

## Einführungsaufsatz • Tutorial Paper

# Entwurf durch Polvorgabe \*

Design by pole placement

Von J. ACKERMANN, Oberpfaffenhofen

In einem linearen Regelungssystem mit  $r$  Stellgrößen und Rückführung der  $n$  Zustandsgrößen hat man die  $r \times n$  Koeffizienten der Rückführmatrix  $\mathbf{K}$  als freie Parameter zur Verfügung, durch deren Wahl man versucht, die an die Dynamik des Regelungssystems gestellten Forderungen zu erfüllen. Bei einer Variation von  $\mathbf{K}$  ist jedoch der Einfluß auf Stabilitätsgüte oder Bandbreite unübersichtlich. Derartige Forderungen lassen sich leichter mit Hilfe der Pollage ausdrücken. Ein Vorteil der Polvorgabe besteht darin, daß die Berechnung von  $\mathbf{K}$  aus den Eigenwerten einfacher ist als der umgekehrte Weg. Im Eingrößenfall ( $r = 1$ ) ist die Rückführung durch die Pollage bereits eindeutig bestimmt. Im Mehrgrößenfall verbleiben nach Polvorgabe noch  $(r - 1) \times n$  freie Parameter durch die zusätzliche Forderungen (z.B. Beschränkungen der Verstärkungen in  $\mathbf{K}$ , Verzicht auf Rückführung einzelner Zustandsgrößen) berücksichtigt werden können.

In linear control systems with  $r$  input variables and feedback of the  $n$  state variables,  $r \times n$  coefficients of the feedback matrix  $\mathbf{K}$  are available as free parameters. By choice of these free parameters one tries to fulfill the requirements, put on the dynamic of the control system. But for variations of  $\mathbf{K}$ , the influence on the measure of stability or bandwidth is not quite clear. Such requirements can be expressed more easily by means of the pole positions. One advantage of pole assignment is, that the calculation of  $\mathbf{K}$  from the eigenvalues is easier than vice versa. In the single variable case ( $r = 1$ ) the feedback is already determined by the pole positions. In the multivariable case, after pole assignment  $(r - 1) \times n$  free parameters remain, by which additional requirements (e.g. limits of the parameters in  $\mathbf{K}$ , renunciation on feedback of some state variables) can be considered.

### 1. Einleitung

Das Führungs- und Störungsverhalten eines Regelungssystems wird wesentlich durch die Dynamik der Regelstrecke mit Rückführung bestimmt. Ein weitergehendes Maßschneidern des Regelungssystems ist dann nur noch möglich, wenn man bestimmte Annahmen über den Charakter der Stör- und Führungsgrößen macht. Wir wollen uns hier nur mit der Dynamik der rückgekoppelten Regel-

strecke befassen, d.h. mit der Frage, wie das System aus einem beliebigen Anfangszustand in die Ruhelage kommt.

Bei der Betrachtung der Regelstrecke mit der Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\tag{1}$$

wird vorausgesetzt, daß alle  $n$  Komponenten des Zustandsvektors  $\mathbf{x}$  durch geeignet gewählte Stellgrößen  $u_1, u_2, \dots, u_r$  im Vektor  $\mathbf{u}$  in endlicher Zeit zu Null gemacht werden können, d.h. daß die Regelstrecke steuerbar ist. Weiter wird vorausgesetzt, daß  $\mathbf{x}$  aus der Kenntnis des Verlaufs der Stellgrößen und der Meßgrößen  $y_1, y_2, \dots, y_s$  im Meßvektor  $\mathbf{y}$  rekonstruiert werden kann, d.h. daß die Regelstrecke beobachtbar ist.

Bei den Zustandsraumverfahren geht man nun in zwei Schritten vor: Man nimmt zuerst an, der Zustand  $\mathbf{x}$  sei bekannt, so daß eine Zustandsrückführung

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{V}\mathbf{w}\tag{2}$$

ausgeführt werden kann. In einem zweiten Schritt rekonstruiert man mit einem Beobachter aus den bekannten Eingangsgrößen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{y}$  der Regelstrecke einen Wert  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}}$ . Der Beobachter ist so aufgebaut, daß der Rekonstruktionsfehler  $\tilde{\mathbf{x}}$  in gewünschter Weise asymptotisch gegen Null geht. Dies wird durch Vorgabe der Beobachterpole erreicht, die ganz entsprechend geschieht, wie die hier untersuchte Polvorgabe durch Zustandsrückführung. Schließlich ersetzt man in dem Regelgesetz (2) den unbekannten Zustand  $\mathbf{x}$  durch den rekonstruierten Wert  $\tilde{\mathbf{x}}$ . Zu der Stellgröße  $\mathbf{u}$  nach Gl. (2) kommt damit noch ein Term  $-\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$  hinzu, der jedoch nach dem Separationssatz die Dynamik des Regelungssystems nicht verändert. Der zusätzliche Term  $\tilde{\mathbf{x}}$  genügt nämlich einer homogenen Differentialgleichung  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}$ , kann also wie eine zusätzliche Eingangsgröße betrachtet werden, die nicht von den Größen  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{u}$  oder  $\mathbf{x}$  im Regelkreis abhängt.

Im folgenden wird näher auf den ersten Schritt eingegangen, also auf die Festlegung der Dynamik durch eine Rückführung mit der Matrix  $\mathbf{K}$ . Aus den Gln.(1) und (2) folgt

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{V}\mathbf{w}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}.\end{aligned}\tag{3}$$

Dieses Regelungssystem ist in Bild 1 dargestellt. Dort ist auch der Vektor der Regelgrößen

Manuskripteingang: 29. März 1977.

\* Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor W. Oppelt, zum 65. Geburtstag gewidmet.

