline{u}(k)) + \underline{v}(k) \quad (7.4)$$

Beschrieben durch die beiden nichtlinearen Funktionen $\underline{f}(\underline{x}(k), \underline{u}(k))$ und $\underline{h}(\underline{x}(k), \underline{u}(k))$. Zu solchen nichtlinearen Funktionen zählen z. B. alle trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen oder Funktionen höherer Ordnung.

Mit dieser verallgemeinerten Darstellung lässt sich auch das in Abschn. 1.2.2 beschriebene lineare Modell darstellen. In diesem einführenden Beispiel wurde das System durch die Gleichungen beschrieben:

$$h(k+1) = h(k) + T_s \cdot v(k) + \frac{T_s^2}{2} \cdot (a(k) + z(k)) \quad (7.5)$$

$$v(k+1) = v(k) + T_s \cdot (a(k) + z(k)) \quad (7.6)$$

$$a(k+1) = a(k) + z(k) \quad (7.7)$$

sowie

$$y_1(k) = h(k) \quad (7.8)$$

$$y_2(k) = a(k). \quad (7.9)$$

Aus dieser Systembeschreibung lassen sich die beiden Funktionen $\underline{f}(\underline{x}(k), \underline{u}(k))$ und $\underline{h}(\underline{x}(k), \underline{u}(k))$ bestimmen:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} h(k+1) \\ v(k+1) \\ a(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h(k) + T_s \cdot v(k) + \frac{T_s^2}{2} \cdot a(k) \\ v(k) + T_s \cdot a(k) \\ a(k) \end{bmatrix}}_{\underline{f}(\underline{x}(k))} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{T_s^2}{2} \\ T_s \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{G}_D} \cdot z(k) \quad (7.10)$$

und

$$\underline{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} h(k) \\ a(k) \end{bmatrix}}_{\underline{h}(\underline{x}(k))} + \underline{v}(k). \quad (7.11)$$

7.2 Extended Kalman-Filter (EKF)

Damit die bisherigen Formeln eines klassischen Kalman-Filters weiterverwendet werden können, werden die beiden Funktionen $\underline{f}(\underline{x}(k), \underline{u}(k))$ und $\underline{h}(\underline{x}(k), \underline{u}(k))$ um den letzten Schätzwert linearisiert. Hierzu müssen lediglich diese nach jeder Größe des Zustandsvektors $\underline{x}(k)$ abgeleitet werden. Somit gehen die Kalman-Filter-Gleichungen über in

Prädiktion:

$$\hat{x}(k+1) = \underline{f}(\tilde{x}(k), \underline{u}(k)) \quad (7.12)$$

$$\hat{P}(k+1) = \underline{A}_J \cdot \tilde{P}(k) \cdot \underline{A}_J^T + \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T \quad \text{mit } \underline{Q}(k) = \text{Var}(\underline{z}(k)) \quad (7.13)$$

Korrektur:

$$\underline{K}(k) = \hat{P}(k) \cdot \underline{C}_J^T \cdot (\underline{C}_J \cdot \hat{P}(k) \cdot \underline{C}_J^T + \underline{R}(k))^{-1} \quad \text{mit } \underline{R}(k) = \text{Var}(\underline{v}(k)) \quad (7.14)$$

$$\tilde{x}(k) = \hat{x}(k) + \underline{K}(k) \cdot (\underline{y}(k) - \underline{h}(\hat{x}(k), \underline{u}(k))) \quad (7.15)$$

$$\tilde{P}(k) = (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}_J) \cdot \hat{P}(k) \quad (7.16)$$

mit

$$\underline{A}_J = \left[\frac{\partial \underline{f}}{\partial \tilde{x}_1} \cdots \frac{\partial \underline{f}}{\partial \tilde{x}_n} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{f}(1)}{\partial \tilde{x}_1} & \cdots & \frac{\partial \underline{f}(1)}{\partial \tilde{x}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \underline{f}(n)}{\partial \tilde{x}_1} & \cdots & \frac{\partial \underline{f}(n)}{\partial \tilde{x}_n} \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

und

$$\underline{C}_J = \left[\frac{\partial \underline{h}}{\partial \hat{x}_1} \cdots \frac{\partial \underline{h}}{\partial \hat{x}_n} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{h}(1)}{\partial \hat{x}_1} & \cdots & \frac{\partial \underline{h}(1)}{\partial \hat{x}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \underline{h}(n)}{\partial \hat{x}_1} & \cdots & \frac{\partial \underline{h}(n)}{\partial \hat{x}_n} \end{bmatrix}. \quad (7.18)$$

Die beiden Matrizen \underline{A}_J und \underline{C}_J sind die Jacobi-Matrizen von \underline{A}_d und \underline{C} .

Bezug nehmend auf das einführende Beispiel folgt für die Jacobi-Matrizen:

$$\underline{f}(\tilde{x}(k)) = \begin{bmatrix} s(k) + T_s \cdot v(k) + \frac{T_s^2}{2} \cdot a(k) \\ v(k) + T_s \cdot a(k) \\ a(k) \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

$$\underline{A}_J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{f}(1)}{\partial s(k)} & \frac{\partial \underline{f}(1)}{\partial v(k)} & \frac{\partial \underline{f}(1)}{\partial a(k)} \\ \frac{\partial \underline{f}(2)}{\partial s(k)} & \frac{\partial \underline{f}(2)}{\partial v(k)} & \frac{\partial \underline{f}(2)}{\partial a(k)} \\ \frac{\partial \underline{f}(3)}{\partial s(k)} & \frac{\partial \underline{f}(3)}{\partial v(k)} & \frac{\partial \underline{f}(3)}{\partial a(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T_s & \frac{T_s^2}{2} \\ 0 & 1 & T_s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

und

$$\underline{h}(\hat{x}(k)) = \begin{bmatrix} h(k) \\ a(k) \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

$$\underline{C}_J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{h}(1)}{\partial s(k)} & \frac{\partial \underline{h}(1)}{\partial v(k)} & \frac{\partial \underline{h}(1)}{\partial a(k)} \\ \frac{\partial \underline{h}(2)}{\partial s(k)} & \frac{\partial \underline{h}(2)}{\partial v(k)} & \frac{\partial \underline{h}(2)}{\partial a(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.22)$$

Wie erwartet entsprechen in diesem linearen Beispiel die beiden Jacobi-Matrizen \underline{A}_J der Systemmatrix \underline{A}_d bzw. \underline{C}_J der Ausgangsmatrix \underline{C} .

Die Linearisierung der beiden Funktionen $\underline{f}(\underline{x}(k), \underline{u}(k))$ und $\underline{h}(\underline{x}(k), \underline{u}(k))$ entspricht einer Taylor-Reihenentwicklung um den letzten Schätzwert. In der Regel wird nach dem ersten Glied der Taylor-Reihe abgebrochen. Modell- und Messungenauigkeiten werden durch ein additives Rauschen modelliert, obwohl auch Rauschgrößen nichtlinear sein können.

Die Berechnungen der Jacobi-Matrizen kann sehr rechenintensiv sein, da sich die Ableitungen manchmal nicht analytisch bestimmen lassen. In diesen Fällen müssen die Ableitungen numerisch in jedem Rechenschritt des EKF bestimmt werden. Es ist deshalb empfehlenswert, die Jacobi-Matrizen nach Möglichkeit vorab analytisch zu bestimmen.

Die Güte des EKF hängt im Wesentlichen von der Unsicherheit der Schätzung und der Größe der lokalen Nichtlinearität ab. Deshalb sollte in der Praxis die Abtastzeit so klein als möglich sein, um den Linearitätsfehler gering zu halten.

Abb. 7.1 verdeutlicht, wie sich der Prädiktionsfehler $\hat{\epsilon}$ bei einer größeren Abtastzeit durch die Linearisierung einer nichtlinearen Funktion stark vergrößert. Aufgrund von Prädiktionsfehlern besteht die Gefahr von Divergenzen. Ebenso muss der Initialzustand gut gewählt werden, sonst können Konvergenzprobleme auftreten.

Wenn die Abtastzeit nicht so stark verkleinert werden kann, damit die nichtlineare Funktion in dem Abtastintervall annähernd linear ist, muss auf ein Unscented Kalman-Filter

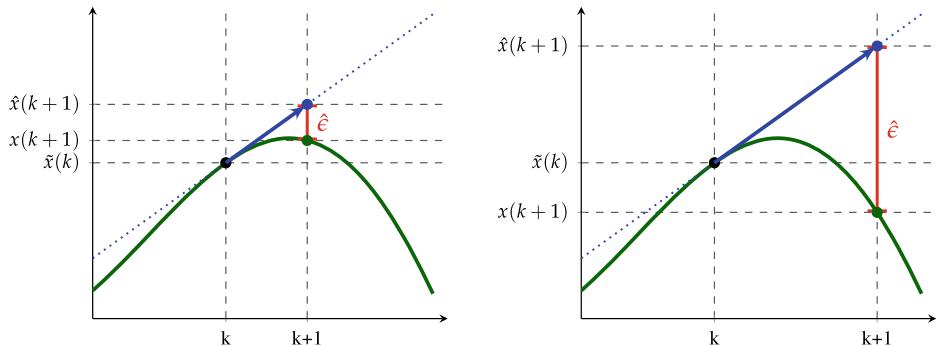


Abb. 7.1 Größere Schrittweiten verschlechtern die Güte des EKF

(UKF) oder sogar ein Partikelfilter ausgewichen werden. Das Partikelfilter hat den Vorteil, dass es so gut wie keine Einschränkungen bezüglich der Nichtlinearität hat, jedoch sehr rechenintensiv ist und deshalb nur bedingt für Echtzeitanwendungen verwendbar ist.

Systemrauschen

8

Die Basis eines jeden Kalman-Filters stellt das Modell des physikalischen Systems dar. Dieses ist in Form von Differenzialgleichungen beschrieben und lässt sich durch Umformen in eine Zustandsraumbeschreibung überführen. Unter der Verwendung der in Kap. 2 beschriebenen Gleichungen lassen sich somit die für das Kalman-Filter notwendigen Größen \underline{A}_d , \underline{B}_d , \underline{C} und \underline{D} bestimmen.

Diese Größen alleine reichen jedoch noch nicht aus, um ein Kalman-Filter benutzen zu können. Es ist noch notwendig, die Kovarianzmatrix des Systemrauschens und die des Messrauschens zu bestimmen. Speziell die Kovarianzmatrix des Systemrauschens $\underline{Q}(k)$ ist eine schwer greifbare Größe, auf deren Beschreibung in diesem Kapitel näher eingegangen wird. Hierbei werden mehrere Berechnungsmethoden zur Ermittlung der Größe $\underline{Q}(k)$ bzw. der Größe $\underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T$ in der Kalman-Filter-Gleichung (5.2) vorgestellt.

Das Systemrauschen, auch Prozessrauschen genannt, ist eine abstrakte Größe, die Ungenauigkeiten in der Modellierung abbildet. Es handelt sich somit nicht um ein reales Rauschen, sondern vielmehr um eine theoretische Größe, die diese Modellungenauigkeiten beschreibt.

In Anlehnung an das Vorgehen in Abschn. 2.5 zur Bestimmung der Eingangsmatrix B_d im Zeitdiskreten werden mehrere Verfahren zur Bestimmung der Größen \underline{G}_d bzw. $\underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T$ vorgestellt.

8.1 Ausgangspunkt

Ausgangspunkt für die Verfahren zur Modellierung des Systemrauschens ist ein Modell, welches durch die Zustandsdifferentialgleichung

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t) + \underline{G} \cdot \underline{z}(t) \quad (8.1)$$

beschrieben wird.

Führt man dieses Modell in ein zeitdiskretes System über, folgt in Anlehnung an das in Abschn. 2.4 und 2.5 beschriebene Vorgehen die Gleichung:

$$\underline{x}((n+1) \cdot T_s) = \underbrace{e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{x}(n \cdot T_s)}_{\underline{x}^*(nT_s)} + \underbrace{\int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau}_{\underline{u}^*(nT_s)} + \underbrace{\int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{G} \cdot \underline{z}(\tau) d\tau}_{\underline{z}^*(nT_s)}. \quad (8.2)$$

Mit den in Abb. 2.7 vorgenommenen Bezeichnungen lässt sich die obige Gleichung schreiben mit:

$$\underline{x}((n+1) \cdot T_s) = \underline{x}^*(n \cdot T_s) + \underline{u}^*(n \cdot T_s) + \underline{z}^*(n \cdot T_s). \quad (8.3)$$

Die verschiedenen Möglichkeiten zur Vereinfachung der Größe $\underline{u}^*(nT_s)$ wurde in Abschn. 2.5 ausführlich beschrieben. Im Folgenden wird nun auf die Vereinfachung der Größe $\underline{z}^*(n \cdot T_s)$ eingegangen.

Für das Systemrauschen gilt nach der obigen Definition:

$$\underline{z}^*(n \cdot T_s) = \int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{G} \cdot \underline{z}(\tau) d\tau. \quad (8.4)$$

8.2 Direkte Diskretisierung

Ein abgetastetes Signal wird durch das Produkt aus dem zeitkontinuierlichen Signal und einer Folge von Dirac-Impulsen beschrieben:

$$z_d(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} z(n \cdot T_s) \cdot \delta(t - n \cdot T_s). \quad (8.5)$$

Im Intervall $n \cdot T_s \leq t < (n+1) \cdot T_s$ ist das Signal folglich

$$z_d(t) = z(n \cdot T_s) \cdot \delta(t - n \cdot T_s). \quad (8.6)$$

Nähert man $z(t)$ mit $z(t) \approx z_d(t)$ und setzt diese Näherung in Gl. (8.4) ein und nutzt die Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses, folgt:

$$\begin{aligned}
\underline{z}^*(n \cdot T_s) &= \int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{G} \cdot \underline{z}(\tau) \cdot \delta(\tau - n \cdot T_s) d\tau \\
&= e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - n \cdot T_s)} \cdot \underline{G} \cdot \underline{z}(n \cdot T_s) \\
&= e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{G} \cdot \underline{z}(n \cdot T_s).
\end{aligned} \tag{8.7}$$

Weist man der Folge der abgetasteten Werte den Index k zu, ergibt sich:

$$\underline{z}^*(k) = \underbrace{e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{G}}_{\underline{G}_d} \cdot \underline{z}(k) \tag{8.8}$$

mit

$$\underline{G}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{G}. \tag{8.9}$$

8.3 Partielles konstantes Rauschen

Wird angenommen, dass sich das Rauschen innerhalb eines Abtastintervalls nicht verändert und somit konstant ist, so lässt sich die Gl.(8.4) schreiben:

$$\underline{z}^*(n \cdot T_s) = \int_{n \cdot T_s}^{(n+1) \cdot T_s} e^{\underline{A} \cdot ((n+1) \cdot T_s - \tau)} \cdot \underline{G} d\tau \cdot \underline{z}(n \cdot T_s). \tag{8.10}$$

Substituiert man τ mit $\nu(\tau) = (n+1) \cdot T_s - \tau$ und weist man des Weiteren der Folge der abgetasteten Werte den Index k zu, so vereinfacht sich die Gl.(8.10) zu:

$$\begin{aligned}
\underline{z}^*(k) &= \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot \nu} \cdot \underline{G} d\nu \cdot \underline{z}(k) \\
&\quad \underbrace{\underline{G}}_{\underline{G}_d}
\end{aligned} \tag{8.11}$$

mit

$$\underline{G}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot \nu} \cdot \underline{G} d\nu. \tag{8.12}$$

8.4 Diskretisiertes zeitkontinuierliches Modell

Mithilfe der Substitution $\nu(\tau) = (n+1) \cdot T_s - \tau$ lässt sich das Integral der Gl.(8.4) vereinfachen. Weist man des Weiteren der Folge der abgetasteten Werte den Index k zu, folgt:

$$\underline{z}^*(k) = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot \nu} \cdot \underline{G} \cdot \underline{z}(\nu) d\nu. \tag{8.13}$$

Bei diesem dritten Verfahren zur Diskretisierung der Kovarianz des Systemrauschens müssen weitere Annahmen vorgenommen werden. Nimmt man an, dass es sich um weißes, mittelwertfreies Rauschen handelt, so lässt sich die Kovarianz des Systemrauschens im kontinuierlichen Zeitbereich mithilfe der Gl. (B.9) schreiben:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\underline{z}(t), \underline{z}(\tau)) &= E(\underline{z}(t) \cdot \underline{z}(\tau)^T) - \underbrace{E(\underline{z}(t))}_{=0} \cdot \underbrace{E(\underline{z}(\tau)^T)}_{=0} = E(\underline{z}(t) \cdot \underline{z}(\tau)^T) \\ E(\underline{z}(t) \cdot \underline{z}(\tau)^T) &= \underline{q} \cdot \delta(t - \tau). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Das weiße Rauschen besitzt innerhalb eines Abtastintervalls ein konstantes Leistungsdichtespektrum (englisch *constant power spectral density*) der Höhe $\underline{q}(k)$, dessen Autokorrelationsfunktion ein Dirac-Impuls $\underline{q}(k) \cdot \delta(t - \tau)$ ist.

Mit der Annahme, dass das zeitdiskrete Systemrauschen auch mittelwertfrei (Erwartungswert $E(\underline{z}^*(k)) = 0$) ist, lässt sich die Kovarianz des Systemrauschens im zeitdiskreten Bereich schreiben durch:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\underline{z}^*(k), \underline{z}^*(k)) &= \text{Var}(\underline{z}^*(k)) \\ &= E(\underline{z}^*(k) \cdot \underline{z}^*(k)^T) - \underbrace{E(\underline{z}^*(k))}_{=0} \cdot \underbrace{E(\underline{z}^*(k)^T)}_{=0}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Die Kovarianz (Varianz) des zeitdiskreten Systemrauschens lässt sich mit $\underline{z}^*(k) = \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k)$ und $\underline{Q}(k) = \text{Var}(\underline{z}(k))$ ausdrücken:

$$\text{Var}(\underline{z}^*(k)) = \text{Var}(\underline{G}_d \cdot \underline{z}(k)) = \underline{G}_d \cdot \underbrace{\text{Var}(\underline{z}(k))}_{\underline{Q}(k)} \cdot \underline{G}_d^T = \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T. \quad (8.16)$$

Somit lässt sich mit Gl. (8.13), (8.15) und (8.16) schreiben:

$$\begin{aligned} \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T &= E(\underline{z}^*(k) \cdot \underline{z}^*(k)^T) \\ &= E\left(\int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot \underline{v}_1} \cdot \underline{G} \cdot \underline{z}(\underline{v}_1) d\underline{v}_1 \cdot \int_0^{T_s} \left(e^{\underline{A} \cdot \underline{v}_2} \cdot \underline{G} \cdot \underline{z}(\underline{v}_2)\right)^T d\underline{v}_2\right) \\ &= E\left(\int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot \underline{v}_1} \cdot \underline{G} \cdot \underline{z}(\underline{v}_1) d\underline{v}_1 \cdot \int_0^{T_s} \underline{z}(\underline{v}_2)^T \cdot \underline{G}^T \cdot (e^{\underline{A} \cdot \underline{v}_2})^T d\underline{v}_2\right) \\ &= E\left(\int_0^{T_s} \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot \underline{v}_1} \cdot \underline{G} \cdot \underline{z}(\underline{v}_1) \cdot \underline{z}(\underline{v}_2)^T \cdot \underline{G}^T \cdot (e^{\underline{A} \cdot \underline{v}_2})^T d\underline{v}_1 d\underline{v}_2\right). \end{aligned}$$

Berücksichtigt man den Zusammenhang $E(\underline{A} \cdot \underline{x} \cdot \underline{B}) = \underline{A} \cdot E(\underline{x}) \cdot \underline{B}$ und die Linearität der Erwartungswerte bzw. des Integrals $E\left(\int f(x) dx\right) = \int E(f(x)) dx$, lässt sich der Erwartungswert in das Integral ziehen und mit Gl. (8.14) folgt:

$$\underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v_1} \cdot \underline{G} \cdot \underbrace{E(\underline{z}(v_1) \cdot \underline{z}(v_2)^T)}_{q(k) \cdot \delta(v_1 - v_2)} \cdot \underline{G}^T \cdot (e^{\underline{A} \cdot v_2})^T dv_1 dv_2. \quad (8.18)$$

Nutzt man die Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses und die Annahme, dass $q(k)$ innerhalb eines Abtastintervalls konstant ist, lässt sich die obige Gleichung weiter vereinfachen:

$$\underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v_1} \cdot \underline{G} \cdot \underline{G}^T \cdot (e^{\underline{A} \cdot v_1})^T dv_1 \cdot q(k). \quad (8.19)$$

Gütemasse

9

Wesentlich für die Leistung eines Kalman-Filters ist, dass der Schätzwert möglichst nahe am wahren Wert des Zustands liegt. Zudem wird erwartet, dass der Schätzer die Kovarianz des Schätzfehlers korrekt angibt. Für beide Aspekte existieren zwei wesentliche Metriken, der mittlere quadratische Fehler und das normalisierte Schätzfehlerquadrat.

9.1 Mittlerer quadratischer Fehler

Für die Beurteilung von Zustandsschätzern wird der Schätzfehler $\tilde{\underline{x}}(k) = \underline{x}(k) - \tilde{x}(k)$ ausgewertet. Hierfür eignet sich die Wurzel des mittleren quadratischen Fehlers (englisch: *root mean squared error (RMSE)*), welche ein weitverbreitetes Qualitätsmaß ist.

Nachfolgend wird zwischen der Bestimmung des RMSE innerhalb einer Simulation und der Auswertung mit realen Messdaten unterschieden.

9.1.1 Innerhalb einer Simulation

Bei einer Simulation mit einer Länge von $K \in \mathbb{N}^*$ wird der RMSE durch N Monte-Carlo-Läufe gemittelt, um eine hohe statistische Signifikanz zu erreichen

$$\text{RMSE}(\tilde{\underline{x}}(k)) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{\underline{x}}_1^i(k)^2 + \dots + \tilde{\underline{x}}_n^i(k)^2)} \quad (9.1)$$

wobei $n = \dim(\tilde{\underline{x}}(k))$ ist.

Der RMSE sollte immer nur für Elemente mit der gleichen Einheit berechnet werden, da es nicht korrekt ist, z. B. Geschwindigkeit und Beschleunigung zu addieren. In diesem Fall wird der RMSE pro Zustand oder Einheit bestimmt. Wird z. B. eine Geschwindigkeit

als Zustandsvektor gewählt, so nennt man dies den RMSE der Geschwindigkeit. Im Allgemeinen gilt: Je kleiner der RMSE, desto besser ist der Zustandsschätzer.

9.1.2 Mit realen Messdaten

Wenn reale Messdaten ausgewertet werden sollen, kann der RMSE nur aus einem einzigen Durchlauf berechnet werden. Der RMSE hat somit keine hohe statistische Aussagekraft. Der RMSE kann daher alternativ über den mittleren Schätzfehler berechnet werden:

$$\mu_{\tilde{\varepsilon}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\varepsilon}(k) \quad (9.2)$$

und die Standardabweichung des Schätzfehlers

$$\sigma_{\tilde{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\tilde{\varepsilon}(k) - \mu_{\tilde{\varepsilon}})^2} \quad (9.3)$$

mit

$$\text{RMSE}(\tilde{\varepsilon}(k)) = \sqrt{\mu_{\tilde{\varepsilon}} + \sigma_{\tilde{\varepsilon}}} \quad (9.4)$$

Da der korrekte Zustand $\underline{x}(k)$ verfügbar sein muss, ist dies in der Praxis nur mit sehr genauen Referenzdaten möglich. Es kann auch sein, dass nicht alle Zustände mit Referenzmessgeräten gemessen werden können. Es ist daher legitim, den RMSE nur für die Zustände zu berechnen, für die Referenzdaten verfügbar sind.

9.2 Normalisiertes Schätzfehlerquadrat

Eine gewünschte Eigenschaft eines Zustandsschätzers ist, dass er in der Lage ist, die Qualität der Schätzung korrekt anzugeben. Diese Fähigkeit wird als Konsistenz eines Zustandsschätzers bezeichnet und wirkt sich direkt auf den Schätzfehler $\tilde{\varepsilon}(k)$ aus, d. h., ein inkonsistenter Zustandsschätzer liefert nicht das optimale Ergebnis. Dies ergibt sich aus der Anforderung, dass ein Zustandsschätzer unverzerrt sein sollte. Mathematisch gesehen wird dies dadurch ausgedrückt, dass der Erwartungswert des Schätzfehlers $\tilde{\varepsilon}(k)$ null ist

$$E(\underline{x}(k) - \tilde{x}(k)) = E(\tilde{\varepsilon}(k)) \stackrel{!}{=} 0 \quad (9.5)$$

und dass die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers gleich der Kovarianzmatrix $\tilde{P}(k)$ des Zustandsschätzers sein muss:

$$\mathbb{E}((\underline{x}(k) - \tilde{x}(k))(\underline{x}(k) - \tilde{x}(k))^T) = \mathbb{E}(\tilde{\varepsilon}(k)\tilde{\varepsilon}(k)^T) \stackrel{!}{=} \underline{\tilde{P}}(k). \quad (9.6)$$

Die Überprüfung der Konsistenz des Zustandsschätzers kann mit einem Hypothesentest unter Verwendung des normalisierten Schätzfehlerquadrats (englisch: *normalized estimation error squared (NEES)*) durchgeführt werden. Zu diesem Zweck wird eine Normalisierung des Schätzfehlers $\tilde{\varepsilon}$ und der Fehlerkovarianzmatrix $\underline{\tilde{P}}$ durchgeführt:

$$\text{NEES}(\tilde{\varepsilon}(k), \underline{\tilde{P}}(k)) := \varepsilon(k) = \tilde{\varepsilon}(k)^T \underline{\tilde{P}}(k)^{-1} \tilde{\varepsilon}(k). \quad (9.7)$$

Eine sehr nützliche Eigenschaft von $\varepsilon(k)$ ist, dass $\varepsilon(k)$ Chi-Quadrat-verteilt ist mit $\dim(\tilde{\varepsilon}(k)) = n$ Freiheitsgraden. Das bedeutet, dass die Anzahl der Freiheitsgrade der Chi-Quadrat-Verteilung der Ordnung des zugrunde liegenden Systems entspricht. Dies gilt unter der Annahme, dass $\underline{x}(k)$ und $\tilde{x}(k)$ standardnormalverteilte Zufallsvariablen sind (siehe Abschn. 3.2.3).

Damit lässt sich nun der Hypothesentest durchführen. Die Hypothese lautet

$$H_0 : \text{Der Schätzfehler } \tilde{\varepsilon}(k) \text{ ist konsistent mit der Kovarianzmatrix des Filters } \underline{\tilde{P}}(k). \quad (9.8)$$

Naturgemäß ist die Hypothese H_0 niemals zu 100 % wahr. Deshalb wird ein Konfidenzintervall $[r_1, r_2]$ so definiert, dass man mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1 - \alpha)$ der Hypothese H_0 vertrauen kann, d. h.

$$P(\varepsilon(k) \in [r_1, r_2] | H_0) = 1 - \alpha. \quad (9.9)$$

Das Konfidenzintervall $[r_1, r_2]$ wird mit der inversen kumulativen Verteilungsfunktion F_n^{-1} der Chi-Quadrat-Verteilung berechnet

$$r_1 = F_n^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad r_2 = F_n^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right). \quad (9.10)$$

9.2.1 Auswertung und Interpretation

In den meisten Fällen ist es ausreichend, den Hypothesentest qualitativ durchzuführen, indem man den $\text{NEES}(\varepsilon(k))$ in einem Diagramm aufträgt und visuell überprüft, ob der NEES innerhalb des Konfidenzintervalls $[r_1, r_2]$ liegt.

Quantitativ zählt man die Anzahl der NEES-Werte, die innerhalb des Konfidenzintervalls liegen, und setzt sie in Relation zur Gesamtanzahl $K \in \mathbb{N}^*$, also z. B. $\{1, 2, \dots, K\}$. Für ausreichend große K sollten mehr $\varepsilon(k)$ innerhalb des Konfidenzintervalls liegen als $(1 - \alpha)$. Formal festgelegt

$$\left(\frac{1}{K} \sum_{\forall k \in K : \varepsilon(k) \in [r_1, r_2]} 1 \right) \geq (1 - \alpha). \quad (9.11)$$

Ist der NEES größer als die Obergrenze r_2 , dann schätzt der Filter den Fehler geringer ein, als er in Wirklichkeit ist. Vorausgesetzt, dass das Messrauschen richtig gewählt wurde, wurde das Systemrauschen zu niedrig gewählt.

Ist das NEES kleiner als r_1 , dann wird der Fehler größer geschätzt, als er in Wirklichkeit ist. In diesem Fall wird der Filter als ineffizient bezeichnet. Das Systemrauschen wurde zu groß gewählt.

In beiden Fällen ist zu erwarten, dass ein inkonsistenter Zustandsschätzer den kleinstmöglichen Schätzfehler nicht erreicht.

9.2.2 Höhere statistische Signifikanz

Um die statistische Signifikanz zu erhöhen, können zusätzliche N unabhängige Stichproben von $\varepsilon(k)$ erzeugt und eine durchschnittliches normiertes Schätzfehlerquadrat (englisch: *average NEES (ANEES)*) gebildet werden

$$\text{ANEES}(\varepsilon_i(k)) := \bar{\varepsilon}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i(k). \quad (9.12)$$

$\bar{\varepsilon}$ hat die Eigenschaft, dass zwar der Erwartungswert gegen n konvergiert, aber nicht $\bar{\varepsilon}$, sondern $N \cdot \bar{\varepsilon}$ Chi-Quadrat-verteilt ist mit $N \cdot n$ Freiheitsgraden. Das Konfidenzintervall muss daher durch N normalisiert werden, d.h.

$$r_1 = \frac{1}{N} F_{N \cdot n}^{-1} \left(\frac{\alpha}{2} \right), \quad r_2 = \frac{1}{N} F_{N \cdot n}^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right). \quad (9.13)$$

Der Hypothesentest wird auf die gleiche Weise wie oben beschrieben durchgeführt.

Teil IV

Anwendungsbeispiele



Prinzipielles Vorgehen

10

Bei dem Entwurf des Kalman-Filters im einführenden Beispiel wurde schon eine Methodik sichtbar, mit der sich viele Kalman-Filter entwickeln lassen. Diese Methodik (Kochrezept) und die hierfür notwendigen Schritte sollen im Folgenden nochmals verdeutlicht werden.

10.1 Zeitkontinuierliche Systembeschreibung

Zur Modellierung eines physikalischen Systems ist es notwendig, dies in Form von Differenzialgleichungen zu beschreiben. Ist das System vollständig mithilfe eines Satzes von Differenzialgleichungen beschrieben, werden die messtechnisch erfassbaren Größen bestimmt. Diese legen den Ausgangsvektor $\underline{y}(t)$ fest. Hierbei sollte in der Regel darauf geachtet werden, dass alle rauschbehafteten Größen dem Ausgangsvektor zugeordnet werden. Nicht rauschbehaftete Größen werden dem Eingangsvektor $\underline{u}(t)$ zugewiesen. Dies ist der Modellierung des physikalischen Systems geschuldet, welches nur seine Ausgangsgröße mit einem Messrauschen überlagert. Die Eingangsgröße $\underline{u}(t)$ wird mit keinem zusätzlichen Messrauschen bedacht. Ein Beispiel für eine rauschfreie Eingangsgröße könnte ein System sein, welches die Erdbeschleunigung nutzt.

Als Nächstes wird die Zustandsvariable $\underline{x}(t)$ gewählt, wobei es oft mehrere Möglichkeiten gibt. Nach deren Wahl wird die Ableitung der Zustandsvariable $\dot{\underline{x}}(t)$ bestimmt. Hierdurch ergibt sich die Matrix \underline{G} des Systemrauschens. Es ist oft sinnvoll, mehrere Ansätze mit verschiedenen Zustandsvariablen durchzurechnen und sich dann für den besten Ansatz für das jeweilige Problem zu entscheiden. Aus Sicht der Rechengeschwindigkeit ist es sinnvoll, den Zustandsvektor so klein wie möglich zu halten. Jede zusätzliche Größe, die im Zustandsvektor hinzugefügt wird, lässt den späteren Rechenaufwand überproportional stark steigen. Für die Minimierung von Modellierungsungenauigkeiten ist oft ein Modell mit einer größeren Anzahl von Zustandsgrößen von Vorteil.

Am Ende liegt nun ein System der Form vor, bei dem die Systemmatrix \underline{A} , die Eingangsmatrix \underline{B} , die Ausgangsmatrix \underline{C} , die Durchgangsmatrix \underline{D} , die Matrix \underline{G} des Systemrauschen und die Zustandsvariable $\underline{x}(t)$ bestimmt wurden.

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t) + \underline{G} \cdot \underline{z}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{D} \cdot \underline{u}(t)\end{aligned}$$

10.2 Zeitdiskrete Systembeschreibung

Nachdem die Systembeschreibung im Zeitkontinuierlichen vorliegt, kann diese mithilfe der beiden Gleichungen

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s}, \quad \underline{B}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{B} dv \quad \text{bzw.} \quad \underline{B}_d = \underline{A}_d \cdot \underline{B}$$

in eine zeitdiskrete Systembeschreibung überführt werden. T_s ist hierbei die konstante Abtastzeit des Systems.

Die Matrizen \underline{C} und \underline{D} bleiben im Zeitdiskreten unverändert und sind somit im kontinuierlichen System als auch im zeitdiskreten System identisch.

Zur Bestimmung der Matrix \underline{G}_d gibt es mehrere Formeln, denen jeweils unterschiedliche Annahmen zugrunde legen. Drei dieser verschiedenen Berechnungsmethoden wurden im Kap. 8 vorgestellt. Die Methode 1 basiert auf der direkten Diskretisierung des Systemrauschen, die Methode 2 geht davon aus, dass innerhalb des Abtastintervalls ein partielles konstantes Systemrauschen vorliegt und die Methode 3 diskretisiert das zeitkontinuierliche Modell. Tab. 10.1 gibt einen Überblick über diese vorgestellten Verfahren der Matrix \underline{G}_d bzw. bei der dritten Methode des Produkts $\underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T$.

Tab. 10.1 Varianten zur Berechnung der Matrix \underline{G}_d

Methode	Modellannahme im Abtastintervall $n \cdot T_s \leq t < (n+1) \cdot T_s$	Berechnung
1	Abtastung durch Dirac-Impuls $z_d(t) = z(n \cdot T_s) \cdot \delta(t - n \cdot T_s)$	$\underline{G}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{G}$
2	Systemrauschen innerhalb Abtastintervalls konstant	$\underline{G}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{G} dv$
3	weißes, mittelwertfreies Systemrauschen, dessen Autokorrelationsfunktion ein Dirac-Impuls mit $\underline{q}(k) \cdot \delta(t - \tau)$ ist	$\begin{aligned}\underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T &= \\ \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v_1} \cdot \underline{G} \cdot \underline{G}^T \cdot (e^{\underline{A} \cdot v_1})^T dv_1 \cdot \underline{q}(k)\end{aligned}$

Es ist angemerkt, dass es nicht zwingend notwendig ist, das System zuerst im Zeitkontinuierlichen zu beschreiben und dann in eine zeitdiskrete Systembeschreibung zu überführen. Es gibt Aufgabenstellungen, die sich leichter direkt im Zeitdiskreten bzw. nur dort beschreiben lassen. Bei solchen Problemstellungen ist es sinnvoll, direkt die zeitdiskrete Systembeschreibung aufzustellen.

10.3 Beobachtbarkeit

Sobald die Beschreibung eines Systems im Zustandsraum vorliegt, kann eine Überprüfung der Beobachtbarkeit stattfinden. Das bekannteste Kriterium zur Überprüfung der Beobachtbarkeit ist das von R. E. Kalman (siehe Abschn. 2.3.1). Dies besagt, dass ein lineares zeitinvariantes System der Ordnung n dann beobachtbar ist, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix S_B bzw. S_B^* den Rang n besitzt. Neben diesem sehr bekannten Kriterium existieren noch das Beobachtbarkeitskriterium von Gilbert und das von Hautus (siehe [1]).

Ist ein System nicht vollständig beobachtbar, kann das System in ein beobachtbares und in ein nicht beobachtbares System aufgeteilt werden. Details hierzu siehe [1].

Es kann sein, dass manche Systeme, welche im Zeitkontinuierlichen noch beobachtbar sind, bei bestimmten Abtastzeiten nicht mehr beobachtbar sind. Es ist deshalb sinnvoll, die Überprüfung der Beobachtbarkeit mit der Beobachtbarkeitsmatrix S_B^* durchzuführen.

Der Nachweis der Beobachtbarkeit für nichtlineare Systeme ist nicht trivial, Näheres siehe [2].

10.4 Bestimmung des System- und Messrauschen

Durch die Modellbildung wurden dessen Ungenauigkeiten durch das Systemrauschen beschrieben. Im Folgenden muss das Systemrauschen näher charakterisiert werden. Dieses wird durch dessen Varianz $\underline{Q}(k) = \text{Var}(\underline{z}(k))$ beschrieben.

Für viele Anwendungen genügt es, die Kovarianz des Systemrauschen $\underline{Q}(k)$ im Vorfeld abzuschätzen und sie während der Berechnung des Kalman-Filters als konstant anzusehen.

Bei der Schätzung der Kovarianz des Systemrauschen ist zu beachten, dass je nach Wahl der zugehörigen Methode beim Schritt *zeitdiskrete Systembeschreibung* das Rauschen eine unterschiedliche physikalische Größe beschreibt (siehe hierzu die Beispiele in Kap. 12).

Die Varianz des Messrauschen $\underline{R}(k) = \text{Var}(\underline{v}(k))$ kann z. B. durch eine vorige Messung der messtechnisch zugänglichen Größen geschätzt werden. Ist anzunehmen, dass sich das Messrauschen über die Zeit nicht verändert, dann lässt sich die Berechnung der Kalman-Verstärkung \underline{K} und der Kovarianzmatrix $\hat{\underline{P}}$ bzw. $\tilde{\underline{P}}$ vorab bestimmen. Dies reduziert im erheblichen Maße die Rechenzeit des Kalman-Filters (siehe Abschn. 14.2).

Ist davon auszugehen, dass sich die Varianz des Messrauschens $\underline{R}(k)$ über die Zeit verändert, ist diese Varianz adaptiv zu bestimmen. Ein Ansatz hierzu ist im Kap. 6 beschrieben.

Beim Messrauschen liegt die Annahme zugrunde, dass der Erwartungswert des Messrauschens $E(\underline{v}(k)) = \underline{0}$ ist. Da für manche Problemstellungen diese Annahme nicht gilt, kann bei einem Messrauschen mit einem Erwartungswert $E(\underline{v}(k)) \neq \underline{0}$ das Messrauschen in einen mittelwertfreien Teil und in einen unbekannten Offset aufgeteilt werden. Die Zustandsvariable $\underline{x}(k)$ wird dann um den Offset des Messrauschens erweitert (siehe Beispiel in Kap. 13).

10.5 Gütemaße

Nach und während der Anwendung eines Kalman-Filters helfen Gütemaße, die Leistung zu bewerten und zu optimieren.

Von primärem Interesse ist es, den Schätzfehler so klein wie möglich zu halten. Hierfür eignet sich der mittlere quadratische Fehler (RMSE) aus Abschn. 9.1. Die Auswertung des Schätzfehlers ermöglicht eine objektive Bewertung der Genauigkeit der Schätzung. Dadurch können verschiedene Systemmodelle und Parametrisierungen des Kalman-Filters verglichen werden. Zusätzlich bietet dies die Möglichkeit einer Fehlerquellenidentifikation. Ist der RMSE ungewöhnlich hoch, kann dies auf systematische Fehler hinweisen, die behoben werden müssen.

Für die Bewertung und Optimierung der Kovarianzmatrix des Schätzfehlers eignen sich das normalisierte Schätzfehlerquadrat (NEES) und das mittlere normalisierte Schätzfehlerquadrat (ANEES) aus Abschn. 9.2. Hierzu werden der Schätzfehler $\tilde{\underline{\epsilon}}$ und die Kovarianzmatrix $\tilde{\underline{P}}$ verwendet. Mit dem NEES ist es möglich, die Konsistenz des Kalman-Filters zu bewerten. Dies ist wichtig, da nur ein konsistenter Zustandsschätzer den kleinstmöglichen Schätzfehler erreicht. Vorausgesetzt, dass das Messrauschen richtig gewählt ist und der NEES oder ANEES nicht ausreichend innerhalb des Konfidenzintervalls $[r_1, r_2]$ liegt, wurde das Systemrauschen zu hoch oder zu niedrig gewählt (Tab. 10.2).

Tab. 10.2 Zusammenfassung der Berechnung der Gütemaße

Gütemaße	Berechnung
RMSE	$RMSE(\tilde{\underline{\epsilon}}(k)) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{\epsilon}_1^i(k)^2 + \dots + \tilde{\epsilon}_n^i(k)^2)}$
NEES	$NEES(\tilde{\underline{\epsilon}}(k), \tilde{\underline{P}}(k)) := \epsilon(k) = \tilde{\underline{\epsilon}}(k)^T \tilde{\underline{P}}(k)^{-1} \tilde{\underline{\epsilon}}(k)$ $r_1 = F_n^{-1}(\frac{\alpha}{2}), r_2 = F_n^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$
ANEES	$ANEES(\epsilon_i(k)) := \bar{\epsilon}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \epsilon_i(k)$ $r_1 = \frac{1}{N} F_{N \cdot n}^{-1}(\frac{\alpha}{2}), r_2 = \frac{1}{N} F_{N \cdot n}^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$

Literatur

1. LUNZE, J. : *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. 4., neu bearbeitete Auflage. Berlin, Heidelberg, New York : Springer Verlag, 2006 (Studium). – ISBN 978 – 3 – 540 – 32335 – 8
2. ADAMY, J. : *Nichtlineare Systeme und Regelungen*. 3. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2018. – ISBN 978–3–662–55684–9



Beispiel: Bias-Schätzung

11

Mit diesem Beispiel soll der Entwurf und die Arbeitsweise eines Kalman-Filters in einfacher Weise dargelegt werden. Grundlage ist die im vorigen Kapitel vorgestellte Methodik zum Entwurf eines Kalman-Filters.

Die Aufgabe des Kalman-Filters soll es sein, einen unbekannten Bias eines verrauschten Signals abzuschätzen. Bekannt ist von dem Signal, dass sich der Bias über die Zeit nur langsam ändert. Des Weiteren ist davon auszugehen, dass die Varianz des Messrauschenens sich zunächst nicht ändert. Abgetastet wird das Signal alle 10 ms. Die Abb. 11.1 zeigt den Verlauf dieses Signals.