Überarbeitete Fassung eines Vortrags, gehalten auf dem Aussprachetag „Regelungssynthese im Zustandsraum“ der VDI/VDE-Gesellschaft Meß- und Regelungstechnik am 14. Februar 1977 in Frankfurt am Main.

$$x_a = C_a x \quad (4)$$

berücksichtigt. Im stationären Zustand  $\dot{x} = 0$  soll  $x_a = w$  werden. Aus (3) und (4) folgt damit

$$\begin{aligned} 0 &= (A - BK)x + BVw, \\ x &= (BK - A)^{-1}BVw, \\ x_a &= w = C_a(BK - A)^{-1}BVw, \\ C_a(BK - A)^{-1}BV &= I. \end{aligned}$$

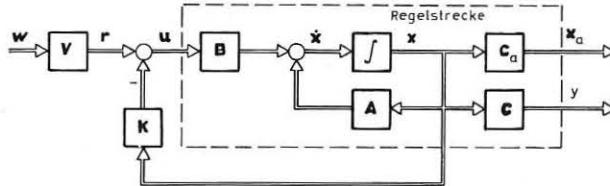


Bild 1. Struktur des Regelungssystems mit Zustandsvektor-Rückführung.

Bei gleicher Anzahl  $r$  von Stell- und Führungsgrößen wird dann

$$V = [C_a(BK - A)^{-1}B]^{-1}. \quad (5)$$

Wenn ein derartiges  $V$  existiert, wird damit im stationären Zustand die gewünschte Übereinstimmung von Führungs- und Regelgrößen erreicht. Zunächst muß jedoch  $K$  bestimmt werden. Das Verfahren der Polvorgabe besteht darin, dem Regelungssystem ein gewünschtes charakteristisches Polynom

$$\det(sI - A + BK) = P(s) = \varphi_0 + \varphi_1 s + \dots + \varphi_{n-1} s^{n-1} + s^n \quad (6)$$

zu geben. Die Nullstellen dieses Polynoms sind die Pole der ungekürzten Führungs-Übertragungsfunktion  $C_a(sI - A + BK)^{-1}BV$ . Diese reellen oder paarweise konjugiert-komplexen Pole können genau dann beliebig vorgegeben werden, wenn die Regelstrecke steuerbar ist, d. h. wenn

$$\text{Rang } [B, AB \dots A^{n-1}B] = n. \quad (7)$$

Bei Regelstrecken mit nur einer Stellgröße ist  $B$  ein Spaltenvektor  $b$ . Die Bedingung (7) kann dann als

$$\det [b, Ab \dots A^{n-1}b] \neq 0 \quad (8)$$

geschrieben werden.

Mathematisch besteht das Polvorgabe-Problem also in der Auflösung der Gl. (6) nach  $K$ . Bei steuerbaren Regelstrecken existiert bei nur einer Stellgröße, d. h.  $r = 1$ , eine eindeutige Lösung, die im nächsten Abschnitt gezeigt wird. Bei mehreren Stellgrößen,  $r > 1$ , ist Gl. (6) bezüglich  $K$  unterbestimmt, d. h. es können außer der Polvorgabe weitere Forderungen an das Regelungssystem erfüllt werden. Hierauf wird später zurückzukommen sein.

## 2. Polvorgabe für Regelstrecken mit einer Stellgröße

Bei Regelstrecken mit nur einer Stellgröße  $u$  schreibt sich

das Regelgesetz

$$u = -k'x + vw. \quad (9)$$

Gl. (6) lautet damit

$$\det(sI - A + bk') = P(s) = \varphi_0 + \varphi_1 s + \dots + \varphi_{n-1} s^{n-1} + s^n. \quad (10)$$

Zur Auflösung dieser Gleichung nach  $k'$  entwickelt man die Potenzen von  $F = A - bk'$  in gemischte Polynome in  $F$  und  $A$ , multipliziert diese mit den Koeffizienten  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ , 1 des gewünschten charakteristischen Polynoms  $P(s)$  und addiert sie:

$$\begin{array}{lcl} I &= I & \cdot \varphi_0 \\ F &= A - bk' & \cdot \varphi_1 \\ F^2 &= A^2 - Abk' - bk'F & \cdot \varphi_2 \\ F^3 &= A^3 - A^2bk' - AbkF - bk'F^2 & \cdot \varphi_3 \\ \vdots & & \vdots \\ F^n &= A^n - A^{n-1}bk' - \dots - bk'F^{n-1} & \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(F) &= P(A) - [b, Ab \dots A^{n-1}b] \times \\ &\times \left[ \begin{array}{c} k'F^{n-1} + \varphi_{n-1}k'F^{n-2} + \dots + \varphi_1k' \\ \vdots \\ k'F + \varphi_{n-1}k' \\ k' \end{array} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

Nach dem Satz von **Cayley-Hamilton** erfüllt jede quadratische Matrix ihre eigene charakteristische Gleichung, hier also

$$P(F) = \varphi_0 I + \varphi_1 F + \dots + \varphi_{n-1} F^{n-1} + F^n = 0, \quad (12)$$

so daß die linke Seite von Gl. (11) verschwindet.

Da die Steuerbarkeit der Regelstrecke vorausgesetzt wurde, ist die in Gl. (11) auftretende Steuerbarkeitsmatrix regulär, s. Gl. (8), und  $k'$  kann aus der letzten Zeile von Gl. (11) berechnet werden:

$$k' = [0 \dots 0 \ 1] [b, Ab \dots A^{n-1}b]^{-1} P(A). \quad (13)$$

Man erhält also den Rückführvektor  $k'$ , indem man die gegebene Dynamikmatrix  $A$  der Regelstrecke in das gewünschte charakteristische Polynom  $P(s)$  einsetzt und mit der letzten Zeile der invertierten Steuerbarkeitsmatrix vormultipliziert. Diese Zeile wird zur Abkürzung geschrieben:

$$e' = [0 \dots 0 \ 1] [b, Ab \dots A^{n-1}b]^{-1}. \quad (14)$$

Damit wird

$$k' = e' P(A). \quad (15)$$

In dieser Form ist die Beziehung leicht zu merken. Für die Ausrechnung braucht man jedoch nicht die in  $P(A)$  enthaltenen Potenzen von  $A$  auszurechnen, sondern nur die Vektoren  $e', e'A, e'A^2 \dots$  zur Bildung von

$$k' = \varphi_0 e' + \varphi_1 e'A + \dots + \varphi_{n-1} e'A^{n-1} + e'A^n. \quad (16)$$

Die Berechnung von  $e'$  bei voll besetzter Steuerbarkeitsmatrix

$$Q = [b, Ab \dots A^{n-1}b] = \begin{bmatrix} q_{11} \dots q_{1n} \\ \vdots \\ q_{n1} \dots q_{nn} \end{bmatrix}$$

geschieht zweckmäßigerweise über die Adjunkten der letzten Spalte von  $Q$ . Die Adjunkte zum Element der Zeile  $i$  und Spalte  $k$  ist  $Q_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot D_{ik}$ .  $D_{ik}$  ist die Unterdeterminante, die durch Weglassen der  $i$ -ten Zeile und  $k$ -ten Spalte entsteht. Es ist

$$e' = [0 \dots 0 \ 1] Q^{-1} = \frac{1}{D} [Q_{1n} \dots Q_{nn}], \quad (17)$$

wobei

$$D = \det Q = q_{1n} \cdot Q_{1n} + \dots + q_{nn} Q_{nn}. \quad (18)$$

Bei nicht voll besetzter Steuerbarkeitsmatrix  $Q$  lässt sich das lineare Gleichungssystem  $e'Q = [0 \dots 0 \ 1]$  oft noch einfacher lösen.

### 3. Beispiel

Als Beispiel wird die von Föllinger (Regelungstechn. 24 (1976) S. 242) untersuchte Verladebrücke nach Bild 2 betrachtet. Dabei sind  $l$  Seillänge,  $m_K$  Masse der Laufkatze,  $m_G$  Masse des Greifers,  $g$  Erdbeschleunigung.

Mit den Zustandsgrößen  $x_1$  Position der Laufkatze,  $x_2$  Geschwindigkeit der Laufkatze,  $x_3$  Greiferwinkel und  $x_4$  Greiferwinkelgeschwindigkeit lautet die Zustandsdarstellung des für kleine Winkel  $\vartheta$  linearisierten Systems

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a_{43} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ -b_4 \end{bmatrix} u = Ax + bu, \quad (19)$$

$$y_a = [1 \ 0 \ 1 \ 0] x = c'_a x$$

$$\text{mit } a_{23} = \frac{m_G g}{m_K}, \ a_{43} = \frac{(m_K + m_G) \cdot g}{m_K l}, \ b_2 = \frac{1}{m_K}, \ b_4 = \frac{1}{m_K l}.$$

Die Eigenwerte dieser Regelstrecke liegen bei  $s_{1,2} = 0$ ,  $s_{3,4} = \pm j\sqrt{a_{43}}$ .  $e'$  wird berechnet aus

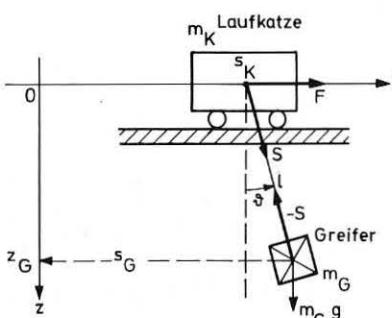


Bild 2. Verladebrücke.

$$[e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4] [b, Ab, A^2b, A^3b] = [0 \ 0 \ 0 \ 1],$$

$$[e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4] \begin{bmatrix} 0 & b_2 & 0 & -a_{23}b_4 \\ b_2 & 0 & -a_{23}b_4 & 0 \\ 0 & -b_4 & 0 & a_{43}b_4 \\ -b_4 & 0 & a_{43}b_4 & 0 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0 \ 1].$$

Die Steuerbarkeitsmatrix ist regulär, wenn die erste und dritte Spalte bzw. die zweite und vierte Spalte linear unabhängig sind, beides ist erfüllt für  $b_2 a_{43} - a_{23} b_4 \neq 0$ , ausge rechnet  $m_K g \neq 0$ , die Verladebrücke kann also praktisch nur unter Schwerelosigkeit versagen.

Aus der ersten und dritten Spalte erhält man

$$\left. \begin{array}{l} e_2 b_2 - e_4 b_4 = 0 \\ -e_2 a_{23} b_4 + e_4 a_{43} b_4 = 0 \end{array} \right\} e_2 = e_4 = 0$$

und aus der zweiten und vierten

$$\left. \begin{array}{l} e_1 b_2 - e_3 b_4 = 0 \\ -e_1 a_{23} b_4 + e_3 a_{43} b_4 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} e_1 = \frac{1}{a_{43} b_2 - a_{23} b_4} = lm_K/g, \\ e_3 = \frac{b_2 / b_4}{a_{43} b_2 - a_{23} b_4} = l^2 m_K/g. \end{array}$$

$e' = [lm_K/g \ 0 \ l^2 m_K/g \ 0]$  wird nun in Gl. (16) eingesetzt:

$$k' = \begin{bmatrix} \varphi_0 [lm_K/g \ 0 \ l^2 m_K/g \ 0] \\ + \varphi_1 [0 \ lm_K/g \ 0 \ l^2 m_K/g] \\ + \varphi_2 [0 \ 0 \ -lm_K \ 0] \\ + \varphi_3 [0 \ 0 \ 0 \ -lm_K] \\ + [0 \ 0 \ (m_K + m_G)g \ 0] \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Das Ergebnis ermöglicht einige interessante Schlüsse:

1. Eine Stabilisierung ist nicht möglich, wenn die Position  $x_1$  der Laufkatze nicht zurückgeführt wird. Dies würde nämlich  $\varphi_0 = 0$  erfordern, was die notwendige Stabilitätsbedingung, daß alle Koeffizienten des charakteristischen Polynoms positiv sein müssen, verletzt.
2. Aus dem gleichen Grund kann auf die Rückführung der Geschwindigkeit  $x_2$  der Laufkatze nicht verzichtet werden.
3. Will man auf die Rückführung des Greiferwinkels  $x_3$  verzichten, so werden die vorgebbaren Pollagen eingeschränkt durch

$$\varphi_0 l^2 m_K/g - \varphi_2 lm_K + (m_K + m_G)g = 0. \quad (21)$$

4. Die Rückführung der Greiferwinkelgeschwindigkeit entfällt, wenn man  $\varphi_3$  wie folgt wählt:

$$\varphi_3 = \varphi_1 l/g. \quad (22)$$

5. Die Beobachtbarkeitsanalyse ergibt, daß das System nur durch Messung der Position  $x_1$  der Laufkatze vollständig beobachtbar ist. Auf diese Messung kann also keinesfalls verzichtet werden; alle anderen Größen können aber

daraus durch dynamische Elemente, z. B. einen Beobachter, für die Zwecke der Rückführung rekonstruiert werden.