11.1 Filterentwurf

Zeitkontinuierliche Systembeschreibung

Mithilfe der Kenntnis, dass sich der unbekannte Bias des Signals nur sehr langsam ändert, lässt sich ein einfaches Modell des physikalischen Systems entwerfen. Die unbekannte Konstante (Bias) wird den Zustandsvariablen $x(t)$ zugeordnet.

$$x(t) = \text{const.} \quad (11.1)$$

Die Ableitung der Zustandsvariablen $\dot{x}(t)$ ist null. Mögliche kleinere Änderungen (Systemungenaugkeiten) werden durch die Zufallsvariable $z(t)$ berücksichtigt

$$\dot{x}(t) = 0 + z(t). \quad (11.2)$$

Die Zustandsraumbeschreibung eines solchen Modells ist:

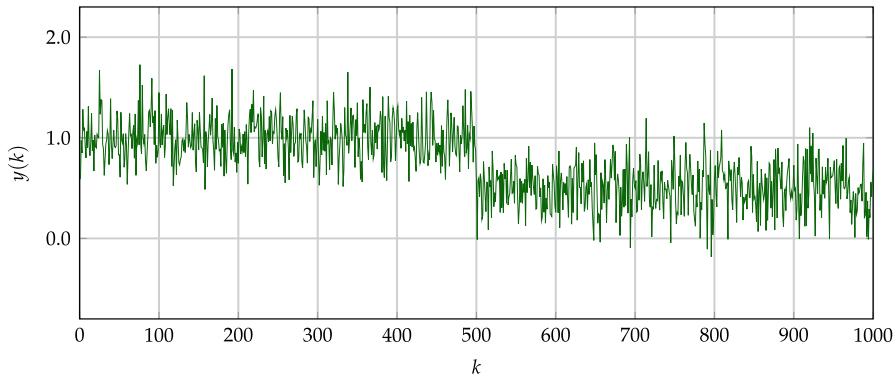


Abb. 11.1 Verlauf eines verrauschten Signals mit unbekanntem Bias

$$\dot{x}(t) = \underbrace{0}_A \cdot x(t) + \underbrace{0}_B \cdot u(t) + \underbrace{1}_G \cdot z(t) \quad (11.3)$$

$$y(t) = \underbrace{1}_C \cdot x(t) + \underbrace{0}_D \cdot u(t). \quad (11.4)$$

Zeitdiskrete Systembeschreibung

Nachdem die Systembeschreibung im Zeitkontinuierlichen vorliegt, wird das Modell in eine zeitdiskrete Systembeschreibung überführt, dessen Ausgangssignal alle T_s Sekunden abgetastet wird. Für A_d gilt:

$$A_d = e^{A \cdot T_s} = e^{0 \cdot T_s} = 1. \quad (11.5)$$

Die Eingangsmatrix berechnet sich in diesem Beispiel zu:

$$B_d = \int_0^{T_s} e^{A \cdot v} \cdot B \, dv = \int_0^{T_s} e^0 \cdot 0 \, dv = 0. \quad (11.6)$$

Die Ausgangsmatrix C und Durchgangsmatrix D sind in der zeitkontinuierlichen und der zeitdiskreten Systembeschreibung gleich.

Beobachtbarkeit

Die Überprüfung der Beobachtbarkeit geschieht durch die Beobachtbarkeitsmatrix S_B^* . Das vorliegende System hat die Dimension $n=1$ (Länge der Zustandsvariable), somit ist der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix S_B^* in diesem Beispiel definiert zu:

$$\text{Rang}(\underline{S}_B^*) = \text{Rang} \begin{pmatrix} \underline{C} \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d^{n-1} \end{pmatrix} = \text{Rang}([C]) = \text{Rang}([1]) = 1. \quad (11.7)$$

Der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix ist gleich der Anzahl der Elemente der Zustandsvariable $\underline{x}(k)$ ($n=1$) und somit ist das System beobachtbar.

Bestimmung des System- und Messrauschen

Als Erstes müssen die Größen G_d und $G_d \cdot Q(k) \cdot G_d$ bestimmt werden. Hierbei wurden im Kap. 8 drei Verfahren vorgestellt.

Methode 1: Direkte Diskretisierung

Um Verwechslungen zu vermeiden, erhält das Systemrauschen, welches mit der Methode 1 bestimmt wird, den Index 1.

Mit diesem Verfahren folgt $G_d = A_d \cdot G = 1 \cdot 1 = 1$

und für $G_d \cdot Q(k) \cdot G_d^T = 1 \cdot Q(k) \cdot 1 = \text{Var}(z_1(k))$.

Somit gilt für das zeitdiskrete System:

$$x(k+1) = \underbrace{1}_{A_d} \cdot \underline{x}(k) + \underbrace{0}_{B_d} \cdot u(t) + \underbrace{1}_{G_d} \cdot z_1(k) = x(k) + z_1(k) \quad (11.8)$$

$$y(k) = \underbrace{1}_{C} \cdot x(k) + \underbrace{0}_{D} \cdot u(k) + v(k) = x(k) + v(k). \quad (11.9)$$

Als Nächstes muss versucht werden, den Verlauf der Größe $z_1(k)$ möglichst genau abzuschätzen. Diese Abschätzung soll mit einer sehr starken Vereinfachung verdeutlicht werden.

Bei Betrachtung des Signals $y(k)$ aus Abb. 11.1 kann man annehmen, dass sich das Signal $y(k)$ nach Gl. (11.9) aus einem Messrauschein $v(k)$ und dem unbekannten Bias, der durch die Größe $x(k)$ beschrieben wird, zusammensetzt (siehe Abb. 11.2).

Hierbei ist es nicht von großer Bedeutung, ob das Signal $x(0)$ wie in der Abb. 11.2 bei 1.0 startet oder einen anderen Wert hat. Wichtiger ist die Kenntnis, dass sich das Signal bei ca. $k = 500$ um ca. 0.5 erniedrigt und sonst konstant ist (siehe Abb. 11.3). Mit Gl. (11.8) $x(k+1) = x(k) + z_1(k)$ folgt für den Verlauf der Größe $z_1(k)$:

$$z_1(k) = \begin{cases} 0.0 & \text{für } k \neq 500 \\ -0.5 & \text{für } k = 500. \end{cases} \quad (11.10)$$

Für das Kalman-Filter wird lediglich die Varianz $Q(k)$ der Zufallsgröße $z_1(k)$ benötigt. Diese berechnet sich allgemein zu:

$$\text{Var}(z_1(k)) = E(z_1(k)^2) - E(z_1(k))^2. \quad (11.11)$$

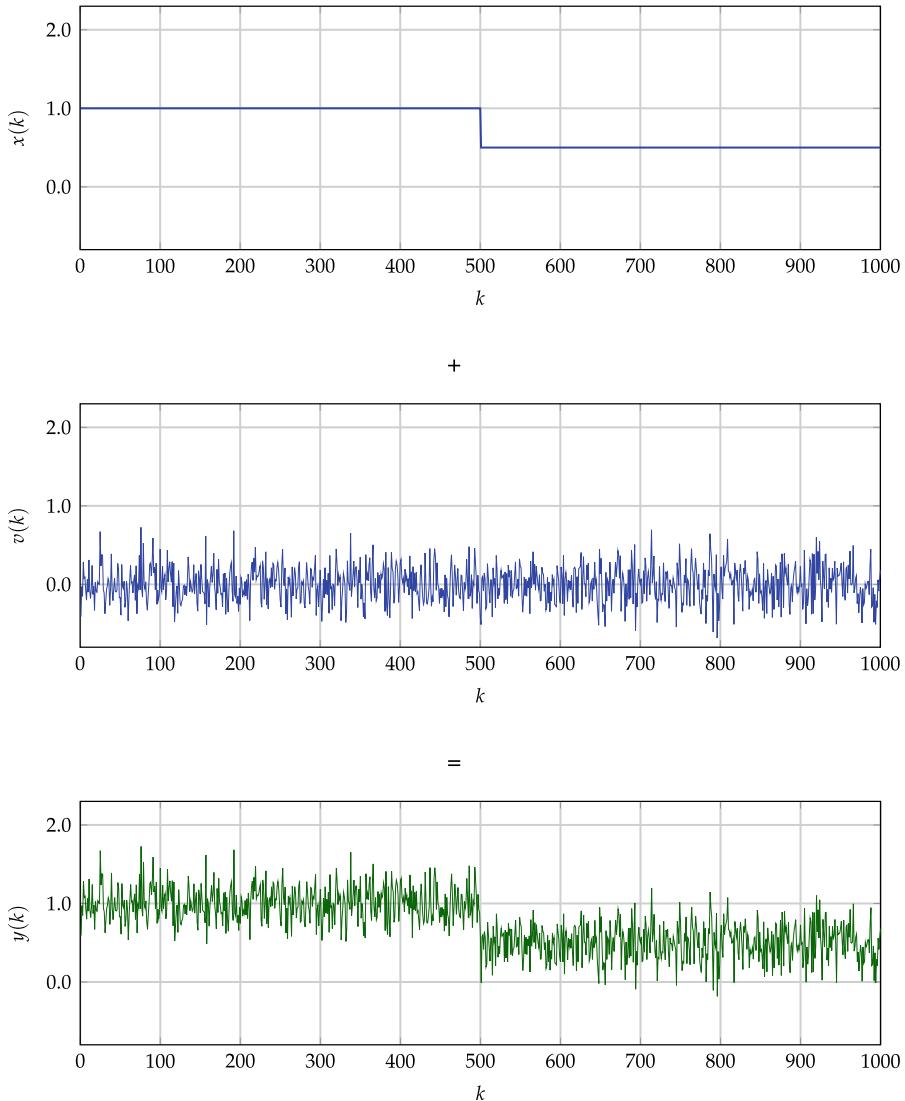


Abb. 11.2 Annahme des Aufbaus des verrauschten Signals mit unbekanntem Bias

Geht man davon aus, dass sich die Varianz Q des Systemrauschens über die Zeit nicht ändert, so lässt sich der Erwartungswert mit dem Mittelwert annähern. Die Größe Q lässt sich somit schreiben mit:

$$Q = \text{Var}(z_1) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N z_1(n)^2 - \left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N z_1(n) \right)^2. \quad (11.12)$$

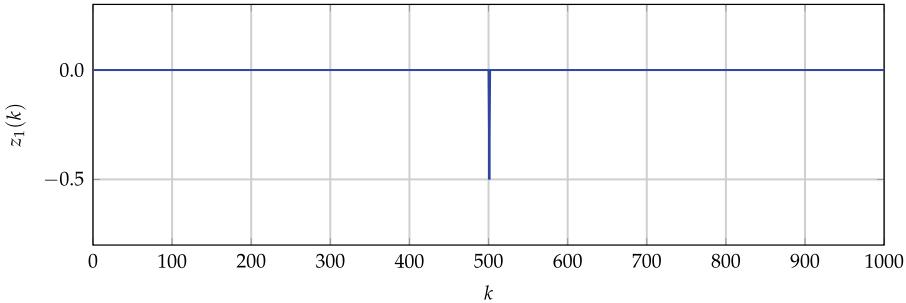


Abb. 11.3 Annahme des Verlaufs der Größe $z_1(k)$

In diesem Beispiel liegen $N = 1000$ Werte vor. Mit der Gl. (11.10) lässt sich die Varianz des Systemrauschen abschätzen.

$$Q = \frac{1}{1000} \cdot 0.5^2 - \left(\frac{1}{1000} \cdot 0.5 \right)^2 \approx 0.25 \cdot 10^{-3} \quad (11.13)$$

Methode 2: Partielles konstantes Rauschen

Bei dieser Methode berechnet sich \underline{G}_d zu: $G_d = \int_0^{T_s} e^{A \cdot v} \cdot G \, dv = \int_0^{T_s} e^0 \cdot 1 \, dv = T_s$.

Für das zeitdiskrete System gilt hier:

$$x(k+1) = \underbrace{1}_{A_d} \cdot \underline{x}(k) + \underbrace{0}_{B_d} \cdot u(t) + \underbrace{T_s}_{G_d} \cdot z_2(k) = x(k) + T_s \cdot z_2(k) \quad (11.14)$$

$$y(k) = \underbrace{1}_{C} \cdot x(k) + \underbrace{0}_{D} \cdot u(k) + v(k) = x(k) + v(k). \quad (11.15)$$

Es ist offensichtlich, dass die Größe $z_2(k)$ aus der Methode 2 eine andere Einheit als die Größe $z_1(k)$ aus Methode 1 hat. Bei der Methode 2 wird die Größe $z_2(k)$ mit der Abtastzeit T_s multipliziert, d. h., die Größe $z_2(k)$ beschreibt die Änderung des Systemrauschen innerhalb eines Abtastintervalls. Somit folgt bei den selben Annahmen/Überlegungen wie bei Methode 1 für die Größe $z_2(k)$:

$$z_2(k) = \begin{cases} +\frac{0.0}{T_s} & \text{für } k \neq 500 \\ -\frac{0.5}{T_s} & \text{für } k = 500. \end{cases} \quad (11.16)$$

Die Größe $z_2(k)$ lässt sich somit in diesem Beispiel in die Größe $z_1(k)$ mit $z_1(k) = z_2(k) \cdot T_s$ umrechnen. Folglich erhält man mit der Methode 2 die selben Ergebnisse wie mit der Methode 1.

Die Anwendung der Methode 3 macht in diesem Beispiel wenig Sinn, da aufgrund des angenommenen Verlaufs der Größe $z(k)$ es sich nicht um weißes, mittelwertfreies Rauschen handelt.

Mithilfe der Abb. 11.2 lässt sich die Varianz des Messrauschens \underline{R} bestimmen. Mit der Annahme, dass in diesem Beispiel die Varianz des Messrauschens konstant ist und der Erwartungswert des Messrauschens $v(k) = 0$ ist, lässt sich die Varianz des Messrauschens \underline{R} bestimmen.

Mit den Werten aus Abb. 11.2 wird die Varianz des Messrauschens geschätzt zu:

$$\underline{R} = \text{Var}(v) = E(v^2) = \frac{1}{400} \cdot \sum_{n=601}^{1000} v(n)^2 \approx 0.06. \quad (11.17)$$

11.2 Kalman-Filter

Für die Berechnung des Kalman-Filters werden die aus dem Kap. 5 hergeleiteten Formeln verwendet:

$$\begin{aligned} \underline{K}(k) &= \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot (\underline{C} \cdot \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k))^{-1} \\ \tilde{x}(k) &= \hat{x}(k) + \underline{K}(k) \cdot (\underline{y}(k) - \underline{C} \cdot \hat{x}(k) - \underline{D} \cdot \underline{u}(k)) \\ \underline{\tilde{P}}(k) &= (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \hat{P}(k) \\ \hat{x}(k+1) &= \underline{A}_d \cdot \tilde{x}(k) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k) \\ \hat{P}(k+1) &= \underline{A}_d \cdot \underline{\tilde{P}}(k) \cdot \underline{A}_d^T + \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T. \end{aligned}$$

In diesem Beispiel reduzieren sich die Matrizen zu Skalaren und es folgt mit den Größen $A_d = 1$, $B_d = 0$, $C = 1$, $D = 0$ und $G_d = 1$ und der Annahme, dass sich die Varianz des Systemrauschens Q und die Varianz des Messrauschens R nicht über die Zeit verändern:

$$K(k) = \hat{P}(k) \cdot (\hat{P}(k) + R)^{-1} \quad (11.18)$$

$$\tilde{x}(k) = \hat{x}(k) + K(k) \cdot (\underline{y}(k) - \hat{x}(k)) \quad (11.19)$$

$$\tilde{P}(k) = (1 - K(k)) \cdot \hat{P}(k) \quad (11.20)$$

$$\hat{x}(k+1) = \tilde{x}(k) \quad (11.21)$$

$$\hat{P}(k+1) = \tilde{P}(k) + Q. \quad (11.22)$$

Setzt man Gl. (11.19) in Gl. (11.21) und (11.20) in Gl. (11.22) ein, reduziert sich die Berechnung auf drei Gleichungen:

$$K(k) = \hat{P}(k) \cdot (\hat{P}(k) + R)^{-1} \quad (11.23)$$

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) + K(k) \cdot (y(k) - \hat{x}(k)) \quad (11.24)$$

$$\hat{P}(k+1) = (1 - K(k)) \cdot \hat{P}(k) + Q. \quad (11.25)$$

Einen guten Startwert stellen die Anfangsbedingungen $x(1) = y(1)$ und $P(1) = G_d \cdot Q \cdot G_d = Q$ dar.

MATLAB: Kalman-Filter Beispiel Bias mit konstantem System- und Messrauschen

```
load -ascii data_y.csv; y = data_y;

%%% INITIALISIERUNG KALMAN-FILTER %%%
R = 0.06;
Q = 0.00025;
x(1) = y(1);
P(1) = Q;

%%% ZYKLISCHE BERECHNUNG KALMAN-FILTER %%%
for k=1:length(y)
    K(k) = P(k) / (P(k) + R);
    x(k+1) = x(k) + K(k) * (y(k) - x(k));
    P(k+1) = (1 - K(k)) * P(k) + Q;
end
```

Mit dieser Anfangsbedingung und den Kalman-Filter-Gleichungen lässt sich der Verlauf des unbekannten Bias abschätzen. Der Verlauf ist in Abb. 11.4 abgebildet.

In Abb. 11.5 ist der Verlauf der Kalman-Verstärkung $K(k)$ und der Kovarianz des Schätzfehlers $\hat{P}(k)$ dargestellt. In diesem Beispiel konvergieren beide Werte schnell auf einen konstanten Wert.

Die Werte, gegen die die Kalman-Verstärkung $K(k)$ und die Kovarianz des Schätzfehlers $\hat{P}(k)$ in diesem Beispiel streben, lassen sich mit der folgenden Überlegung berechnen.

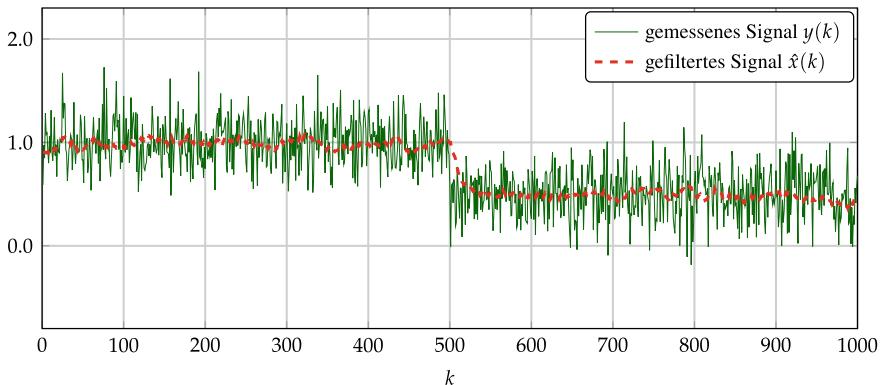


Abb. 11.4 Verlauf des verrauschten Signals des unbekannten Bias und des geschätzten Bias

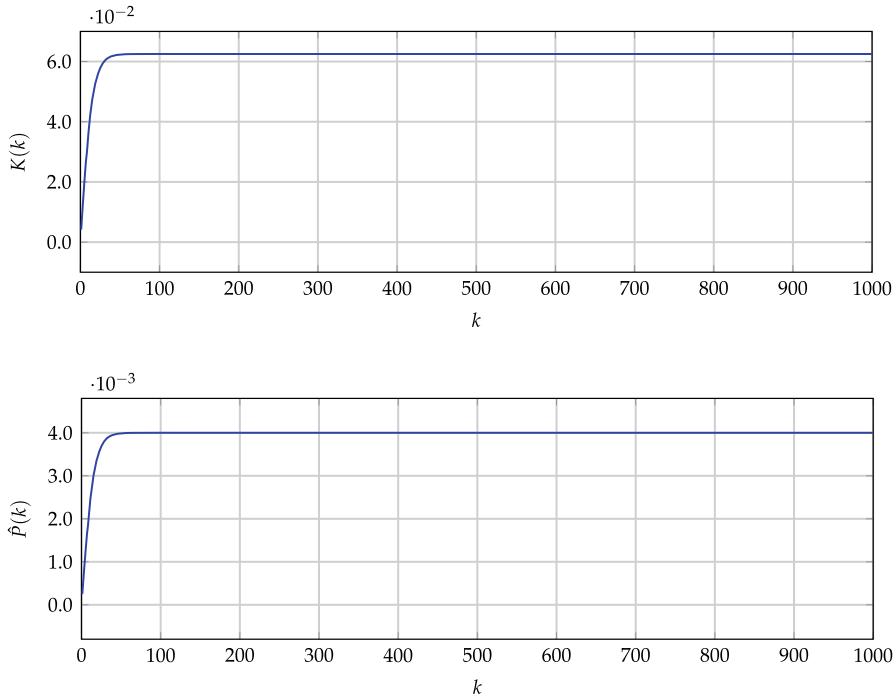


Abb. 11.5 Verlauf der Kalman-Verstärkung K und der Kovarianz des Schätzfehlers \hat{P}

Im eingeschwungenen Zustand gilt $\hat{P}(k+1) = \hat{P}(k) = \hat{P}$ und $K(k) = K$. Mit diesen beiden Zusammenhängen lässt sich Gl.(11.25) schreiben zu:

$$\hat{P} = \hat{P} - K \cdot \hat{P} + Q = \frac{Q}{K}. \quad (11.26)$$

Setzt man Gl.(11.26) in Gl.(11.23) ein und multipliziert die Gleichung mit K/R , folgt für $R \neq 0$:

$$K = \frac{\frac{Q}{K}}{\frac{Q}{K} + R} = \frac{\frac{Q}{R}}{\frac{Q}{R} + K}. \quad (11.27)$$

Umgeformt erhält man die quadratische Gleichung:

$$K^2 + \frac{Q}{R} \cdot K - \frac{Q}{R} = 0. \quad (11.28)$$

Da K nur positive Werte annehmen kann, hat diese quadratische Gleichung die Lösung:

$$K = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{R} + \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{Q}{R}\right)^2 + \frac{Q}{R}}. \quad (11.29)$$

In unserem Beispiel konvergiert somit für $R = 0.06$ und $Q = 0.00025$ die Kalman-Verstärkung K gegen:

$$K \approx 0.063.$$

Mithilfe der Gl. (11.26) lässt sich berechnen, dass die Kovarianz des Schätzfehlers \hat{P} gegen den folgenden Wert konvergiert:

$$\hat{P} = \frac{Q}{K} \approx \frac{0.00025}{0.063} \approx 0.004.$$

Aus Gl. (11.29) geht hervor, dass die Kalman-Verstärkung im eingeschwungenen Zustand nur von dem Verhältnis Q/R abhängt. In der Literatur (siehe [1], [2]) wird dieses Verhältnis auch als „*Target Maneuvering Index*“ oder „*Target Tracking Index*“ bezeichnet. Da es sich bei Q und R jeweils um Varianzen handelt, ist das Verhältnis Q/R stets positiv. Somit kann die Kalman-Verstärkung im eingeschwungenen Zustand nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen.

Der durch die Gl. (11.29) beschriebene Verlauf der Kalman-Verstärkung ist der Abb. 11.6 zu entnehmen.

Durch diese Überlegung liegt in diesem Beispiel die Kalman-Verstärkung im eingeschwungenen Zustand vor und es ist nicht mehr notwendig, diese adaptiv zu bestimmen. Somit reduziert sich die Berechnung des Kalman-Filters in diesem Beispiel auf die Gleichung:

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) + K \cdot (y(k) - \hat{x}(k)) \quad (11.30)$$

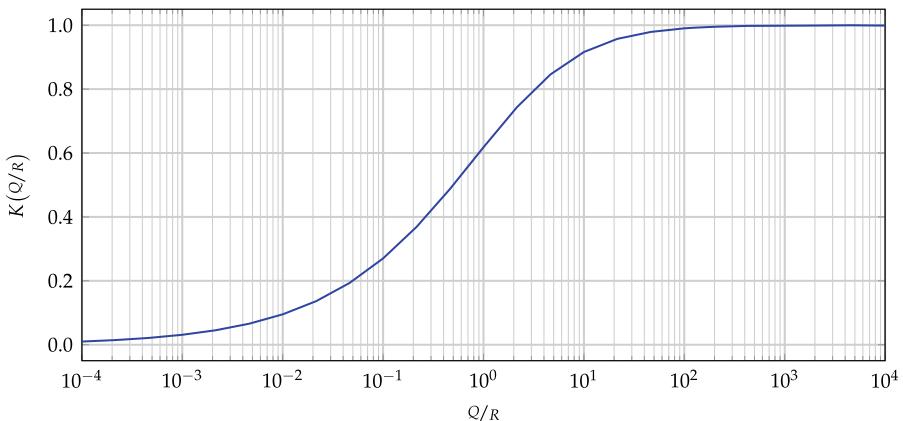


Abb. 11.6 Verlauf der Kalman-Verstärkung K in Abhängigkeit der Größe Q/R

mit

$$K = -0.5 \cdot Q/R + \sqrt{0.25 \cdot (Q/R)^2 + Q/R}.$$

MATLAB: optimiertes Kalman-Filter Beispiel Bias mit konstantem System- und Messrauschen

```
load -ascii data_y.csv; y = data_y;

%%% INITIALISIERUNG KALMAN-FILTER %%%
R = 0.06;
Q = 0.00025;

K = -0.5*Q/R + sqrt(0.25*(Q/R)^2 + Q/R);
P = Q/K;

x(1) = y(1);

%%% ZYKLISCHE BERECHNUNG KALMAN-FILTER %%%
for k=1:length(y)
    x(k+1) = x(k) + K*(y(k) - x(k));
end
```

11.3 Übergang in IIR-Filter 1. Ordnung

Betrachtet man das Filterergebnis aus Abb. 11.4, liegt die Frage nahe, ob ein herkömmliches Tiefpassfilter bei diesem Beispiel nicht dasselbe Ergebnis liefert hätte. Wird die Gl. (11.30) umgeformt:

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) + K \cdot (y(k) - \hat{x}(k)) = K \cdot y(k) + (1 - K) \cdot \hat{x}(k) \quad (11.31)$$

mit

$$K = -0.5 \cdot Q/R + \sqrt{0.25 \cdot (Q/R)^2 + Q/R},$$

so ist ersichtlich, dass es sich bei dem Kalman-Filter in diesem Beispiel um ein IIR-Filter (englisch: *infinite impulse response filter*) 1. Ordnung handelt.

Der „Filtergrad“ wird durch die Kalman-Verstärkung K bzw. durch das Verhältnis Q/R festgelegt (siehe Abb. 11.7). Bei Werten von $Q \ll R$ ergibt sich eine Kalman-Verstärkung von $K \approx 0$ und das Filter berücksichtigt nur unwesentlich aktuelle Messergebnisse, es ist $\hat{x}(k+1) \approx \hat{x}(k)$.

Ist $Q \gg R$ folgt für die Kalman-Verstärkung ein Wert $K \approx 1$ und $\hat{x}(k+1) \approx y(k)$. In diesem Fall „vertraut“ das Filter fast ausschließlich den aktuellen Messergebnissen und nicht dem gefilterten Wert. Mit anderen Worten: Das Modell ist zu schlecht. In solchen Fällen sollte das Modell verfeinert werden. Das Ziel sollte sein, ein Modell zu finden, bei dem $Q < R$ ist.

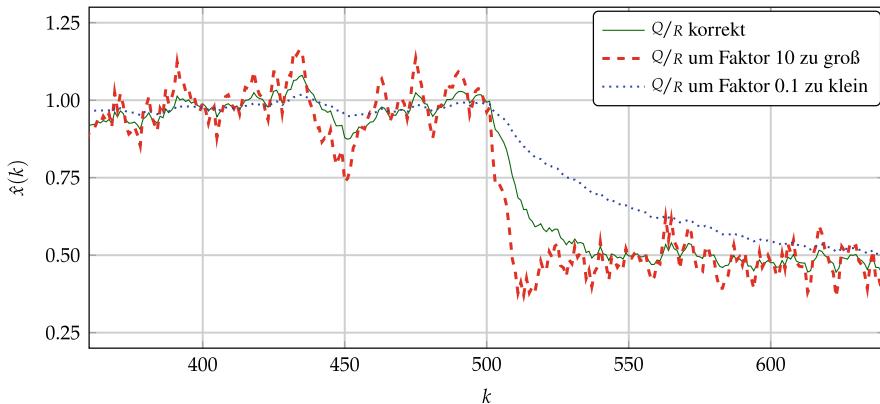


Abb. 11.7 Verlauf der Zustandsvariable $\hat{x}(k)$ in Abhängigkeit der Größe Q/R

11.4 ROSE-Filter

In dem zu Beginn des Kapitels vorgestellten Beispiel wurde die Annahme getroffen, dass sich die Varianz des Messrauschens nicht verändert. Für viele Problemstellungen stellt diese Annahme eine große Einschränkung dar.

Ebenso spielt bei der Bestimmung der Varianz des Systemrauschens der betrachtete Zeitkorridor eine große Rolle. Bei dem Beispiel wurde angenommen, dass sich alle 1000 Abtastwerte das Signal sich um 0.5 verändert. Hieraus wurde eine Schätzung über die mittlere Varianz des Systemrauschens getroffen. Bei genauerer Betrachtung wäre es aber korrekt gewesen, bei allen Zeitpunkten $k \neq 500$ die Varianz des Systemrauschens auf null zu setzen, da sich der Bias des Signals nicht ändert und der Modellierungsfehler somit null ist. Hingegen müsste bei der Signaländerung von 0.5 (bei $k = 500$) die Varianz des Systemrauschens einen Wert deutlich größer als 10^{-3} annehmen. Der zuvor konstante Wert von $Q \approx 0.25 \cdot 10^{-3}$ ist folglich nie korrekt.

Um ein optimal arbeitendes Kalman-Filter nutzen zu können, muss die Varianz des Messrauschens und im Speziellen die des Systemrauschens folglich adaptiv bestimmt werden. Zu diesem Zweck soll im Folgenden der Bias des in Abb. 11.8 mithilfe des ROSE-Filters abgeschätzt werden.

Für viele Problemstellungen ist es ausreichend, den Erwartungswert durch ein IIR-Filter 1. Ordnung zu ersetzen. Wie in dem Abschn. 11.3 gezeigt, entspricht dieses IIR-Filter 1. Ordnung einem Kalman-Filter. Mit anderen Worten wird der Erwartungswert durch eine Tiefpassfilterung (Mittelwertbildung) ersetzt.

Allgemein wird ein IIR-Filter 1. Ordnung durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$y(n) = b_0 \cdot x(n) + a_1 \cdot y(n-1). \quad (11.32)$$

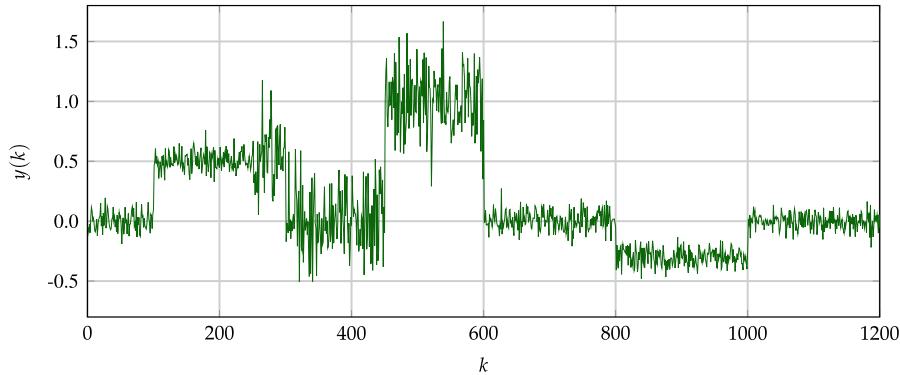


Abb. 11.8 Verlauf eines Signals mit veränderlichem Messrauschen

Die Größe x stellt die Eingangsgröße, y die Ausgangsgröße und b_0 und a_1 die Filterkoeffizienten des IIR-Filters dar. Da das Filter keine Verstärkung haben soll, ist die Summe der Filterkoeffizienten gleich 1. Ersetzt man $b_0 = \alpha$, so folgt für $a_1 = 1 - \alpha$. Die Größe α entspricht der Kalman-Verstärkung $\alpha = K$ (siehe Abschn. 11.3).

Für die Näherung der Varianz M folgt:

$$M(k) = E(\underline{\Delta y}(k) \cdot \underline{\Delta y}(k)^T) \approx \alpha_M \cdot \Delta y(k)^2 + (1 - \alpha_M) \cdot M(k - 1). \quad (11.33)$$

Ebenso lassen sich die beiden Erwartungswerte für die Bestimmung der Varianz des Messrauschens nähern:

$$E1(k) = E(\underline{y}(k)) \approx \alpha_R \cdot y(k) + (1 - \alpha_R) \cdot E1(k - 1) \quad (11.34)$$

$$EE1(k) = E(\underline{y}(k) \cdot \underline{y}(k)^T) \approx \alpha_R \cdot y(k) \cdot y(k)^T + (1 - \alpha_R) \cdot EE1(k - 1). \quad (11.35)$$

Mit der Variable α stellt man die Grenzfrequenz des Tiefpassfilters ein. Je kleiner der Wert α gewählt wird, desto schwächer reagiert das Filter auf Änderungen des Erwartungswerts. Auf der anderen Seite führt ein zu großer Wert dazu, dass der Erwartungswert zu ungenau bestimmt wird und somit das Kalman-Filter nicht mehr optimal arbeitet.

Sinnvoll ist es, den Wert α auch bei stark sich ändernden Erwartungswerten (Varianzen des Messrauschens) nicht größer als 0.5 zu wählen. Bei sich langsam ändernden Varianzen können kleinere Werte als 0.5 gewählt werden. Nach der Gl. (11.32) entspricht ein Wert von $\alpha = K = 0.5$ einem Verhältnis von $Q/R = 0.5$. Somit sollte

$$0 < \alpha \leq 0.5 \quad (11.36)$$

sein.

Für dieses Beispiel wurden die Werte $\alpha_R = 0.5$ und $\alpha_M = 0.3$ gewählt. Aufgrund der Näherung der Erwartungswerte durch ein Kalman-Filter (IIR-Filter) kann es im Speziellen bei großen Werten von α dazu kommen, dass Q kleiner null geschätzt wird. Diese Werte sind

unplausibel und werden auf null gesetzt. Aus dem selben Grund wird R oft zu klein abgeschätzt. Dieser Effekt wird mithilfe eines wählbaren Verstärkungsfaktors γ ausgeglichen. In diesem Beispiel wurde dieser auf 9.0 gewählt.

Anbei das entsprechende MATLAB®-Programm zur Berechnung des ROSE-Filters.

MATLAB: ROSE-Filter für Bias-Schätzung

```
clear all; clc;

Gamma      = 9.0;          % Verstärkungsfaktor Messrauschen
Alpha_R    = 0.5;          % Kalman-Verstärkung Varianz Messrauschen
Alpha_M    = 0.3;          % Kalman-Verstärkung Varianz M

Ts = 0.1;                 % Abtastzeit
Ad = 1;                   % Systemmatrix
Bd = 0;                   % Eingangsmatrix
C = 1;                    % Ausgangsmatrix
D = 0;                    % Durchgangsmatrix
G = 1;                    % Systemfehlermatrix

%%%% M E S S D A T E N - G E N E R A T O R %%%
t = Ts*(1:1:1200);
ao = [zeros(1,100) + 5.*ones(1,200) zeros(1,150) + 1.*ones(1,150)...
       zeros(1,200) - 3.*ones(1,200) zeros(1,200)];
Rg = 5E-3;
v = [sqrt(1*Rg)*randn(1,250) sqrt(10*Rg)*randn(1,350) sqrt(1+Rg)*randn(1,600)];
y = [ao + v];
u = zeros(1,length(y));

%%% I N I T   R O S E - F I L T E R %%%
x_dach = [y(1)];
p_tilde = 0;
E1 = y(1);
EE1 = y(:,1)*y(:,1)';
M = 0;

%%% R O S E - F I L T E R %%%
for k=1:length(y)
    %% Bestimmung R mit IIR-Filter 1. Ordnung --
    E1 = Alpha_R*y(:,k) + (1-Alpha_R)*E1;
    EE1 = Alpha_R*x_dach*k*y(:,k)' + (1-Alpha_R)*EE1;
    R = Gamma*(EE1 - E1*E1');

    %% Bestimmung M mit IIR-Filter 1. Ordnung --
    dy = y(:,k) - C*x_dach - D*u(k);
    M = Alpha_M.*dy*dy' + (1-Alpha_M).*M;

    %% Bestimmung Q --
    Q(k)= M - R - p_tilde;
    if Q(k)<0
        Q(k)=0;
    end;

    %% Kalman Gleichungen --
    p_dach = Ad*p_tilde*Ad' + Q(k);
    K = p_dach*C'*pinv(C*p_dach*C' + R);
    x_tilde = x_dach + K*dy;
    p_tilde = (eye(length(Bd)) - K*C)*p_dach;
    x_dach = Ad*x_tilde + Bd*u(k);

end
```

In Abb. 11.9 ist der Verlauf der durch die IIR-Filter geschätzten Varianzen des System- und des Messrauschen zu sehen. Bei dem Verlauf der Größe R ist deutlich der Anstieg der Varianz des Messrauschen zwischen $k = 250$ und $k = 600$ zu sehen. Das Rauschen auf

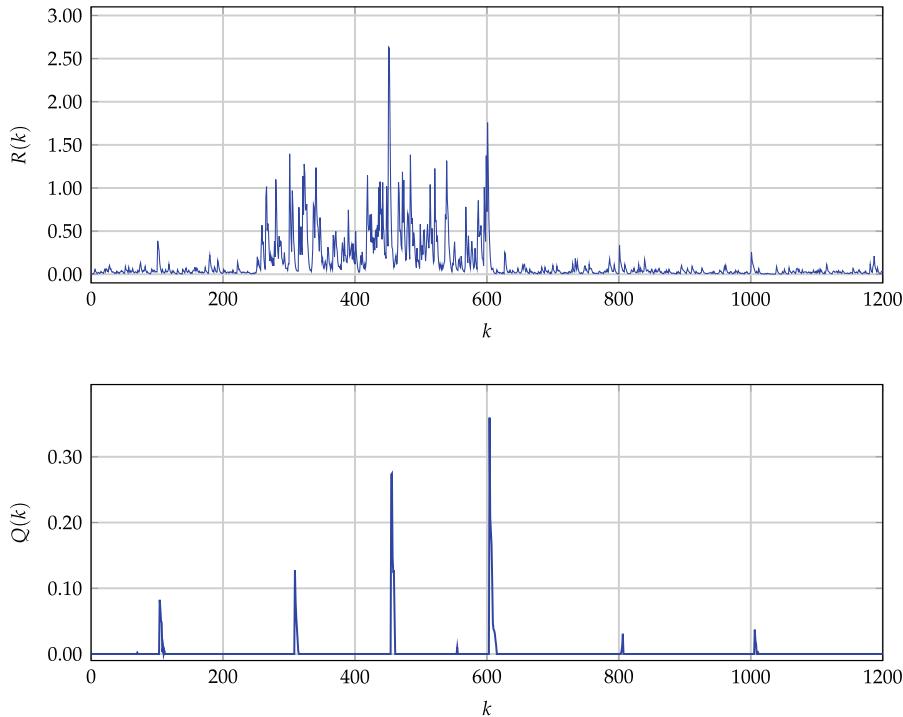


Abb. 11.9 Verlauf der Varianz des Messrauschens $R(k)$ und der Systemrauschens $Q(k)$

der Größe R stört das ROSE-Filter nur unwesentlich. Die Varianz des Systemrauschens Q wird sehr gut abgeschätzt. Die Größe Q ist, bis an den Sprungstellen des Signals $y(k)$, sehr klein.

Im Folgenden wird das Kalman-Filter mit festen Werten für R und Q verglichen mit dem ROSE-Filter, bei dem die beiden Größen adaptiv geschätzt werden (siehe Abb. 11.10). Es ist auffallend, dass über den kompletten Verlauf das ROSE-Filter bessere Ergebnisse als das klassische Kalman-Filter mit festen Werten für R und Q liefert. Dies wird im Bereich zwischen $k = 250$ und $k = 600$ besonders deutlich.

Abschließend ist in Abb. 11.11 das Eingangssignal $y(k)$ dem Ausgangssignal des ROSE-Filters gegenübergestellt.

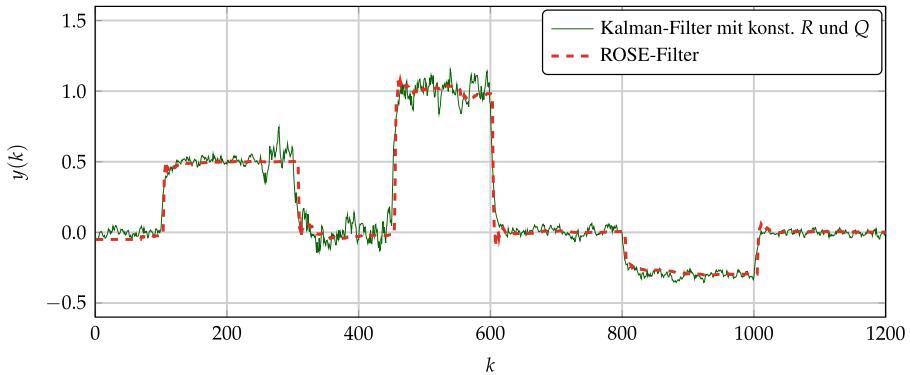


Abb. 11.10 Verlauf der Ausgangsgröße des Kalman-Filters mit festen Werten für R und Q und des ROSE-Filters

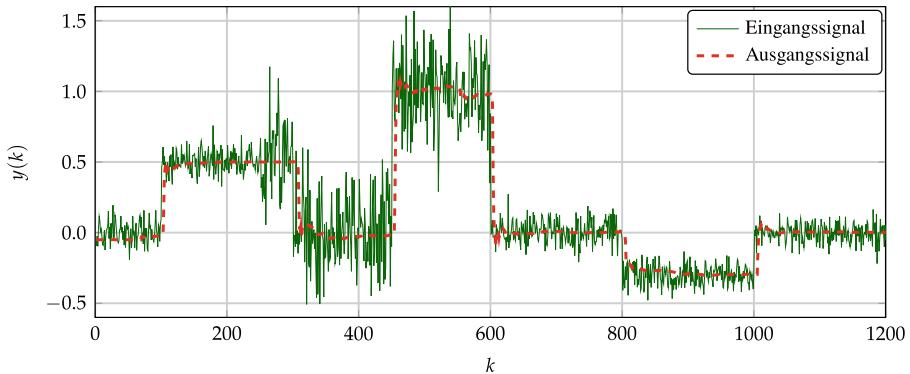


Abb. 11.11 Verlauf der Eingangs- und der Ausgangsgröße des ROSE-Filters

Literatur

1. KALATA, P. : The tracking index: A generalized parameter for $\alpha - \beta$ and $\alpha - \beta - \gamma$ target trackers. In: *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* AES-20 (1984), S. 174–182. <http://dx.doi.org/10.1109/TAES.1984.310438>. – DOI 10.1109/TAES.1984.310438. – ISSN 0018–9251
2. SIMON, D. : *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*. Hoboken and NJ : Wiley-Interscience, 2006. – ISBN 0 – 471 – 70858 – 5



Beispiel: Kinematische Modelle

12

Im Folgenden wird am Beispiel von verschiedenen kinematischen Modellen der Filterentwurf eines Kalman-Filters gezeigt. In der Literatur werden diese Modelle unterschieden in ein Modell 1., 2. und 3. Ordnung. Die Modelle 1. Ordnung werden in der englischen Literatur mit *constant offset model* bezeichnet. Modelle 2. Ordnung werden *constant velocity model* und die Modelle 3. Ordnung *constant acceleration model* genannt.

Der Filterentwurf eines Modells 1. Ordnung ist in Kap. 11 beschrieben. In diesem Kapitel wird der Entwurf eines Modells 2. und 3. Ordnung sowie der im Kap. 8 unterschiedlichen Verfahren zur Beschreibung des Systemrauschen vorgestellt. Für jedes dieser beiden Modelle werden drei Verfahren zur Diskretisierung beschrieben. Jedes der nachfolgenden Modelle besitzt eine unterschiedliche Kovarianzmatrix für das Systemrauschen. Keine der Matrizen ist falsch und keines der Modelle kann die Realität exakt abbilden. Es ist deshalb wichtig, an dieser Stelle hervorzuheben, dass die Modelle nur Näherungen sind.

12.1 Modellierung

Unter Kinematik versteht man die Beschreibung von Vorgängen im Zusammenhang mit der Bewegung von Körpern. In der einfachsten Form werden als Zustände der zurückgelegte Weg s , die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a in Abhängigkeit zur Zeit t betrachtet.

Das Kalman-Filter ist für die Schätzung dieser Zustände besonders geeignet. Es ist deshalb kein Wunder, dass in vielen Anwendungen ein Kalman-Filter verwendet wird, der die genannten Größen schätzt.

Die Anwendungsfelder, in denen man kinematische Modelle findet, lassen sich in zwei Gebiete gliedern. Zu einem in der Beschreibung der eigenen Bewegung. Die Notwendigkeit dieses Wissens geht bis in die frühzeitliche Seefahrt zurück, in der das Wissen über die eigene Position für die Navigation wichtig war. In heutigen Anwendungen werden dazu hauptsächlich mikro-elektrisch-mechanische Inertialsensoren verwendet, mit denen es auch

ohne GPS möglich ist, die eigene Bewegung zu bestimmen. Hierbei wird auch von der inertialen Navigation oder Trägheitsnavigation gesprochen.

Das zweite wichtige Anwendungsgebiet stellt die Beobachtung und Verfolgung von anderen Objekten dar. Diese Aufgabe wird dem Themenkomplex Tracking zugeordnet, die zum Beispiel in der Radartechnik zum Einsatz kommen. Viele der bekannten Modelle haben ihren Ursprung aus der militärischen und zivilen Luftraumüberwachung. Diese Modelle lassen sich jedoch auch für die Beschreibung der Bewegung des eigenen Körpers anwenden.

Es existiert eine Vielzahl von Modellen für die Beschreibung von kinematischen Bewegungen. Dieses Kapitel beschränkt sich auf die wichtigsten. Eine Ursache für die Vielfalt an Modellen ist, dass jedes Modell eine andere Annahme über die Art der Bewegung tätigt.

Eine solche Annahme ist zum Beispiel, dass zwischen zwei Abtastschritten die Beschleunigung als konstant angenommen wird. Diese Vereinfachung führt so zu einem eingängigen Modell, jedoch mit der möglichen Konsequenz, dass eine Bewegung nur ungenau beschrieben wird. Je besser das Modell der Realität entspricht, desto bessere Ergebnisse lassen sich erzielen. Solche Modelle erfordern jedoch weitreichende Kenntnisse über die Art der Bewegung. Dieses Wissen ist in der Praxis meist unbekannt. In der Praxis muss deshalb abgewogen werden, welchen Nutzen ein aufwendigeres Modell gegenüber dem mathematischen Aufwand und dessen Realisierung in einem Mikrocontroller bringt.

Eine Vereinfachung, die fast alle Modelle gemeinsam haben, ist, dass ein Objekt als Massenpunkt betrachtet wird. Diese Vereinfachung macht gerade im Anwendungsfall der Objektverfolgung Sinn, da das zu beobachtende Objekt im Verhältnis zum überwachten Raum sehr klein ist.

Eine weitere Annahme, die bei diesen Modellen gilt, ist, dass jede Raumkoordinatenachse unabhängig voneinander betrachtet wird. Diese Vereinfachung reduziert die Größe der Matrizen und somit den Rechenaufwand. Ein Modell kann so für jede Raumachse getrennt berechnet werden.

Es ist zu beachten, dass diese Unabhängigkeit der Bewegung zu den einzelnen Koordinatenachsen in der Realität nicht korrekt ist. Stellt man sich ein Auto vor, dass sich durch eine Kurve bewegt, so treten Abhängigkeiten zu den einzelnen Raumrichtungen aufgrund von Kräften wie der Fliehkraft auf. Möchte man diese Abhängigkeiten berücksichtigen, benötigt man jedoch nichtlineare Modelle (im Automobilbereich wird dazu häufig das Einspurmodell verwendet). In Anbetracht des Aufwands von nichtlinearen Modellen und einem nichtlinearen Kalman-Filter führt dieses Vorgehen nicht grundsätzlich zu einem besseren Schätzergebnis.

Verantwortlich für die Bewegung ist die Beschleunigung. Innerhalb der Zustandsraumbeschreibung würde man daher die Beschleunigung der Steuergröße u zuordnen. In den meisten Fällen ist die Beschleunigung, die auf ein System wirkt, jedoch unbekannt. Es ist deshalb üblich, die Beschleunigung durch einen zufälligen Prozess zu modellieren. Der einfachste Ansatz verwendet weißes, mittelwertfreies Rauschen als Ursache der Bewegung. In den folgenden Abschnitten werden Modelle vorgestellt, bei denen die Ursache der Bewegung (weißes) Rauschen ist.

12.2 Kinematisches Modell 2. Ordnung

Zeitkontinuierliche Systembeschreibung

Modelle 2. Ordnung werden dann verwendet, wenn sich ein Objekt mit nahezu konstanter Geschwindigkeit bewegt (in der anglistischen Literatur findet man hierzu den Begriff *constant velocity model*). Kleinere Änderungen in der Geschwindigkeit werden durch die Rauschgröße $z(t)$ modelliert. Setzt man als physikalisches Modell eine Punktmasse des bewegten Objekts voraus, lässt sich das System durch die folgenden beiden Gleichungen $v(t) = \dot{s}(t)$ und $a(t) = z(t)$ beschreiben.

Wählt man die Zustandsvariable zu:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (12.1)$$

und wird angenommen, dass die Position messtechnisch erfassbar ist, so lässt sich ein kinematisches Modell 2. Ordnung im Zustandsraum beschreiben durch:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{s}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \cdot u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{G}} \cdot z(t) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \cdot u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{G}} \cdot z(t) \end{aligned} \quad (12.2)$$

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) &= s(t) = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + [0] \cdot u(t) \\ &= \underbrace{[1 \ 0]}_{\underline{C}} \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{[0]}_{\underline{D}} \cdot u(t). \end{aligned} \quad (12.3)$$

Zeitdiskrete Systembeschreibung

Nachdem die Systembeschreibung im Zeitkontinuierlichen vorliegt, wird das Modell in eine zeitdiskrete Systembeschreibung überführt, dessen Signal alle T_s Sekunden abgetastet wird. Für \underline{A}_d gilt (siehe Beispiel 11 in Abschn. 2.5):

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12.4)$$

Die Eingangsmatrix berechnet sich zu:

$$\underline{B}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot \nu} \cdot \underline{B} d\nu = \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\nu = \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\nu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12.5)$$

Die Ausgangsmatrix C und Durchgangsmatrix D sind in der zeitkontinuierlichen und der zeitdiskreten Systembeschreibung gleich. Für die Berechnung der Matrix \underline{G}_d werden im Folgenden die aus dem Kap. 8 vorgestellten drei Methoden angewandt. Keine der drei Methoden ist falsch, sie stellen jeweils nur Näherungen dar. Es ist deshalb ratsam, für den jeweiligen Anwendungsfall zu überprüfen, welche der drei Methoden die passende ist.

Methode 1: Direkte Diskretisierung

Bei dieser Methode folgt für die Matrix \underline{G}_d :

$$\underline{G}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_s \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (12.6)$$

Betrachtet man die mit \underline{G}_d gewonnene diskrete Systembeschreibung im Zustandsraum genauer, folgt:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} s(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s}} \cdot \begin{bmatrix} s(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}_d} \cdot u(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} T_s \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{G}_d} \cdot z_v(k) \quad (12.7)$$

bzw. ausgeschrieben:

$$s(k+1) = s(k) + T_s \cdot (v(k) + z_v(k)) \quad (12.8)$$

$$v(k+1) = v(k) + z_v(k). \quad (12.9)$$

Bei dieser Darstellung ist es offensichtlich, dass die Rauschgröße $z_v(t)$ die Dimension Länge/Zeit (Geschwindigkeit) hat. Um dies zu kennzeichnen, wurde der Index v an die Rauschgröße angefügt.

Um die drei Verfahren besser vergleichen zu können, wird die Größe $\underline{Q}^*(k)$ eingeführt. Diese ist definiert mit:

$$\underline{Q}^*(k) = \text{Var}(\underline{z}^*(k)) = \text{Var}(\underline{G}_d \cdot \underline{z}(k)) = \underline{G}_d \cdot \text{Var}(\underline{z}(k)) \cdot \underline{G}_d^T = \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T. \quad (12.10)$$

Somit folgt für dieses Beispiel:

$$\underline{Q}^*(k) = \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \begin{bmatrix} T_s \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \text{Var}(z_v(k)) \cdot [T_s \ 1] = \begin{bmatrix} T_s^2 & T_s \\ T_s & 1 \end{bmatrix} \cdot \text{Var}(z_v(k)). \quad (12.11)$$

Methode 2: Partielles konstantes Rauschen

Bei dieser Methode liegt die Annahme zugrunde, dass über ein Abtastintervall ein konstantes Rauschen vorliegt. Mit Gl. (8.12) berechnet sich die Matrix \underline{G}_d zu:

$$\underline{G}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{G} dv = \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dv = \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} v \\ 1 \end{bmatrix} dv = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix}. \quad (12.12)$$

Somit gilt für die diskrete Systembeschreibung im Zustandsraum:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} s(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s}} \cdot \begin{bmatrix} s(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}_d} \cdot u(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix}}_{\underline{G}_d} \cdot z_a(k) \quad (12.13)$$

bzw. ausgeschrieben:

$$s(k+1) = s(k) + T_s \cdot v(k) + \frac{1}{2} \cdot T_s^2 \cdot z_a(k) \quad (12.14)$$

$$v(k+1) = v(k) + T_s \cdot z_a(k). \quad (12.15)$$

Bei dieser Methode hat die Rauschgröße $z_a(t)$ offensichtlich die Dimension Länge/Zeit² (Beschleunigung), was mit dem Index a gekennzeichnet wurde. Die Größe z_a ist somit die Ableitung von z_v . Da bei dieser Methode die Annahme zugrunde liegt, dass innerhalb eines Abtastintervalls die Rauschgröße konstant ist, gilt:

$$z_v(k) = \int_0^{T_s} z_a(k) d\tau = T_s \cdot z_a(k). \quad (12.16)$$

Für $\underline{Q}^*(k)$ gilt in diesem Beispiel mit $Q(k) = \text{Var}(z_a(k)) = \text{Var}\left(\frac{z_v(k)}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s^2} \text{Var}(z_v(k))$:

$$\begin{aligned} \underline{Q}^*(k) &= \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix} \cdot \text{Var}(z_a(k)) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} T_s^2 & T_s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} T_s^4 & \frac{1}{2} T_s^3 \\ \frac{1}{2} T_s^3 & T_s^2 \end{bmatrix} \cdot \text{Var}(z_a(k)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} T_s^2 & \frac{1}{2} T_s \\ \frac{1}{2} T_s & 1 \end{bmatrix} \cdot \text{Var}(z_v(k)). \end{aligned} \quad (12.17)$$

Methode 3: Diskretisiertes zeitkontinuierliches Modell

Bei dieser Methode wird angenommen, dass es sich bei dem Systemrauschen um ein weißes Rauschen mit $E(z(t) \cdot z(\tau)^T) = q(k) \cdot \delta(t - \tau)$ mit dem Erwartungswert $E(z^*(k)) = 0$ handelt. Es folgt mit Gl.(8.19):

$$\begin{aligned} \underline{Q}^*(k) &= \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{G} \cdot \underline{G}^T \cdot (e^{\underline{A} \cdot v})^T dv \cdot q(k) \\ &= \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{bmatrix} dv \cdot q(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} v^2 & v \\ v & 1 \end{bmatrix} dv \cdot q(k) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} T_s^3 & \frac{1}{2} T_s^2 \\ \frac{1}{2} T_s^2 & T_s \end{bmatrix} \cdot q(k). \tag{12.18}
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man, dass in diesem Beispiel im rechten unteren Feld $Q_{2,2}^*(k)$ der obigen Matrix die Varianz der Rauschgröße $z_v(k)$ steht, so ist $T_s \cdot q(k) = \text{Var}(z_v(k))$. Somit lässt sich die obige Gl. schreiben mit:

$$\begin{aligned}
\underline{Q}^*(k) &= \begin{bmatrix} Q_{1,1}^*(k) & Q_{1,2}^*(k) \\ Q_{2,1}^*(k) & Q_{2,2}^*(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} T_s^3 & \frac{1}{2} T_s^2 \\ \frac{1}{2} T_s^2 & T_s \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{T_s} \cdot \text{Var}(z_v(k)) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} T_s^2 & \frac{1}{2} T_s \\ \frac{1}{2} T_s & 1 \end{bmatrix} \cdot \text{Var}(z_v(k)). \tag{12.19}
\end{aligned}$$

Beobachtbarkeit

Die Überprüfung der Beobachtbarkeit geschieht durch die Beobachtbarkeitsmatrix S_B^* . Das vorliegende System hat die Dimension $n=2$ (Anzahl der Elemente der Zustandsvariable), somit ist der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix S_B^* in diesem Beispiel definiert zu:

$$\text{Rang}(\underline{S}_B^*) = \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} C \\ C \cdot A_d \end{bmatrix}\right) = \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & T_s \end{bmatrix}\right) = 2. \tag{12.20}$$

Für $T_s > 0$ ist der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix gleich der Anzahl der Elemente der Zustandsvariable $\underline{x}(k)$ ($n=2$) und somit ist das System beobachtbar.

Bestimmung des System- und Messrauschen

Beispielhaft zeigt Abb. 12.1 den mit einem Entfernungssensor gemessenen Abstand eines Objekts. Dieser sendet alle $T=1$ s einen Wert. In diesem Verlauf ist ersichtlich, dass das Messrauschen in erster Näherung zeitinvariant ist. Zur Bestimmung des Messrauschen ist es von Vorteil, einen Abschnitt mit konstanter Position zu suchen. In diesem Beispiel eignen sich hierfür die ersten 50 Werte. In einem solchen Abschnitt gilt $\text{Var}(v) = \text{Var}(y)$.

Somit berechnet sich die Varianz des Messrauschen mit:

$$R = \frac{1}{49} \cdot \sum_{n=1}^{50} (y(n) - \bar{y})^2 \approx 1 \cdot 10^{-6} \quad \text{mit: } \bar{y} = \frac{1}{50} \cdot \sum_{n=1}^{50} y(n). \tag{12.21}$$

Mit den vorgenommenen Überlegungen wurden für die drei Methoden der Diskretisierung des Systemrauschen $\underline{Q}^*(k)$ drei verschiedene Formeln hergeleitet. Zur Verwendung dieser Formeln muss lediglich noch die Größe $Q = \text{Var}(z_v(k))$ abgeschätzt werden. Dies geschieht, indem der Verlauf der Größe $z_v(k)$ abgeschätzt wird.

Durch Gl. (12.9) wurde $z_v(k)$ definiert mit $v(k+1) = v(k) + z_v(k)$.

Aus dem beispielhaften Verlauf aus Abb. 12.1 ist zu vermuten, dass die Geschwindigkeit im ersten, mittleren und letzten Zeitabschnitt ungefähr 0 m/s ist und dazwischen ungefähr ± 2 m/s. Dies bedeutet, dass $z_v(k)$ bis an den vier Zeitpunkten, an denen sich die Geschwindigkeit ändert, null ist, somit folgt:

$$z_v(k) = \begin{cases} \approx +2 & \text{für } k \approx 51 \\ \approx -2 & \text{für } k \approx 80 \\ \approx 0 & \text{sonst .} \end{cases} \quad (12.22)$$

Mit diesem angenommenen Verlauf $z_v(k)$ lässt sich die Varianz des Messrauschens $Q = \text{Var}(z_v(k))$ bestimmen:

$$Q = \frac{1}{199} \cdot \sum_{n=1}^{200} (z_v(n) - \bar{z})^2 \approx 4 \cdot 10^{-2} \quad \text{mit: } \bar{z} = \frac{1}{200} \cdot \sum_{n=1}^{200} z_v(n) = 0.0. \quad (12.23)$$

Kalman-Filter

Für die Berechnung des Kalman-Filters werden die aus dem Kap. 5 hergeleiteten Formeln verwendet. Wird berücksichtigt, dass $\underline{B}_d = [0 \ 0]^T$ und $\underline{D} = 0$ ist, lässt sich das Filter beschreiben durch:

$$\underline{K}(k) = \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot (\underline{C} \cdot \hat{P}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k))^{-1} \quad \text{mit } \underline{R}(k) = \text{Var}(\underline{v}(k)) \quad (12.24)$$

$$\tilde{x}(k) = \hat{x}(k) + \underline{K}(k) \cdot (\underline{y}(k) - \underline{C} \cdot \hat{x}(k)) \quad (12.25)$$

$$\underline{P}(k) = (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \hat{P}(k) \quad (12.26)$$

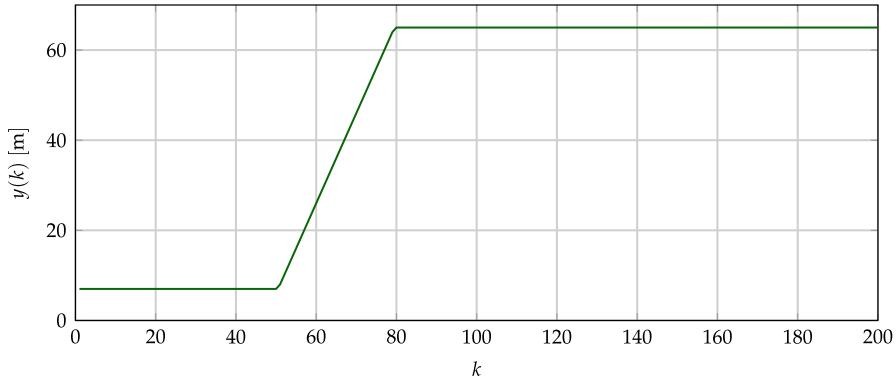


Abb. 12.1 Verlauf eines gering verrauschten Positionssignals

$$\hat{x}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \tilde{x}(k) \quad (12.27)$$

$$\hat{P}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \tilde{P}(k) \cdot \underline{A}_d^T + \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T \quad \text{mit } \underline{Q}(k) = \text{Var}(\underline{z}(k)). \quad (12.28)$$

Anbei das entsprechende MATLAB®-Programm zur Berechnung des Kalman-Filters für ein kinematisches Modell 2. Ordnung.

MATLAB: Filter für kinematisches Modell 2. Ordnung

```
clearvars;

in = readtable('KinModell_beta_in.dat','Delimiter','space');
y = in.position;

Ts = 1;
R = 1e-6;
Q = 4e-2;

Ad = [1 Ts; 0 1];
C = [1 0];

GQG = [Ts^2 Ts; Ts 1]*Q;
%GQG = [1/4*Ts^2 1/2*Ts; 1/2*Ts 1]*Q;
%GQG = [1/3*Ts^2 1/2*Ts; 1/2*Ts 1]*Q;

%%% Init %%%
x_dach = [y(1); 0];
P_dach = [.5 0; 0 1];

%%% Kalman %%%
for k=1:length(y)
    K = P_dach*C'*pinv(C*P_dach*C' + R);
    x_tilde = x_dach + K*(y(k) - C*x_dach);
    P_tilde = (eye(length(Ad)) - K*C)*P_dach;

    x_dach = Ad*x_tilde;
    P_dach = Ad*P_tilde*Ad' + GQG;

    s(k) = x_tilde(1);
    v(k) = x_tilde(2);
end
```

In Abb. 12.2 sind der Verlauf der durch die drei Methoden geschätzten Geschwindigkeit sowie die wahre Geschwindigkeit zu sehen. Die mit der Methode 1 geschätzte Geschwindigkeit reagiert auf den Sprung am langsamsten, weist jedoch keinen Überschwinger auf und besitzt im weiteren Verlauf das geringste Rauschen. Mit der Methode 2 folgt die Geschwindigkeit sehr schnell dem wahren Wert, hat jedoch das stärkste Rauschen und mit der Methode 3 hat der Verlauf der Geschwindigkeit einen größeren Überschwinger.

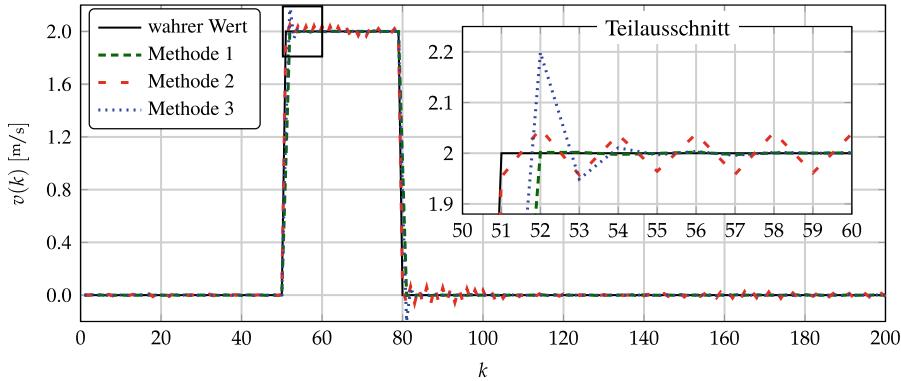


Abb. 12.2 Verlauf der Geschwindigkeit mit den drei unterschiedlichen Methoden der Größe $Q(k)$

12.3 Modell 3. Ordnung

Bei dem vorhergehenden Modell 2. Ordnung wurde die Beschleunigung zwischen zwei Abtastintervallen als konstant angenommen. Änderungen an der Beschleunigung wurden durch eine Rauschgröße modelliert.

Liegen größere Beschleunigungen vor, lässt sich das Modell verbessern, indem man die Zustandsvariable um die Größe der Beschleunigung erweitert. Somit ist $\underline{x}(t) = [s(t) \ v(t) \ a(t)]^T$. Die Beschleunigungsänderung (Ruck) zwischen zwei Abtastintervallen wird als konstant angenommen. Kleinere Beschleunigungsänderungen werden durch das Hinzufügen der Rauschgröße $z(t)$ berücksichtigt.

Das physikalische System im Zustandsraum ist mit dieser Annahme beschrieben durch:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{s}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{a}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_G \cdot z(t) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B \cdot u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_G \cdot z(t) \\ \underline{y}(t) &= s(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{bmatrix} + [0] \cdot u(t) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_C \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D \cdot u(t). \end{aligned}$$

Zeitdiskrete Systembeschreibung

Die Überführung in eine zeitdiskrete Systembeschreibung, bei welcher alle T_s Sekunden abgetastet wird, wurde schon im Kap. 1 detailliert beschrieben. Dies führt zu:

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} = \begin{bmatrix} 1 & T_s & \frac{T_s^2}{2} \\ 0 & 1 & T_s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.29)$$

und

$$\underline{B}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{B} dv = \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} 1 & v & \frac{v^2}{2} \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dv = \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dv = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12.30)$$

Die Ausgangsmatrix C und Durchgangsmatrix D sind in der zeitkontinuierlichen und der zeitdiskreten Systembeschreibung gleich.

Methode 1: Direkte Diskretisierung

Wendet man die Methode 1 bei einem kinematischen Modell 3. Ordnung an, folgt für die Matrix \underline{G}_d (siehe auch einführendes Beispiel in Kap. 1):

$$\underline{G}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{G} = \underline{A}_d \cdot \underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & T_s & \frac{1}{2}T_s^2 \\ 0 & 1 & T_s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T_s^2 \\ T_s \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Somit folgt für die Kovarianz des Systemrauschen:

$$\begin{aligned} \underline{Q}^*(k) &= \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T_s^2 \\ T_s \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \text{Var}(z_a(k)) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T_s^2 & T_s & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}T_s^4 & \frac{1}{2}T_s^3 & \frac{1}{2}T_s^2 \\ \frac{1}{2}T_s^3 & T_s^2 & T_s \\ \frac{1}{2}T_s^2 & T_s & 1 \end{bmatrix} \cdot \text{Var}(z_a(k)). \end{aligned}$$

Die mit \underline{G}_d gewonnene diskrete Systembeschreibung im Zustandsraum ist:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} s(k+1) \\ v(k+1) \\ a(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T_s & \frac{1}{2}T_s^2 \\ 0 & 1 & T_s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s}} \cdot \begin{bmatrix} s(k) \\ v(k) \\ a(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}_d} \cdot u(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}T_s^2 \\ T_s \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{G}_d} \cdot z_a(k)$$

bzw. ausgeschrieben:

$$s(k+1) = s(k) + T_s \cdot v(k) + \frac{T_s^2}{2} \cdot (a(k) + z_a(k)) \quad (12.31)$$

$$v(k+1) = v(k) + T_s \cdot (a(k) + z_a(k)) \quad (12.32)$$

$$a(k+1) = a(k) + z_a(k). \quad (12.33)$$

Methode 2: Partielles konstantes Rauschen

Bei dieser Methode berechnet sich die Matrix \underline{G}_d zu:

$$\underline{G}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{G} dv = \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} 1 & v & \frac{1}{2}v^2 \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dv = \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} dv = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}T_s^3 \\ \frac{1}{2}T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix}.$$

Wie im kinematischen Modell 2. Ordnung ausgeführt, gilt bei Methode 2: $\underline{Q}(k) = \frac{1}{T_s^2} \cdot \text{Var}(z_a(k))$. Damit lässt sich die Kovarianz des Systemrauschen bestimmen.

$$\begin{aligned} \underline{Q}^*(k) &= \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}T_s^3 \\ \frac{1}{2}T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{T_s^2} \cdot \text{Var}(z_a(k)) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{6}T_s^3 & \frac{1}{2}T_s^2 & T_s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{36}T_s^4 & \frac{1}{12}T_s^3 & \frac{1}{6}T_s^2 \\ \frac{1}{12}T_s^3 & \frac{1}{4}T_s^2 & \frac{1}{2}T_s \\ \frac{1}{6}T_s^2 & \frac{1}{2}T_s & 1 \end{bmatrix} \cdot \text{Var}(z_a(k)). \end{aligned}$$

Methode 3: Diskretisiertes zeitkontinuierliches Modell

Bei der Methode 3 wird direkt mit Gl. (8.19) die Kovarianz des Systemrauschen bestimmt.

$$\begin{aligned} \underline{Q}^*(k) &= \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{G} \cdot \underline{G}^T \cdot (e^{\underline{A} \cdot v})^T dv \cdot q(k) \\ \underline{Q}^*(k) &= \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} 1 & v & \frac{1}{2}v^2 \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [0 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}v^2 & v & 1 \end{bmatrix} dv \cdot q(k) \\ &= \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}v^4 & \frac{1}{2}v^3 & \frac{1}{2}v^2 \\ \frac{1}{2}v^3 & v^2 & v \\ \frac{1}{2}v^2 & v & 1 \end{bmatrix} dv \cdot q(k) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{20}T_s^5 & \frac{1}{8}T_s^4 & \frac{1}{6}T_s^3 \\ \frac{1}{8}T_s^4 & \frac{1}{3}T_s^3 & \frac{1}{2}T_s^2 \\ \frac{1}{6}T_s^3 & \frac{1}{2}T_s^2 & T_s \end{bmatrix} \cdot q(k). \end{aligned}$$

Ersetzt man wieder $q(k)$ mit $q(k) = 1/T_s \cdot \text{Var}(z_a(k))$ (wie im kinematischen Modell 2. Ordnung), so folgt:

$$\begin{aligned}\underline{Q}^*(k) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{20}T_s^5 & \frac{1}{8}T_s^4 & \frac{1}{6}T_s^3 \\ \frac{1}{8}T_s^4 & \frac{1}{3}T_s^3 & \frac{1}{2}T_s^2 \\ \frac{1}{3}T_s^3 & \frac{1}{2}T_s^2 & T_s \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{T_s} \cdot \text{Var}(z_a(k)) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{20}T_s^4 & \frac{1}{8}T_s^3 & \frac{1}{6}T_s^2 \\ \frac{1}{8}T_s^3 & \frac{1}{3}T_s^2 & \frac{1}{2}T_s \\ \frac{1}{6}T_s^2 & \frac{1}{2}T_s & 1 \end{bmatrix} \cdot \text{Var}(z_a(k)).\end{aligned}$$

Beobachtbarkeit

Die Überprüfung der Beobachtbarkeit dieses Modells wurde im Kap. 1 beschrieben. Das System war beobachtbar, da der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix S_B^* für $T_s > 0$ gleich der Anzahl der Elemente der Zustandsvariable $\underline{x}(k)$ ($n=3$) ist.

$$\text{Rang}(\underline{S}_B^*) = \text{Rang} \left(\begin{bmatrix} C \\ C \cdot A_d \\ C \cdot A_d^2 \end{bmatrix} \right) = \text{Rang} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & T_s & \frac{T_s^2}{2} \\ 1 & \frac{1}{2}T_s & \frac{1}{2}T_s^2 \end{bmatrix} \right) = 3. \quad (12.34)$$

Bestimmung des System- und Messrauschens

Zur Bestimmung des System- und des Messrauschens dient der mit einem Entfernungssensor gemessene Abstand eines Objekts (siehe Abb. 12.3). Auch dieser Sensor sendet alle $T=1$ s einen Wert und aus dem Verlauf ist ersichtlich, dass das Messrauschen in erster Näherung zeitinvariant ist. Zur Bestimmung des Messrauschens eignen sich auch in diesem Beispiel die ersten 50 Werte.

Die Varianz des Messrauschens berechnet sich mit:

$$R = \frac{1}{49} \cdot \sum_{n=1}^{50} (y(n) - \bar{y})^2 \approx 1 \cdot 10^{-6} \quad \text{mit:} \quad \bar{y} = \frac{1}{50} \cdot \sum_{n=1}^{50} y(n). \quad (12.35)$$

Zur Schätzung der Kovarianz des Systemrauschens $Q = \text{Var}(z_a(k))$ muss der Verlauf der Größe $z_a(k)$ abgeschätzt werden.

Durch Gl. (12.33) wurde $z_a(k)$ definiert mit $a(k+1) = a(k) + z_a(k)$.

Aus dem beispielhaften Verlauf aus Abb. 12.3 ist zu vermuten, dass die Beschleunigung meist ungefähr 0 m/s^2 ist, lediglich bei 50 s und 60 s sowie bei 70 s und 80 s ist diese ungefähr $\pm 0.4 \text{ m/s}$. Somit folgt:

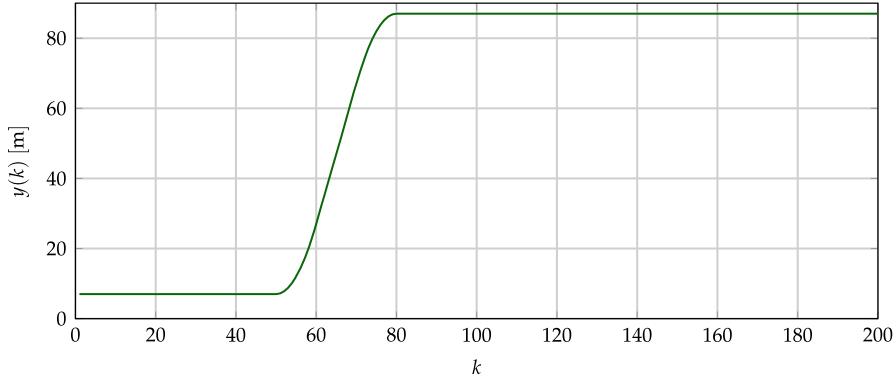


Abb. 12.3 Verlauf eines gering verrauschten Positionssignals

$$z_a(k) = \begin{cases} \approx +0.4 & \text{für } k \approx 50 \text{ und } k \approx 80 \\ \approx -0.4 & \text{für } k \approx 60 \text{ und } k \approx 70 \\ \approx 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (12.36)$$

Mit diesem angenommenen Verlauf $z_v(k)$ lässt sich die Varianz des Messrauschens $Q = \text{Var}(z_v(k))$ bestimmen:

$$Q = \frac{1}{199} \cdot \sum_{n=1}^{200} (z_a(n) - \bar{z})^2 \approx 3 \cdot 10^{-3} \quad \text{mit: } \bar{z} = \frac{1}{200} \cdot \sum_{n=1}^{200} z_a(n) = 0.0. \quad (12.37)$$

Kalman-Filter

Unter Berücksichtigung von $\underline{B}_d = [0 \ 0 \ 0]^T$ und $\underline{D} = 0$ kann das Kalman-Filter wieder beschrieben werden durch:

$$\underline{K}(k) = \underline{\hat{P}}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot (\underline{C} \cdot \underline{\hat{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + \underline{R}(k))^{-1} \quad \text{mit } \underline{R}(k) = \text{Var}(\underline{v}(k)) \quad (12.38)$$

$$\underline{\tilde{x}}(k) = \underline{\hat{x}}(k) + \underline{K}(k) \cdot (\underline{y}(k) - \underline{C} \cdot \underline{\hat{x}}(k)) \quad (12.39)$$

$$\underline{\tilde{P}}(k) = (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \underline{\hat{P}}(k) \quad (12.40)$$

$$\underline{\hat{x}}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{\tilde{x}}(k) \quad (12.41)$$

$$\underline{\hat{P}}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \underline{\tilde{P}}(k) \cdot \underline{A}_d^T + \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T \quad \text{mit } \underline{Q}(k) = \text{Var}(\underline{z}(k)). \quad (12.42)$$

Anbei das entsprechende MATLAB®-Programm zur Berechnung des Kalman-Filters für ein kinematisches Modell 3. Ordnung.

MATLAB: Filter für kinematisches Modell 3. Ordnung

```

clearvars;

in = readtable('KinModell_beta_in.dat','Delimiter','space');
y = in.position;

Ts = 1;
R = 1e-6;
Q = 3e-3;

Ad=[1 Ts .5*Ts^2; 0 1 Ts; 0 0 1];
C = [1 0 0];

GQG = [1/4*Ts^4 1/2*Ts^3 1/2*Ts^2;
        1/2*Ts^3 Ts^2 Ts;
        1/2*Ts^2 Ts 1]*Q;
%GQG = [1/36*Ts^4 1/12*Ts^3 1/6*Ts^2;
%        1/12*Ts^3 1/4*Ts^2 1/2*Ts;
%        1/6*Ts^2 1/2*Ts 1]*Q;
%GQG = [1/20*Ts^4 1/8*Ts^3 1/6*Ts^2;
%        1/8*Ts^3 1/3*Ts^2 1/2*Ts;
%        1/6*Ts^2 1/2*Ts 1]*Q;

%%% Init %%%
x_dach = [y(1); 0; 0];
P_dach = [.5 0 0; 0 1 0; 0 0 1];

%%% Kalman %%%
for k=1:length(y)
    K = P_dach*C'*pinv(C*P_dach*C' + R);
    x_tilde = x_dach + K*(y(k) - C*x_dach);
    P_tilde = (eye(length(Ad)) - K*C)*P_dach;

    x_dach = Ad*x_tilde;
    P_dach = Ad*P_tilde*Ad' + GQG;

    s(k) = x_tilde(1);
    v(k) = x_tilde(2);
    a(k) = x_tilde(3);
end

```

In Abb. 12.4 ist der Verlauf der unbekannten Größen zu sehen. Bei den geschätzten Geschwindigkeiten sind die Unterschiede sehr gering. Lediglich bei der geschätzten Beschleunigung sind Unterschiede zu erkennen. Die mit der Methode 1 geschätzte Beschleunigung reagiert auf den Sprung am schnellsten, weist jedoch im weiteren Verlauf das stärkste Rauschen auf. Mit den Methoden 2 und 3 hat der Verlauf der Beschleunigung einen größeren Überschwinger, rauscht jedoch im weiteren Verlauf weniger.

Es ist anzumerken, dass die Unterschiede zwischen den Methoden stark von der Varianz und der Verteilung des Messrauschens abhängen. Wäre die Varianz des Messrauschens deutlich größer, wäre der Unterschied zwischen den drei Methoden nicht mehr sichtbar.

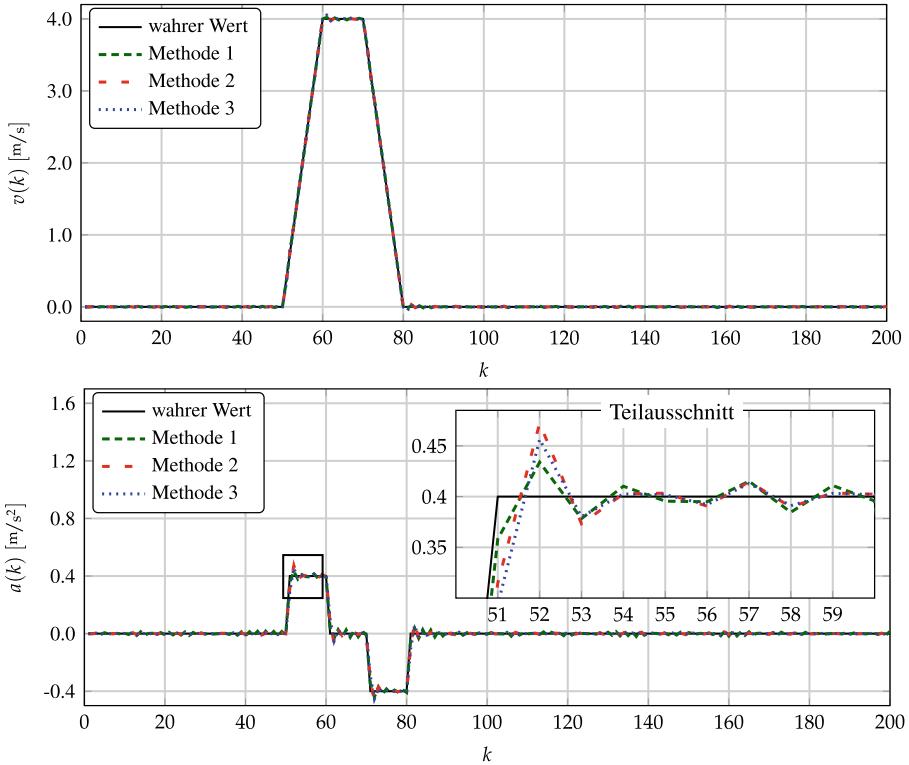


Abb. 12.4 Verlauf der Geschwindigkeit und Beschleunigung mit den drei unterschiedlichen Methoden der Größe $Q(k)$

12.4 Modell höherer Ordnung

Möchte man eine höhere Genauigkeit haben, kann man die $(n-1)$. Ableitung der Position als konstant modellieren. Diese Modelle werden in der englizistischen Literatur mit *polynomial model* bezeichnet [1].

Für $n = 2$ erhält man ein Modell 2. Ordnung und für $n = 3$ ein Modell 3. Ordnung. Somit sind die beschriebenen Modelle 2. und 3. Ordnung Spezialfälle des *polynomial models*.

Literatur

1. LI, X.-R. ; JILKOV, V. P.: Survey of maneuvering target tracking. Part I. Dynamic models. In: *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 39 (2003), Nr. 4, S. 1333–1364. – ISSN 0018 – 9251



Beispiel: Messrauschen mit Offset

13

Kalman-Filter besitzen die Einschränkung, dass der Schätzfehler $\hat{\varepsilon}(k)$ und das Messrauschen $\underline{v}(k)$ unkorreliert sein müssen. Ein Messrauschen mit Offset führt dazu, dass diese Bedingung oft nicht mehr gegeben ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn ein solcher Offset den Schätzfehler bei der Zustandsschätzung vergrößert.

Aus diesem Grund ist für viele Kalman-Filter die Forderung aufgestellt, dass der Erwartungswert des Messrauschens $E(\underline{v}(k)) = 0$ ist. Mit derselben Argumentation wird auch gefordert, dass der Erwartungswert des Systemrauschens $E(\underline{z}(k)) = 0$ sein muss.

Bei der Verwendung von Kalman-Filtern bedeutet dies jedoch eine große Einschränkung. In diesem Kapitel soll nun anhand des einführenden Beispiels mit der Mondfahre gezeigt werden, wie es möglich ist, trotz eines Offsets im Beschleunigungssignal die Zustandsgrößen korrekt zu bestimmen.

13.1 Problematik

Bekannt ist, dass z. B. Beschleunigungssensoren einen unbekannten Offset haben, der sich u. a. durch Temperaturänderungen zeitlich verändert. In der Regel ist diese Offsetdrift langsam und nicht groß. Wird das Beschleunigungssignal jedoch dazu benutzt, die Relativgeschwindigkeit bzw. den zurückgelegten Weg zu bestimmen, ist der Offset sehr störend und verfälscht merklich die geschätzten Größen.

Zur Verdeutlichung des Problems wird angenommen, dass das Beschleunigungssignal, anders als im einführenden Beispiel aus Kap. 1, einen kleinen unbekannten Offset besitzt, der sich langsam über die Zeit verändern kann (siehe Abb. 13.1).

Beachtet man dies nicht und schätzt fälschlicherweise mit den aus Kap. 1 bestimmten Kalman-Filtern die Geschwindigkeit und das Positionssignal (siehe Abb. 13.2), erkennt man, dass die Geschwindigkeit am Ende der Messung nicht 0 m/s, sondern ca. 2 m/s ist und die Position der Mondfahre auch nicht 0 m, sondern ca. 5 m ist.