6. Die in weiten Grenzen veränderliche Greifermasse  $m_G$  geht nur in die Rückführung von  $x_3$  ein und dort nur in Verbindung mit dem Koeffizienten  $\varphi_4 = 1$ . Man kann daher leicht die Änderung von  $m_G$  zu  $m_G^*$  in eine Änderung von  $\varphi_4 = 1$  zu  $\varphi_4^*$  umrechnen. Bei unveränderter Rückführung  $k'$  ist

$$\begin{aligned}\varphi_4(m_K + m_G) &= \varphi_4^*(m_K + m_G^*), \\ \varphi_4^* &= (m_K + m_G)/(m_K + m_G^*).\end{aligned}$$

Die kritische Stabilitätsbedingung ist

$$\varphi_1^2 \varphi_4 < \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 - \varphi_0 \varphi_3^2.$$

Diese wird durch Polvorgabe für  $\varphi_4 = 1$  erfüllt. Soll die Verladebrücke auch im ungünstigsten Fall, d.h. im unbeladenen Zustand  $m_G^* \rightarrow 0$  stabil sein, so müssen die  $\varphi_i$  so gewählt werden, daß

$$\varphi_1^2 \cdot (m_K + m_G)/m_K < \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 - \varphi_0 \varphi_3^2. \quad (23)$$

Dies kann stets erreicht werden, wenn  $\varphi_2$  genügend groß gewählt wird.

#### 4. Spezifikation und freie Parameter

Die Forderungen an ein Regelungssystem sind praktisch nie vollständig in Form einer gewünschten Polkonfiguration vorgegeben. Man kennt allenfalls wie in der Flugzeugregelung eine von den Piloten als gut fliegbar empfundene Lage eines dominanten Polpaars. Meist bestehen die Forderungen aus Spezifikationen, z.B. für Anstiegszeit, Überschwingen, Bandbreite, Dämpfung usw., wobei zusätzliche Forderungen für Stellgrößenbeschränkungen, günstiges Störverhalten, Robustheit gegen Parameteränderungen und Sensor- und Stellgliedausfälle hinzukommen können. Die Reglerentwurfsverfahren beruhen darauf, daß man einige freie Parameter in einer vorgegebenen Struktur des Regelungssystems so variiert, daß die genannten Forderungen möglichst gut erfüllt werden. Bei den Entwurfsverfahren im Zustandsraum sind die freien Parameter z.B. die Gewichtungsmatrizen in einem quadratischen Kriterium oder die vorgegebenen Pole.

Hier liegt die Frage nahe, warum man nicht gleich die Elemente der Rückführmatrix  $K$  als freie Parameter benutzt. Tatsächlich läßt sich darin leicht untersuchen, was es bedeutet, bestimmte Zustandsgrößen nicht zurückzuführen bzw. einen entsprechenden Sensorausfall zu berücksichtigen, wobei die entsprechende Spalte der  $K$ -Matrix zu Null wird. Entsprechendes gilt für das Weglassen eines Stellgliedes bezüglich einer Zeile der  $K$ -Matrix. Sind die Stellamplituden zu groß, wird man gezielt ein oder mehrere Elemente der  $K$ -Matrix verkleinern.

Andererseits lassen sich Spezifikationen wie Dämpfung und Bandbreite einfacher durch die Pollage ausdrücken. Das

bedeutet, daß man sowohl die  $K$ -Matrix als auch die Eigenwerte während des Entwurfs betrachten muß. Die Rückführmatrix  $K$  hat  $r \times n$  voneinander unabhängige freie Parameter. Im Eingrößenfall  $r = 1$  sind es gerade  $n$ , sie sind eindeutig durch die  $n$  Eigenwerte gegeben und umgekehrt.

Man muß sich aber für einen der beiden Sätze von  $n$  freien Parametern entscheiden. Hier ist wichtig zu beachten, in welcher Richtung der Übergang einfacher ist. Von den Eigenwerten  $s_1, s_2, \dots, s_n$  führt ein einfacher Weg über

$$k' = e' P(A) = e'(A - s_1 I)(A - s_2 I) \dots (A - s_n I) \quad (24)$$

zum Rückführvektor  $k'$ . Der umgekehrte Weg von  $k'$  über  $P(s) = \det(sI - A + bk')$  und die numerische Berechnung der Nullstellen von  $P(s) = 0$  ist dagegen aufwendiger und wegen des numerisch auszuführenden Schritts unübersichtlicher. Mit anderen Worten: Es ist einfacher, versuchsweise an einem Eigenwert, z.B.  $s_1$ , zu „wackeln“ und sich den Einfluß auf  $k'$

$$\frac{dk'}{ds_1} = e'(A - s_2 I) \dots (A - s_n I) \quad (25)$$

anzusehen als den umgekehrten Weg zu gehen. Es wird schließlich auch leichter, schrittweise die Zahl der freien Parameter zu reduzieren, wie das folgende Beispiel zeigt.

#### 5. Beispiel

Zurück zur Verladebrücke; zunächst seien nur zwei Eigenwerte vorgegeben. Die Eigenfrequenz des Pendels wird nicht geändert, es wird aber eine Dämpfung von  $1/\sqrt{2}$  eingeführt, die zu einem gut gedämpften Einschwingvorgang führt. Man gibt also das charakteristische Polynom in der Form

$$P(s) > (s^2 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a_{43}} s + a_{43})(s^2 + \beta s + \gamma) \quad (26)$$

vor und variiert  $\beta$  und  $\gamma$  im Bereich positiver Werte, um die Stabilität sicherzustellen.

Es wird dann

$$\begin{aligned}k' &= e'(A^2 + \sqrt{2a_{43}} A + a_{43} I)(A^2 + \beta A + \gamma I) = \\ &= [m_K + m_G \quad c \quad m_G l \quad cl](A^2 + \beta A + \gamma I) \\ \text{mit } c &= \sqrt{2m_K l(m_K + m_G)/g}, \\ k' &= \gamma [m_K + m_G \quad c \quad m_G l \quad cl] + (27) \\ &\quad + \beta [0 \quad m_K + m_G \quad cg \quad m_G l] + \\ &\quad + [0 \quad 0 \quad 0 \quad -cg].\end{aligned}$$

Nimmt man z.B. an, daß man auf die Rückführung der Greiferwinkelgeschwindigkeit  $x_4$  verzichten will, so muß  $\gamma cl + \beta m_G l = cg$  werden. Mit den Zahlenwerten  $m_K = 1000 \text{ kg}$ ,  $m_G = 4000 \text{ kg}$ ,  $l = 10 \text{ m}$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$  und damit  $c = 10^3 \sqrt{10}$  lautet diese Beziehung

$$\gamma \cdot \sqrt{10} + 4\beta = \sqrt{10}. \quad (28)$$

Damit wird Gl. (27)

$$k' = 10^3 \cdot [5\gamma \ 0,25\sqrt{10}(5-\gamma) \ 5(13\gamma-5) \ 0]. \quad (29)$$

Nun soll außerdem die Ungl. (23) erfüllt werden, die sicherstellt, daß das Regelungssystem unabhängig von der Greifermasse stabil bleibt. Aus Gl. (28) wird  $\beta = 0,25\sqrt{10}(1-\gamma)$  in Gl. (26) eingesetzt; durch ausmultiplizieren erhält man dann

$$\begin{aligned} P(s) &= [s^2 + \sqrt{10}s + 5] [s^2 + 0,25\sqrt{10}(1-\gamma)s + \gamma] = \\ &= s^4 + 0,25\sqrt{10}(5-\gamma)s^3 + 1,5(5-\gamma)s^2 \\ &\quad + 0,25\sqrt{10}(5-\gamma)s + 5\gamma. \end{aligned} \quad (30)$$

Damit lautet Ungl. (23)

$$\begin{aligned} 0,625(5-\gamma)^2 \cdot 5 &< 0,625 \cdot 1,5(5-\gamma)^3 - 5\gamma \cdot 0,625(5-\gamma)^2, \\ 5 &< 1,5(5-\gamma) - 5\gamma, \\ \gamma &< 0,3846. \end{aligned} \quad (31)$$

In Tabelle 1 sind für einige Werte von  $\gamma$  zwischen Null und 0,3846 die  $\beta$ -Werte, die sich aus Gl. (28) ergeben, die Nullstellen  $s_{1,2}$  von  $(s^2 + \beta s + \gamma) = 0$  und die zugehörigen Rückführverstärkungen  $k_1$ ,  $k_2$  und  $k_3$  nach Gl. (29) angegeben.

Tabelle 1.  $\beta$ -Werte, Nullstellen  $s_1$  und  $s_2$  sowie Rückführverstärkungen  $k_1$ ,  $k_2$  und  $k_3$  für  $\gamma$  zwischen 0 und 0,3846.

$\gamma$	$\beta$	$s_1$	$s_2$	$10^{-3} k_1$	$10^{-3} k_2$	$10^{-3} k_3$
0	0,791	0	-0,791	0	3,953	-25
0,05	0,751	-0,074	-0,677	0,25	3,913	-21,75
0,1	0,712	-0,103	-0,519	0,5	3,874	-18,5
0,1208	0,695	-0,348	-0,348	0,604	3,857	-17,15
0,15	0,672	-0,336 $\pm$ j 0,193	0,75	3,834	-15,25	
0,2	0,633	-0,316 $\pm$ j 0,316	1	3,795	-12	
0,25	0,593	-0,297 $\pm$ j 0,403	1,25	3,755	-8,75	
0,3	0,553	-0,277 $\pm$ j 0,473	1,5	3,716	-5,5	
0,35	0,514	-0,257 $\pm$ j 0,533	1,75	3,676	-2,25	
0,3846	0,487	-0,243 $\pm$ j 0,571	1,923	3,649	0	

Die Lage der Pole ist in einer Wurzelortskurve in Bild 3 dargestellt. Für kleine Werte von  $\gamma$  liegt ein Pol nahe bei  $s = 0$ , der das System langsam macht; gleichzeitig wird jedoch eine größere Verstärkung  $k_3$  benötigt, um den zweiten reellen Pol nach links zu schieben. Diese Lösung ist unvorteilhaft. Auch der andere Extremfall  $\gamma = 0,3846$  ist unvorteilhaft, da die Dämpfung nur noch 0,393 beträgt. Ein günstiger Zwischenwert ist  $\gamma = 0,2$ , der gerade auf eine Dämpfung  $1/\sqrt{2}$  und den Rückführvektor

$$k' = 10^3 [1 \ 3,795 \ -12 \ 0] \quad (32)$$

führt. Die Kontrolle ergibt übereinstimmend mit Gl. (30) für  $\gamma = 0,2$

$$\det(sI - A + bk') = s^4 + 3,795s^3 + 7,2s^2 + 3,795s + 1. \quad (33)$$

Das System hat also die Eigenwerte  $s_{1,2} = -0,316(1 \pm j)$  und  $s_{3,4} = -1,58(1 \pm j)$ . Die Frequenzen verhalten sich

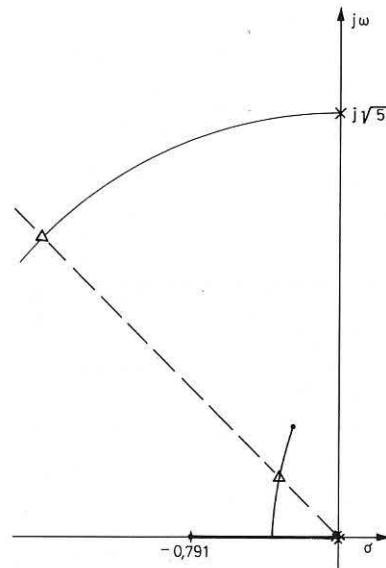


Bild 3. Vorgabe einer Dämpfung  $1/\sqrt{2}$  für die Greiferschwingung. Wurzelortskurve der beiden weiteren Pole unter den Forderungen: Greiferwinkelgeschwindigkeit nicht zurückgeführt, System bei beliebiger Greifermasse stabil.

x Pole des offenen Kreises, Δ Pole des geschlossenen Kreises.

exakt wie 1:5, d.h. wie die Masse der Laufkatze  $m_K$  zur Gesamtmasse  $m_K + m_G$ .