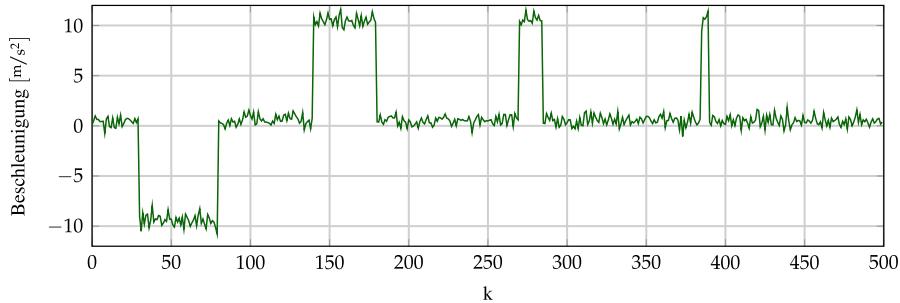


Abb. 13.1 Beschleunigungssignal mit unbekanntem Offset im Messrauschen

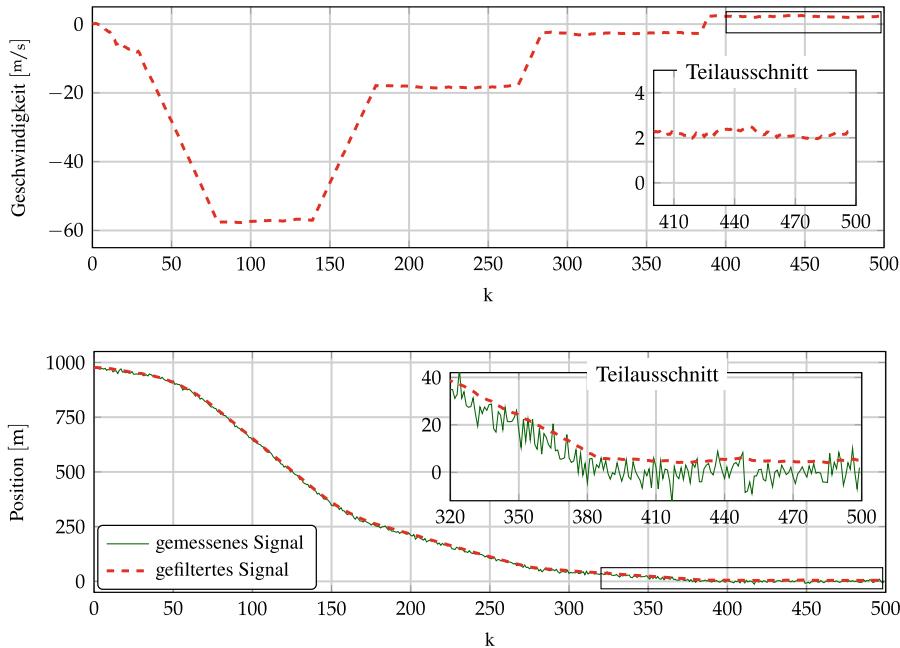


Abb. 13.2 Inkorrekte Schätzung aufgrund eines Offsets im Messrauschen des Beschleunigungssignals

Diese inkorrekte Schätzung röhrt aus der Nichtbeachtung, dass alle Messrauschen mitelwertfrei sein müssen. Dieses Problem lässt sich lösen, indem der unbekannte Offset als weitere Zustandsgröße geschätzt wird.

13.2 Filterentwurf

Zeitkontinuierliche Systembeschreibung

Zur Systembeschreibung wird der Zustandsvektor um den unbekannten Offset des Beschleunigungssignals erweitert:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \\ a(t) \\ a_{Offset}(t) \end{bmatrix}. \quad (13.1)$$

Die Größe $a(t)$ stellt die korrekte, tatsächlich auf die Mondfahre wirkende Beschleunigung und $a_{Offset}(t)$ den Offset des Beschleunigungssignals dar.

Für die Ableitung des Zustandsvektors $\dot{\underline{x}}(t)$ folgt:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{a}(t) \\ \dot{a}_{Offset}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ a(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ a(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}. \quad (13.2)$$

Die Modellgenauigkeit, dass die Beschleunigungsänderungen nicht null sind, wird durch die Einführung zweier Zufallszahlen z_1 und z_2 verbessert.

Dies lässt sich im Zustandsraum modellieren mit:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{a}(t) \\ \dot{a}_{Offset}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \\ a(t) \\ a_{Offset}(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B \cdot \underline{u}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \cdot \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B \cdot \underline{u}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \cdot \underline{z}(t). \end{aligned} \quad (13.3)$$

Werden messtechnisch die Größen $h(t)$ und $a(t)$ erfasst, ist somit $\underline{y}(t) = [h(t), a(t)]^T$ und es gilt für die zweite Zustandsgleichung:

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) &= \begin{bmatrix} h(t) \\ a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \\ a(t) \\ a_{Offset}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{u}(t) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_C \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_D \cdot \underline{u}(t). \end{aligned} \quad (13.4)$$

Zeitdiskrete Systembeschreibung

Werden die Signale alle T_s Sekunden abgetastet, gilt für die zeitdiskrete Systemmatrix \underline{A}_d und die zeitdiskrete Eingangsmatrix \underline{B}_d :

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s}, \quad \underline{B}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{B} dv. \quad (13.5)$$

Die Berechnung der Systemmatrix \underline{A}_d kann z. B. mithilfe der Laplace-Transformation erfolgen oder mit dem folgenden MATLAB®-Code durchgeführt werden.

MATLAB: Berechnung A_d und B_d

```
syms Ts 'real';
A = [0 1 0 0;
      0 0 1 0;
      0 0 0 0;
      0 0 0 0];
B = [0; 0; 0; 0];
Ad = simplify(expm(Ts*A))
Bd = simplify(int(expm(Ts*A)*B))
```

Die Berechnung ergibt:

$$\underline{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & T_s & \frac{T_s^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & T_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Beobachtbarkeit

Die Überprüfung der Beobachtbarkeit des Systems erfolgt durch die Bestimmung des Rangs der Beobachtbarkeitsmatrix S_B^* . Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Rang}(\underline{S}_B^*) &= \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} \underline{C} \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d^{n-1} \end{bmatrix}\right) = \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d^2 \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d^3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_s^2} & -1 \\ 1 & T_s & \frac{T_s^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{T_s} & -\frac{2}{T_s} & -\frac{2}{T_s^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{T_s} & -\frac{3}{T_s} & -\frac{9}{T_s^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 4 \quad \text{für } T_s > 0. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix ist für $T_s > 0$ gleich der Anzahl der Elemente des Zustandsvektors $\underline{x}(k)$ (n=4) und somit ist das System beobachtbar.

Im Folgenden ist der entsprechende MATLAB®-Code zur Bestimmung des Rangs der Beobachtbarkeitsmatrix S_B^* abgebildet.

MATLAB: Berechnung Rang der Beobachtbarkeitsmatrix S_B^*

```
syms Ts 'real';

A = [0 1 0 0;
      0 0 1 0;
      0 0 0 0;
      0 0 0 0];
C = [1 0 0 0;
      0 0 1 -1];

Ad = simplify(expm(Ts*A));

SB=C;
for n=1:length(A)-1
    SB = [SB; C*Ad^n];
end

rank(SB)
```

Bestimmung des System- und des Messrauschen

In Kap. 10 sind drei Methoden zur Bestimmung der Größe $\underline{Q}^*(k) = \underline{G}_d \underline{Q}(k) \underline{G}_d^T$ vorgestellt worden. Mit der Methode 1 folgt für \underline{G}_d :

$$\underline{G}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{G} = \underline{A}_d \cdot \underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & T_s & \frac{T_s^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & T_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_s^2}{2} & 0 \\ T_s & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13.7)$$

Die Matrix $\underline{Q}(k)$ ist in diesem Beispiel eine 2×2 -Matrix. Unter der Voraussetzung, dass eine Änderung des Beschleunigungssignals (modelliert durch die Rauschgröße $z_1(k)$) nicht mit einer Änderung des Offsets des Beschleunigungssensors (modelliert durch die Rauschgröße $z_2(k)$) zusammenhängt, ist die Kovarianz $\text{Cov}(z_1(k), z_2(k)) = 0$. Darüber hinaus wird angenommen, dass die beiden Rauschgrößen $z_1(k)$ und $z_2(k)$ normalverteilt sind.

$$\underline{Q}(k) = \begin{bmatrix} \text{Var}(z_1(k)) & \text{Cov}(z_1(k), z_2(k)) \\ \text{Cov}(z_1(k), z_2(k)) & \text{Var}(z_2(k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{z_1}^2(k) & 0 \\ 0 & \sigma_{z_2}^2(k) \end{bmatrix}. \quad (13.8)$$

Die Varianz $\text{Var}(z_1(k))$ wurde im einführenden Beispiel im Abschn. 1.3.1 schon mit $\text{Var}(z_1(k)) = \sigma_{z_1}^2 = \left(\frac{10}{3} \text{m/s}^2\right)^2 = 11.1 \text{m}^2/\text{s}^4$ festgelegt.

Bei der Festlegung der Varianz $\text{Var}(z_2(k))$ wird die selbe Argumentation wie in dem Beispiel in Abschn. 11.1 verwendet. Es wird davon ausgegangen, dass der Offset lange Zeit konstant ist und sich dann sprunghaft ändert. Für eine Offsetänderung eines Beschleuni-

gungssensors sind sinnvolle Werte z. B., dass sich alle 1000 Abtastwerte der Offset um 0.2 m/s^2 ändert. Diese ist eine sehr grobe Abschätzung, hilft aber, die Größenordnung der Varianz $\text{Var}(z_2(k))$ zu bestimmen. Mit diesen Annahmen folgt:

$$\text{Var}(z_2(k)) = \sigma_{z_2}^2 = \left(\frac{0.2 \text{ m/s}^2}{1000} \right)^2 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}^4. \quad (13.9)$$

In der Regel hat ein realer Sensor eine vielfach kleinere Offsetdrift. Wählt man jedoch kleinere Werte, führt dies dazu, dass das Kalman-Filter ggf. zu langsam einschwingt. Ist eine schnelle Bestimmung des Offsets nicht vorrangig, kann der Wert problemlos verringert werden.

Für $\underline{Q}^*(k)$ folgt:

$$\underline{Q}^*(k) = \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \begin{bmatrix} \frac{T_s^2}{2} & 0 \\ T_s & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{z_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{z_2}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{T_s^2}{2} & T_s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13.10)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} T_s^4 \sigma_{z_1}^2 & \frac{1}{2} T_s^3 \sigma_{z_1}^2 & \frac{1}{2} T_s^2 \sigma_{z_1}^2 & 0 \\ \frac{1}{2} T_s^3 \sigma_{z_1}^2 & T_s^2 \sigma_{z_1}^2 & T_s \sigma_{z_1}^2 & 0 \\ \frac{1}{2} T_s^2 \sigma_{z_1}^2 & T_s \sigma_{z_1}^2 & \sigma_{z_1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{z_2}^2 \end{bmatrix}. \quad (13.11)$$

Berechnet man die Kovarianz des Systemrauschen $\underline{Q}^*(k)$ mit der Methode 2 oder 3, erhält man ganz ähnliche Matrizen, diese führen nur zu unmerklich anderen Ergebnissen. Aufgrund dessen wird für dieses Beispiel auf die Berechnung mit den anderen Methoden verzichtet.

Das Messrauschen verändert sich durch die Einführung eines weiteren Zustands im Zustandsvektor nicht und es werden die im einführenden Beispiel in Abschn. 1.3.2 bestimmten Werte für die Messrauschmatrix $\underline{R}(k)$ verwendet.

$$\underline{R}(k) = \text{Var}(v(k)) = \begin{bmatrix} \sigma_h^2 & 0 \\ 0 & \sigma_a^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}. \quad (13.12)$$

13.3 Implementierung und Ergebnisse

Mit dem aufgeführten MATLAB®-Code lassen sich die Zustandsgrößen, die Position (Höhe) $h(t)$, die Geschwindigkeit $v(t)$, die Beschleunigung (ohne Offset) $a(t)$ und der Offset des Beschleunigungssignals $a_{Offset}(t)$ des Kalman-Filters bestimmen.

Die Initialisierung des Kalman-Filters geschieht wie im einführenden Beispiel. Zusätzlich wird der Offset des Beschleunigungssignals a_{Offset} zu Beginn mit dem Wert 0 initialisiert.

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} h(0) \\ v(0) \\ a(0) \\ a_{Offset}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ 0 \\ y_2(0) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13.13)$$

MATLAB: Kalman-Filter für Messrauschen mit Offset

```

load -ascii data_t_y.dat; t=data_t_y(:,1); y=data_t_y(:,2:3); u=zeros(1,length(y));
Ts = 0.1;
R = [20 0.0;
      0 0.2];
Q1 = 100/9;
Q2 = 0.04/1000;

Ad = [1 Ts 0.5*Ts^2 0;
       0 1 Ts 0;
       0 0 1 0;
       0 0 0 1];
Bd = [0;
       0;
       0;
       0];
C = [1 0 0 0;
      0 0 1 -1];

GQG = [Q1*Ts^4/4 Q1*Ts^3/2 Q1*Ts^2/2 0;
        Q1*Ts^3/2 Q1*Ts^2 Q1*Ts 0;
        Q1*Ts^2/2 Q1*Ts Q1 0;
        0 0 0 Q2];

%%% INITIALISIERUNG KALMAN-FILTER %%%
x = [y(1,1);
      0.0;
      y(1,2);
      0.0];
P = 3*[1 0 0 0;
        0 1 0 0;
        0 0 1 0;
        0 0 0 .01];

%%% ZYKLISCHE BERECHNUNG KALMAN-FILTER %%%
for k=1:length(y)
    K = P*C'*pinv(C*P*C' + R);
    x = x + K*(y(k,:)' - C*x);
    P = (eye(length(Bd)) - K*C)*P;
    s(k)=x(1); v(k)=x(2); a(k)=x(3); ao(k)=x(4);

    x = Ad*x + Bd*u(k);
    P = Ad*P*Ad' + GQG;
end

```

In Abb. 13.3 ist der Verlauf des geschätzten Offsets des Beschleunigungssignals a_{Offset} dargestellt.

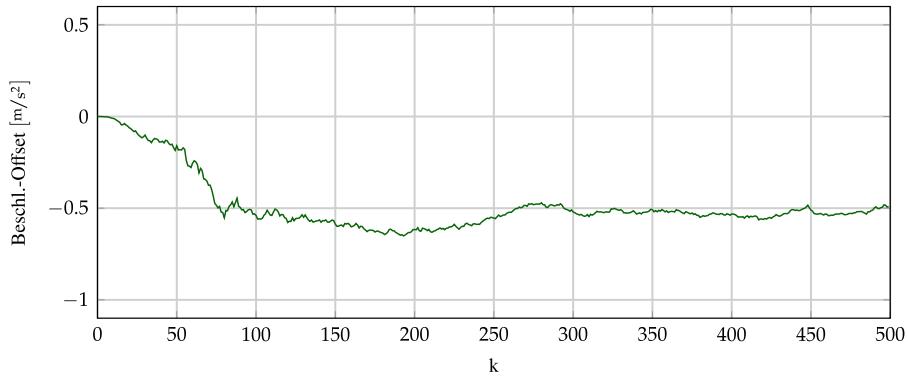


Abb. 13.3 Schätzung des Offsets des Beschleunigungssignals a_{Offset}

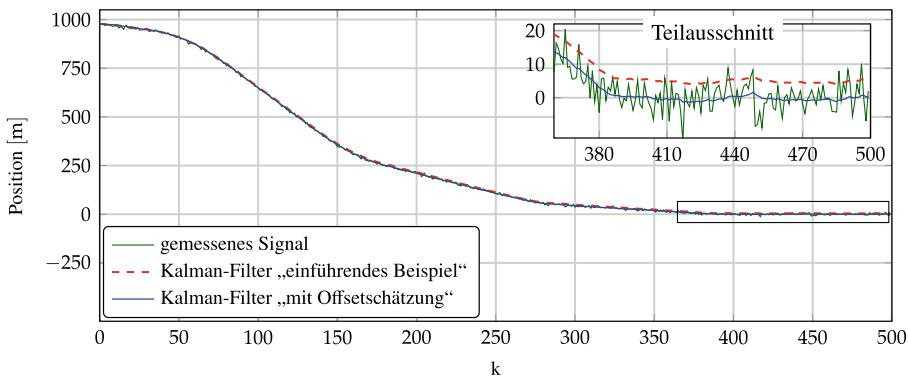
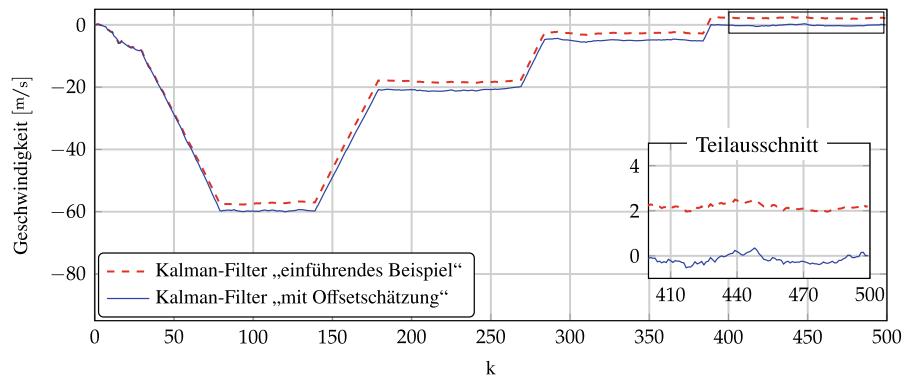


Abb. 13.4 Vergleich der Schätzungen der beiden Kalman-Filter

Es ist zu erkennen, dass das Kalman-Filter nach ca. 8 s eingeschwungen ist. Die Einschwingdauer wird durch die Varianz σ_{z2}^2 maßgeblich bestimmt. Je langsamer sich der Offset verändert, desto kleiner müsste die Varianz σ_{z2}^2 gewählt werden, dies führt jedoch dann zu langen Einschwingdauern. Ein fälschlicherweise zu groß gewählter Wert für die Varianz σ_{z2}^2 führt zwar zu kürzeren Einschwingdauern, jedoch wird dann der Offset ungenauer abgeschätzt.

Schätzt man die Zustandsgrößen Position (Höhe) $h(t)$ und die Geschwindigkeit $v(t)$ einmal mit dem im einführenden Beispiel aus Kap. 1 beschriebenen Kalman-Filter und zum anderen mit dem in diesem Kapitel entworfenen Kalman-Filter mit zusätzlicher Offset-schätzung, wird der Vorteil der zusätzlichen Offsetschätzung deutlich. In Abb. 13.4 sind die Ergebnisse der beiden Schätzungen gegenübergestellt.

Die zusätzlich eingeführte Zustandsgröße a_{Offset} erhöht auf der einen Seite den Rechen-aufwand, da die Matrizen/Vektoren vergrößert wurden. Auf der anderen Seite ist die Qualität der erzielten Schätzung deutlich verbessert worden.



Beispiel: Alternatives Bewegungsmodell der Mondfähre

14

Bezug nehmend auf das einführende Beispiel aus Kap. 1 soll in diesem Kapitel das Modell mit einem alternativen (reduzierten) Zustandsvektor in die Zustandsraumdarstellung überführt werden. Hierbei wird im Gegensatz zu allen bisherigen Beispielen eine der messtechnisch erfassbaren Größen über die Eingangsgröße $\underline{u}(t)$ statt über die Ausgangsgröße $\underline{y}(t)$ dem Kalman-Filter zugeführt.

Dieser alternative Kalman-Filter-Entwurf weist einige Besonderheiten auf, im Speziellen bei der Modellierung des Systemrauschens. Am Ende des Kapitels werden die geschätzten Zustandsgrößen mit den Simulationsergebnissen aus dem einführenden Beispiel aus Kap. 1 verglichen.

14.1 Filterentwurf

Zeitkontinuierliche Systembeschreibung

Das aus dem einführenden Beispiel aus Kap. 1 zugrunde liegende Modell war ein Punkt-Masse-Modell mit:

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{h}(t). \quad (14.1)$$

Wählt man den Zustandsvektor $\underline{x}(t)$ nun zu:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad (14.2)$$

ist die Ableitung des Zustandsvektors $\dot{\underline{x}}(t)$ gegeben durch:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ a(t) \end{bmatrix}. \quad (14.3)$$

Es wird wieder angenommen, dass messtechnisch die Größen $h(t)$ und $a(t)$ erfasst werden. Somit ist $\underline{y}(t) = [h(t), a(t)]^T$ und die beiden Zustandsgleichungen lassen sich schreiben zu:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{u}(t) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \cdot a(t)\end{aligned}\quad (14.4)$$

$$\begin{aligned}\underline{y}(t) &= \begin{bmatrix} h(t) \\ a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{u}(t) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot a(t).\end{aligned}\quad (14.5)$$

In diesem Fall entspricht die Eingangsgröße $\underline{u}(t)$ der Beschleunigung $a(t)$. Zum System-/Prozessrauschen lässt sich zu diesem Zeitpunkt noch keine Angabe machen.

Zeitdiskrete Systembeschreibung

Im Abschn. 2.5 (Beispiel 2) wurde die zeitdiskrete Systembeschreibung des Modells schon bestimmt. Unter der Annahme, dass die Signale alle T_s Sekunden abgetastet werden, gilt:

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (14.6)$$

$$\underline{B}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{B} dv = \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dv = \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} v \\ 1 \end{bmatrix} dv = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix}. \quad (14.7)$$

Die zeitdiskrete Systembeschreibung des Modells lautet:

$$\underline{x}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}_d} \cdot \underline{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix}}_{\underline{B}_d} \cdot a(k)\quad (14.8)$$

$$\underline{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \underline{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot a(k). \quad (14.9)$$

Beobachtbarkeit

Mithilfe der Bestimmung des Rangs der Beobachtbarkeitsmatrix S_B^* lässt sich die Beobachtbarkeit des Systems überprüfen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{Rang}(\underline{S}_B^*) &= \text{Rang} \left(\begin{bmatrix} \underline{C} \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d^{n-1} \end{bmatrix} \right) = \text{Rang} \left(\begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d \end{bmatrix} \right) \\
 &= \text{Rang} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & T_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2 \quad \text{für } T_s > 0. \tag{14.10}
 \end{aligned}$$

Der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix ist für $T_s > 0$ gleich der Anzahl der Elemente der Zustandsvariable $\underline{x}(k)$ ($n=2$) und somit ist das System beobachtbar.

Bestimmung des System- und Messrauschens

Abb. 14.1 verdeutlicht das aktuell modellierte zeitdiskrete System. Das Ausgangssignal $\underline{y}(k)$ wird mit dem Messrauschen $\underline{v}(k)$ überlagert und der Zustandsvektor $\underline{x}(k+1)$ mit dem Systemrauschen $\underline{G}_d \cdot \underline{z}(k)$. Die Eingangsgröße $\underline{u}(k)$ besitzt kein Rauschen. Das Problem ist nun, dass in diesem Beispiel die Eingangsgröße $\underline{u}(k)$ (Beschleunigung $a(k)$) nur als verrauslichtes Signal bekannt ist.

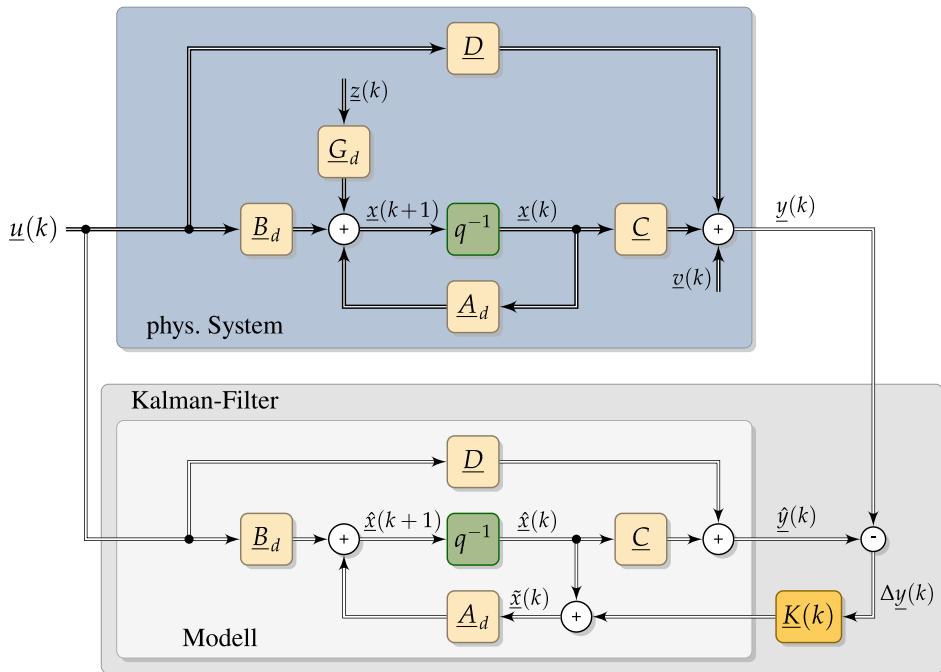


Abb. 14.1 Gesamtstruktur des physikalischen Systems inkl. Kalman-Filter

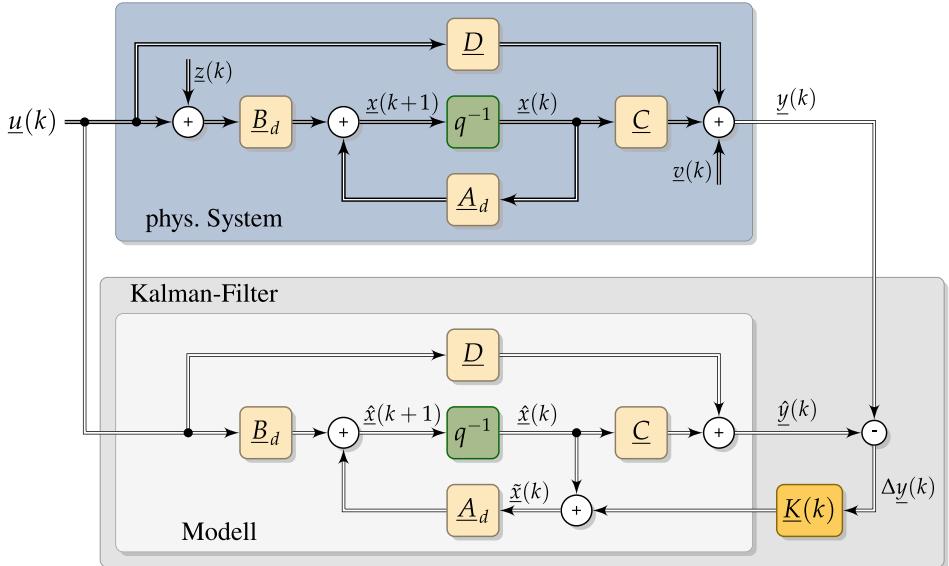


Abb. 14.2 Alternative Modellierung des Systemrauschens eines physikalischen Systems inkl. Kalman-Filter

Dieses Problem lässt sich lösen, indem man davon ausgeht, dass das verrauschte Eingangssignal $\underline{u}(k)$ von einem Rauschen $\underline{z}(k)$ derart überlagert wird, dass das Rauschen des Eingangssignals verschwindet. Hierzu wird die Matrix \underline{G} gleich \underline{B}_d gewählt und das Systemrauschen $\underline{z}(k)$ entspricht dem Messrauschen des Beschleunigungssignals $a(k)$.

Mit anderen Worten: Wird statt des Beschleunigungssignals das verrauschte Beschleunigungssignal verwendet, entspricht die Varianz des Messrauschen $\underline{Q}(k)$ der Varianz des Messrauschen des Beschleunigungssignals. Das dieser Überlegung zugrunde liegende Modell ist in Abb. 14.2 dargestellt.

In dem betrachteten Beispiel gilt:

$$\hat{\underline{y}}(k) = \underline{C} \cdot \hat{\underline{x}}(k) + \underline{D} \cdot \underline{u}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{h}(k) \\ \hat{v}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{u}(k) = \begin{bmatrix} \hat{h}(k) \\ u(k) \end{bmatrix}. \quad (14.11)$$

Dadurch, dass das verrauschte Beschleunigungssignal dem Eingangssignal $u(k)$ entspricht und dieses dem Kalman-Filter auch über das Signal $\underline{y}(k)$ zugeführt wird, ist:

$$\underline{y}(k) = \begin{bmatrix} h(k) \\ a(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(k) \\ u(k) \end{bmatrix}. \quad (14.12)$$

Somit wird die Größe $\Delta \underline{y}(k)$ zu:

$$\Delta \underline{y}(k) = \underline{y}(k) - \hat{\underline{y}}(k) = \begin{bmatrix} h(k) \\ u(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{h}(k) \\ u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(k) - \hat{h}(k) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (14.13)$$

Wenn die zweite Größe des Vektors $\Delta \underline{y}(k)$ immer null ist, lässt sich mit dieser Überlegung (ohne Informationsverlust) die Größe $\underline{y}(k)$ auf ein Skalar reduzieren. Mithilfe der beiden Rauschgrößen $z(k)$ und $v(k)$ lässt sich das Modell im Zustandsraum schreiben mit:

$$\underline{x}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}_d} \cdot \underline{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix}}_{\underline{B}_d} \cdot a(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix}}_{\underline{G}_d = \underline{B}_d} \cdot z(k) \quad (14.14)$$

$$\underline{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \underline{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot a(k) + v(k). \quad (14.15)$$

Mit den Überlegungen aus dem einführenden Beispiel in Abschn. 1.3.2 folgt für die Varianz des Systemrauschen Q und die Varianz des Messrauschen R :

$$Q = \text{Var}(z(k)) = \sigma_a^2 = 0.2 \frac{m}{s^2} \quad R = \text{Var}(v(k)) = \sigma_h^2 = 20 m.$$

14.2 Implementierung und Ergebnisse

Da sich in diesem Beispiel mehrere Größen zu Skalaren reduzieren und die Durchgangsmatrix $D = 0$ ist, lassen sich die in Kap. 5 hergeleiteten Formeln für das Kalman-Filter vereinfachen:

$$\underline{K}(k) = \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T \cdot (\underline{C} \cdot \hat{\underline{P}}(k) \cdot \underline{C}^T + R)^{-1} \quad (14.16)$$

$$\tilde{\underline{x}}(k) = \hat{\underline{x}}(k) + \underline{K}(k) \cdot (y(k) - \underline{C} \cdot \hat{\underline{x}}(k)) \quad (14.17)$$

$$\tilde{\underline{P}}(k) = (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}) \cdot \hat{\underline{P}}(k) \quad (14.18)$$

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{x}}(k) + \underline{B}_d \cdot u(k) \quad (14.19)$$

$$\hat{\underline{P}}(k+1) = \underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{P}}(k) \cdot \underline{A}_d^T + \underline{G}_d \cdot Q \cdot \underline{G}_d^T. \quad (14.20)$$

Mit den Anfangsbedingungen $x(1) = [y(1) \ 0]^T$ und $P(1) = 3 \cdot \underline{I}$ (\underline{I} entspricht der Einheitsmatrix) lassen sich die unbekannte Geschwindigkeit v und die aktuelle gefilterte Höhe h der Mondfähre abschätzen.

MATLAB: Kalman-Filter Beispiel Alternatives Bewegungsmodell Mondfähre

```

load -ascii data_t_y.dat;
t = data_t_y(:,1); y = data_t_y(:,2); u = data_t_y(:,3);

Ts = 0.1;
R = 20;
Q = 0.2;

Ad = [1 Ts; 0 1];
Bd = [.5*Ts^2; Ts];
C = [1 0];
G = Bd;
QQG = G*Q*G';

%%%% INITIALISIERUNG KALMAN-FILTER %%%
x = [y(1,1); 0];
P = 3*[1 0; 0 1];

%%%% ZYKLISCHE BERECHNUNG KALMAN-FILTER %%%
for k=1:length(y)
    K = P*C'*pinv(C*P*C' + R);
    x = x + K*(y(k,:)' - C*x);
    P = (eye(length(Bd)) - K*C)*P;

    s(k) = x(1); v(k) = x(2);

    x = Ad*x + Bd*u(k);
    P = Ad*P*Ad' + QQG;
end

```

Die in diesem Beispiel abgeschätzten Größen unterscheiden sich nur unwesentlich von denen im einführenden Beispiel. Die Unterschiede entstehen hauptsächlich bei einer Änderung der Beschleunigung. Durch die Zuführung der Beschleunigung im einführenden Beispiel über die Ausgangsgröße y kann bei einer Änderung der Beschleunigung der Zustandsvektor noch im aktuellen Zeitschritt k durch Gl. (14.17) korrigiert werden.

Im Gegensatz zu der in diesem Beispiel gewählten Zuführung der Beschleunigung über die Eingangsgröße u beeinflusst die Beschleunigung den prädizierten Zustandsvektor über die Gl. (14.19) und wird somit erst im nächsten Zeitschritt berücksichtigt. Der Verlauf der geschätzten Größen ist der Abb. 14.3 zu entnehmen.

Der Vorteil bei der Modellierung, die in diesem Beispiel gewählt wurde, ist der kleinere Zustandsvektor und, dass die Messrauschmatrix nur ein Skalar ist. Speziell das Letztere erspart die Matrixinvertierung der Gl. (14.16) und verkürzt somit deutlich die Rechenzeit.

Da in diesem Beispiel die Matrizen A_d , B_d , C , D und G_d keine zeitlich veränderlichen Größen beinhalten und auch das Mess- und das Systemrauschen konstant sind, konvergiert die Kalman-Verstärkung auf feste Werte. D. h. dass die Gl. (14.16), (14.18) und (14.20) nicht in Echtzeit bestimmt werden müssen. Aus Abb. 14.4 ist ersichtlich, dass die Kalman-Verstärkung nach ca. 100 Iterationsschritten gegen einen konstanten Wert konvergiert.

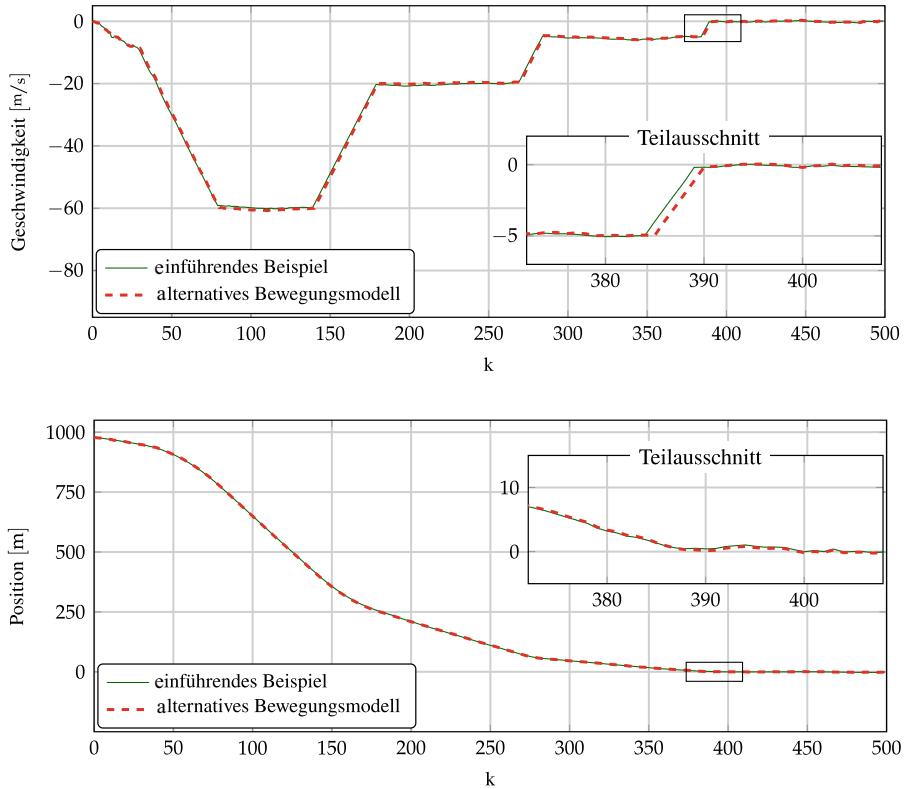


Abb. 14.3 Vergleich der geschätzten Größen bei unterschiedlicher Modellierung

Mit der Erkenntnis, dass sich die Gl. (14.16), (14.18) und (14.20) vorab bestimmen lassen, ist die Implementierung eines Laufzeit optimierten MATLAB®-Codes abgebildet. Der Vorteil besteht nicht nur darin, dass die in Echtzeit zu rechnende Schleife deutlich schneller berechnet werden kann, sondern auch darin, dass das Kalman-Filter schon in den ersten Berechnungszyklen für dieses Problem die optimale Kalman-Verstärkung besitzt.

MATLAB: Laufzeit optimiertes Kalman-Filter Beispiel Alternatives Bewegungsmodell Mondfähre

```

load -ascii data_t_y.dat;
t = data_t_y(:,1); y = data_t_y(:,2); u = data_t_y(:,3);

Ts = 0.1;
R = 20;
Q = 0.2;

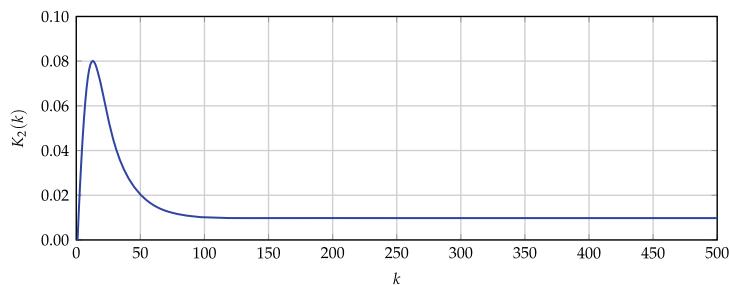
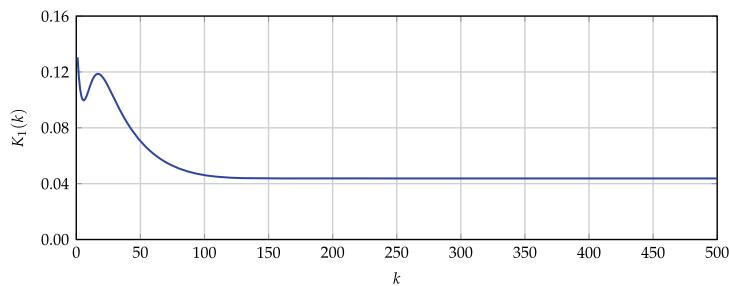
Ad = [1 Ts; 0 1];
Bd = [.5*Ts^2; Ts];
C = [1 0];
G = Bd;
GQG = G*Q*G';

%%%% INITIALISIERUNG KALMAN-FILTER %%%
x = [y(1,1); 0];
P = 3*[1 0; 0 1];

%%%% VORABBESTIMMUNG VON P UND K %%%
for k=1:200
    K = P*C'*pinv(C*P*C' + R);
    P = (eye(length(Bd)) - K*C)*P;
    P = Ad*P*Ad' + GQG;
end

%%%% ZYKLISCHE BERECHNUNG KALMAN-FILTER %%%
for k=1:length(y)
    x = x + K*(y(k,:)' - C*x);
    s(k) = x(1); v(k) = x(2);
    x = Ad*x + Bd*u(k);
end

```

**Abb. 14.4** Verlauf der Kalman-Verstärkung $\underline{K}(k)$

Beispiel: Kovarianzmatrix Messrauschen

15

Für viele Anwendungen ist es notwendig, die Kovarianzmatrix des Messrauschens zu kennen. Besonders wichtig wird dies, wenn die Kovarianzmatrix des Messrauschens zeitinvariant ist. Zur Schätzung dieser Kovarianz eignet sich auch ein Kalman-Filter. Das ROSE-Filter nutzt genau dieses Verfahren aus, um die Kovarianzmatrix \underline{R} zu bestimmen.

15.1 Filterentwurf

Systembeschreibung

Ausgangspunkt für dieses Beispiel sind die zwei Sensorwerte Temperatur- und Druckdifferenz (y_1 und y_2). Abb. 15.1 zeigt einen simulierten typischen Signalverlauf. Die dargestellten Größen stellen die Temperatur- und Druckdifferenz zu einer bekannten Referenztemperatur bzw. einem bekannten Referenzdruck dar. Dem Verlauf des Temperatursignals y_1 ist zu entnehmen, dass sich die Varianz des Messrauschens über die Zeit vergrößert. Bei dem Drucksignal y_2 hingegen verkleinert sich die Varianz des Messrauschens leicht.

Allgemein lässt sich die Kovarianz des Messrauschens über den folgenden Zusammenhang bestimmen:

$$\underline{R}(k) = E\left(\left(\underline{y}(k) - E(\underline{y}(k))\right) \cdot \left(\underline{y}(k) - E(\underline{y}(k))\right)^T\right). \quad (15.1)$$

Die Idee zur Berechnung der Kovarianzmatrix besteht nun darin, die beiden Erwartungswerte durch zwei Kalman-Filter zu ersetzen. Das erste Kalman-Filter wird zur Schätzung der Größe $\hat{y}_R(k) = E(\underline{y}(k))$ verwendet. In diesem Beispiel wird auf ein kinematische Modell 2. Ordnung zurückgegriffen (siehe Abschn. 12.1). Das auf diesem Modell basierende Kalman-Filter besitzt selbst die Größen R und Q (Varianz vom Mess- und vom Systemrauschen), welche beide als zeitinvariant angenommen werden. Dies führt somit zu einer festen Kalman-Verstärkung \underline{K} . Dies hat den Vorteil, dass die Berechnung sehr zeiteffizient durchgeführt werden kann.