Dieses Beispiel illustriert, daß das Werkzeug Polvorgabe, das hier nur einen Taschenrechner erfordert, auch dann vorteilhaft eingesetzt werden kann, wenn nicht von vornherein eine wünschenswerte Pollage vorgegeben ist.

## 6. Hinweise zur Wahl der Pole

Es sei zunächst noch einmal darauf hingewiesen, daß es die „ideale Pollage“ nicht gibt. Das Verfahren der Polvorgabe ist, ebenso wie der Riccati-Entwurf, ein hilfreiches Werkzeug, es ersetzt aber nicht die ingenieurmäßigen Überlegungen, die von den speziellen Umständen einer gegebenen Regelungsaufgabe ausgehen müssen. Der Leser sei also darauf hingewiesen, daß er im folgenden kein narrensicheres Rezept zum Entwurf guter Regelungssysteme findet, sondern nur einige Hinweise, die helfen können, bestimmte Fehler zu vermeiden.

### a) Vergleich mit dem Wurzelortskurven-Verfahren

Die Frage, wohin man die Pole legen soll, tritt auch beim Wurzelortskurvenverfahren auf, manche Überlegungen sind daher recht ähnlich; die Vorgabe eines dominanten Polpaars wurde schon anhand eines Beispiels diskutiert. Bei kleinen Verstärkungen bleiben die Stellamplituden klein, die Pole werden aber auch nur wenig gegenüber der Polkonfiguration der Regelstrecke verschoben. Bei einer Regelstrecke mit instabilen oder nicht genügend gedämpften Polen wird man die Pole durch Rückführung nach links verschieben. Schreibt man dabei einen großen negativen Realteil der Pole vor, so verläuft der Einschwingvorgang rasch, erfordert aber große Stellamplituden. Bei Abtastsystemen entspricht das dem Verschieben der Pole zum



Nullpunkt der  $z$ -Ebene hin. Hier ist auch der Extremfall realisierbar in Form der sogenannten „deadbeat“-Regelung, das ist eine Vorgabe sämtlicher Pole im Nullpunkt der  $z$ -Ebene. Oft lassen sich die Stellamplituden ohne wesentliche Verschlechterung des Einschwingvorgangs wesentlich vermindern, indem man  $n$  einfache Pole in die Nähe des Nullpunkts in die rechte  $z$ -Halbebene legt anstelle eines  $n$ -fachen Pols bei  $z = 0$ .

### b) Kürzungskompensationen

Bekannt sind die Nachteile von Kürzungskompensationen, bei denen Pole oder Nullstellen der Regelstrecke durch entsprechende Regler-Nullstellen oder Pole gekürzt werden. Wann kann dies bei der Polvorgabe auftreten?

Enthält das gewünschte charakteristische Polynom  $P(s)$  eine Nullstelle  $s_i$ , die bereits Pol des offenen Systems, also Eigenwert von  $A$  ist, so sieht man in Gl. (24), daß der entsprechende Term  $(A - s_i I)$  die Determinante Null hat und damit  $\det P(A) = 0$  wird. Da andererseits offensichtlich gilt

$$\begin{bmatrix} k' \\ k' A \\ \vdots \\ k' A^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e' \\ e' A \\ \vdots \\ e' A^{n-1} \end{bmatrix} P(A) \quad (34)$$

muß

$$\det \begin{bmatrix} k' \\ k' A \\ \vdots \\ k' A^{n-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (35)$$

sein, d.h. das Paar  $(A, k')$  ist nicht beobachtbar. In diesem Fall kann  $u = -k'x = 0$  werden, obwohl  $x \neq 0$  ist. Das Teilsystem mit dem Eigenwert  $s_i$  bleibt damit sich selbst überlassen. Wird es z.B. durch eine Störung angeregt, so enthält der Ausgang einen Lösungsanteil  $c \cdot e^{s_i t}$ . Man sieht daran, daß dies nur bei Polen von  $A$  gemacht werden sollte, die ohnehin einen genügend großen negativen Realteil haben, andernfalls erhält man ein ungünstiges Störungsverhalten. Dieser Fall entspricht der Kürzung eines Pols der Regelstrecke durch eine Reglernullstelle.

Auch die umgekehrte Kürzung (Streckennullstelle gegen Reglerpol) kann erzeugt werden. Sie tritt auf, wenn man in  $P(s)$  einen Pol vorgibt, der Nullstelle der Übertragungsfunktion des offenen Systems von  $u$  nach  $x_a$  also von  $c'_a(sI - A)^{-1} b$  ist. Will man eine derartige Nullstelle wegzwingen, so erfordert das große Stellamplituden. Bei Problemen, bei denen es auf die Stellamplituden ankommt, sollte man die Umgebung dieser Nullstellen bei der Polvorgabe meiden.

Bei der Verladebrücke berechnet man die Übertragungsfunktion von der Kraft, die die Laufkatze beschleunigt, zur Greiferposition über den Leverrier-Algorithmus zu

$$c'_a(sI - A)^{-1} b = \frac{g/lm_G}{s^2 \left( s^2 + \frac{(m_K + m_G)g}{m_K \cdot l} \right)}$$

Hier ist also keine Nullstelle im Endlichen vorhanden, die vierfache Nullstelle im Unendlichen bedeutet aber große Stellamplituden für alle Pole, die sich weiter von dem Punkt  $s = 0$  entfernen.

### c) Teilweise Poländerung

Will man bei einer Regelstrecke nur einige Pole verändern, die übrigen aber unverändert lassen, (z.B. die Stellglied-dynamik), so empfiehlt es sich, das System über

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} = T x \quad (36)$$

so zu transformieren, daß

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} = T A T^{-1} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + T B u = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad (37)$$

Dabei soll  $P_2(s) = \det(sI - A_{22})$  der Faktor des charakteristischen Polynoms sein, der unverändert bleiben soll.  $x_b$  wird daher auch nicht zurückgeführt:

$$u = -[K_1 \ 0] \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + V w. \quad (38)$$

Das Regelungssystem wird dann beschrieben durch

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - B_1 K_1 & \mathbf{0} \\ A_{21} - B_2 K_1 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} V w. \quad (39)$$

Es hat das charakteristische Polynom

$$P(s) = P_1(s) P_2(s) = \det(sI - A_{11} - K_1 B_1) \cdot \det(sI - A_{22}). \quad (40)$$

Die Berechnung von  $K_1$  aus  $A_{11}$ ,  $B_1$  und  $P_1$  vereinfacht sich durch die verminderte Ordnung.

### d) Bandbreite-Forderungen

Sind Spezifikationen für die Bandbreite des geschlossenen Kreises gegeben, so ist es vorteilhaft, sich folgenden Zusammenhang zu vergegenwärtigen:

Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises ist

$$T(s) = c'_a(sI - A + bk')^{-1} b v = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{\varphi_0 + \varphi_1 s + \dots + \varphi_{n-1} s^{n-1} + s^n} \quad m < n. \quad (41)$$

Die Nullstellen stimmen mit denen der Übertragungsfunktion des offenen Kreises  $c'_a(sI - A)b$  überein; im Nenner steht das vorgegebene  $P(s)$  und  $v$  wird so gewählt, daß sich für  $s \rightarrow 0$  der Wert 1 ergibt, also  $b_0 = \varphi_0$ . Faktorisiert man Zähler und Nenner der Übertragungsfunktion

$$T(s) = b_m \frac{(s - r_1)(s - r_2) \dots (s - r_m)}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)} \quad (42)$$

so sieht man, daß der Betrag des Frequenzgangs

$$|T(j\omega)| = b_m \frac{|j\omega - r_1| \cdot |j\omega - r_2| \dots |j\omega - r_m|}{|j\omega - s_1| \cdot |j\omega - s_2| \dots |j\omega - s_n|} \quad (43)$$

für einen angenommenen Punkt  $j\omega$  auf der imaginären Achse der  $s$ -Ebene, durch Ausmessen der Abstände dieses Punktes von den (festen) Nullstellen und den (vorgebbaren) Polen über Gl. (43) ausgerechnet werden kann. Damit können gezielt einzelne Pole  $s_i$  so variiert werden, daß die Bandbreitenforderung erfüllt wird.

#### e) Stellgrößenbeschränkung

Im Hinblick auf die benötigten Stellamplituden ist es vorteilhaft, bei komplexen Polen der Regelstrecke nur die Dämpfung zu ändern, nicht aber die Frequenz. So wird man die langsame Bahnschwingung (Phygoide) eines Flugzeugs zwar dämpfen aber nicht wesentlich schneller machen, da dies zu großen Ruderausschlägen erfordern würde. Diese Überlegung wurde bereits bei dem Beispiel der Verladebrücke angewendet. Auf dieses Ergebnis führen auch die Untersuchungen von Grübel (GMR-Aussprachetag im Februar 1977 in Frankfurt).

#### f) Reduktion der Empfindlichkeit gegen Störungen und Parameteränderungen

In der Arbeit von Grübel wird die Bedingung einer idealen Regelung anhand des dynamischen Regelfaktors  $R(s)$  untersucht. Dieser ist definiert als das Verhältnis charakteristisches Polynom des offenen Kreises zum charakteristischen Polynom des geschlossenen Kreises. Bei einer idealen Regelung gilt  $|R(j\omega)| \leq 1$  für alle  $\omega$ . Dann wird die Parameter- und Störempfindlichkeit für alle Frequenzen reduziert. Hieraus folgt im wesentlichen, daß alle Pole in der  $s$ -Ebene weiter links liegen müssen als die Pole der Regelstrecke.

Das Problem ist damit auf den Eingrößenfall zurückgeführt. Wenn  $(A, b)$  steuerbar ist, können die Eigenwerte beliebig vorgegeben werden,  $k'$  ist durch Gl. (13) gegeben. (Ein Vektor  $b$ , so daß  $(A, b)$  steuerbar ist, existiert genau dann, wenn  $A$  zyklisch ist, d. h. wenn Minimalpolynom und charakteristisches Polynom übereinstimmen. Sollte das einmal nicht der Fall sein, so kann  $A$  zunächst durch eine Rückführung zyklisch gemacht werden.)

Diese Lösung des Mehrgrößenproblems ist z. B. dann vorteilhaft, wenn der Zustand  $x$  im Regelgesetz aus einem gemessenen Ausgangsvektor  $y = Cx$  durch einen Beobachter rekonstruiert werden muß. Es braucht dann nur  $u^*$ , d. h. nur eine Linearkombination der Zustandsgrößen, rekonstruiert zu werden. Dies ist möglich mit einem Kompen-sator der Ordnung  $v - 1$ , wobei der Beobachbarkeitsindex  $v$  die kleinste Zahl  $N$  ist, so daß

$$\text{Rang } \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} = n.$$

Ein Nachteil des Ansatzes (44) ist, daß man hiermit Rang  $K = 1$  vorschreibt und alle anderen Lösungen von vornherein ausschließt. Man legt damit einen Teil der freien Parameter willkürlich fest. Offenbar kann man durch die Wahl der Rückführmatrix  $K$  noch andere Eigenschaften des Regelungssystems außer den Eigenwerten verändern. Auf diese Frage der verallgemeinerten Polfestlegung wird noch später eingegangen. Vorher muß jedoch noch der Begriff der Kronecker-Indices eingeführt werden.

## 7. Polvorgabe für Regelstrecken mit mehreren Stellgrößen

Das Problem der Polfestlegung für Regelstrecken mit mehreren Stellgrößen hat eine Lösung, wenn die Regelstrecke steuerbar ist. Im Gegensatz zum Eingrößenproblem ist die Lösung jedoch im allgemeinen nicht eindeutig, d. h. es gibt verschiedene Rückführmatrizen  $K$ , die zu dem gleichen charakteristischen Polynom  $P(s) = \det(sI - A + BK)$  führen.