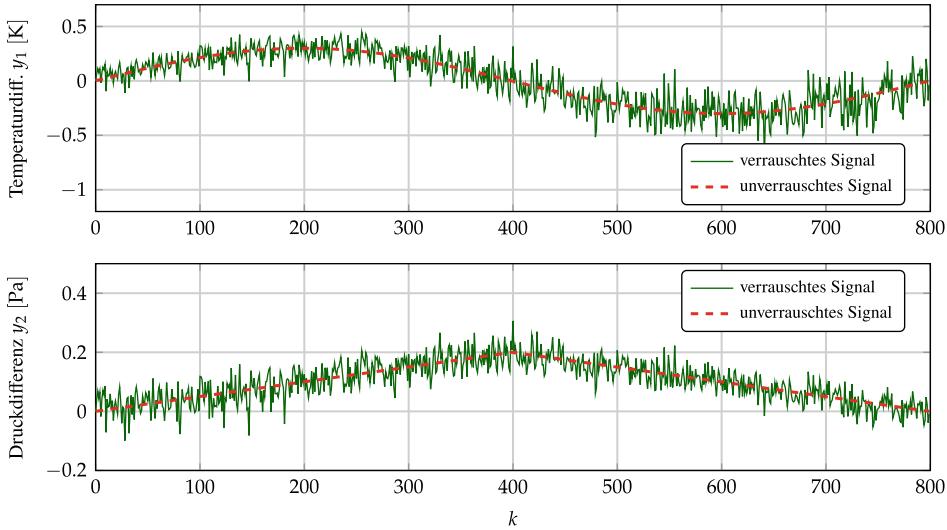


Abb. 15.1 Verlauf der verrauschten messtechnisch erfassbaren Größen für die Berechnung der Kovarianzmatrix $R(k)$ sowie der Verlauf der unverrauschten, nicht messtechnisch erfassbaren Größen

Für die Schätzung der Kovarianz des Messrauschens folgt:

$$\underline{R}(k) \approx E\left(\left(\underline{y}(k) - \hat{\underline{y}}_R(k)\right) \cdot \left(\underline{y}(k) - \hat{\underline{y}}_R(k)\right)^T\right) \quad (15.2)$$

$$\approx E\left(\Delta \hat{\underline{y}}_R(k) \cdot \Delta \hat{\underline{y}}_R(k)^T\right). \quad (15.3)$$

Da für das auf dem kinematischen Modell 2. Ordnung basierende Kalman-Filter die beiden Varianzen $R_{\alpha\beta}$ und $Q_{\alpha\beta}$ zeitinvariant sind, konvergiert die Kalman-Verstärkung \underline{K} auf einen festen Wert, welcher sich mit der folgenden Gleichung (siehe Anhang D) bestimmen lässt:

$$\underline{K} = \frac{0.125}{T_s} \cdot \begin{bmatrix} T_s \cdot (-\lambda^2 - 8 \cdot \lambda + (\lambda + 4) \cdot \sqrt{\lambda^2 + 8 \cdot \lambda}) \\ 2 \cdot (\lambda^2 + 4 \cdot \lambda - \lambda \cdot \sqrt{\lambda^2 + 8 \cdot \lambda}) \end{bmatrix} \text{ mit: } \lambda = T_s \cdot \sqrt{\frac{Q_{\alpha\beta}}{R_{\alpha\beta}}}. \quad (15.4)$$

Da für das auf dem kinematischen Modell 2. Ordnung basierende Kalman-Filter nur die geschätzte Zustandsgröße für die weitere Verarbeitung relevant ist, müssen nur die folgenden beiden Gleichungen betrachtet werden:

$$\hat{\underline{x}}(k) = \underline{A}_d \cdot \tilde{\underline{x}}(k-1) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k-1) \quad (15.5)$$

$$\tilde{\underline{x}}(k) = \hat{\underline{x}}(k) + \underline{K} \cdot \left(\underline{y}(k) - \underline{C} \cdot \hat{\underline{x}}(k) - \underline{D} \cdot \underline{u}(k)\right). \quad (15.6)$$

Wird berücksichtigt, dass bei dem Kalman-Filter $\underline{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\underline{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{C} = [1 \ 0]$,

$\underline{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist, und wird Gl. (15.5) in (15.6) eingesetzt, folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(k) &= \hat{x}(k) + \underline{K} \cdot \underline{y}(k) - \underline{K} \cdot \underline{C} \cdot \hat{x}(k) \\
&= \underline{K} \cdot \underline{y}(k) + (\underline{I} - \underline{K} \cdot \underline{C}) \cdot \hat{x}(k) \\
&= \underline{K} \cdot \underline{y}(k) + \underbrace{(\underline{I} - \underline{K} \cdot \underline{C}) \cdot \underline{A}_d}_{\underline{H}} \cdot \tilde{x}(k-1)
\end{aligned} \tag{15.7}$$

mit

$$\begin{aligned}
\underline{H} &= (\underline{I} - \underline{K} \cdot \underline{C}) \cdot \underline{A}_d \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 - k_1 & T_s - T_s \cdot k_1 \\ -k_2 & 1 - T_s \cdot k_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{15.8}$$

Mit diesem Filter wird der Erwartungswert $\hat{y}_R(k) = E(y(k))$ für die gemessene Temperatur- bzw. Druckdifferenz abgeschätzt:

$$\tilde{x}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{bmatrix} = \underline{K} \cdot \underline{y}(k) + \underline{H} \cdot \tilde{x}(k-1) \tag{15.9}$$

$$\hat{y}_R(k) = \underline{C} \cdot \underline{\tilde{x}}(k) = \tilde{x}_1(k). \tag{15.10}$$

Die Schätzung der Kovarianz des Messrauschen $\underline{R}(k)$ geschieht mithilfe der Gl. (15.3). Der Erwartungswert $E(\Delta \hat{y}_R(k) \cdot \Delta \hat{y}_R(k)^T)$ wird mithilfe eines zweitens Kalman-Filters geschätzt. In diesem Beispiel ändert sich die Varianz des Messrauschen nur langsam und deshalb wird auf ein Kalman-Filter basierend auf einem kinematischen Modell 1. Ordnung mit fester Verstärkung zurückgegriffen. Siehe Gl. (11.31).

Mithilfe von Gl. (15.3) und unter Verwendung eines auf dem kinematischen Modell 1. Ordnung basierenden Kalman-Filters lässt sich die Kovarianzmatrix des Messrauschen $\underline{R}(k)$ mit der Gleichung abschätzen:

$$\underline{R}(k) = \gamma \cdot \alpha_R \cdot (\hat{y}_R(k) - \underline{y}(k)) \cdot (\hat{y}_R(k) - \underline{y}(k))^T + (1 - \alpha_R) \cdot \underline{R}(k-1) \tag{15.11}$$

mit

$$\alpha_R = -0.5 \cdot Q_\alpha / R_\alpha + \sqrt{0.25 \cdot (Q_\alpha / R_\alpha)^2 + Q_\alpha / R_\alpha}. \tag{15.12}$$

Der frei wählbare Verstärkungsfaktor γ dient als Korrekturfaktor, da die Kovarianz des Messrauschen oft zu klein geschätzt wird. Aufgrund dessen sind Werte von $\gamma > 1$ sinnvoll. Je dynamischer das System ist, desto größer muss der Verstärkungsfaktor γ gewählt werden. In diesem Beispiel ist die Dynamik gering und es wird ein Verstärkungsfaktor von $\gamma = 1.1$ gewählt.

Beobachtbarkeit

Die Beobachtbarkeit ist gegeben, wenn der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix S_B^* gleich der Anzahl der Elemente des Zustandsvektors ist. Beim Kalman-Filter basierend auf einem kinematischen Modell 2. Ordnung hat der Zustandsvektor zwei Elemente, beim Kalman-Filter basierend auf einem kinematischen Modell 1. Ordnung ein Element. Es folgt für den Rang der Beobachtbarkeitsmatrix S_B^* des Kalman-Filters basierend auf einem kinematischen Modell 2. Ordnung:

$$\text{Rang}(\underline{S}_B^*) = \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d \end{bmatrix}\right) = \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & T_s \end{bmatrix}\right) = 2. \quad (15.13)$$

Für $T_s > 0$ lässt sich das Gleichungssystem auflösen und man erhält eine eindeutige Lösung. Somit ist der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix S_B^* zwei und das beschriebene System ist beobachtbar.

Für das Kalman-Filter basierend auf einem kinematischen Modell 1. Ordnung berechnet sich der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix S_B^* zu:

$$\text{Rang}(\underline{S}_B^*) = \text{Rang}([\underline{C}]) = \text{Rang}([1]) = 1. \quad (15.14)$$

Somit ist auch dieses Filter beobachtbar.

Bestimmung des Mess- und Systemrauschens

Da bei dem Kalman-Filter basierend auf einem kinematischen Modell 1. oder 2. Ordnung nur die Werte aus dem Zustandsvektor benutzt werden, nicht jedoch die der Kovarianzmatrix des Schätzfehlers, ist nur das Verhältnis von $\underline{Q}_{\alpha\beta}/R_{\alpha\beta}$ bzw. $\underline{Q}_\alpha/R_\alpha$ von Bedeutung.

Bei der Wahl des Verhältnisses von $\underline{Q}_{\alpha\beta}/R_{\alpha\beta}$ ist man frei. Aufgrund der Dynamik der beiden Signale kann das Verhältnis klein gewählt werden. Sinnvoll ist in diesem Beispiel ein Wert von $\underline{Q}_{\alpha\beta}/R_{\alpha\beta} = 10^{-4}$. Bei diesem Wert tritt noch keine merkliche zeitliche Verzögerung des geschätzten Signalverlaufs auf und eine bestmögliche Glättung des Signals.

Wird dieser Wert für $\underline{Q}_{\alpha\beta}/R_{\alpha\beta}$ und $T_s = 0.1s$ in Gl. (15.4) eingesetzt, folgt:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 0.0437 \\ 0.0098 \end{bmatrix}. \quad (15.15)$$

Mit den Werten von \underline{K} aus Gl. (15.15) und $T_s = 0.1s$ folgt für Gl. (15.8):

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} 0.9563 & 0.0956 \\ -0.0098 & 0.9990 \end{bmatrix}. \quad (15.16)$$

Mit der gleichen Vorgehensweise lässt sich auch für das Kalman-Filter basierend auf einem kinematischen Modell 1. Ordnung ein passender Wert für $\underline{Q}_\alpha/R_\alpha$ finden. Bei einem Wert von

$Q_\alpha/R_\alpha = 4 \cdot 10^{-4}$ tritt noch keine merkliche zeitliche Verzögerung der geschätzten Werte der Kovarianzmatrix \underline{R} auf und die Werte werden bestmöglich gefiltert.

Unter Verwendung von Gl. (15.12) und mit $Q_\alpha/R_\alpha = 4 \cdot 10^{-4}$ folgt $\alpha_R = 0.0198$.

15.2 Implementierung und Ergebnisse

Nach der Bestimmung der Größen $Q_{\alpha\beta}/R_{\alpha\beta}$ und Q_α/R_α im vorigen Kapitel lässt sich die Kovarianzmatrix des Messrauschens bestimmen. Durch die Wahl eines guten Initialwerts von \underline{R} schwingt der Filter sehr schnell ein.

Anbei die entsprechende MATLAB®-Implementierung zur Berechnung der Kovarianzmatrix des Messrauschens.

MATLAB: R-Schätzung

```
clearvars;

%-----
% Messdaten einlesen
%-----

in = readtable('in_data_t_y_GTy_GTr.dat','Delimiter','space');
t = in.time;
Ts = 0.1;
y = [in.y1 in.y2];

%-----
% Parameter Kalman-Filter
%-----
Gamma = 1.1;
QRab = 1e-4;
QRa = 4e-4;

%-----
% Berechnung der Kalman-Verstärkungen
%-----
Alpha_R = -0.5*QRa+sqrt(0.25*QRa^2 + QRa);

lambda = Ts*sqrt(QRab);
K1 = -1/8*(lambda.^2 + 8*lambda - (lambda+4).*sqrt(lambda.^2+8*lambda));
K2 = .25*(lambda.^2 + 4*lambda - lambda.*sqrt(lambda.^2+8*lambda))/Ts;
K = [K1; K2];
H = [1-K1 Ts-K1*Ts; -K2 1-K2*Ts];

%-----
% Init - Kalman-Filter
%-----
R = [5e-3 3e-3; 3e-3 2e-3];
x = [y(1,1) y(1,2); 0 0];

%-----
% Berechnung der zwei Kalman-Filter
%-----
for k=1:length(t)
    x = K*y(k,:) + H*x;
    yR = [1 0]*x;
    delta_yR = y(k,:)' - yR';
    R = Gamma*Alpha_R*(delta_yR)*(delta_yR)' + (1-Alpha_R)*R;
end
```

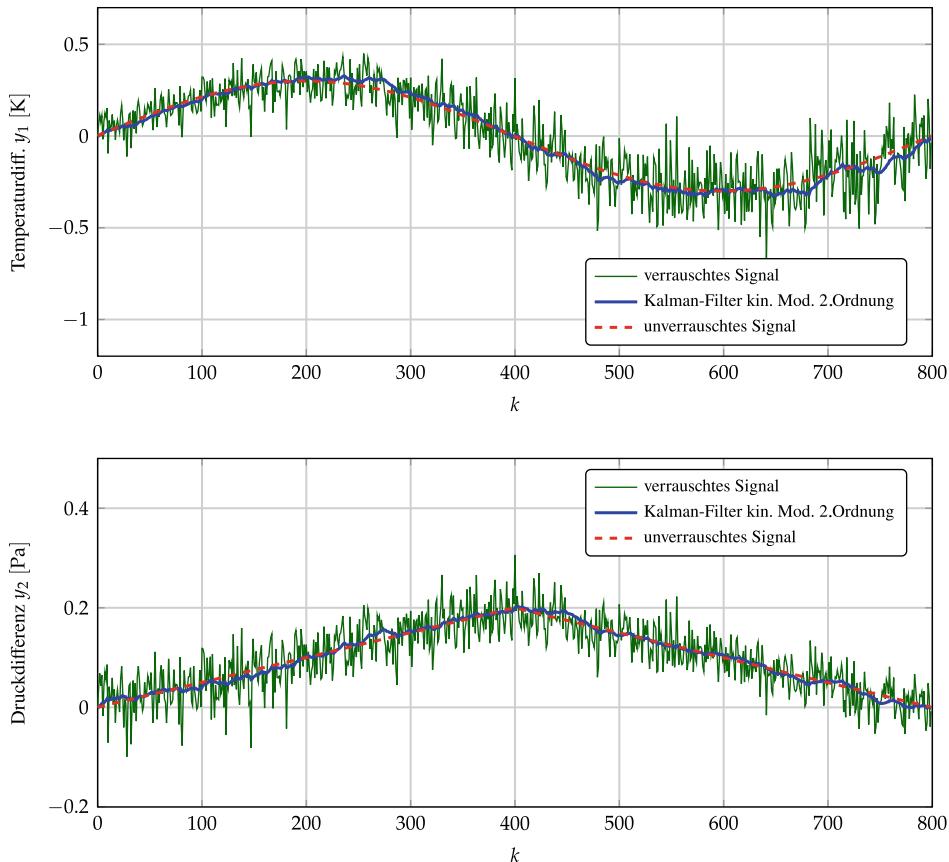


Abb. 15.2 Verlauf der verrauschten messtechnisch erfassbaren Größen, der durch das Kalman-Filter (kinematisches Modell 2. Ordnung) geschätzte Verlauf sowie der Verlauf der unverrauschten, nicht messtechnisch erfassbaren Größen

Die Berechnung des Kalman-Filters basierend auf einem kinematischen Modell 2. Ordnung ist der Abb. 15.2 zu entnehmen. Würde man das Verhältnis $Q_{\alpha\beta}/R_{\alpha\beta}$ deutlich vergrößern, wäre der geschätzte Verlauf von \hat{y}_R deutlich verrauschter, bei einem Wert $Q_{\alpha\beta}/R_{\alpha\beta} \ll 10^{-4}$ wäre die geschätzte Größe besser gefiltert, jedoch zeitlich gegenüber dem unverrauschten Signal verzögert.

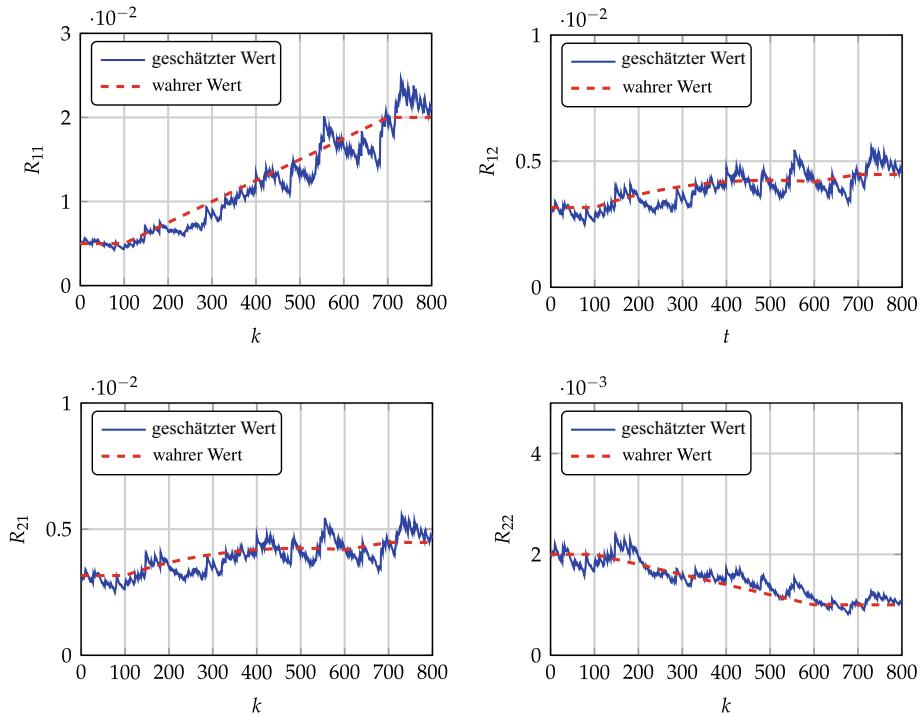


Abb. 15.3 Verlauf der geschätzten Elemente der Kovarianzmatrix des Messrauschen \underline{R}

In Abb. 15.3 ist der Verlauf der einzelnen Elemente der Kovarianzmatrix des Messrauschen \underline{R} dargestellt. Im Vergleich mit den wahren Werten ist ersichtlich, dass diese sehr gut abgeschätzt werden.

Durch einen größeren Wert von Q_α/R_α könnte man die Werte noch mehr glätten, jedoch würde dann ein zeitlicher Verzögerung bezüglich des wahren Werts entstehen.

Beispiel: Umfeldsensor mit ROSE-Filter

16

In dem folgenden Kapitel sollen die Vorteile des ROSE-Filters (Rapid Ongoing Stochastic covariance Estimation-Filter) an einem weiteren Beispiel vorgestellt werden. Es wird gezeigt, dass durch die adaptive Schätzung der Varianzen des Mess- und des Systemrauschens eine deutlich bessere Schätzung der Zustandsgrößen und der Kovarianz des Schätzfehlers erfolgt.

Ein sehr häufig in der Praxis auftretendes Problem stellt die Beobachtung (Verfolgung) eines kinematischen Objekts dar. Von dem Objekt werden z. B. mittels Radarsensor Position und Geschwindigkeit in Längsrichtung erfasst. Beide Messgrößen sind verrauscht und die Varianz des Messrauschens ist über die Zeit nicht konstant. Von Interesse sind die Position und die Geschwindigkeit (ohne Messrauschen) sowie die Schätzung der Beschleunigung und die Kovarianz des Schätzfehlers der jeweils geschätzten Größen.

16.1 Umfeldsensor

Ausgangspunkt für dieses Beispiel sind die Position und die Geschwindigkeit eines mittels Umfeldsensor erfassten Objekts. Abb. 16.1 zeigt einen simulierten typischen Verlauf der beiden Signale.

Auffallend ist, dass die Varianz des Messrauschens über die Zeit nicht konstant ist und dass die Änderungen in der Varianz des Messrauschens in den beiden Signalen zu unterschiedlichen Zeitpunkten stattfindet.

Zeitkontinuierliche Systembeschreibung

Basis für die Modellierung stellt das im einführenden Beispiel (Kap. 1) beschriebene Punkt-Masse-Modell dar. Der Zustandsvektor wird wieder zu

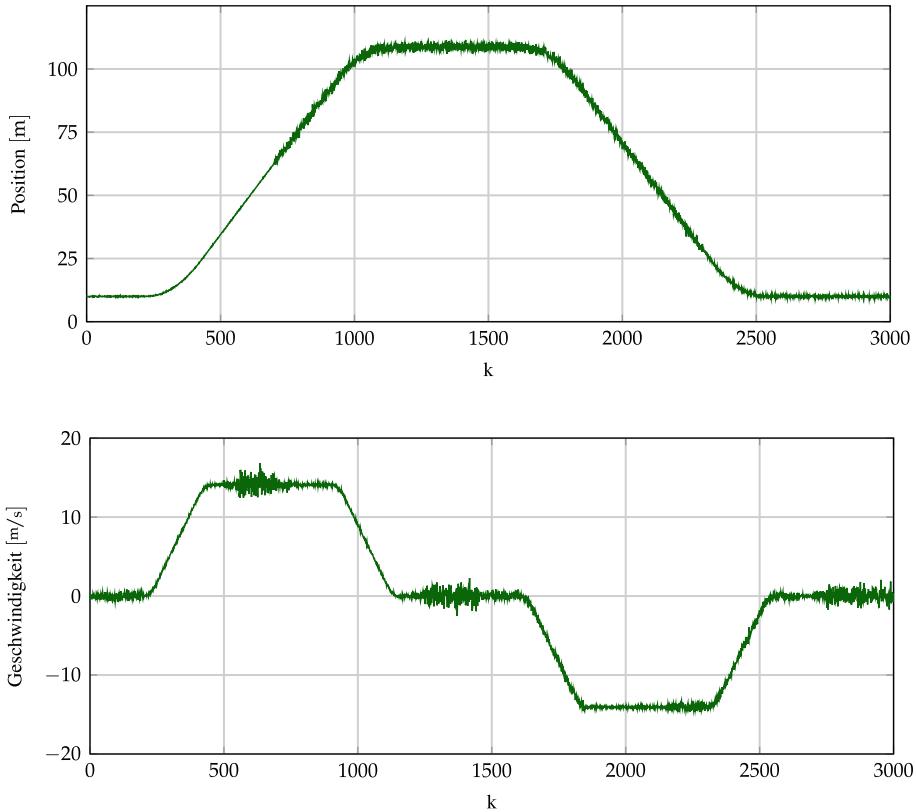


Abb. 16.1 Verlauf messtechnisch erfassbarer Größen eines beobachteten Objekts: Abstand $s(k)$ und Geschwindigkeit $v(k)$

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{bmatrix} \quad (16.1)$$

gewählt.

Da die Position $s(t)$ und die Geschwindigkeit $v(t)$ messtechnisch erfassbar sind, folgt mit $\underline{y}(t) = [s(t), v(t)]^T$ für die zeitkontinuierliche Systembeschreibung im Zustandsraum:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B \cdot u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_G \cdot z(t) \quad (16.2)$$

$$\underline{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot u(t). \quad (16.3)$$

Zeitdiskrete Systembeschreibung

Da sich die Systemmatrix \underline{A}_d , die Eingangsmatrix \underline{B}_d und die Rauschmatrix \underline{G}_d gegenüber dem einführenden Beispiel nicht verändert haben, gilt für die zeitdiskrete Systembeschreibung:

$$\underline{x}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T_s & \frac{T_s^2}{2} \\ 0 & 1 & T_s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}_d} \cdot \begin{bmatrix} s(k) \\ v(k) \\ a(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}_d} \cdot u(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{T_s^2}{2} \\ T_s \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{G}_d} \cdot z(k) \quad (16.4)$$

$$\underline{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \begin{bmatrix} s(k) \\ v(k) \\ a(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot u(k). \quad (16.5)$$

Beobachtbarkeit

Die Beobachtbarkeit ist gegeben, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix \underline{S}_B^* bei einem System der Ordnung drei den Rang drei besitzt. Es folgt für den Rang der Beobachtbarkeitsmatrix \underline{S}_B^* :

$$\text{Rang}(\underline{S}_B^*) = \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d^2 \end{bmatrix}\right) = \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & T_s & \frac{T_s^2}{2} \\ 0 & 1 & T_s \\ 1 & 2T_s & 2T_s^2 \\ 0 & 1 & 2T_s \end{bmatrix}\right) = 3.$$

Für $T_s > 0$ lässt sich das überbestimmte Gleichungssystem auflösen und man erhält drei unabhängige Zeilenvektoren. Somit ist der Rang drei und das beschriebene System beobachtbar.

Adaptive Bestimmung des Messrauschen

Allgemein lässt sich das Messrauschen über die Gl.(16.6) bestimmen. In diesem Beispiel verändert sich jedoch die Varianz des Messrauschen über die Zeit und es ist notwendig, zu jedem Zeitpunkt die Erwartungswerte in der Gleichung bestmöglich abzuschätzen.

$$\underline{R}(k) = E\left(\left(\underline{y}(k) - E(\underline{y}(k))\right) \cdot \left(\underline{y}(k) - E(\underline{y}(k))\right)^T\right) \quad (16.6)$$

$$\approx E\left(\left(\underline{y}(k) - \hat{\underline{y}}_R(k)\right) \cdot \left(\underline{y}(k) - \hat{\underline{y}}_R(k)\right)^T\right) \quad (16.7)$$

$$\approx E\left(\Delta \hat{\underline{y}}_R(k) \cdot \Delta \hat{\underline{y}}_R(k)^T\right). \quad (16.8)$$

Wie in Kap. 6 beschrieben, geschieht dies über zwei Kalman-Filter. Um die Rechenzeit gering zu halten, ist es sinnvoll, einfache Kalman-Filter mit einer festen Kalman-Verstärkung einzusetzen. Hierdurch reduziert sich der Rechenaufwand in Echtzeit.

Für Messgrößen mit geringer Dynamik können einfache Kalman-Filter (kinematisches Modell 1. Ordnung), wie in Abschn. 11.4 beschrieben, eingesetzt werden. Aufgrund der größeren Dynamik wird in diesem Beispiel für die Schätzung der Größe $\hat{y}_R(k)$ ein Modell 2. Ordnung (siehe Abschn. 12.1) eingesetzt. Für dieses gilt:

$$\underline{x}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_d} \cdot \underline{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_d} \cdot u(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} T_s \\ 1 \end{bmatrix}}_{G_d} \cdot z_v(k) \quad (16.9)$$

$$\underline{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \cdot \underline{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D} \cdot u(k). \quad (16.10)$$

Sind die Größen R und Q zeitinvariant, so konvergiert die Kalman-Verstärkung auf einen festen Wert, der sich mit der Gleichung:

$$K = \frac{0.125}{T_s} \cdot \begin{bmatrix} T_s \cdot (-\lambda^2 - 8 \cdot \lambda + (\lambda + 4) \cdot \sqrt{\lambda^2 + 8 \cdot \lambda}) \\ 2 \cdot (\lambda^2 + 4 \cdot \lambda - \lambda \cdot \sqrt{\lambda^2 + 8 \cdot \lambda}) \end{bmatrix} \quad (16.11)$$

mit

$$\lambda = T_s \cdot \sqrt{\frac{Q}{R}} = T_s \cdot \sqrt{\frac{\text{Var}(z(k))}{\text{Var}(v(k))}}. \quad (16.12)$$

bestimmen lässt [1].

Bei der Wahl des Verhältnisses von Q/R ist man frei. Aufgrund der großen Dynamik sollte man das Verhältnis jedoch nicht zu klein wählen. Bei der Wahl von $Q/R = 1$ folgt mit $T_s = 0.01$:

$$K \approx \begin{bmatrix} 0.13185 \\ 0.93175 \end{bmatrix}. \quad (16.13)$$

Da bei den Kalman-Filtern mit fester Kalman-Verstärkung nur die geschätzte Zustandsgröße für die weitere Verarbeitung relevant ist, müssen nur die folgenden beiden Gleichungen betrachtet werden:

$$\underline{\tilde{x}}(k) = \underline{A}_d \cdot \underline{\tilde{x}}(k-1) + \underline{B}_d \cdot \underline{u}(k-1) \quad (16.14)$$

$$\underline{\tilde{x}}(k) = \hat{x}(k) + \underline{K} \cdot (\underline{y}(k) - \underline{C} \cdot \hat{x}(k) - \underline{D} \cdot \underline{u}(k)). \quad (16.15)$$

Berücksichtigt man, dass $\underline{B}_d = [0 \ 0]^T$ und $\underline{D} = [0 \ 0]^T$, und setzt Gl.(16.14) in (16.15) ein, folgt:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{x}}(k) &= \hat{x}(k) + \underline{K} \cdot \underline{y}(k) - \underline{K} \cdot \underline{C} \cdot \hat{x}(k) \\ &= \underline{K} \cdot \underline{y}(k) + (\underline{I} - \underline{K} \cdot \underline{C}) \cdot \underline{\tilde{x}}(k) \\ &= \underline{K} \cdot \underline{y}(k) + \underbrace{(\underline{I} - \underline{K} \cdot \underline{C}) \cdot \underline{A}_d \cdot \underline{\tilde{x}}(k-1)}_{\underline{H}}. \end{aligned}$$

Die Größe \underline{H} ist in diesem Beispiel:

$$\underline{H} = (\underline{I} - \underline{K} \cdot \underline{C}) \cdot \underline{A}_d \approx \begin{bmatrix} 0.86815 & 0.00868 \\ -0.93175 & 0.99068 \end{bmatrix}. \quad (16.16)$$

Mit diesem Filter wird der Erwartungswert $\hat{y}_R(k) = E(y(k))$ jeweils für die gemessene Position und für die gemessene Geschwindigkeit abgeschätzt:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{x}}(k) &= \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{bmatrix} = \underline{K} \cdot \underline{y}(k) + \underline{H} \cdot \underline{\tilde{x}}(k-1) \\ \hat{y}_R(k) &= [1 \ 0] \cdot \underline{\tilde{x}}(k) = \tilde{x}_1(k). \end{aligned} \quad (16.17)$$

Zur Schätzung der Kovarianz des Messrauschen $\underline{R}(k)$ ist es aufgrund der geringen Dynamik der Größe $\hat{y}_R(k)$ ausreichend, den Erwartungswert in Gl.(16.8) über einen Kalman-Filter (basierend auf einem kinematischen Modell 1. Ordnung) abzuschätzen:

$$\underline{R}(k) = \gamma \cdot \alpha_R \cdot (\hat{y}_R(k) - \underline{y}(k)) \cdot (\hat{y}_R(k) - \underline{y}(k))^T + (1 - \alpha_R) \cdot \underline{R}(k-1). \quad (16.18)$$

Der frei wählbare Verstärkungsfaktor γ dient als Korrekturfaktor, da die Kovarianz des Messrauschen oft zu klein geschätzt wird. Aufgrund dessen sind Werte von $\gamma > 1$ sinnvoll.

Die Kovarianz des Messrauschen \underline{R} wird in diesem Beispiel aufgrund der zwei mess-technisch erfassbaren Größen durch eine 2×2 -Matrix beschrieben. In der Hauptdiagonalen befindet sich die Varianz des Positionssignals $\text{Var}(s(k))$ und des Geschwindigkeitssignals $\text{Var}(v(k))$. In den anderen beiden Elementen steht die Kovarianz des Positionssignals und des Geschwindigkeitssignals $\text{Cov}(s(k), v(k))$. Somit wird die Kovarianz des Messrauschen \underline{R} durch die folgende Matrix beschrieben:

$$\underline{R}(k) = \begin{bmatrix} R_{1,1}(k) & R_{1,2}(k) \\ R_{2,1}(k) & R_{2,2}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Var}(s(k)) & \text{Cov}(s(k), v(k)) \\ \text{Cov}(s(k), v(k)) & \text{Var}(v(k)) \end{bmatrix}. \quad (16.19)$$

In Abb. 16.2 ist der Verlauf der ermittelten Elemente $R_{1,1}$ und $R_{2,2}$ aus der Rauschmatrix \underline{R} im Vergleich zu der wahren Varianz zu sehen.

Adaptive Bestimmung des Systemrauschen

Zur Schätzung der Kovarianz des Systemrauschen ist es notwendig, die Hilfsgröße $\underline{M}(k)$ zu bestimmen. Diese wird nach Abschn. 5.3 definiert durch:

$$\underline{M}(k) = E(\Delta \underline{y}(k) \cdot \Delta \underline{y}(k)^T) \quad (16.20)$$

mit

$$\Delta \underline{y}(k) = \underline{y}(k) - \underline{C} \cdot \hat{\underline{x}}(k) - \underline{D} \cdot \underline{u}(k). \quad (16.21)$$

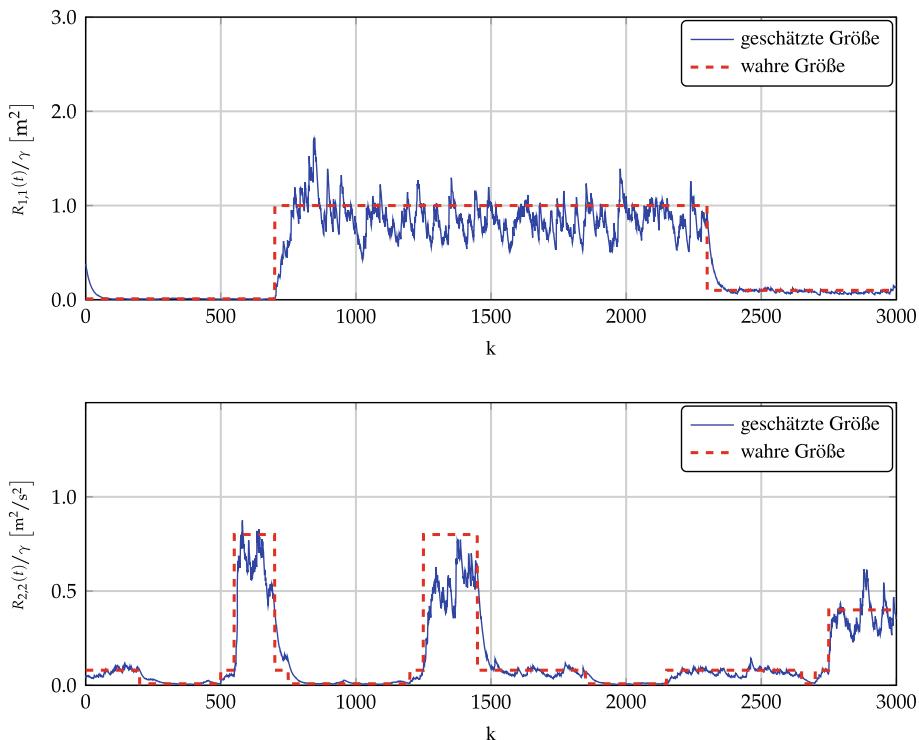


Abb. 16.2 Verlauf der geschätzten Varianzen des Messrauschen. Oben: Positionssignal. Unten: Geschwindigkeitssignal

Aufgrund der geringen Dynamik der Größe $\underline{\Delta y}(k)$ ist es ausreichend, den Erwartungswert durch einen Kalman-Filter basierend auf einem kinematischen Modell 1. Ordnung abzuschätzen. Dieses wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\underline{M}(k) = \alpha_M \cdot \underline{\Delta y}(k) \cdot \underline{\Delta y}(k)^T + (1 - \alpha_M) \cdot \underline{M}(k-1). \quad (16.22)$$

Ausgehend von der bestimmten Hilfsgröße $\underline{M}(k)$ lässt sich mithilfe der Gl. (6.17) die Größe $\underline{C} \cdot \underline{Q}^*(k-1) \cdot \underline{C}^T$ bestimmen:

$$\underline{C} \cdot \underline{Q}^*(k-1) \cdot \underline{C}^T = \begin{bmatrix} Q_{1,1}^*(k-1) & Q_{1,2}^*(k-1) \\ Q_{2,1}^*(k-1) & Q_{2,2}^*(k-1) \end{bmatrix} \quad (16.23)$$

$$= \underline{M}(k) - \underline{R}(k) - \underline{C} \cdot \underline{A}_d \cdot \tilde{P}(k-1) \cdot \underline{A}_d^T \cdot \underline{C}^T. \quad (16.24)$$

Die Kovarianzmatrix des Systemrauschens $\underline{Q}^*(k)$ ist für ein kinematisches Modell 3. Ordnung (siehe Abschn. 12.1) auch beschrieben durch:

$$\underline{Q}^*(k-1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} T_s^2 \\ T_s \\ 1 \end{bmatrix} \cdot Q(k-1) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} T_s^2 & T_s & 1 \end{bmatrix} \quad (16.25)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} T_s^4 & \frac{1}{2} T_s^3 & \frac{1}{2} T_s^2 \\ \frac{1}{2} T_s^3 & T_s^2 & T_s \\ \frac{1}{2} T_s^2 & T_s & 1 \end{bmatrix} \cdot Q(k-1). \quad (16.26)$$

Daraus folgt:

$$\underline{C} \cdot \underline{Q}^*(k-1) \cdot \underline{C}^T = \begin{bmatrix} Q_{1,1}^{**}(k-1) & Q_{1,2}^{**}(k-1) \\ Q_{2,1}^{**}(k-1) & Q_{2,2}^{**}(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} T_s^4 & \frac{1}{2} T_s^3 \\ \frac{1}{2} T_s^3 & T_s^2 \end{bmatrix} \cdot Q(k-1). \quad (16.27)$$

Mittels Koeffizientenvergleich kann die unbekannte Größe $\underline{Q}(k-1)$ bestimmt werden. Der Koeffizientenvergleich wird in diesem Beispiel mit dem Element $Q_{2,2}^{**}$ durchgeführt. Durch die Symmetrie der Matrix \tilde{P} folgt nach kurzer Rechnung:

$$Q(k-1) = \frac{Q_{2,2}^{**}(k-1)}{T_s^2} \quad (16.28)$$

$$= \frac{M_{2,2}(k) - R_{2,2}(k) - \tilde{P}_{2,2}(k-1)}{T_s^2} - \frac{2 \cdot \tilde{P}_{2,3}(k-1)}{T_s} - \tilde{P}_{3,3}(k-1). \quad (16.29)$$

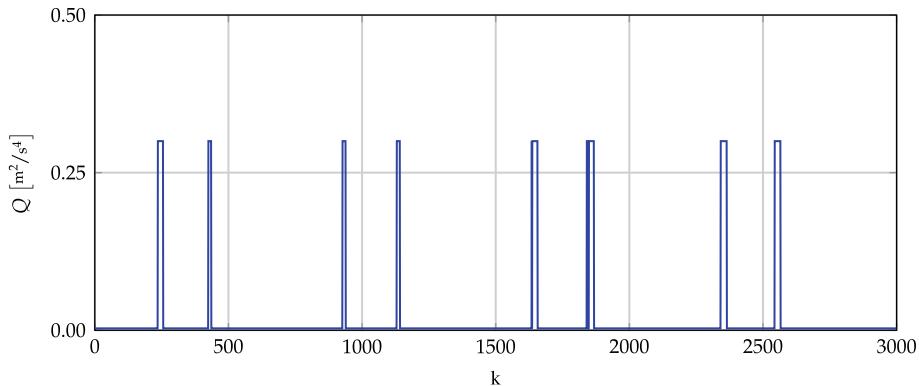


Abb. 16.3 Verlauf der geschätzten Varianzen des Systemrauschens Q

In Abb. 16.3 ist der Verlauf der geschätzten Varianz des Systemrauschens Q zu sehen. An den Stellen, an denen die Beschleunigung sich ändert, ist die Modellannahme verletzt. Das ROSE-Filter erkennt dies und vergrößert die Varianz des Modellrauschens. An den anderen Stellen ist der Modellfehler minimal.

16.2 Implementierung und Ergebnisse

Nach der Bestimmung von R und Q im vorigen Kapitel lässt sich mit den Formeln des klassischen Kalman-Filters die Zustandsschätzung durchführen. Da es sich bei der Q -Berechnung nur um eine Schätzung handelt, kann es sein, dass unplausible Werte, z. B. negative Werte geschätzt werden. Es ist deshalb ratsam, in jedem Zyklus zu überprüfen, ob die Größe Q einen minimalen Wert unterschritten bzw. einen maximalen Wert überschritten hat. In einem solchen Fall sollte der Wert von Q auf diesen Schwellwert begrenzt werden.

MATLAB: ROSE-Filter (Teil 1 von 2)

```
load -ascii data_t_h_v_a_y_r1_r2_r3.dat
t = data_t_h_v_a_y_r1_r2_r3(:,1)'; y = data_t_h_v_a_y_r1_r2_r3(:,5:7)';

Gamma    = 2.5;           % Verstärkungsfaktor Messrauschen
Alpha_R  = 0.05;          % Kalman-Verstärkung Varianz Messrauschen
Alpha_M  = 0.1;           % Kalman-Verstärkung Varianz M
Q_min    = 3E-3;          % min. Q-Wert
Q_max    = 3E-1;          % max. Q-Wert

Ts      = 0.01;           % Abtastzeit

%--- V O R A B B E S T I M M U N G   V O N   K0   u n d   H   ---
Ad = [1 Ts;
      0 1];
C  = [1 0];

R0  = 1;
Q0  = 1;

lambda = Ts*sqrt(Q0/R0);
K1 = -1/8*(lambda.^2 + 8*lambda - (lambda+4).*sqrt(lambda.^2+8*lambda));
K2 = .25*(lambda.^2 + 4*lambda - lambda.*sqrt(lambda.^2+8*lambda))/Ts;
K0= [K1;K2];
H = (eye(length(Ad)) - K0*C)*Ad;
%--- I N I T   R O S E - F I L T E R   ---
y1 = y(1,1);
y2 = y(2,1);

x1 = [y1;y2];
x2 = [y2;0];

x = [y1; y2; 0];
R = [1 0;
      0 0.1];

Ad = [1  Ts .5*Ts^2;
      0  1  Ts;
      0  0  1];
Bd = [0; 0; 0];
C  = [1 0 0;
      0 1 0];
D  = [0; 0];
G  = [0.5*Ts^2;
      Ts;
      1];
GG = G*G';
M = C*p_tilde*C';

u = zeros(1,length(t));
p_tilde = [0.5 0 0;
           0 0.1 0;
           0 0 0.1];
M = C*p_tilde*C';
```

MATLAB: ROSE-Filter (Teil 2 von 2)

```
%--- R O S E - F I L T E R ---  
  
for k=1:length(y)  
    %--- Bestimmung Messrauschen ---  
    y1 = y(1,k);  
    y2 = y(2,k);  
    x1 = H*x1 + K0*y1;  
    x2 = H*x2 + K0*y2;  
    R = Gamma*Alpha_R*[x1(1)-y1; x2(1)-y2]*[x1(1)-y1; x2(1)-y2]' + (1-Alpha_R)*R;  
  
    %--- Bestimmung Systemrauschen ---  
    dy = y(1:2,k) - C*x - D*u(k);  
    M = Alpha_M.*dy*dy' + (1-Alpha_M).*M;  
    Q(k) = (M(4)-R(4)-p_tilde(5))/Ts^2 - 2*p_tilde(6)/Ts - p_tilde(9);  
  
    if Q(k)<Q_min  
        Q(k)=Q_min;  
    end  
  
    if Q(k)>Q_max  
        Q(k)=Q_max;  
    end  
  
    %--- Kalman Gleichungen ---  
    p_dach = Ad*p_tilde*Ad' + GG*Q(k);  
    K = p_dach*C'*pinv(C*p_dach*C' + R);  
    x = x + K*dy;  
    p_tilde = (eye(length(Bd)) - K*C)*p_dach;  
    x = Ad*x + Bd*u(k);  
end
```

Auf Basis dieses Codes lassen sich die Zustandsgrößen Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung abschätzen. Abb. 16.4 zeigt den Verlauf dieser Zustandsgrößen im Vergleich zu den messtechnisch erfassbaren Eingangsgrößen.

Man erkennt, dass auch zu den Zeitpunkten, an denen das Messrauschen sich vergrößert, die Zustandsgrößen nur unwesentlich verrauscht werden. Im Gegensatz zu einem Kalman-Filter mit zeitlich konstanten R und Q kann diese Adaption nicht stattfinden und es stellt sich eine Verschlechterung der geschätzten Zustandsgrößen ein (siehe Abb. 16.5). Besonders deutlich wird dies bei der Schätzung der unbekannten Beschleunigung, die bei dem Kalman-Filter mit zeitlich konstanten R und Q mehr rauscht als bei dem ROSE-Filter.

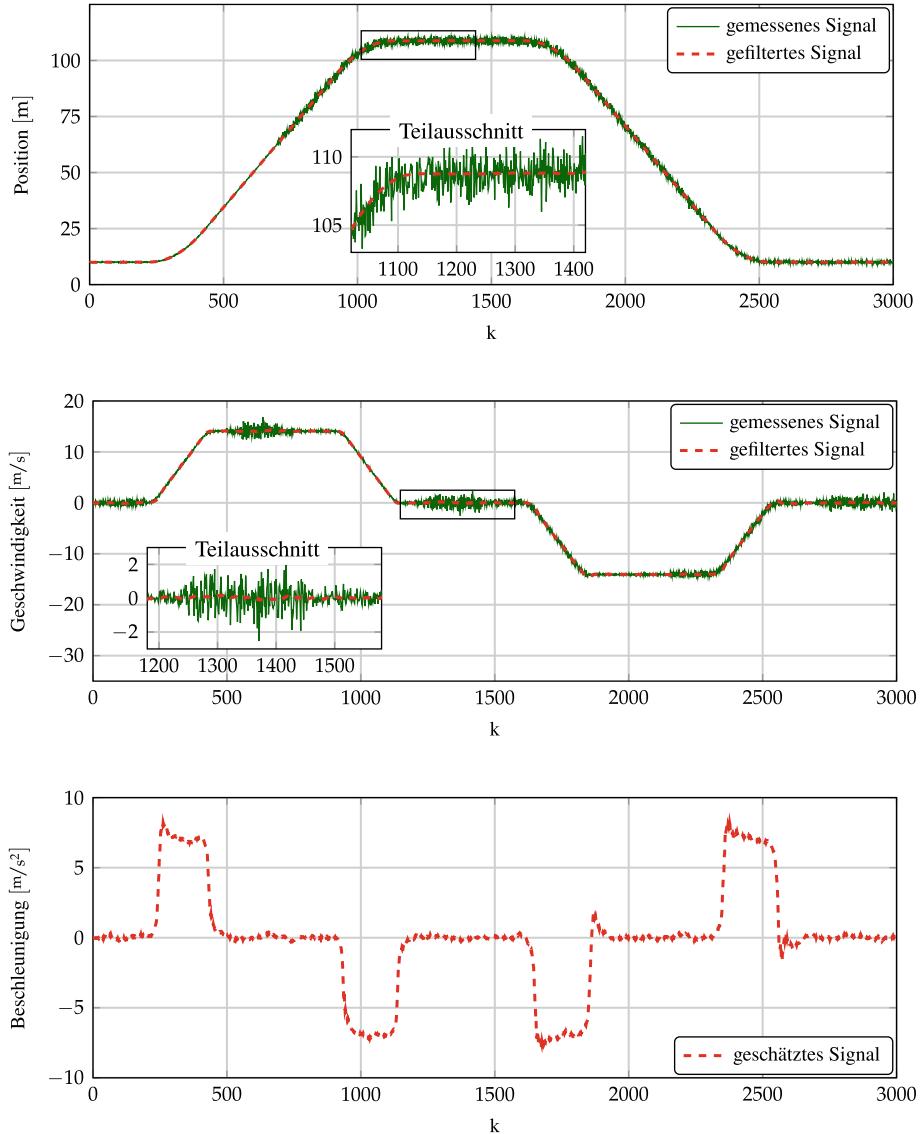


Abb. 16.4 Verlauf der Größen des korrigierten Zustandsvektors

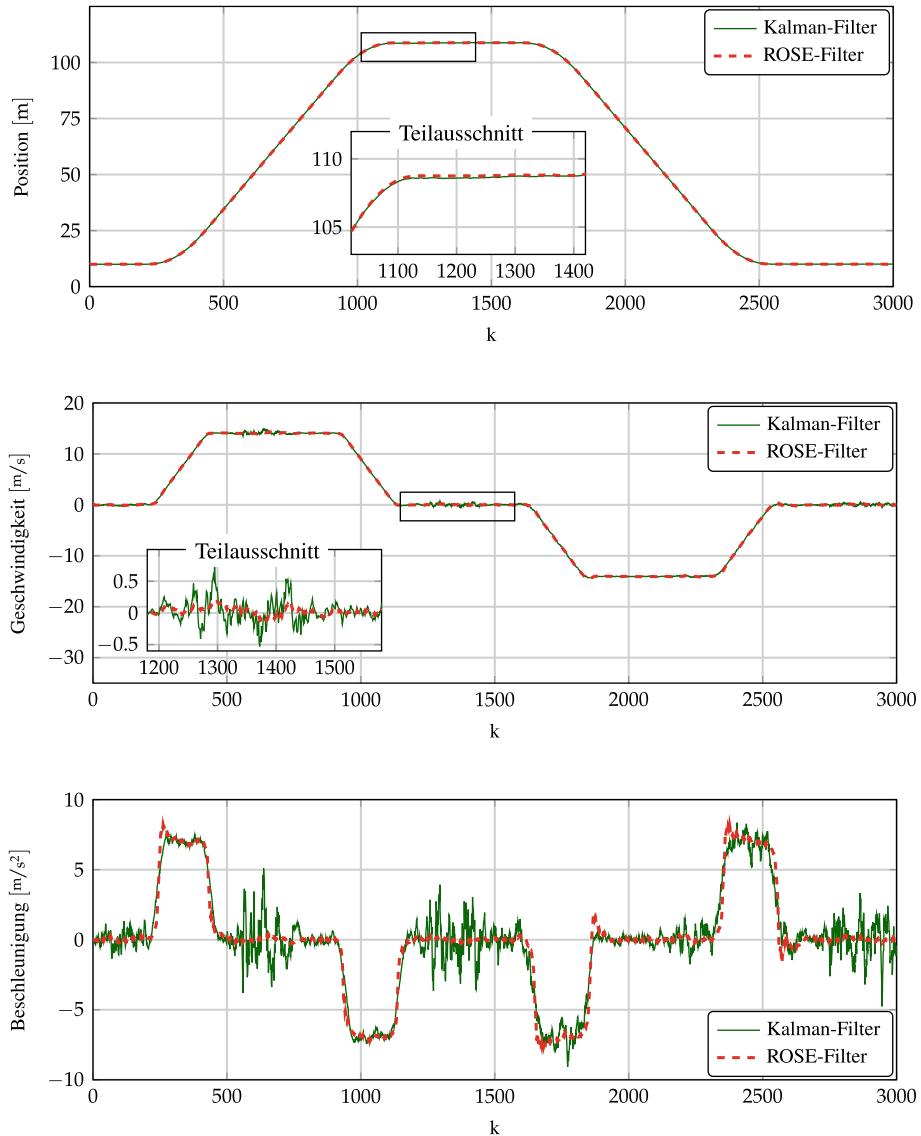


Abb. 16.5 Vergleich der Zustandsgrößen zwischen Kalman-Filter mit konstanten R und Q und ROSE-Filter

Literatur

1. BAR-SHALOM, Y.; LI, X.-R.: *Estimation and tracking: Principles Techniques and Software*. Boston: Artech House, 1993. – ISBN 0 – 89006 – 643 – 4

Beispiel: Fahrstreifenerkennung

17

Dieses Kapitel beschreibt eine videobasierte Fahrstreifenerkennung, wie sie in Fahrerassistenzsystemen oder Systemen autonom fahrender Fahrzeuge vorkommt (siehe z. B. Abb. 17.1). Ein prominenter Vertreter eines solchen Fahrerassistenzsystems ist der Spurhalteassistent, der den Fahrer eines Fahrzeugs vor dem Verlassen der Fahrspur warnt. Hierzu wird die Position des Fahrzeugs in der Fahrspur mithilfe einer Kamera bestimmt. Verringert sich der Abstand des Fahrzeugs zur Fahrbahnmarkierung, wird der Fahrer gewarnt.

Neben dem Abstand zur Fahrbahnmarkierung sind auch Eigenschaften, wie beispielsweise die Krümmung der Fahrbahn, für verschiedene Regelsysteme wichtig. So kann ein autonom fahrendes Fahrzeug aus der Krümmung der Fahrbahn die maximale Geschwindigkeit (Kurvengrenzgeschwindigkeit) bestimmen, um eine Kurve sicher zu passieren.



Abb. 17.1 Reale Fahrstreifenerkennung in einem System für hochautomatisiertes Fahren. Veröffentlicht mit freundlicher Genehmigung von André-Marcel Hellmund

17.1 Problembeschreibung

Das Ziel der Fahrstreifenerkennung ist es, alle sichtbaren Fahrstreifen in einem Kamerabild zu erkennen und Fahrerassistenzsystemen, wie dem Spurhalteassistenten, zur Verfügung zu stellen. Es wird nachfolgend unter einem Fahrstreifen eine der Markierungen (z. B. links oder rechts) verstanden, die in einer Fahrspur vorzufinden ist.

Bei der Fahrstreifenerkennung gilt es, eine Vielzahl an Problemen zu lösen, die sich in der Praxis von Anwendungsfall zu Anwendungsfall unterscheiden. Zuallererst muss durch Bildverarbeitung ermittelt werden, welche Pixel im Kamerabild zu einem Fahrstreifen gehören. Anschließend wird in aller Regel ein geometrisches Modell zu diesen Pixeln bestimmt, das der Fahrstreifengeometrie am besten entspricht. Unabhängig von der Fortbewegung des Fahrzeugs unterliegen die Parameter zur Schätzung der Geometrie zusätzlichen Schwankungen durch Rauschen. Dies bedeutet, auch wenn das Fahrzeug sich nicht bewegt und die Fahrstreifen sich durch den Stillstand theoretisch nicht im Kamerabild ändern, unterscheiden sich die Werte der Parameter von Bild zu Bild. Das Kalman-Filter eignet sich dafür, diese Parameterwerte über die Zeit zu schätzen und damit das Rauschen zu minimieren.

Neben dem Minimieren des Rauschens ergeben sich weitere Vorteile durch die Anwendung des Kalman-Filters. Zum einen lässt sich die Prädiktionseigenschaft des Kalman-Filters dazu nutzen, um Fahrstreifen aus einem Kamerabild zum Zeitpunkt $k - 1$ in das Kamerabild zum Zeitpunkt k zu prädizieren. Dies ermöglicht den Bildverarbeitungsalgorithmen, den Suchbereich nach neuen Fahrstreifen zu verringern. Ein weiterer Vorteil ist, dass bei Unterbrechungen des Kameraflusses oder einer Störung im Kamerabild eine Schätzung der Fahrspur aus vorangegangenen Bildern möglich ist.

Die Funktionsweise einer Fahrstreifenerkennung soll am Beispiel einer Simulation gezeigt werden. Hierzu wurden künstliche Kamerabilder, die Fahrstreifen zeigen, erzeugt. Dies erfolgte durch Definition einer Fahrstrecke, welche in Abb. 17.2 dargestellt ist. Anschlie-

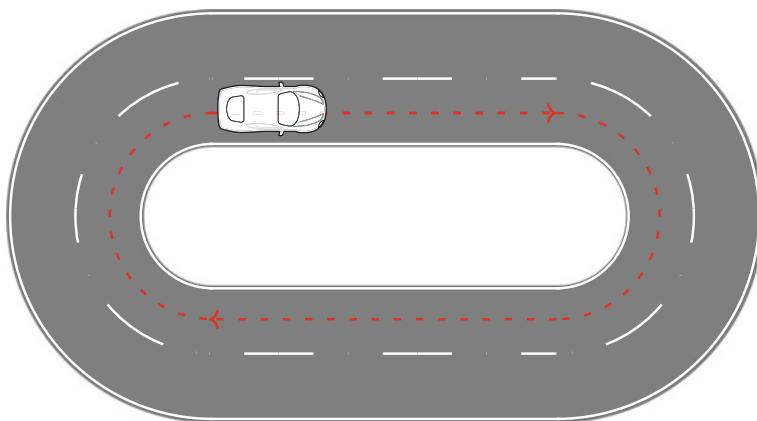


Abb. 17.2 Fahrstrecke für die Simulation von künstlichen Kamerabildern

ßend wurde festgelegt, wie ein Fahrzeug diese Strecke abfährt (gestrichelte Linie in Abb. 17.2). Die Fahrstreifen wurden dann durch eine fiktive Kamera auf dem Fahrzeug erfasst. Aus dieser Konfiguration werden durch einfache Bildsynthese künstliche Kamerabilder erzeugt. Ein solches Kamerabild ist in Abb. 17.3 skizziert.

Die künstlich erzeugten Kamerabilder werden anschließend für die Fahrstreifenerkennung genutzt. Dazu muss eine Reihe von Bildvor- und verarbeitungsschritten erfolgen. Da in der Praxis von Anwendungsfall zu Anwendungsfall jeder Verarbeitungsschritt ein anderes Verfahren verwenden kann, soll hier nur die Funktionsweise und nicht die konkrete Implementierung beschrieben werden. Der interessierte Leser sei auch hier auf den Quellcode auf www.kalman-filter.de verwiesen. Mit diesem Quellcode können alle Verarbeitungsschritte nachvollzogen werden.

Am Ende dieser Verarbeitungskette liegen für die Fahrstreifen relevante Bildpunkte vor, mit denen es möglich ist, über verschiedene geometrische Modelle den Verlauf der Straße zu bestimmen. Eine Möglichkeit ist es, ein Polynom 2. Grades zu verwenden. Die allgemeine Formel hierzu lautet

$$P(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0. \quad (17.1)$$

Für $a_2 = 0$ ergibt sich eine lineare Funktion, mit der sich gerade Abschnitte eines Fahrstreifens beschreiben lassen. Kurvige Abschnitte dagegen werden mit $a_2 \neq 0$ abgebildet. In jedem Zeitschritt wird jeder Fahrstreifen mit diesem Polynom approximiert. Eine solche Approximation zeigt Abb. 17.4 jeweils für einen geraden und einen kurvigen Abschnitt.

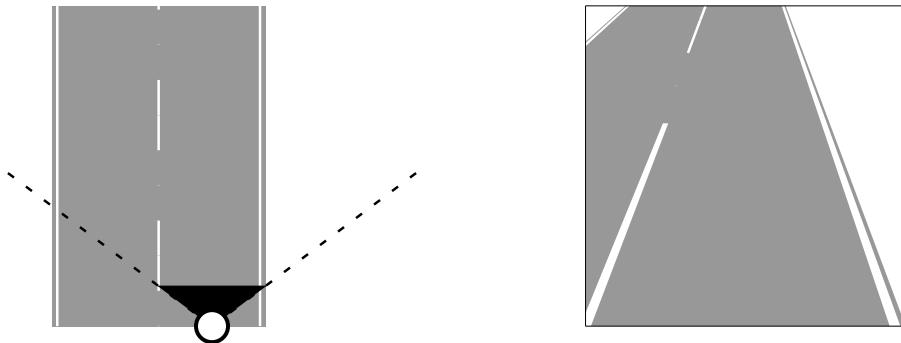


Abb. 17.3 Skizzierung der Bildsynthese. Aus einer simulierten Szene wird durch Strahlenverfolgung (engl. ray tracing) ein künstliches Kamerabild der Szene generiert. Das Kamerabild (rechts) zeigt deutlich die perspektivische Verzerrung, die bei einem Bildaufnahmeprozess auftritt

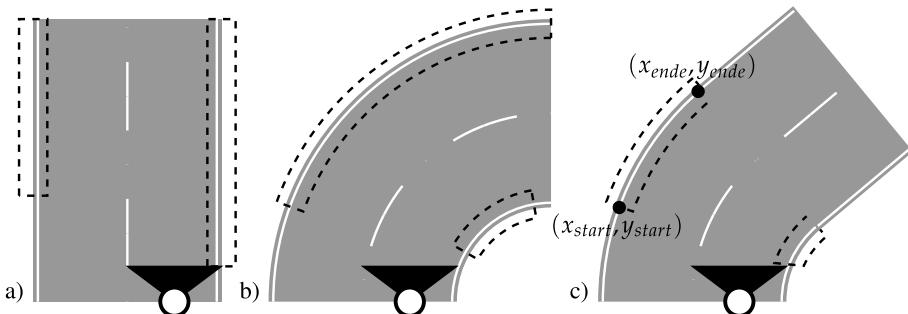


Abb. 17.4 Andeutung der Bereiche in denen der Fahrstreifen durch ein Polynom 2. Grades approximiert wird. Durch den Öffnungswinkel der Kamera wird der Sichtbereich teilweise eingegrenzt. Bei c wird angedeutet, dass über die Start- und Endpunkte nur der Abschnitt approximiert wird, der dem Fahrzeug am nächsten ist

Neben der Form der Fahrstreifen müssen deren Start- und Endpunkt geschätzt werden. Mit dem Start- und dem Endpunkt kann der Bereich eingegrenzt werden, in dem das Polynom den Fahrstreifen besonders gut beschreibt. Dies ist zwingend notwendig, wenn im Kamerabild der Streckenabschnitt aus verschiedenen kurvigen Elementen besteht (vgl. Abb. 17.4c). Zum Beispiel kann ein zu Beginn gerader Abschnitt, der in eine Kurve mündet, nur ungenau durch ein Polynom 2. Grades beschrieben werden. Deswegen ist es erforderlich, nur den Abschnitt mit dem Polynom zu approximieren, der dem Fahrzeug am nächsten ist. Dies kann durch eine Schätzung der Start- und Endpunkte erfolgen. Dazu können Polynome unterschiedlicher Länge bestimmt werden und das Polynom mit einer bestimmten Anpassungsgüte legt den Start- und den Endpunkt fest. Ihre x- und y-Koordinaten werden mit $(x_{\text{start}}, y_{\text{start}})$ für den Startpunkt und mit $(x_{\text{ende}}, y_{\text{ende}})$ für den Endpunkt notiert.

Um eine Fahrstreifenerkennung mit dem Kalman-Filter durchzuführen, sollte beachtet werden, dass sich im Kamerabild in den meisten Fällen mehrere Fahrstreifen befinden. Folglich ist für jeden Fahrstreifen ein eigener Kalman-Filter zu verwenden.

Bestimmt man durch die Approximation eines Polynoms 2. Grades die äußere Fahrspur des in Abb. 17.2 zu sehenden Rundkurses, so erhält man den in Abb. 17.5 dargestellten Verlauf der Parameter a_2, a_1, a_0 .

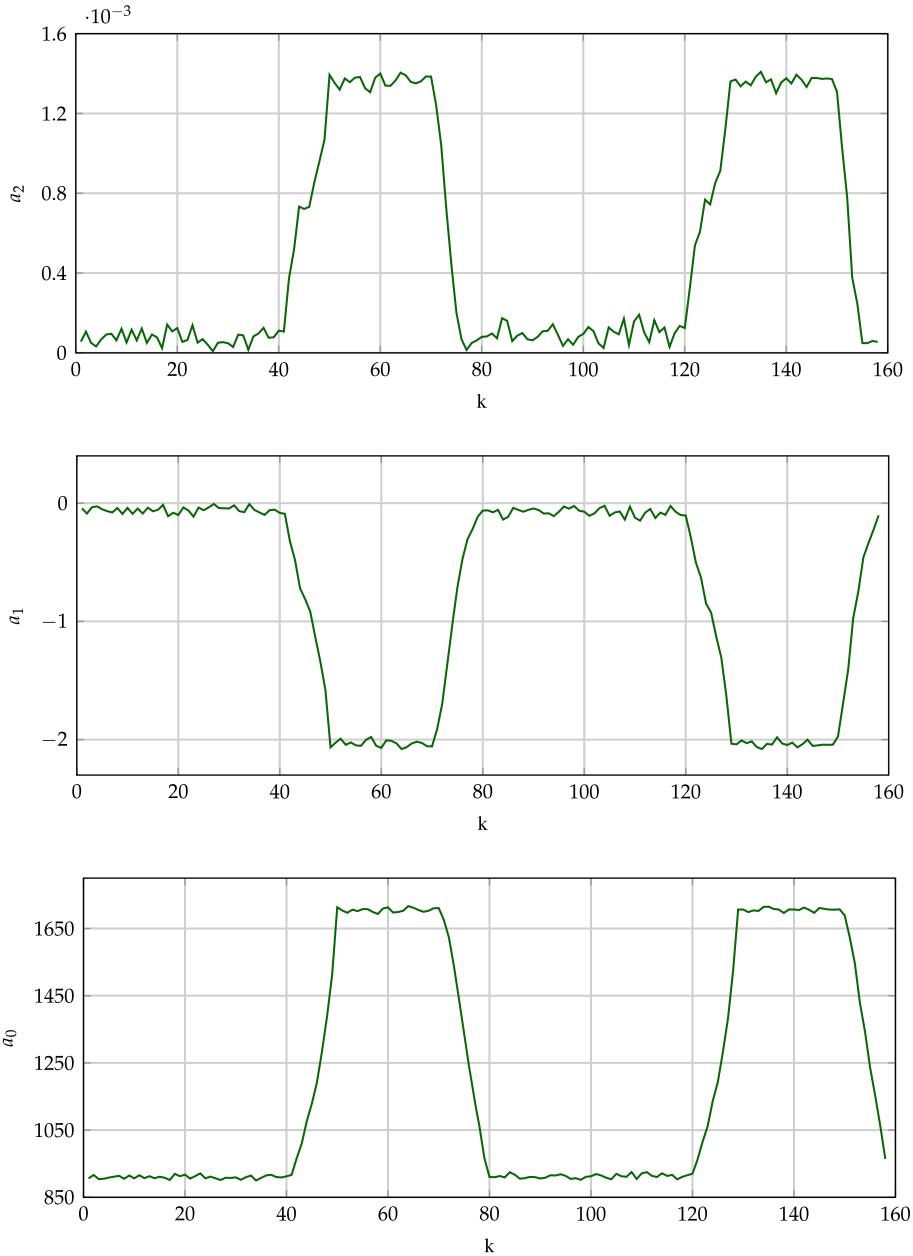


Abb. 17.5 Eingangsgrößen für das Kalman-Filter

17.2 Filterentwurf

Dieser Abschnitt beschreibt den Filterentwurf, um Fahrstreifen mithilfe des Kalman-Filters über die Zeit zu verfolgen und damit verlässliche und robuste Informationen über den Verlauf der Fahrstreifen anderen Systemen zur Verfügung zu stellen.

Zeitkontinuierliche Systembeschreibung

Die zeitdiskrete Systembeschreibung setzt sich zum einen aus den Parametern des Polynom 2. Grades und den Start- und Endpunkten zusammen. Der Zustandsvektor lautet daher

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ x_{\text{start}}(t) \\ y_{\text{start}}(t) \\ x_{\text{ende}}(t) \\ y_{\text{ende}}(t) \end{bmatrix}. \quad (17.2)$$

Für die Systemdynamik wird davon ausgegangen, dass sich das Fahrzeug nur langsam bewegt oder die Kamera eine hohe Aufnahmefrequenz besitzt. Dadurch sollten sich die Werte des Zustandsvektors $\underline{x}(t)$ von einem Zeitpunkt t zum nächsten Zeitpunkt $t + \Delta t$ nur unwesentlich ändern. Für die Ableitung des Zustandsvektors $\dot{\underline{x}}(t)$ gilt damit:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{a}_0(t) \\ \dot{a}_1(t) \\ \dot{a}_2(t) \\ \dot{x}_{\text{start}}(t) \\ \dot{y}_{\text{start}}(t) \\ \dot{x}_{\text{ende}}(t) \\ \dot{y}_{\text{ende}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{a_0}(t) \\ z_{a_1}(t) \\ z_{a_2}(t) \\ z_{x_{\text{start}}}(t) \\ z_{y_{\text{start}}}(t) \\ z_{x_{\text{ende}}}(t) \\ z_{y_{\text{ende}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{a_0}(t) \\ z_{a_1}(t) \\ z_{a_2}(t) \\ z_{x_{\text{start}}}(t) \\ z_{y_{\text{start}}}(t) \\ z_{x_{\text{ende}}}(t) \\ z_{y_{\text{ende}}}(t) \end{bmatrix}. \quad (17.3)$$

Kleinere Änderungen werden durch die Zufallszahlen $z_{a_0}, z_{a_1}, z_{a_2}, z_{x_{\text{start}}}, z_{y_{\text{start}}}, z_{x_{\text{ende}}}$ und $z_{y_{\text{ende}}}$ modelliert.

Die vollständige Zustandsraumbeschreibung lautet damit:

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{a}_0(t) \\ \dot{a}_1(t) \\ \dot{a}_2(t) \\ \dot{x}_{start}(t) \\ \dot{y}_{start}(t) \\ \dot{x}_{ende}(t) \\ \dot{y}_{ende}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \begin{bmatrix} z_{a_0}(t) \\ z_{a_1}(t) \\ z_{a_2}(t) \\ z_{x_{start}}(t) \\ z_{y_{start}}(t) \\ z_{x_{ende}}(t) \\ z_{y_{ende}}(t) \end{bmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \cdot \underline{u}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{G}} \cdot \underline{z}(t). \quad (17.4)
 \end{aligned}$$

Die Systemmatrix \underline{A} entspricht der Nullmatrix, die Eingangsmatrix \underline{B} dem Nullvektor und die Matrix \underline{G} der Einheitsmatrix.

In diesem Fahrstreifenerkennungsansatz sind alle Zustandsgrößen direkt messbar. Dies bedeutet, dass für die Messabbildung (Ausgangsgleichung)

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ x_{start}(t) \\ y_{start}(t) \\ x_{ende}(t) \\ y_{ende}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ x_{start}(t) \\ y_{start}(t) \\ x_{ende}(t) \\ y_{ende}(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot \underline{u}(t) \quad (17.5)$$

$$\underline{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \cdot \underline{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \cdot \underline{u}(t) \quad (17.6)$$

gilt. Somit entspricht die Beobachtungsmatrix \underline{C} der Einheitsmatrix und die Durchgangsmatrix \underline{D} dem Nullvektor.

Zeitdiskrete Systembeschreibung

In Kap. 2 wurde auf die Diskretisierung der zeitkontinuierlichen Systembeschreibung eingegangen. Mit diesem Wissen lassen sich die zeitdiskrete Systemmatrix \underline{A}_d und die zeitdiskrete Eingangsmatrix \underline{B}_d bestimmen:

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{B}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{B} dv = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Systemmatrix entspricht somit im Zeitkontinuierlichen der Nullmatrix und im Zeitdiskreten der Einheitsmatrix.

Beobachtbarkeit

Da alle Zustandsgrößen direkt messbar sind, gestaltet sich die Überprüfung der Beobachtbarkeit einfach. Der Rang für die Beobachtbarkeitsmatrix \underline{S}_B^* ergibt sich mit

$$\text{Rang}(\underline{S}_B^*) = \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} \underline{C} \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d^{n-1} \end{bmatrix}\right) = 7. \quad (17.7)$$

Da der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix \underline{S}_B^* gleich der Anzahl der Freiheitsgrade des Zustands \underline{x} ist, ist das System beobachtbar.

Bestimmung des System- und Messrauschens

Im Falle der Fahrstreifenerkennung wird für die Kovarianzmatrix $\underline{R}(k)$ des Messrauschen eine mögliche Korrelation zwischen den einzelnen Größen vernachlässigt. D. h. die Kovarianz aller Größen ist null. Die Kovarianzmatrix des Messrauschen lautet damit

$$\underline{R}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Var}(v_{a_2}(k)) \\ \text{Var}(v_{a_1}(k)) \\ \text{Var}(v_{a_0}(k)) \\ \text{Var}(v_{x_{start}}(k)) \\ \text{Var}(v_{y_{start}}(k)) \\ \text{Var}(v_{x_{ende}}(k)) \\ \text{Var}(v_{y_{ende}}(k)) \end{bmatrix}. \quad (17.8)$$

Für die Simulation wird die Varianz des Messrauschen empirisch bestimmt. Dazu verbleibt das Fahrzeug im Stillstand. Nun werden für eine gewisse Zeit die Werte der Fahrstreifen

aufgezeichnet. Anschließend erfolgt eine Mittelung dieser Werte und die Berechnung der Varianz.

Die mit dieser Methode ermittelten Werte lauten

$$\begin{bmatrix} \text{Var}(v_{a_2}(k)) \\ \text{Var}(v_{a_1}(k)) \\ \text{Var}(v_{a_0}(k)) \\ \text{Var}(v_{x_{\text{start}}}(k)) \\ \text{Var}(v_{y_{\text{start}}}(k)) \\ \text{Var}(v_{x_{\text{ende}}}(k)) \\ \text{Var}(v_{y_{\text{ende}}}(k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.174 \cdot 10^{-9} \\ 7.585 \cdot 10^{-4} \\ 26.266 \\ 1.631 \\ 1.631 \\ 1.631 \\ 1.631 \end{bmatrix}. \quad (17.9)$$

Die Bestimmung der Matrix für das diskrete Systemrauschen \underline{G}_d erfolgt durch die Methode der direkten Diskretisierung. Diese lautet

$$\begin{aligned} \underline{G}_d &= e^{\underline{A} \cdot T_s} \cdot \underline{G} = \underline{A}_d \cdot \underline{G} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (17.10)$$

Im Gegensatz zu den kinematischen Modellen aus Kap. 12 besteht für die in diesem Fall gewählte Modellbildung kein einfacher physikalischer Zusammenhang. Deshalb wird vereinfacht davon ausgegangen, dass die einzelnen Zustandsgrößen unkorreliert und normalverteilt sind. Die Kovarianzmatrix des Systemrauschens lautet somit

$$\underline{Q}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Var}(z_{a_2}(k)) \\ \text{Var}(z_{a_1}(k)) \\ \text{Var}(z_{a_0}(k)) \\ \text{Var}(z_{x_{\text{start}}}(k)) \\ \text{Var}(z_{y_{\text{start}}}(k)) \\ \text{Var}(z_{x_{\text{ende}}}(k)) \\ \text{Var}(z_{y_{\text{ende}}}(k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{z_1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{z_2}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z_3}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{z_4}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{z_5}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{z_6}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{z_7}^2 \end{bmatrix}.$$

In der vorliegenden Simulation wurden die Werte der Varianzen manuell auf

$$\begin{bmatrix} \text{Var}(z_{a_2}(k)) \\ \text{Var}(z_{a_1}(k)) \\ \text{Var}(z_{a_0}(k)) \\ \text{Var}(z_{x_{\text{start}}}(k)) \\ \text{Var}(z_{y_{\text{start}}}(k)) \\ \text{Var}(z_{x_{\text{ende}}}(k)) \\ \text{Var}(z_{y_{\text{ende}}}(k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.935 \cdot 10^{-9} \\ 1.896 \cdot 10^{-4} \\ 6.567 \\ 0.408 \\ 0.408 \\ 0.408 \\ 0.408 \end{bmatrix} \quad (17.11)$$

festgelegt, sodass ein für den Rundkurs optimales Filterergebnis erreicht wird. Eine empirische Festlegung wie für das Messrauschen ist aufgrund des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen dem Zustand $\underline{x}(t)$ und der physikalischen Bewegung des Fahrzeugs nicht ohne Weiteres möglich. Je nach Situation (Geradeaus- bzw. Kurvenfahrt) wären andere Werte optimal. Hierfür wäre das ROSE-Filter prädestiniert, um adaptiv die Kovarianzen mit abzuschätzen.

Die Kovarianzmatrix $\underline{Q}^*(k)$ des Systemrauschen berechnet sich analog zu den vorherigen Kapiteln

$$\underline{Q}^*(k) = \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \begin{bmatrix} \sigma_{z_1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{z_2}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z_3}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{z_4}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{z_5}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{z_6}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{z_7}^2 \end{bmatrix}. \quad (17.12)$$

17.3 Implementierung und Ergebnisse

Mit dem im vorherigen Abschnitt beschriebenen Filterentwurf lässt sich nun eine zeitliche Verfolgung der Fahrspuren durchführen. Hierzu wird der auf www.kalman-filter.de zur Verfügung gestellte Quellcode verwendet.

In Abb. 17.6 ist der Verlauf des äußeren Fahrstreifens mit den drei Parametern des Polynoms $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ dargestellt. Der Unterschied zwischen Geradeaus- und Kurvenfahrt ist deutlich zu erkennen. Besonders anschaulich ist dies für den quadratischen Parameter a_2 . Bei der Fahrt durch den geraden Abschnitt ist dieser nahe null und nimmt in der Kurve einen Wert ungleich null an.

Die Start- und Endpunkte sind hier nicht aufgeführt, da sie für die Fahrstreifeneigenschaft weniger interessant sind und hauptsächlich nur als Hilfsgrößen dienen.

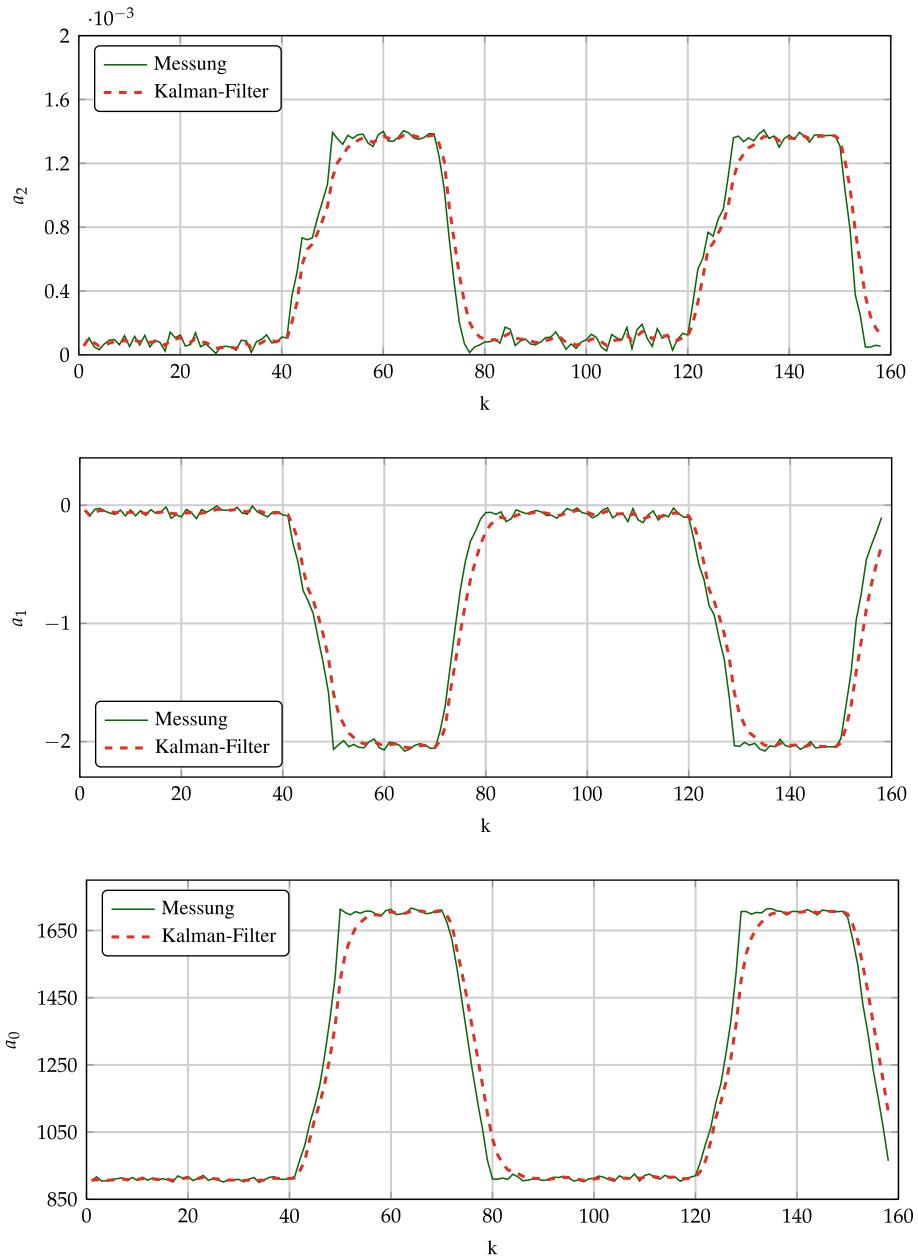


Abb. 17.6 Die Abbildung zeigt das Ergebnis der Kalman-Filterung für die Befahrung der Strecke aus Abb. 17.2

Beispiel: Gleichstrommotor

18

Das folgende Kapitel fokussiert sich auf die Zustandsschätzung eines Bürstenmotors, namentlich dessen Winkelposition θ , Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ und Ankerstrom i mit einem linearen Kalman-Filter. Für ein konkretes Beispiel wird angenommen, dass die Winkelgeschwindigkeit geregelt werden soll, aber lediglich die Winkelposition durch einen absoluten Drehgeber gemessen werden kann. Es wird gezeigt, dass die geschätzte Winkelgeschwindigkeit wesentlich genauer ist, als wenn die Winkelgeschwindigkeit durch die approximierte Ableitung der Winkelposition ermittelt wird.

18.1 Filterentwurf

Zeitkontinuierliche Systembeschreibung

Die Modellierung eines Gleichstrommotors gliedert sich in zwei Teile. Der elektrische Teil wird mit dem elektrischen Ersatzschaltbild und die Kinematik mit den Grundgleichungen eines Gleichstrommotors beschrieben (Abb. 18.1).

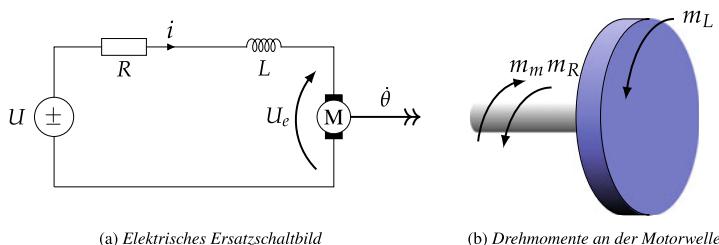


Abb. 18.1 Zeitkontinuierliche Systembeschreibung eines Gleichstrommotors

Elektrisches Systemmodell

Der elektrische Teil besteht aus dem Ankerwiderstand R und der Induktivität der Ankerwicklung L , die in Reihe geschaltet sind, und dem elektromechanischen Energiewandler M , der den Gleichstrommotor darstellt. Der Stromkreis wird durch die Spannungsquelle U betrieben. Mithilfe der Maschengleichung lässt sich folgende Gleichung ermitteln

$$U = L \cdot \dot{i} + R \cdot i - U_e. \quad (18.1)$$

Der Gleichstrommotor induziert die Spannung U_e , die zur Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ linear mit der Motorkonstante K_e zusammenhängt

$$U_e = K_e \cdot \dot{\theta}. \quad (18.2)$$

Da $L\dot{i}$ ein differenzierender Term ist, kann nach i aufgelöst werden, um die folgende Differenzialgleichung 1. Ordnung zu erhalten

$$\dot{i} = \frac{1}{L} \cdot V - \frac{R}{L} \cdot i - \frac{K_e}{L} \cdot \dot{\theta}, \quad (18.3)$$

die später in den Zustandsraum übertragen wird.

Kinematisches Systemmodell

Was den mechanischen Teil betrifft, so wird der Gleichstrommotor durch die Gesetzmäßigkeiten bei der Rotation eines starren Körpers um eine im Körper festliegende Achse beschrieben. Es wird angenommen, dass die mechanische Welle und der gedrehte Körper, d. h. die angetriebene Last, bekannt sind und unter dem Trägheitsmoment J subsumiert werden. Der durch die Winkelbeschleunigung $\ddot{\theta}$ verursachte Nettodrehmoment setzt sich aus den folgenden einzelnen Drehmomenten zusammen (Formel 18.4)

$$J \cdot \ddot{\theta} = m_m - m_R - m_L. \quad (18.4)$$

Dabei ist m_m das Motordrehmoment. Das Reibungsmoment m_R und das Lastmoment m_L wirken dem Motordrehmoment m_m entgegen. Für das Motordrehmoment m_m besteht ein linearer Zusammenhang

$$m_m = K_T \cdot i \quad (18.5)$$

mit dem Strom i und dem Faktor K_T , der als Drehmomentkonstante bezeichnet wird. Das Reibungsmoment m_R ist proportional zur Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$, welche mit dem Koeffizienten b , also

$$m_R = b \cdot \dot{\theta} \quad (18.6)$$

multipliziert wird. Das Drehmoment m_L ist das mechanische Lastmoment, das $m_L = 0$ ist, wenn der Gleichstrommotor ohne Nutzlast betrieben wird, später wird aber ein unbekanntes Lastmoment angenommen. Da $\ddot{\theta}$ der Term mit der höchsten Differenzierung ist, kann nach ebendiesem aufgelöst werden, um die folgende Differenzialgleichung 2. Ordnung zu erhalten

$$\ddot{\theta} = \frac{K_T \cdot i}{J} - \frac{b}{J} \cdot \dot{\theta} - \frac{m_L}{J}. \quad (18.7)$$

Kombiniertes Systemmodell

Die beiden oberen Gleichungen können nun in ein kombiniertes Zustandsraummodell der Form

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{u}(t) + \underline{G} \cdot \underline{z}(t) \quad (18.8)$$

überführt werden.

Zu diesem Zweck wird die kinematische Differenzialgleichung 2. Ordnung in eine Differenzialgleichung 1. Ordnung umgewandelt, indem man als erste Zustandsgröße $x_1 := \theta$ und $x_2 := \dot{\theta}$ definiert. Zusätzlich modellieren wir die Ableitung des Lastmoments als eine unbekannte Störgröße $m_L = z(t)$, was bedeutet, dass wir das Lastmoment als dritte Zustandsvariable definieren $x_3 := m_L$. Für die elektrische Differenzialgleichung 1. Ordnung können wir direkt $x_4 := i$ als vierte und letzte Zustandsvariable definieren. Außerdem wird das kombinierte System nur durch die Spannungsversorgung gesteuert, d. h. $\underline{u}(t) = U$.

Bringt man alles in Zustandsraumform, so erhält man

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ m_L \\ i \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{J} & -\frac{1}{J} & \frac{K_T}{J} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_e}{L} & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ m_L \\ i \end{bmatrix}}_{\underline{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \cdot \underline{u}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{G}} \cdot \underline{z}(t). \quad (18.9)$$

Für die Messgleichung

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{x}(t) + \underline{v}(t) \quad (18.10)$$

nehmen wir an, dass wir die Winkelpositionen θ mit einem absoluten Drehgeber messen

$$\underline{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (18.11)$$

Einige Hinweise:

Die Wahl der Zustandsvariablen ist Teil der Modellierung und es ist sowohl eine andere Wahl als auch eine andere Reihenfolge möglich. Bei der Modellierung des Lastmoments m_L wurde angenommen, dass das Lastmoment m_L unbekannt und verrauscht ist. Da das Lastmoment m_L nicht mittelwertfrei ist, ist es nicht möglich, $\underline{z}(t) = m_L$ zu setzen. Eine

Tab. 18.1 Verwendete Parameter für den Gleichstrom-Bürstenmotor

Formelzeichen	Bezeichnung	Wert	Einheit
J	Trägheitsmoment	0.0001	$kg \cdot m^2$
b	Reibungsmomentkoeffizient	0.0001	$\frac{Nm}{rad \cdot s^{-1}}$
K_T	Drehmomentkonstante	0.035	$\frac{Nm}{A}$
K_e	Motorkonstante	0.035	V
R	Elektrischer Widerstand	6	Ω
L	Henry	0.0025	H

Praxis ist daher, die Änderung (d. h. die Ableitung) als mittelwertfrei anzunehmen und die Variable als zusätzlichen Zustand (hier x_3) zu setzen.

Zeitdiskrete Systembeschreibung

Während die zeitkontinuierliche Systembeschreibung für die Herleitung der physikalischen Zusammenhänge nützlich ist, wird für die Implementierung innerhalb eines Rechners die zeitdiskrete Systembeschreibung der Form

$$\underline{x}(k) = \underline{A}_d(k-1) \cdot \underline{x}(k-1) + \underline{B}_d(k-1) \cdot \underline{u}(k-1) + \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k-1) \quad (18.12)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C}(k) \cdot \underline{x}(k) + \underline{v}(k) \quad (18.13)$$

benötigt. Leider ergibt die Diskretisierung der Matrizen \underline{A}_d , \underline{B}_d und \underline{G}_d keine handlichen Formulierungen, wenn mit den Formeln aus Abschn. 10.2 analytisch diskretisiert wird. Daher erfolgt die Diskretisierung durch direktes Einsetzen der Werte aus Tab. 18.1 mit $T_s = 0,1 \text{ s}$ und Berechnung durch MATLAB®. Unter Verwendung der bekannten Gleichungen lassen sich folgende Werte ermitteln

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} \approx \begin{bmatrix} 1.000 & 0.086 & -45.328 & 0.013 \\ 0 & 0.738 & -862.858 & 0.108 \\ 0 & 0 & 1.000 & 0 \\ 0 & -0.004 & 5.015 & -0.001 \end{bmatrix}, \quad (18.14)$$

$$\underline{B}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{B} dv \approx \begin{bmatrix} 0.262 \\ 5.015 \\ 0 \\ 0.138 \end{bmatrix}, \quad (18.15)$$

$$\underline{G}_d = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{G} dv \approx \begin{bmatrix} -1.548 \\ -45.328 \\ 0.100 \\ 0.262 \end{bmatrix}. \quad (18.16)$$

Beobachtbarkeit

Um zu prüfen, ob die Modellierung der Messabbildung die Beobachtung aller Zustände ermöglicht, kann man den Rang der Beobachtbarkeitsmatrix prüfen:

$$\text{Rang}(\underline{S}_B^*) = \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} \underline{C} \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}_d^{n-1} \end{bmatrix}\right) = 4. \quad (18.17)$$

In diesem Fall entspricht der Rang der Anzahl der Freiheitsgrade und somit ist das System mit der gewählten Messabbildung \underline{C} vollständig beobachtbar.

Bestimmung des System- und Messrauschens

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, das Systemrauschen zu bestimmen. Da hier nur simulativ gearbeitet wird, würden alle Methoden aus Kap. 8 funktionieren. In der Praxis müsste genauer evaluiert werden, welche Methode und welche Parametrisierung gewählt werden sollte. Hier wird die Varianz auf $\sigma_{m_L}^2 = 2.25 \cdot 10^{-6}$ gesetzt mit

$$\underline{q}(k) = \sigma_{m_L}^2. \quad (18.18)$$

Für die Berechnung der Kovarianzmatrix des diskreten Systemrauschen wird die Diskretisierung aus Abschn. 8.4 gewählt:

$$\underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T = \int_0^{T_s} e^{\underline{A} \cdot v} \cdot \underline{G} \cdot \underline{G}^T \cdot e^{\underline{A}^T \cdot v} dv \cdot \underline{q}(k). \quad (18.19)$$

Die Berechnung liefert mit den zuvor genannten Werten

$$\underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T \approx \begin{bmatrix} 0 & 0.002 & 0 & 0 \\ 0.002 & 0.060 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (18.20)$$

Die Bestimmung des Messrauschen basiert auf der Annahme, dass die Winkelposition des Gleichstrommotors durch einen Absolutwertgeber mit einer Auflösung von 2 Bit bestimmt wird. Daraus ergeben sich vier diskrete Positionen, wobei eine Position einer Intervalllänge von 90° entspricht. Die Varianz des Messrauschen muss gleich der Varianz der kontinuierlichen Gleichverteilung gesetzt werden:

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{2\pi}{4} \right)^2 \approx 0.206 \text{ rad}. \quad (18.21)$$

18.2 Implementierung und Ergebnisse

Die folgenden Ergebnisse wurden durch die Durchführung einer Simulation in MATLAB® erzielt. Hierzu wird der auf www.kalman-filter.de zur Verfügung gestellte Quellcode verwendet. Um das dynamische Verhalten des Systems, wenn dieses geregelt wird, zu analysieren, wird die Eingangsspannung auf 6 V und in der Mitte der Simulationszeit auf 12 V gesetzt (siehe Abb. 18.2).

Die nächsten vier Abbildungen zeigen den Verlauf der Schätzung von \tilde{x} und dem wahren Wert von x . Zusätzlich sind für den ersten Zustand x_1 die Messwerte y eingezeichnet. Für den zweiten Zustand x_2 , d.h. die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$, wird die approximierte Ableitung $y' = \frac{y(k) - y(k-1)}{T_s}$ eingezeichnet (Abb. 18.4).

Qualitativ kann für die Winkelposition ausgewertet werden, dass die Schätzung für x_1 sehr nahe am wahren Wert liegt (Abb. 18.3).

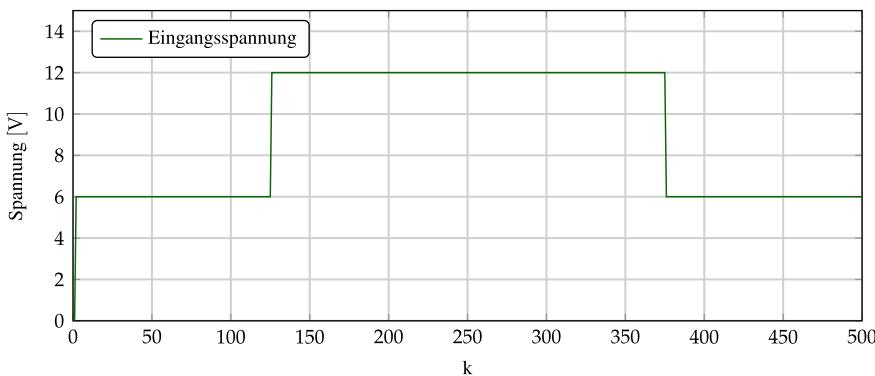


Abb. 18.2 Eingangsspannung U

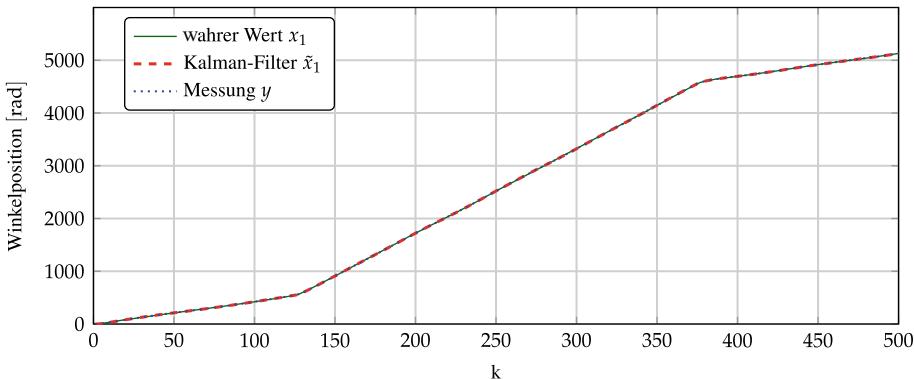


Abb. 18.3 Winkelposition (x_1)

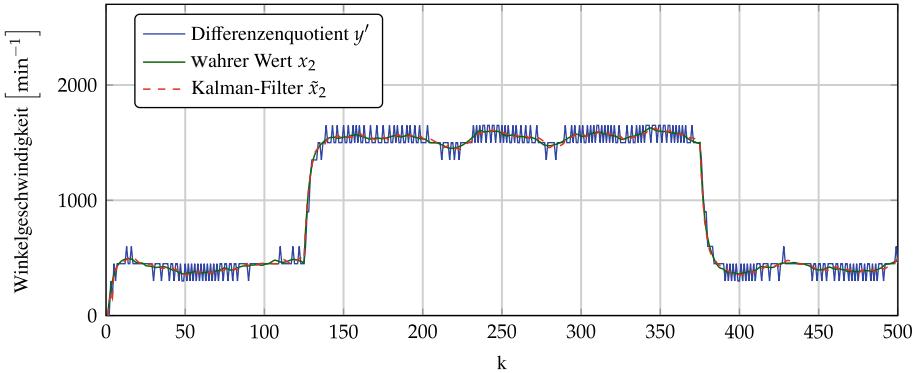


Abb. 18.4 Winkelgeschwindigkeit (x_2)

Für die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ respektive die Drehzahl ist ersichtlich, dass die approximierte Ableitung y' ein Diskretisierungsrauschen aufweist und die Schätzung für x_2 nahe am wahren Wert liegt (Abb. 18.4).

Das vorherige Ergebnis wurden hauptsächlich qualitativ bewertet. Eine weitverbreitete quantitative Methode ist die Bewertung des Schätzfehlers mit dem mittleren Schätzfehlerquadrat (RMSE) aus Abschn. 9.1. Die nächste Abbildung zeigt den RMSE für x_1 und die Messung y . Es ist zu erkennen, dass der RMSE für x_1 des Kalman-Filters unter dem RMSE der Messung y liegt und damit die Schätzung genauer ist (Abb. 18.7).

Üblicherweise wird die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ zur Regelung eines Gleichstrommotors verwendet. Ohne einen Zustandsschätzer ist man geneigt, die Drehzahl durch den Differenzenquotient y' zu ermitteln und auf diese Größe zu regeln. In der nächsten Abb. 18.8 ist auch der RMSE für y' dargestellt. Der RMSE für x_2 liegt in etwa Faktor 4 unter dem RMSE

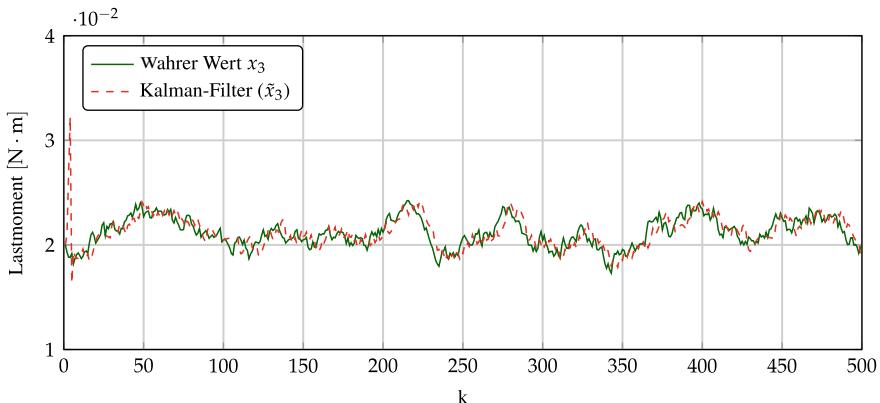


Abb. 18.5 Lastmoment x_3

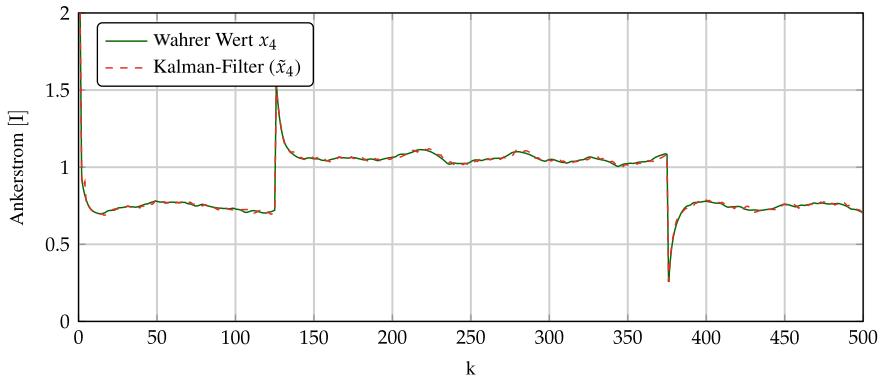


Abb. 18.6 Ankerstrom x_4

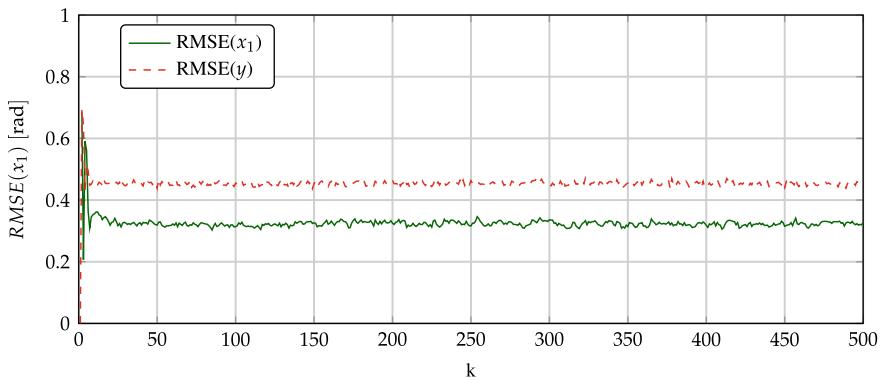


Abb. 18.7 RMSE(x_1)

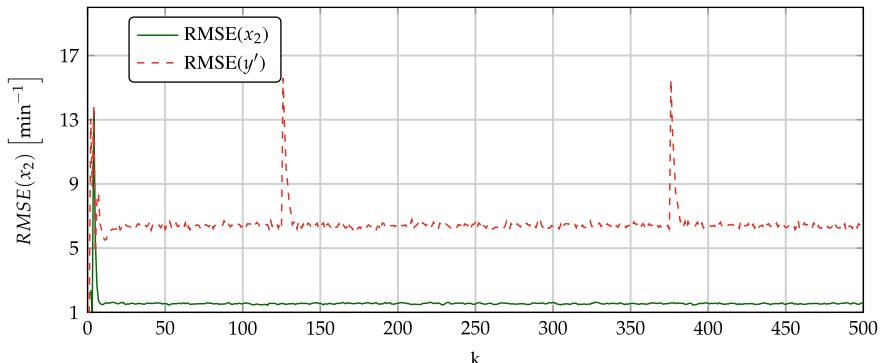


Abb. 18.8 RMSE(x_2)

für y' . Es ist deutlich zu erkennen, dass der RMSE ansteigt, wenn sich die Eingangsspannung U sprunghaft ändert. Es ist wahrscheinlich, dass bei schnellem Regeln dies zu einem ungewünschten Verhalten führt.

Als letzter Schritt kann die Korrektheit der Kovarianzmatrix durch das durchschnittliche normierte Schätzfehlerquadrat (ANEES) aus Abschn. 9.2.2 bestätigt werden. Da 1000 Monte-Carlo-Durchläufe durchgeführt wurden, kann ein 95 %-Konfidenzintervall [3, 82; 4, 17] ermittelt werden. Die nächste Abbildung zeigt die ANEES, die innerhalb des Konfidenzintervalls liegt. Außerdem liegt der Mittelwert der ANEES nahe bei 4, was der Ordnung des verwendeten Zustandsraumsystems entspricht (Abb. 18.9).

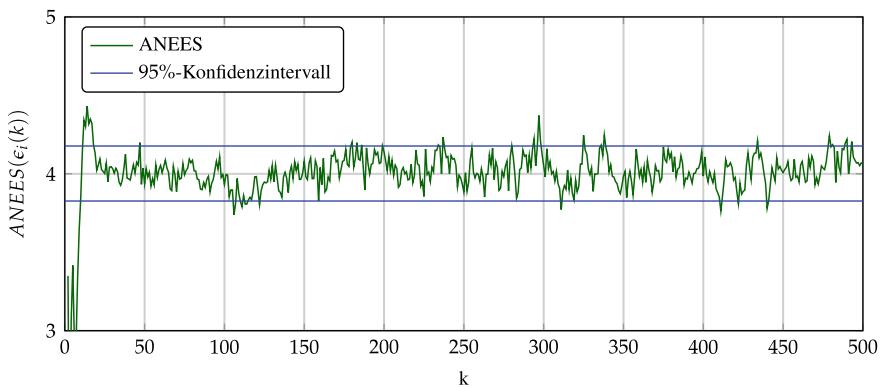


Abb. 18.9 Average Normalized Estimation Error Squared

Beispiel: Positions- und Geschwindigkeitsschätzung mit EKF-Filter

19

Durch die Einführung von GPS und andere Positionssensoren ist es möglich, außerhalb und innerhalb von Gebäuden die Position zu bestimmen. Sehr oft werden diese Sensoren an Fahrzeugen verbaut, um deren Position zu bestimmen. Die Geschwindigkeit sowie die Orientierung lassen sich nicht direkt messen. Ebenso der Kurvenradius (bzw. die Krümmung), auf dem sich das Fahrzeug gerade bewegt.

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie die verrauschte Positionsinformation gefiltert werden kann und wie die unbekannte Geschwindigkeit des Fahrzeugs, dessen Orientierung in der Ebene und die Krümmung auf der aktuellen Trajektorie geschätzt werden können.

19.1 Positionssensor

Messtechnisch ist die Position erfassbar. Diese wird in der Ebene mit den beiden Koordinaten x und y beschrieben. Abb. 19.1 zeigt einen simulierten typischen Verlauf eines auf einem Fahrzeug montierten Positionssensors, welcher alle 0,1 s einen Messwert liefert.

Zu Beginn der Messung steht das Fahrzeug an der Position (0,0). Aufgrund der Messgenauigkeit, rauschen die gemessenen Sensorwerte und die Position lässt sich nur ungenau bestimmen. Aufgrund der unterschiedliche Dichte der Messpunkte ist anzunehmen, dass sich die Geschwindigkeit des Fahrzeugs während der Fahrt ändert. Die Geschwindigkeit, die Orientierung sowie der Kurvenradius (bzw. die Krümmung), auf dem sich das Fahrzeug gerade bewegt, sind unbekannt.

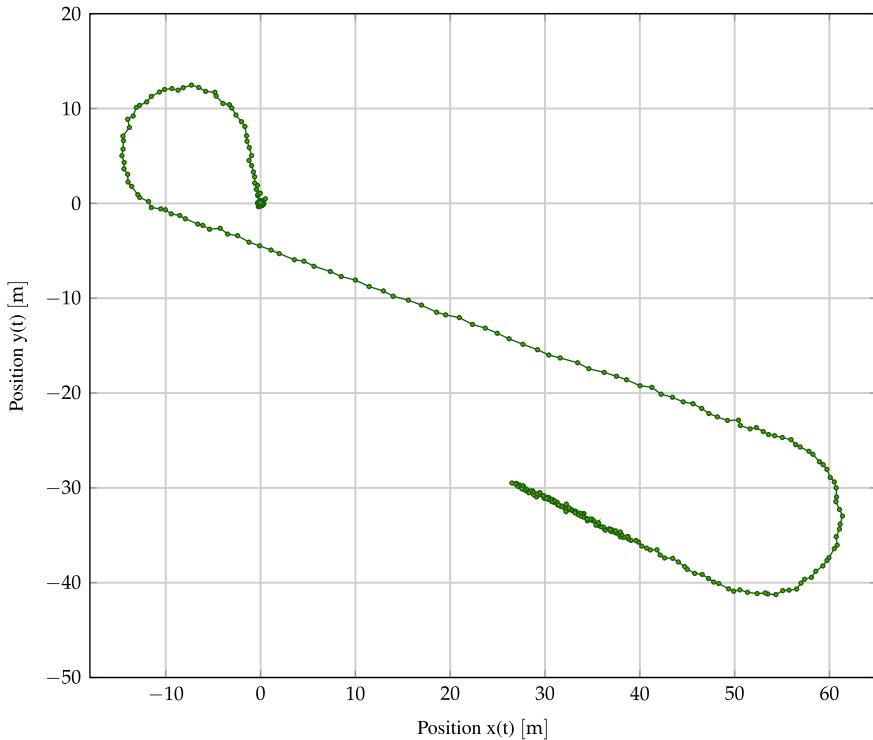


Abb. 19.1 Verlauf messtechnisch erfassbarer Größen eines Positionssensors

19.2 Filterentwurf

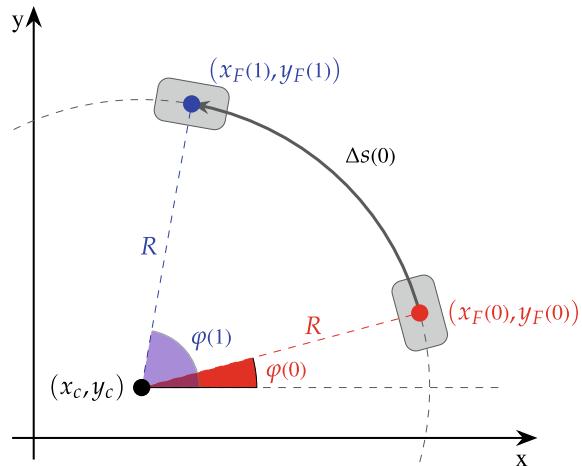
Systembeschreibung

Es gibt Anwendungen, bei denen sich das Modell auch direkt als zeitdiskretes System beschreiben lässt. Hierzu zählt auch das in diesem Kapitel vorgestellte Beispiel.

Wie anfangs beschrieben wurde der Sensor fest am Fahrzeug verbaut, somit ist es erforderlich, ein realitätsnahes Modell für die Bewegung des Fahrzeugs zu finden. Eines von vielen verschiedenen Fahrzeugbewegungsmodellen ist die Beschreibung der Trajektorie über eine Kreisbahn. Dabei wird angenommen, dass das Fahrzeug zwischen zwei Abtastzeitpunkten einem Kreisbogen folgt. Bei einer Geradeausfahrt hat der Kreisbogen einen unendlich großen Kurvenradius.

Die Abb. 19.2 beschreibt ein solches Verhalten eines Fahrzeugs. Zum Zeitpunkt t_0 befindet sich das Fahrzeug am Punkt $(x_F(0), y_F(0))$ mit der Orientierung $\varphi(0)$. Das Gefährt folgt in der Zeit T_s zwischen den Zeitpunkten t_0 und t_1 einem Kreisbogen mit dem Radius

Abb. 19.2 Modellierung der Bewegung eines Fahrzeugs auf Basis eines Kreisbogens [1]



R um dem Kreismittelpunkt (x_c, y_c) . Nach der zurückgelegten Strecke Δs befindet sich das Fahrzeug am Punkt $(x_F(1), y_F(1))$ mit der Orientierung $\varphi(1)$.

Es ist anzumerken, dass bei einer Abtastzeit von $T_s = 0.1$ Sekunden auch bei sehr dynamischen Fahrten die Winkeländerung $\varphi(1) - \varphi(0)$ nur wenige Grad beträgt.

Die Position des Fahrzeugs ist zum Zeitpunkt t_0 gegeben durch:

$$x_F(0) = x_c + R \cdot \cos(\varphi(0)) \quad (19.1)$$

$$y_F(0) = y_c + R \cdot \sin(\varphi(0)) \quad (19.2)$$

und zum Zeitpunkt t_1 durch:

$$x_F(1) = x_c + R \cdot \cos(\varphi(1)) \quad (19.3)$$

$$y_F(1) = y_c + R \cdot \sin(\varphi(1)). \quad (19.4)$$

Wird Gl. (19.1) nach x_c und Gl. (19.2) nach y_c aufgelöst und diese in Gl. (19.3) und (19.4) eingesetzt, folgt:

$$\begin{aligned} x_F(1) &= R \cdot \cos(\varphi(1)) + x_F(0) - R \cdot \cos(\varphi(0)) \\ &= x_F(0) + R \cdot (\cos(\varphi(1)) - \cos(\varphi(0))) \\ &= x_F(0) - 2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\varphi(1)+\varphi(0)}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi(1)-\varphi(0)}{2}\right) \end{aligned} \quad (19.5)$$

$$\begin{aligned} y_F(1) &= R \cdot \sin(\varphi(1)) + y_F(0) - R \cdot \sin(\varphi(0)) \\ &= y_F(0) + R \cdot (\sin(\varphi(1)) - \sin(\varphi(0))) \\ &= y_F(0) + 2 \cdot R \cdot \cos\left(\frac{\varphi(1)+\varphi(0)}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi(1)-\varphi(0)}{2}\right). \end{aligned} \quad (19.6)$$

Die Länge der zurückgelegten Strecke $\Delta s(0)$ zwischen $(x_p(0), y_p(0))$ und $(x(1), y(1))$ auf dem Kreisbogen wird beschrieben durch:

$$\Delta s(0) = R \cdot (\varphi(1) - \varphi(0)). \quad (19.7)$$

Unter Benutzung der Beziehung zwischen Kurvenradius R und Krümmung κ mit $R = \frac{1}{\kappa}$ lässt sich Gl. (19.7) nach $\varphi(1)$ auflösen. Es folgt für $\varphi(1)$:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \Delta s(0) \cdot \kappa. \quad (19.8)$$

Dieser Zusammenhang aus Gl. (19.8) lässt sich in die beiden Gl. (19.5) und (19.6) einsetzen. Somit wird $x_p(1)$ und $y_p(1)$ beschrieben durch:

$$x_F(1) = x_F(0) - 2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \varphi(0) + \Delta s(0) \cdot \kappa}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta s(0) \cdot \kappa}{2}\right) \quad (19.9)$$

$$y_F(1) = y_F(0) + 2 \cdot R \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \varphi(0) + \Delta s(0) \cdot \kappa}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta s(0) \cdot \kappa}{2}\right). \quad (19.10)$$

Für kleine Winkelwerte von $\frac{\varphi(1)-\varphi(0)}{2}$ ist $\sin\left(\frac{\Delta s(0) \cdot \kappa}{2}\right) \approx \frac{\Delta s(0) \cdot \kappa}{2}$. Somit kann näherungsweise Gl. (19.9) und (19.10) geschrieben werden mit:

$$x_F(1) \approx x_F(0) - \Delta s(0) \cdot \sin(\varphi(0) + 0.5 \cdot \Delta s(0) \cdot \kappa) \quad (19.11)$$

$$y_F(1) \approx y_F(0) + \Delta s(0) \cdot \cos(\varphi(0) + 0.5 \cdot \Delta s(0) \cdot \kappa). \quad (19.12)$$

Unter der Annahme, dass sich das Fahrzeug in der Zeit zwischen zwei Abtastzeitpunkten T_s mit konstanter Geschwindigkeit v_F bewegt, kann die zurückgelegte Strecke $\Delta s(0)$ geschrieben werden mit:

$$\Delta s(0) = v_F(0) \cdot T_s. \quad (19.13)$$

Unter Verwendung dieser Gleichung und Substituierung von $\alpha(0) = \varphi(0) + 0.5 \cdot \Delta s(0) \cdot \kappa$ kann Gl. (19.11) und (19.12) vereinfacht werden:

$$x_F(1) \approx x_F(0) - v_F(0) \cdot T_s \cdot \sin(\alpha(0)) \quad (19.14)$$

$$y_F(1) \approx y_F(0) + v_F(0) \cdot T_s \cdot \cos(\alpha(0)). \quad (19.15)$$

Mithilfe von Gl. (19.13) kann der Winkel α zu den zwei Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$ geschrieben werden mit:

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= \varphi(0) + 0.5 \cdot \Delta s(0) \cdot \kappa \\ &= \varphi(0) + 0.5 \cdot v_F(0) \cdot T_s \cdot \kappa \end{aligned} \quad (19.16)$$

$$\begin{aligned} \alpha(1) &= \varphi(1) + 0.5 \cdot \Delta s(1) \cdot \kappa \\ &= \varphi(1) + 0.5 \cdot v_F(1) \cdot T_s \cdot \kappa. \end{aligned} \quad (19.17)$$

Werden diese beiden Gleichungen nach $\varphi(0)$ bzw. $\varphi(1)$ aufgelöst und diese unter der Verwendung von Gl. (19.13) in Gl. (19.8) eingesetzt, folgt:

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= \varphi(0) + v_F(0) \cdot T_s \cdot \kappa \\ \alpha(1) - 0.5 \cdot v_F(1) \cdot T_s \cdot \kappa &= \alpha(0) - 0.5 \cdot v_F(0) \cdot T_s \cdot \kappa + v_F(0) \cdot T_s \cdot \kappa \\ \alpha(1) &= \alpha(0) + 0.5 \cdot T_s \cdot \kappa \cdot (v_F(1) + v_F(0)).\end{aligned}\quad (19.18)$$

Unter der Annahme, dass die Geschwindigkeit zwischen zwei Zeitschritten $v_F(1) \approx v_F(0)$ ist, lässt sich Gl. (19.18) vereinfachen.

$$\alpha(1) \approx \alpha(0) + v_F(0) \cdot T_s \cdot \kappa. \quad (19.19)$$

Zusammenfassend lässt sich die Bewegung des Fahrzeugs, unter der Annahme kleiner Winkelwerte für $\frac{\varphi(k+1)-\varphi(k)}{2}$, $v_F(k+1) \approx v_F(k)$ und $\kappa(k+1) \approx \kappa(k)$, beschreiben durch:

$$x_F(k+1) = x_F(k) - v_F(k) \cdot T_s(k) \cdot \sin(\alpha(k)) + z_x(k) \quad (19.20)$$

$$y_F(k+1) = y_F(k) + v_F(k) \cdot T_s(k) \cdot \cos(\alpha(k)) + z_y(k) \quad (19.21)$$

$$\alpha(k+1) = \alpha(k) + v_F(k) \cdot T_s(k) \cdot \kappa(k) + z_\alpha(k) \quad (19.22)$$

$$\kappa(k+1) = \kappa(k) + z_\kappa(k) \quad (19.23)$$

$$v_F(k+1) = v_F(k) + z_v(k). \quad (19.24)$$

Die Modellfehler werden für jede dieser Gleichungen jeweils durch eine Zufallszahl $z(k)$ beschreiben.

Anmerkung: Da der Term $\frac{\Delta s(0) \cdot \kappa}{2}$ bei einer geeigneten hohen Abtastrate klein ist, folgt für die beiden Winkel $\alpha \approx \varphi$.

Allgemein lassen sich lineare und nichtlineare Systeme durch die verallgemeinerte Zustandsraumbeschreibung (siehe Kap. 7) mit den folgenden beiden Gleichungen beschreiben:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{f}(\underline{x}(k), \underline{u}(k)) + \underline{G}_d \cdot \underline{z}(k) \quad (19.25)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{h}(\underline{x}(k), \underline{u}(k)) + \underline{v}(k). \quad (19.26)$$

Durch die Wahl des Zustandsvektors zu

$$\underline{x}(k) = [x_F(k) \quad y_F(k) \quad \alpha(k) \quad \kappa(k) \quad v_F(k)]^T \quad (19.27)$$

folgt für die Systembeschreibung:

$$\underline{x}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} x_F(k) - v_F(k) \cdot T_s(k) \cdot \sin(\alpha(k)) \\ y_F(k) + v_F(k) \cdot T_s(k) \cdot \cos(\alpha(k)) \\ \alpha(k) + v_F(k) \cdot T_s(k) \cdot \kappa(k) \\ \kappa(k) \\ v_F(k) \end{bmatrix}}_{f(\underline{x}(k), \underline{u}(k))} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{G_d} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} z_x(k) \\ z_y(k) \\ z_\alpha(k) \\ z_\kappa(k) \\ z_v(k) \end{bmatrix}}_{\underline{z}(k)} \quad (19.28)$$

$$\underline{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} x_F(k) \\ y_F(k) \end{bmatrix}}_{h(\underline{x}(k), \underline{u}(k))} + \underbrace{\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}}_{\underline{v}(k)}. \quad (19.29)$$

Die Größe $\underline{v}(k)$ repräsentiert das Messrauschen und wird beschrieben durch die beiden Zufallszahlen v_x und v_y .

Extended Kalman-Filter

Die allgemeine Beschreibung eines Extended Kalman-Filters (siehe Abschn. 7.2) ist gegeben durch:

$$\underline{K}(k) = \underline{\hat{P}}(k) \cdot \underline{C}_J^T \cdot (\underline{C}_J \cdot \underline{\hat{P}}(k) \cdot \underline{C}_J^T + \underline{R}(k))^{-1} \quad (19.30)$$

$$\underline{\tilde{x}}(k) = \underline{\hat{x}}(k) + \underline{K}(k) \cdot (\underline{y}(k) - \underline{h}(\underline{\hat{x}}(k), \underline{u}(k))) \quad (19.31)$$

$$\underline{\tilde{P}}(k) = (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}_J) \cdot \underline{\hat{P}}(k) \cdot (\underline{I} - \underline{K}(k) \cdot \underline{C}_J)^T + \underline{K}(k) \cdot \underline{R}(k) \cdot \underline{K}(k)^T \quad (19.32)$$

$$\underline{\hat{x}}(k+1) = \underline{f}(\underline{\tilde{x}}(k), \underline{u}(k)) \quad (19.33)$$

$$\underline{\hat{P}}(k+1) = \underline{A}_J \cdot \underline{\tilde{P}}(k) \cdot \underline{A}_J^T + \underline{G}_d \cdot \underline{Q}(k) \cdot \underline{G}_d^T \quad (19.34)$$

mit $\underline{Q}(k) = \text{Var}(\underline{z}(k))$, $\underline{R}(k) = \text{Var}(\underline{v}(k))$ und den Jacobi-Matrizen \underline{A}_J und \underline{C}_J

$$\underline{A}_J = \left[\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_n} \right], \quad \underline{C}_J = \left[\frac{\partial h}{\partial \tilde{x}_1} \cdots \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}_n} \right]. \quad (19.35)$$

In diesem Beispiel berechnet sich \underline{A}_J und \underline{C}_J zu:

$$\begin{aligned}
 \underline{A}_J &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_F} & \frac{\partial f_1}{\partial y_F} & \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_1}{\partial \kappa} & \frac{\partial f_1}{\partial v_F} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_F} & \frac{\partial f_2}{\partial y_F} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2}{\partial \kappa} & \frac{\partial f_2}{\partial v_F} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_F} & \frac{\partial f_3}{\partial y_F} & \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_3}{\partial \kappa} & \frac{\partial f_3}{\partial v_F} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_F} & \frac{\partial f_4}{\partial y_F} & \frac{\partial f_4}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_4}{\partial \kappa} & \frac{\partial f_4}{\partial v_F} \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_F} & \frac{\partial f_5}{\partial y_F} & \frac{\partial f_5}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_5}{\partial \kappa} & \frac{\partial f_5}{\partial v_F} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -v(k) \cdot T_s(k) \cdot \cos(\alpha(k)) & 0 & -T_s(k) \cdot \sin(\alpha(k)) \\ 0 & 1 & -v(k) \cdot T_s(k) \cdot \sin(\alpha(k)) & 0 & T_s(k) \cdot \cos(\alpha(k)) \\ 0 & 0 & 1 & v(k) \cdot T_s(k) & T_s(k) \cdot \kappa(k) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19.36)
 \end{aligned}$$

$$\underline{C}_J = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_F} & \frac{\partial h_1}{\partial y_F} & \frac{\partial h_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial h_1}{\partial \kappa} & \frac{\partial h_1}{\partial v_F} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_F} & \frac{\partial h_2}{\partial y_F} & \frac{\partial h_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial h_2}{\partial \kappa} & \frac{\partial h_2}{\partial v_F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (19.37)$$

Kovarianzmatrix des Messrauschen

Allgemein lässt sich die Kovarianzmatrix des Messrauschen immer dann gut bestimmen, wenn sich das System in einem bekannten Zustand befindet. Für solche Systeme, bei denen der Erwartungswert des Zustandsvektor bekannt ist, lässt sich die Kovarianz empirisch berechnen mit:

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (x(k) - E(X)) \cdot (y(k) - E(Y)). \quad (19.38)$$

In diesem Beispiel ist bekannt, dass sich das Fahrzeug während der ersten 7.5 s in Ruhe befindet. Folglich sind die beiden Erwartungswerte $E(X)$ und $E(Y)$ gleich null. Darüber hinaus ist erkennbar, dass sich das Messrauschen über die Zeit nicht ändert. Dies bedeutet, dass die Kovarianzmatrix des Messrauschen in diesem Beispiel zeitunabhängig ist. Somit berechnet sich die Kovarianzmatrix des Messrauschen in diesem Beispiel zu:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \text{Cov}(x_F, x_F) & \text{Cov}(x_F, y_F) \\ \text{Cov}(x_F, y_F) & \text{Cov}(y_F, y_F) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0206 & 0,0055 \\ 0,0055 & 0,0227 \end{bmatrix} \quad (19.39)$$

mit

$$\text{Cov}(a, b) = \frac{1}{75} \cdot \sum_{k=1}^{75} (a(k) \cdot b(k)).$$

Kovarianzmatrix des Systemrauschen

In diesem Beispiel besteht der Vektor \underline{z} aus fünf Elementen, folglich hat die Größe \underline{Q} die Dimension 5×5 . Wird angenommen, dass in erster Näherung die Zufallszahlen unkorreliert sind, so berechnet sich die Kovarianzmatrix des Systemrauschen in diesem Beispiel zu:

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} \text{Var}(z_x) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Var}(z_y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Var}(z_\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{Var}(z_\kappa) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{Var}(z_v) \end{bmatrix} \quad (19.40)$$

mit

$$\text{Var}(z) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n (z(k) - \bar{z})^2.$$

Zur Abschätzung der Kovarianzmatrix des Systemrauschen ist es von Vorteil, sich den Verlauf der jeweiligen Zufallszahl z zu verdeutlichen. In diesem Beispiel beinhalten alle fünf Modellgleichungen eine separate Zufallszahl. Es ist somit notwendig, sich für alle diese die Größenordnung dieser Zufallszahl zu überlegen. Aus dem Verlauf dieser Zufallszahlen lässt sich dann die Kovarianzmatrix des Systemrauschen abschätzen.

Abschätzung $\text{Var}(z_x)$ und $\text{Var}(z_y)$

Eine Möglichkeit zur Abschätzung der Größe z_x bzw. z_y besteht darin, die Gl.(19.9) und (19.20) bzw. (19.10) und (19.21) gleichzusetzen. Hierzu ist es notwendig, die beiden Gl.(19.9) bzw. (19.10) zu verallgemeinern. Wird berücksichtigt, dass $\alpha(k) = \varphi(k) + 0.5 \cdot \Delta s(k) \cdot \kappa$ und $R = \frac{1}{\kappa}$ ist, folgt:

$$x_F(k+1) = x_F(k) - \frac{2}{\kappa(k)} \cdot \sin(\alpha(k)) \cdot \sin\left(\frac{\Delta s(k) \cdot \kappa(k)}{2}\right) \quad (19.41)$$

$$y_F(k+1) = y_F(k) + \frac{2}{\kappa(k)} \cdot \cos(\alpha(k)) \cdot \sin\left(\frac{\Delta s(k) \cdot \kappa(k)}{2}\right). \quad (19.42)$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich nun mit Gl.(19.20) bzw. (19.21) gleichsetzen und nach $z_x(k)$ bzw. $z_y(k)$ auflösen. Es ergibt sich mit $\Delta s(k) = v_F(k) \cdot T_s(k)$:

$$-\frac{2}{\kappa(k)} \cdot \sin(\alpha(k)) \cdot \sin\left(\frac{v_F(k) \cdot T_s(k) \cdot \kappa(k)}{2}\right) = -v_F(k) \cdot T_s(k) \cdot \sin(\alpha(k)) + z_x(k) \quad (19.43)$$

$$\frac{2}{\kappa(k)} \cdot \cos(\alpha(k)) \cdot \sin\left(\frac{v_F(k) \cdot T_s(k) \cdot \kappa(k)}{2}\right) = v_F(k) \cdot T_s(k) \cdot \cos(\alpha(k)) + z_y(k) \quad (19.44)$$

$$z_x(k) = \sin(\alpha(k)) \cdot \left(\frac{2}{\kappa(k)} \cdot \sin\left(\frac{v_F(k) \cdot T_s(k) \cdot \kappa(k)}{2}\right) - v_F(k) \cdot T_s(k) \right) \quad (19.45)$$

$$z_y(k) = -\cos(\alpha(k)) \cdot \left(\frac{2}{\kappa(k)} \cdot \sin\left(\frac{v_F(k) \cdot T_s(k) \cdot \kappa(k)}{2}\right) - v_F(k) \cdot T_s(k) \right). \quad (19.46)$$

Die größten Werte dieser beiden Gleichungen treten auf, wenn sich das Fahrzeug mit maximal möglicher Geschwindigkeit in der engsten zu durchfahrenden Kurve bewegt. Durch die Fahrphysik bedingt, können bei konventionell gebauten Fahrzeugen auf trockener Fahrbahn keine größeren Querbeschleunigungen als ca. $a_{\max \text{ quer}} \approx 8 \frac{m}{s^2}$ auftreten. Unter der Annahme, dass der kleinste Kurvenradius, welchen das Fahrzeug fahren kann, ca. $R_{\min} = 6.7m$ beträgt, lässt sich aus:

$$v_{\max \text{ Kurve}} = \sqrt{a_{\max \text{ quer}} \cdot R_{\min}} \approx 7.3 \frac{m}{s} \quad (19.47)$$

die maximale Kurvengeschwindigkeit berechnen.

Dies bedeutet, dass sich der maximale Wert für z_x bzw. z_y mit $T_s(k) = 0.1$ berechnet durch:

$$z_{x \max} = z_{y \max} = \frac{2}{\kappa(k)} \cdot \sin\left(\frac{v_F(k) \cdot T_s(k) \cdot \kappa(k)}{2}\right) - v_F(k) \cdot T_s(k) \quad (19.48)$$

$$= 2 \cdot R_{\min} \cdot \sin\left(\frac{v_{\max \text{ Kurve}} \cdot T_s}{2 \cdot R_{\min}}\right) - v_{\max \text{ Kurve}} \cdot T_s \approx -3.6 \cdot 10^{-4} m. \quad (19.49)$$

Würde sich das Fahrzeug ausschließlich mit der maximal möglichen Geschwindigkeit durch die kleinstmöglich zu durchfahrende Kurven bewegen, wäre der Modellfehler $z_x = z_{x \max}$ bzw. $z_y = z_{y \max}$. Befindet sich das Fahrzeug auf einer Geraden, wäre der Modellfehler $z_x = 0$ bzw. $z_y = 0$.

Unter der Annahme, dass sich das Fahrzeug in ca. 20 % seiner Zeit mit der maximal möglichen Geschwindigkeit durch die kleinstmöglich zu durchfahrende Kurve bewegt und in 80 % auf einer Geraden, berechnet sich der Mittelwert von z_x bzw. z_y zu:

$$\bar{z}_x = \bar{z}_y = 0.2 \cdot z_{x \max} + 0.8 \cdot 0 \approx -7.2 \cdot 10^{-5} m \quad (19.50)$$

und die Varianz von z_x bzw. z_y zu:

$$\text{Var}(z_x) = \text{Var}(z_y) = 0.8 \cdot (0 - \bar{z}_x)^2 + 0.2 \cdot (z_{x \max} - \bar{z}_x)^2 \approx -2.0 \cdot 10^{-8} m^2. \quad (19.51)$$

Anmerkung:

Würde sich das Fahrzeug weniger dynamisch verhalten, müssten die Varianzen $\text{Var}(z_x)$ bzw. $\text{Var}(z_y)$ verkleinert werden. Dies wirkt sich jedoch nicht merklich auf die geschätzten Größen aus. D.h., der ermittelte Wert für die beiden Varianz kann auch gut bei weniger dynamischen Fahrten verwendet werden.

Abschätzung $\text{Var}(z_\alpha)$

Mit dem vorigen gezeigten Vorgehen lässt sich auch der Verlauf der Zufallsgröße z_α abschätzen. In einem ersten Schritt wird Gl. (19.18) verallgemeinert und ergibt

$$\alpha(k+1) = \alpha(k) + 0.5 \cdot T_s \cdot \kappa \cdot (v_F(k+1) + v_F(k)). \quad (19.52)$$

Diese Gleichung wird dann in einem zweiten Schritt mit Gl. (19.22) gleichgesetzt und nach z_α aufgelöst. Es folgt mit $v_F(k+1) = v_F(k) + \Delta v_F(k) = v_F(k) + a_F(k) \cdot T_s(k)$:

$$\begin{aligned} z_\alpha(k) &= 0,5 \cdot T_s(k) \cdot \kappa(k) \cdot (v_F(k+1) + v_F(k)) - v_F(k) \cdot T_s(k) \cdot \kappa(k) \\ &= T_s(k) \cdot \kappa(k) \cdot (0,5 \cdot (v_F(k+1) + v_F(k)) - v_F(k)) \\ &= 0,5 \cdot T_s^2(k) \cdot \kappa(k) \cdot a_F(k). \end{aligned} \quad (19.53)$$

Die maximalen Werte von z_α entstehen genau dann, wenn das Fahrzeug mit der maximalen Längsbeschleunigung seine Geschwindigkeit vergrößert bzw. verkleinert und zeitgleich sich in der engsten zu durchfahrende Kurve befindet. Bei einem konventionell gebauten Fahrzeug kann auf trockener Fahrbahn angenommen werden, dass keine größeren Längsbeschleunigungen als ca. $a_{\max \text{ längs}} \approx 8 \frac{m}{s^2}$ auftreten können.

Somit kann der maximale Wert für z_α mit $T_s(k) = 0,1s$ sowie $R_{\min} = 6,7m$ bestimmt werden:

$$z_{\alpha \max} = 0,5 \cdot T_s^2 \cdot \frac{a_{\max \text{ längs}}}{R_{\min}} \approx 6,0 \cdot 10^{-3}. \quad (19.54)$$

Wird davon ausgegangen, dass sich das Fahrzeug zeitlich gleich oft beschleunigt und verzögert, ist der Erwartungswert $E(z_\alpha) = 0$.

Wird angenommen, dass in ca. 10 % seiner Zeit, während einer Fahrt durch die Kurve mit dem kleinstmöglichen Radius, das Fahrzeug maximal beschleunigt/verzögert und in 90 % seiner Zeit sich auf einer Geraden befindet, berechnet sich der Varianz von z_α zu:

$$\text{Var}(z_\alpha) = 0,9 \cdot 0^2 + 0,1 \cdot z_{\alpha \max}^2 \approx 4,0 \cdot 10^{-6}. \quad (19.55)$$

Anmerkung:

Die Annahme, dass sich der Extremfall (maximale Beschleunigung/Verzögerung in der engsten zu durchfahrenden Kurve) zu 10 % auftritt, ist willkürlich und schätzt die Größe vermutlich zu groß ab. Allgemein führt ein zu großer Wert für die Varianzen zu verrauschten Zustandsgrößen, ggf. können durch ein Feintuning die einzelne Größen angepasst werden. Hierbei ist zu beachten, dass bei zu kleinen Werten die Gefahr besteht, dass das Filter instabil wird und nicht mehr konvergiert.

Abschätzung $\text{Var}(z_\kappa)$

Zur Abschätzung der Zufallszahl z_κ ist lediglich der Zusammenhang aus Gl. (19.23) bekannt. Somit wird diese Gleichung nach z_κ aufgelöst und es folgt:

$$z_\kappa(k) = \kappa(k+1) - \kappa(k). \quad (19.56)$$

Von dem Fahrzeug ist bekannt, dass die maximale Änderung der Krümmung fahrzeugbedingt maximal $0.22 \frac{1}{m \cdot s}$ beträgt. Dies entspricht einer maximalen Änderung des Lenkwinkels am Lenkrad von ca. $600 \frac{\text{Grad}}{s}$. Bei einer Abtastzeit von $T_s = 0.1\text{s}$ entspricht dies $z_\kappa \max = 2.2 \cdot 10^{-2} \frac{1}{m}$.

Wird angenommen, dass sich das Fahrzeug in ca. 10 % seiner Zeit eine Kurve mit $z_\kappa \max$ durchfährt und in 90 % seiner Zeit sich auf einer konstanten Kurvenfahrt/Geraden befindet, berechnet sich die Varianz von z_α zu:

$$\text{Var}(z_\kappa) = 0.9 \cdot 0^2 + 0.1 \cdot z_{\kappa \max}^2 \approx 5.0 \cdot 10^{-5} \frac{1}{m^2}. \quad (19.57)$$

Abschätzung $\text{Var}(z_v)$

Der Verlauf der Zufallszahl z_v kann aus Gl.(19.24) abgeschätzt werden. Durch Umstellen dieser Gleichung nach z_v folgt:

$$z_v(k) = v_F(k+1) - v_F(k) = a_F(k) \cdot T_s(k). \quad (19.58)$$

Dies entspricht der Geschwindigkeitsänderung des Fahrzeugs und lässt sich auch mit $a_F(k) \cdot T_s(k)$ ausdrücken.

Wird wieder angenommen, dass keine größeren Längsbeschleunigungen als ca. $a_{\max \text{ längs}} \approx 8 \frac{m}{s^2}$ auftreten können, so beträgt $z_v \max$:

$$z_v \max = a_{\max \text{ längs}} \cdot T_s = 0.8 \frac{m}{s}. \quad (19.59)$$

Wird wieder angenommen, dass das Fahrzeug in ca. 10 % seiner Zeit mit der maximal möglichen Längsbeschleunigung verzögert/beschleunigt und in 90 % seiner Zeit sich mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegt, berechnet sich die Varianz von z_v zu:

$$\text{Var}(z_v) = 0.9 \cdot 0^2 + 0.1 \cdot z_{v \max}^2 \approx 6.0 \cdot 10^{-2} \frac{m^2}{s^2}. \quad (19.60)$$

19.3 Implementierung und Ergebnisse

Mit den vorigen Überlegungen lassen sich die Zustandsgrößen des Extended Kalman-Filters (EKF) mithilfe von MATLAB® berechnen. Im Folgenden ist der hierfür wendete Code beschrieben:

MATLAB: EKF-Filter

```
%-----
% Messdaten einlesen
%-----
clearvars;

in = readtable('xy.dat','Delimiter','space');
t = in.time; Ts = t(2)-t(1);
y = [in.Pos_x in.Pos_y];

%-----
% Initialisierung EKF
%-----
R = [0.0206 0.0055; 0.0055 0.0227];
QQG = [2E-8 0 0 0 0; 0 2E-8 0 0 0; 0 0 4E-6 0 0; 0 0 0 5E-5 0; 0 0 0 0 6E-2];

Cj=[1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0];

x_dach = [y(1,1);y(1,2);0;0;0];
P_dach = [1e-1 0 0 0 0; 1e-1 0 0 0 0; 0 0 1e-1 0 0; 0 0 0 1e-3 0; 0 0 0 0 1e-2];

%-----
% EKF
%-----
for k=1:length(y)
    M = Cj*P_dach*Cj' + R;
    invM = 1/(M(1)*M(4)-M(2)*M(3))*[M(4) -M(2); -M(3) M(1)];
    K = P_dach*Cj'*invM;
    h = [x_dach(1); x_dach(2)];
    x_tilde = x_dach + K*(y(k,:)' - h);
    P_tilde = (eye(length(x_dach))-K*Cj)*P_dach*(eye(length(x_dach))-K*Cj)' + K*R*K';

    xP(k)=x_tilde(1);
    yP(k)=x_tilde(2);
    alpha(k)=x_tilde(3);
    Kr(k)=x_tilde(4);
    v(k)=x_tilde(5);

    x_dach = [ xP(k)-v(k)*Ts*sin(alpha(k));
               yP(k)+v(k)*Ts*cos(alpha(k));
               alpha(k)+v(k)*Ts*Kr(k);
               Kr(k);
               v(k) ];

    Aj = [1 0 -v(k)*Ts*cos(alpha(k)) 0 -Ts*sin(alpha(k));
           0 1 -v(k)*Ts*sin(alpha(k)) 0 Ts*cos(alpha(k));
           0 0 1 v(k)*Ts Kr(k)*Ts;
           0 0 0 1 0;
           0 0 0 0 1];

    P_dach = Aj*P_tilde*Aj' + QQG;
end
```

Der Zustandsvektor \hat{x} wird mit:

$$\hat{x}(1) = [y_1(1) \quad y_2(1) \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (19.61)$$

und die Kovarianzmatrix des Schätzfehler \hat{P} mit:

$$\hat{P}(1) = \begin{bmatrix} 10^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-2} \end{bmatrix}^T \quad (19.62)$$

initialisiert. Die letztere Größe gibt an, wie „vertrauenswürdig“ die initialisierten Werte des Zustandsvektors sind.

Die Berechnung der Inversen des Terms $\underline{C}_J \cdot \hat{P}(k) \cdot \underline{C}_J^T + \underline{R}(k)$ geschieht mithilfe der Formel aus Anhang A Kap. „Inverse ($n \times n$)-Matrix“.

Abb. 19.3 stellt die gemessenen Größen sowie die geschätzten Größen x_F und y_F gegenüber. Es ist zu sehen, dass die mit dem Kalman-Filter geschätzte Fahrzeugposition weniger stark rauscht und näher an dem wahren Wert liegt.

In Abb. 19.4 ist der Verlauf der Orientierung, der zu durchfahrenden Krümmung und der Geschwindigkeit des Fahrzeugs dargestellt. Bei Verlauf der Krümmung ist eine zeitliche Verzögerung der Größe ersichtlich. Diese röhrt von der Modellannahme, dass der Verlauf der Krümmung konstant ist. Siehe Gl. (19.23). Durch die Erweiterung des Zustandsvektors,

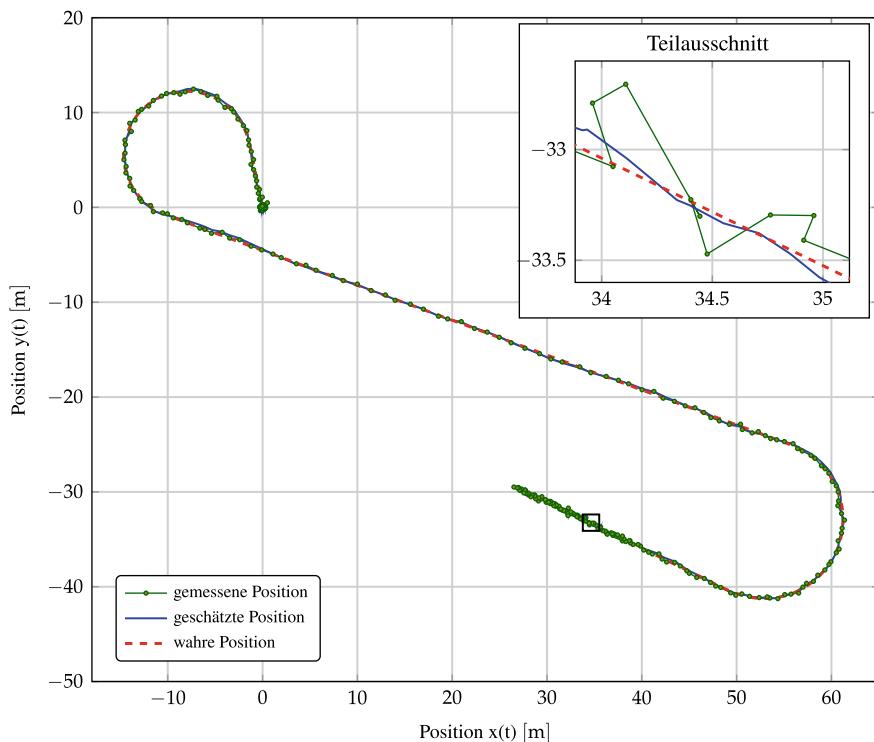


Abb. 19.3 Vergleich Verlauf messtechnisch erfassbare und geschätzte Position

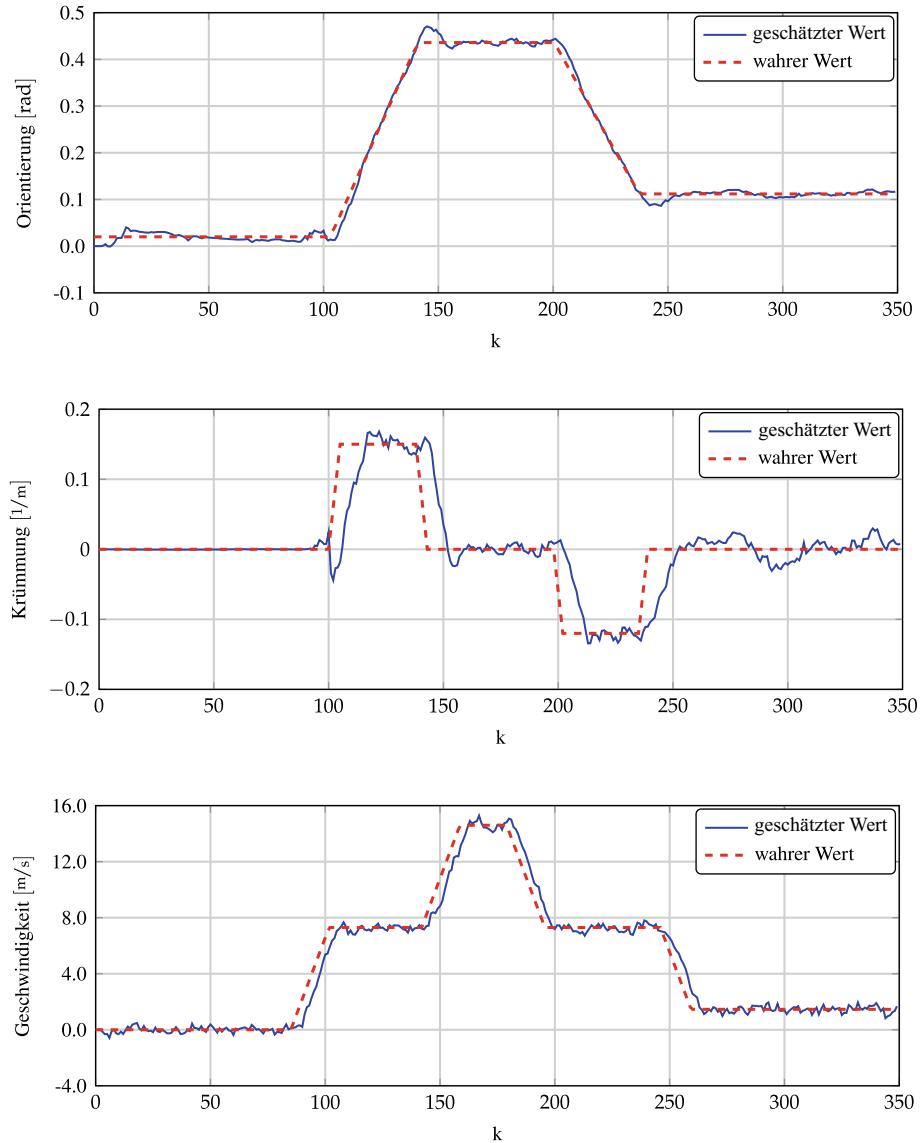


Abb. 19.4 Verlauf der Größen des korrigierten Zustandsvektors

um die Ableitung der Krümmung, könnte dieser Effekt etwas reduziert werden. Dies würde jedoch die Rechenzeit des Filters vergrößern.

Literatur

1. MARCHTHALER, R.: *Adaptive Extended Kalman Filter (ROSE-Filter) for Positioning System.* <http://dx.doi.org/10.48550/ARXIV.2108.11321>. Version: 2021

Matrix

Besitzt eine Matrix m Spalten und n Zeilen, wird diese als $(n \times m)$ -Matrix bezeichnet. Jedes Element der Matrix ist durch den Zeilenindex i und den Spaltenindex j bestimmt.

$$\underline{A} = [a_{i,j}]_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

Vektor

Ein Vektor stellt einen Spezialfall einer Matrix dar und hat entweder nur eine Spalte (Spaltenvektor) bzw. eine Zeile (Zeilenvektor).

$$\underline{B} = [b_i]_{n \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \underline{C} = [c_j]_{1 \times m} = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_m]$$

Addition zweier $(n \times m)$ -Matrizen

Bei gleicher Matrizengröße ist eine Addition zweier Matrizen möglich.

$$\begin{aligned} \underline{E} + \underline{F} &= [e_{i,j}]_{n \times m} + [f_{i,j}]_{n \times m} = [e_{i,j} + f_{i,j}]_{n \times m} \\ &= \begin{bmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & \cdots & e_{1,m} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & \cdots & e_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n,1} & e_{n,2} & \cdots & e_{n,m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,m} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n,1} & f_{n,2} & \cdots & f_{n,m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} e_{1,1} + f_{1,1} & e_{1,2} + f_{1,2} & \cdots & e_{1,m} + f_{1,m} \\ e_{2,1} + f_{2,1} & e_{2,2} + f_{2,2} & \cdots & e_{2,m} + f_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n,1} + f_{n,1} & e_{n,2} + f_{n,2} & \cdots & e_{n,m} + f_{n,m} \end{bmatrix}$$

Multiplikation mit Skalar k

$$k \cdot \underline{A} = k \cdot [a_{i,j}]_{n \times m} = [k \cdot a_{i,j}]_{n \times m} = \begin{bmatrix} k \cdot a_{1,1} & k \cdot a_{1,2} & \cdots & k \cdot a_{1,m} \\ k \cdot a_{2,1} & k \cdot a_{2,2} & \cdots & k \cdot a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{n,1} & k \cdot a_{n,2} & \cdots & k \cdot a_{n,m} \end{bmatrix}$$

$$k \cdot \underline{B} = k \cdot [b_i]_{n \times 1} = [k \cdot b_i]_{n \times 1} = \begin{bmatrix} k \cdot b_1 \\ k \cdot b_2 \\ \vdots \\ k \cdot b_n \end{bmatrix}$$

$$k \cdot \underline{C} = k \cdot [c_j]_{1 \times m} = [k \cdot c_j]_{1 \times m} = [k \cdot c_1 \ k \cdot c_2 \ \cdots \ k \cdot c_m]$$

Multiplikation $(n \times r)$ -Matrix mit $(r \times m)$ -Matrix

$$\begin{aligned} \underline{A} = \underline{E} \cdot \underline{H} &= [a_{i,j}]_{n \times m} = [e_{i,j}]_{n \times r} \cdot [h_{i,j}]_{r \times m} \\ &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & \cdots & e_{1,r} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & \cdots & e_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n,1} & e_{n,2} & \cdots & e_{n,r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \cdots & h_{1,m} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \cdots & h_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{r,1} & h_{r,2} & \cdots & h_{r,m} \end{bmatrix} \\ \text{mit } a_{i,j} &= \sum_{k=1}^r e_{i,k} \cdot h_{k,j} \quad i = 1 \dots n, \ j = 1 \dots m \end{aligned}$$

Beispiel 1 Multiplikation

$$\underline{A} = \underline{E} \cdot \underline{H} = [a_{i,j}]_{2 \times 1} = [e_{i,j}]_{2 \times 3} \cdot [h_{i,j}]_{3 \times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o & p & q \\ r & s & t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o \cdot x + p \cdot y + q \cdot z \\ r \cdot x + s \cdot y + t \cdot z \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } a_{i,j} = \sum_{k=1}^3 e_{i,k} \cdot h_{k,j} \quad i = 1, 2, \quad j = 1$$

Alternatives Rechenschema:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} o & p & q \\ r & s & t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} o \cdot x + p \cdot y + q \cdot z \\ r \cdot x + s \cdot y + t \cdot z \end{bmatrix} \end{array}$$

Transponierte

$$\underline{A}^T = [a_{i,j}]_{n \times n}^T = [a_{j,i}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}^T = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n] \quad \underline{C}^T = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_m]^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

Symmetrie ($n \times n$)-Matrix

Eine Symmetrie existiert nur bei einer quadratischen ($n \times n$)-Matrix.

$$\underline{A} = \underline{A}^T = [a_{i,j}]_{n \times n} = [a_{i,j}]_{n \times n}^T \quad \text{mit } a_{i,j} = a_{j,i} \quad \forall i, j$$

Beispiel 2 Symmetrie

$$\underline{A} = \underline{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Inverse ($n \times n$)-Matrix

Die Inverse lässt sich nur bei einer quadratischen ($n \times n$)-Matrix bilden.

$$\underline{A}^{-1} = [a_{i,j}]_{n \times n}^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(\underline{A})} \cdot (\text{Adj}(\underline{A}))^T \quad \text{mit } \text{Det}(\underline{A}) \neq 0$$

$\text{Det}(\underline{A})$: Determinante von \underline{A} $\text{Adj}(\underline{A})$: Adjunkte von \underline{A}

Zur Berechnung der Determinanten und der Adjunkte siehe z. B. Strampp, W. „Lineare Algebra mit Mathematica und Maple“ [1].

Beispiel 3 Inverse

$$\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} = \text{Det}(\underline{A}) \cdot \begin{bmatrix} e \cdot i - f \cdot h & c \cdot h - b \cdot i & b \cdot f - c \cdot e \\ f \cdot g - d \cdot i & a \cdot i - c \cdot g & c \cdot d - a \cdot f \\ d \cdot h - e \cdot g & b \cdot g - a \cdot h & a \cdot e - b \cdot d \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(\underline{A}) = \frac{1}{a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - c \cdot e \cdot g - b \cdot d \cdot i - a \cdot f \cdot h}$$

Spur ($n \times n$)-Matrix

Die Spur lässt sich nur bei einer quadratischen ($n \times n$)-Matrix bilden.

$$\text{Tr}(\underline{A}) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = a_{1,1} + a_{2,2} + \dots + a_{n,n} \quad \text{mit } \underline{A} = [a_{i,j}]_{n \times n}$$

Beispiel 4 Spur

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \text{Tr}(\underline{A}) = a + e + i$$

Einheitsmatrix ($n \times n$)-Matrix

Die Einheitsmatrix existiert nur bei einer quadratischen ($n \times n$)-Matrix.

$$\underline{I} = [a_{i,j}]_{n \times n} \quad \text{mit} \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Definitheit von Matrizen

Für $\underline{A} = [a_{i,j}]_{n \times n}$ und $\underline{X} = [x_j]_{1 \times m}$ gilt, falls:

- $\underline{X} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X}^T > 0$ Matrix \underline{A} positiv definit
- $\underline{X} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X}^T \geq 0$ Matrix \underline{A} positiv semidefinit
- $\underline{X} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X}^T < 0$ Matrix \underline{A} negativ definit
- $\underline{X} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X}^T \leq 0$ Matrix \underline{A} negativ semidefinit

Beispiel 5 Definitheit

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{X} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X}^T = [x_1 \ x_2] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 3 \cdot x_2^2$$

Die Matrix \underline{A} ist positiv semidefinit.

Wichtige Rechenregeln

Für $\underline{A} = [a_{i,j}]_{n \times m}$ $\underline{B} = [b_{i,j}]_{n \times m}$ $\underline{C} = [c_{i,j}]_{n \times m}$ k : skalar gilt:

$$\begin{array}{ll} \underline{A} - \underline{A} = \underline{0} & \underline{A} + \underline{0} = \underline{A} \\ \underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A} & (\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) \\ k \cdot (\underline{A} + \underline{B}) = k \cdot \underline{A} + k \cdot \underline{B} & \underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A} \end{array}$$

Für $\underline{D} = [d_{i,j}]_{n \times n}$ $\underline{E} = [e_{i,j}]_{n \times n}$ $\underline{F} = [f_{i,j}]_{n \times n}$ k : skalar gilt:

$$\begin{array}{ll} (\underline{D} \cdot \underline{E}) \cdot \underline{F} = \underline{D} \cdot (\underline{E} \cdot \underline{F}) & \underline{D} \cdot \underline{E} \neq \underline{E} \cdot \underline{D} \\ \underline{D} \cdot (\underline{E} + \underline{F}) = \underline{D} \cdot \underline{E} + \underline{D} \cdot \underline{F} & (\underline{E} + \underline{F}) \cdot \underline{D} = \underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{F} \cdot \underline{D} \\ (\underline{D}^T)^T = \underline{D} & (\underline{D} + \underline{E})^T = \underline{D}^T + \underline{E}^T \\ \underline{I} \cdot \underline{D} = \underline{D} & \underline{D} \cdot \underline{D}^{-1} = \underline{I} \\ (k \cdot \underline{D})^T = k \cdot \underline{D}^T & (\underline{D} \cdot \underline{E})^T = \underline{E}^T \cdot \underline{D}^T \end{array}$$

Ausführliche Beispiele zur Vektor- und Matrizenrechnung findet man z. B. in Koch, J. und Stämpfle, M. „Mathematik für das Ingenieurstudium“ [2].

Weitere Rechenregeln z. B. zur Differenzial- und Integralrechnung findet man in Petersen, K. B. und Pedersen, M. S. „The Matrix Cookbook“ [3] bzw. in Simon, D. „Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches“ [4].

Sammlung wichtiger verwendeter Formeln

B

$$(\underline{X} + \underline{Y})^T = \underline{X}^T + \underline{Y}^T \quad (\text{B.1})$$

$$(\underline{X} \cdot \underline{Y})^T = \underline{Y}^T \cdot \underline{X}^T \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbb{E}(\underline{X} + \underline{Y}) = \mathbb{E}(\underline{X}) + \mathbb{E}(\underline{Y}) \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbb{E}(\underline{A} \cdot \underline{X}) = \underline{A} \cdot \mathbb{E}(\underline{X}) \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbb{E}(\underline{A} \cdot \underline{X} \cdot \underline{B}) = \underline{A} \cdot \mathbb{E}(\underline{X}) \cdot \underline{B} \quad (\text{B.5})$$

$$\text{Var}(\underline{X} + \underline{Y}) = \text{Var}(\underline{X}) + \text{Var}(\underline{Y}) + 2 \cdot \text{Cov}(\underline{X}, \underline{Y}) \quad (\text{B.6})$$

$$\text{Var}(\underline{A} \cdot \underline{X}) = \underline{A} \cdot \text{Var}(\underline{X}) \cdot \underline{A}^T \quad (\text{B.7})$$

$$\text{Cov}(\underline{X}, \underline{Y}) = \mathbb{E}(\underline{X} \cdot \underline{Y}) - \mathbb{E}(\underline{X}) \cdot \mathbb{E}(\underline{Y}) \quad (\text{B.8})$$

$$\text{Cov}(\underline{X}, \underline{X}) = \text{Var}(\underline{X}) = \mathbb{E}(\underline{X} \cdot \underline{X}^T) - \mathbb{E}(\underline{X}) \cdot \mathbb{E}(\underline{X}^T) \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial \text{Tr}(\underline{X} \cdot \underline{B} \cdot \underline{X}^T)}{\partial \underline{X}} = 2 \cdot \underline{X} \cdot \underline{B} \quad \text{wenn } \underline{B} = \underline{B}^T \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial \text{Tr}(\underline{X} \cdot \underline{A})}{\partial \underline{X}} = \underline{A}^T \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial \text{Tr}(\underline{A} \cdot \underline{X}^T)}{\partial \underline{X}} = \underline{A} \quad (\text{B.12})$$

Quelle: [5] und [3]

Lösung Matrix-Exponentialgleichungen – Einführendes Beispiel

C

Alternative Berechnung des Ausdrucks

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A} \cdot T_s} \quad (\text{C.1})$$

mithilfe der Laplace-Transformation. Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{a \cdot t}\} &= \frac{1}{s - a} \\ e^{\underline{A} \cdot t} &= \mathcal{L}^{-1}\{(s \cdot \underline{I} - \underline{A})^{-1}\} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

mit \underline{I} Einheitsmatrix.

Somit gilt für das einführende Beispiel mit $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$e^{\underline{A} \cdot T_s} = \mathcal{L}^{-1}\{(s \cdot \underline{I} - \underline{A})^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}\right)^{-1}\right\}.$$

Invertierung der Matrix mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$\begin{array}{ccc|ccc} s & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{\cdot s} \left. \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right\} +$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} s^2 & 0 & -1 & s & 1 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{\cdot s} \left. \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right\} +$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} s^3 & 0 & 0 & s^2 & s & 1 \\ 0 & s^2 & 0 & 0 & s & 1 \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{s^3}} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{array}$$

Somit folgt mithilfe der Laplace-Transformierten (Tab. C.1):

$$e^{\underline{A} \cdot T_s} = \mathcal{L}^{-1} \{ (s \cdot \underline{I} - \underline{A})^{-1} \} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3} \\ 0 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & T_s & \frac{T_s^2}{2} \\ 0 & 1 & T_s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tab. C.1 Umrechnung Laplace-Transformation

Originalfunktion $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\}$	Bildfunktion $F(s) = \mathcal{L} \{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$

Herleitung Kalman-Verstärkung für kinematisches D Modell 2. Ordnung

Ein Kalman-Filter basierend auf einem kinematischen Modell 2. Ordnung ist gekennzeichnet durch:

$$\underline{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

$$\underline{C} = [1 \ 0] \quad (\text{D.2})$$

Sind die Kovarianz des Messrauschens R und die des Systemrauschens Q zeitinvariant, folgt $\hat{P}(k+1) = \hat{P}(k) = \hat{P}$ und somit $\tilde{P}(k) = \hat{P}$, und die Kalman-Verstärkung $\underline{K}(k)$ konvergiert gegen einen konstanten Wert \underline{K} .

Mit $\hat{P}(k+1) = \hat{P}(k) = \hat{P}$, $\tilde{P}(k) = \hat{P}$ und $\underline{K}(k) = \underline{K}$ folgt für die drei Kalman-Filter-Gleichungen:

$$\tilde{P} = (\underline{I} - \underline{K} \cdot \underline{C}) \cdot \hat{P}, \quad (\text{D.3})$$

$$\hat{P} = \underline{A}_d \cdot \tilde{P} \cdot \underline{A}_d^T + \underline{G}_d \cdot Q \cdot \underline{G}_d^T \quad \text{mit } Q = \text{Var}(z), \quad (\text{D.4})$$

$$\underline{K} = \hat{P} \cdot \underline{C}^T \cdot (\underline{C} \cdot \hat{P} \cdot \underline{C}^T + R)^{-1} \quad \text{mit } R = \text{Var}(v). \quad (\text{D.5})$$

Setzt man Gl. (D.2) in Gl. (D.5) ein, folgt mit $\underline{K} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ und $\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{1,1} & \tilde{P}_{1,2} \\ \tilde{P}_{2,1} & \tilde{P}_{2,2} \end{bmatrix}$:

$$k_1 = \frac{\hat{P}_{1,1}}{\hat{P}_{1,1} + R}, \quad (\text{D.6})$$

$$k_2 = \frac{\hat{P}_{2,1}}{\hat{P}_{1,1} + R}. \quad (\text{D.7})$$

Zur Bestimmung von k_1 und k_2 setzt man die Gl. (D.1), (D.2) und (D.3) in Gl. (D.4) ein. Es ergibt sich mit $\underline{G}_d = \begin{bmatrix} \frac{T_s}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$\hat{\underline{P}} = \underline{A}_d \cdot (\underline{I} - \underline{K} \cdot \underline{C}) \cdot \hat{\underline{P}} \cdot \underline{A}_d^T + \underline{G}_d \cdot Q \cdot \underline{G}_d^T = \begin{bmatrix} \hat{P}_{1,1} & \hat{P}_{1,2} \\ \hat{P}_{2,1} & \hat{P}_{2,2} \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

mit

$$\hat{P}_{1,1} = \hat{P}_{1,1} - \hat{P}_{1,1} \cdot (T_s \cdot k_2 + k_1) - \hat{P}_{1,2} \cdot T_s \cdot (k_1 + k_2 - 1) + \hat{P}_{2,1} \cdot T_s - \hat{P}_{2,2} \cdot T_s + \frac{T_s^2}{4} \cdot Q, \quad (\text{D.9})$$

$$\hat{P}_{1,2} = \hat{P}_{1,2} - \hat{P}_{1,2} \cdot (T_s \cdot k_2 + k_1) + \hat{P}_{2,2} \cdot T_s + \frac{T_s}{2} \cdot Q, \quad (\text{D.10})$$

$$\hat{P}_{2,1} = \hat{P}_{2,1} - \hat{P}_{1,1} \cdot k_2 - \hat{P}_{1,2} \cdot T_s \cdot k_2 + \hat{P}_{2,2} \cdot T_s + \frac{T_s}{2} \cdot Q, \quad (\text{D.11})$$

$$\hat{P}_{2,2} = \hat{P}_{2,2} - \hat{P}_{1,2} \cdot k_2 + Q. \quad (\text{D.12})$$

Das aus den vier Gl. (D.9), (D.10), (D.11) und (D.12) bestehende Gleichungssystem aufgelöst nach $\hat{P}_{1,1}$ und $\hat{P}_{2,1}$ ergibt nach kurzer Rechnung:

$$\hat{P}_{1,1} = \frac{k_1}{k_2^2} \cdot Q, \quad (\text{D.13})$$

$$\hat{P}_{2,1} = \left(\frac{k_1^2 + T_s \cdot k_1 \cdot k_2 - T_s \cdot k_2 + 0.25 \cdot T_s^2 \cdot k_2^2}{T_s \cdot k_2^2} \right) \cdot Q. \quad (\text{D.14})$$

Setzt man die beiden Gl. (D.13) und (D.14) in die beiden Gl. (D.6) und (D.7) ein, ergibt sich:

$$k_1 = \frac{k_1 \cdot Q}{k_2^2 \cdot R + k_1 \cdot Q}, \quad (\text{D.15})$$

$$k_2 = \frac{(k_1^2 + T_s \cdot k_1 \cdot k_2 - T_s \cdot k_2 + 0.25 \cdot T_s^2 \cdot k_2^2) \cdot Q}{T_s \cdot (k_2^2 \cdot R + k_1 \cdot Q)}. \quad (\text{D.16})$$

Löst man Gl. (D.15) nach k_2 auf und führt die $\lambda = T_s \cdot \sqrt{\frac{Q}{R}}$ und $x = \sqrt{1 - k_1}$ ein, folgt:

$$k_2 = \sqrt{\frac{Q}{R} \cdot (1 - k_1)} = \frac{\lambda}{T_s} \cdot x. \quad (\text{D.17})$$

Unter Verwendung von Gl. (D.17) und $k_1 = 1 - x^2$ lässt sich Gl. (D.16) vereinfachen:

$$0 = (1 - x^2)^2 + \lambda \cdot x \cdot (1 - x^2) - 2 \cdot \lambda \cdot x + 0.25 \cdot \lambda^2 \cdot x^2, \quad (\text{D.18})$$

$$0 = x^4 - \lambda \cdot x^3 + (0.25 \cdot \lambda^2 - 2) \cdot x^2 - \lambda \cdot x + 1. \quad (\text{D.19})$$

Mit

$$y = x + \frac{1}{x} \quad (\text{D.20})$$

lässt sich das Polynom 4. Grades in eine quadratische Gleichung reduzieren:

$$0 = y^2 - \lambda \cdot y + \frac{\lambda^2}{4} - 4. \quad (\text{D.21})$$

Dieses Polynom hat die Lösung:

$$y = \frac{\lambda}{2} \pm 2. \quad (\text{D.22})$$

Stellt man Gl. (D.20) um, ergibt sich wieder eine quadratische Gleichung:

$$0 = x^2 - y \cdot x + 1. \quad (\text{D.23})$$

Aufgrund des möglichen Wertebereichs der Größen x und y konvergiert dieses Kalman-Filter auf die Lösung:

$$x = \frac{y}{2} - \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1} = \frac{\lambda}{4} + 1 - \sqrt{\frac{\lambda^2}{16} + \frac{\lambda}{2}} = \frac{1}{4} \cdot (\lambda + 4 - \sqrt{\lambda^2 + 8 \cdot \lambda}). \quad (\text{D.24})$$

Somit folgt für k_1 und k_2 :

$$k_1 = 1 - x^2 = \frac{1}{8} \cdot (-\lambda^2 - 8 \cdot \lambda + (\lambda + 4) \cdot \sqrt{\lambda^2 + 8 \cdot \lambda}), \quad (\text{D.25})$$

$$k_2 = \frac{\lambda}{T_s} \cdot x = \frac{1}{4 \cdot T_s} \cdot (\lambda^2 + 4 \cdot \lambda - \lambda \cdot \sqrt{\lambda^2 + 8 \cdot \lambda}). \quad (\text{D.26})$$

Literatur

1. STRAMPP, W.: *Lineare Algebra mit Mathematica und Maple: Repetitorium und Aufgaben mit Lösungen*. Vieweg+Teubner Verlag, 2013. – ISBN 978 – 3 – 322 – 80306 – 1
2. KOCH, J. ; STÄMPFLE, M. : *Mathematik für das Ingenieurstudium*. 2. Auflage. Carl Hanser Verlag München, 2013. – ISBN 978 – 3 – 446 – 43232 – 1
3. PETERSEN, K. B.; PEDERSEN, M. S.: *The Matrix Cookbook*. online aufgerufen bei: <http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/p.php?3274>, Nov 2012. – Version 20121115
4. SIMON, D.: *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*. Hoboken and NJ : Wiley-Interscience, 2006. – ISBN 0 – 471 – 70858 – 5
5. BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDIAJEW, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. 25. Auflage. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig und Verlag Nauka, Moskau, 1991

Stichwortverzeichnis

A

Ausblendeigenschaft, 37, 47, 96, 99
Ausgangs-
 Gleichung, 24
 Größe, 24, 27, 29
 Matrix, 24, 108
 Vektor, 24
Autokorrelationsfunktion, 65–67

Größe, 24, 27, 29, 32
Matrix, 24, 108
Vektor, 24
EKF, 205
Elementarereignis, 44
Ereignis, 44
Erwartungswert, 54–56
Experiment, 43

B

Beobachtbarkeit, 29–32, 109
Beobachtungsmatrix, 24
Bewegungsgleichung, 35

G

Gauß-Markov-Prozess, 69–70
Gilbert-Kriterium, 32, 109
Gleichstrommotor, 195
Gleichverteilung, 48

C

Chi-Quadrat-Verteilung, 50–51

H

Häufigkeitsverteilung, 45, 47–53
Hautus-Kriterium, 32, 109

D

Dichtefunktion, 47–53
Differenzialgleichung, 27
Dirac-Funktion, 36–38, 47, 69, 96, 98, 99
Direkte Diskretisierung, 96–97
Disjunkte Menge, 44
Diskretisiertes zeitkontinuierliches Modell,
 97–99
Durchgangsmatrix, 24, 108

I

Ideale Abtastung, 36–38
IIR-Filter, 86, 123

J

Joseph-Formel, 79

E

Eingangs-

K

Kalman-Verstärkung, 75, 79–82, 84

Kinematisches Modell
 2. Ordnung, 131, 137
 3. Ordnung, 137, 142
 höherer Ordnung, 143
Kolmogorov-Axiome, 46
Komplementärereignis, 44
Korrektur, 78–80
Korrelationskoeffizient, 58, 60
Kovarianz, 58–60
Kreuzkorrelationsfunktion, 67–68

M

Markov-Kette, 54
Matrix-
 Addition, 221
 Allgemein, 221
 Definitheit, 225
 Einheitsmatrix, 225
 Inverse, 224
 Multiplikation, 222–223
 Rechenregeln, 225
 Skalarmultiplikation, 222
 Spur, 224
 Symmetrie, 223
 Transponierte, 223
Messrauschen, 39, 76, 85, 109
Mittelwert, 55–56
Mondlandung, 3–17

N

Normalverteilung, 49–50

P

Partielles konstantes Rauschen, 97
Prädiktion, 77–78

R

Rang, 29–34
 Reale Abtastung, 38–42
ROSE-Filter, 83, 87, 123–127, 163, 171–182

S

Sprungfähiges System, 24
 Steuerbarkeit, 33–34
 Steuermatrix, 24
 Stochastischer Prozess
 Definition, 64
 ergodisch, 65
 stationär, 65
System-
 Matrix, 24, 108
Rauschen, 39, 76, 86, 95–99, 109

T

Target
 Maneuvering Index, 121
 Tracking Index, 121
Tiefpassfilter, 5, 122, 124
Transitionsmatrix, 35

V

Varianz, 57, 59
Vektor, 221

W

Wahrscheinlichkeits-
 Dichte, 47
 Maß, 46
Weißes Rauschen, 69, 98

Z

Zufalls-
 Variable, 44, 63
 Vektor, 63
 Zustands-
 Differentialgleichung, 24, 95
 Größe, 24
 Variable, 24, 107, 108
 Vektor, 24