Ein einfacher Weg, eine solche Lösung zu finden, besteht darin, alle Eingänge bis auf einen Faktor untereinander gleich zu machen, d. h. man setzt

$$u(t) = \beta u^*(t) + Vw(t) \quad (44)$$

mit einer skalaren Eingangsgröße  $u^*(t)$ . Mit der Rückführung

$$u^* = -k'x \quad (45)$$

wird die Gleichung des Regelungssystems

$$\dot{x} = (A - B\beta k')x + BVw. \quad (46)$$

Es sei

$$b = B\beta. \quad (47)$$

## 8. Kronecker-Indices

Statt die Frage zu untersuchen, welche Eigenschaften man mit der Zustandsvektor-Rückführung ändern kann, ist es nützlich, auch einmal die umgekehrte Frage zu stellen: Welche Eigenschaften kann man nicht durch  $K$  und  $V$  ändern? Bei dem Regelungssystem mit Rückführung

$$\dot{x} = (A - BK)x + BVw = Fx + Gw, \quad \det V \neq 0, \quad (48)$$

bestehen die Invarianten aus  $r$  ganzen Zahlen  $n_1, \dots, n_r$ , wobei  $r$  die Anzahl der Stellgrößen ist. Diese Invarianten werden als Kronecker-Indices bezeichnet; sie erfüllen

$$n_1 + n_2 + \dots + n_r = n. \quad (49)$$

Im Eingrößenfall,  $r = 1$ , ist nur die Ordnung  $n$  invariant. Im Mehrgrößenfall haben die  $n_i$  die Bedeutung der Ordnung von Teilsystemen, die sich aus der Steuerbarkeitsstruktur ergeben. Sie werden folgendermaßen bestimmt: In der Steuerbarkeitsmatrix

$$[B, AB, A^2B, \dots] = [b_1, b_2, \dots, b_r, Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_r, A^2b_1, \dots] \quad (50)$$

prüft man die Spaltenvektoren, ob sie linear abhängig von den links davon stehenden sind. Ist  $A^k b_i$  linear abhängig, so gilt das auch für  $A^{k+1} b_i$ . Man erhält damit zu jeder Stellgröße  $u_i$  eine Vektorkette  $b_i, Ab_i, \dots, A^{n_i-1} b_i$ . Die Anzahl der Vektoren ist der Kronecker-Index  $n_i$  zur  $i$ -ten Stellgröße. Man kann sich das etwa so vorstellen, daß die Stellgrößen der Reihe nach abgefragt werden: Kann  $u_1$  ein Teilsystem erster Ordnung steuern ( $b_1 \neq 0$ ), kann  $u_2$  von dem Rest ein Teilsystem erster Ordnung steuern ( $b_2$  linear unabhängig von  $b_1$ ), kann  $u_3$  von dem Rest ... ( $b_3$  linear unabhängig von  $b_1, b_2$ ) usw. In der zweiten Runde: Kann  $u_1$  ein weiteres Teilsystem übernehmen ( $A b_1$  linear unabhängig von  $b_1, \dots, b_i$ ), kann  $u_2 \dots$  usw. Muß eine Stellgröße einmal passen, so kann sie auch in den nachfolgenden Runden nichts mehr übernehmen. Es besteht also die Tendenz, die Arbeit gleichmäßig zu verteilen, wobei aber Rücksicht auf die Schwachen genommen werden muß. Die Anzahl von Teilsystemen erster Ordnung, die ein Eingang  $u_i$  bei diesem Verfahren nach vollständiger Verteilung übernommen hat, ist sein Kronecker-Index  $n_i$ . Der größte Kronecker-Index  $\mu = n_{\max}$  wird als Steuerbarkeitsindex bezeichnet; er ist die kleinste ganze Zahl  $N$ , so daß Rang  $[B, AB \dots A^{N-1} B] = n$ . Daß sich die  $n_i$  unter einer Zustandsvektor-Rückführung  $K$  nicht ändern, sieht man unmittelbar aus der folgenden Gleichung, die aus  $F = A - BK$  entwickelt wird:

$$\begin{aligned} [B \ AB \dots A^{k-1} B] &= \\ &= [B \ FB \dots F^{k-1} B] \begin{bmatrix} I & KB & KAB & \dots & KA^{k-2} B \\ 0 & I & KB & & \vdots \\ 0 & 0 & I & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & KB \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (51) \end{aligned}$$

Man kann die Steuerbarkeitsmatrix des offenen und geschlossenen Systems in Gl. (51) bei jeder Spalte  $A^{k-1} b_i$  abbrechen, stets hat der zweite Faktor auf der rechten Seite vollen Rang, d. h. wenn eine links als letzte hinzugenommene Spalte den Rang erhöht bzw. nicht erhöht, so geschieht das gleiche in der Steuerbarkeitsmatrix des geschlossenen Kreises.

Man sieht hieran auch gleich, welchen Einfluß eine nicht-singuläre Eingangstransformation  $V$  hat. Den Ausschnitt aus Bild 1, der  $B$ ,  $K$  und  $V$  enthält, kann man gemäß Bild 4 umformen. In Gl. (51) muß jetzt nur  $K$  durch  $K^* = V^{-1}K$  und  $B$  durch  $B^* = BV$  ersetzt werden. Die blockweise Rangbeziehung für  $k = 0, 1, 2, \dots$  bleibt erhalten, bezüglich der einzelnen Spalten  $b_i$  von  $B$  ist jetzt jedoch durch  $V$  die Möglichkeit gegeben, diese Spalten zu vertauschen oder Linearkombinationen davon zu bilden. Dies ändert jedoch nur die Reihenfolge der Kronecker-Indices, nicht aber ihre Größe. Invariant unter  $K$  und  $V$  ist also die ungeordnete Menge der Kronecker-Indices.

Die Kronecker-Indices sind eine Systemeigenschaft, die selbstverständlich nicht von der gewählten Basis im Zu-

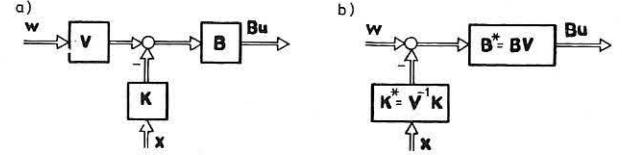


Bild 4. Nichtsinguläre Eingangstransformation  $V$ .

standsraum abhängt. Transformiert man das System über  $\tilde{x} = Tx$ ,  $\det T \neq 0$ , so wird

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u = TA T^{-1}\tilde{x} + TBu, \quad (52) \\ x_a &= \tilde{C}_a \tilde{x} = C_a T^{-1}x. \end{aligned}$$

In der neuen Steuerbarkeitsmatrix

$$[\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \dots] = T[B, AB, \dots] \quad (53)$$

bestehen die gleichen linearen Abhängigkeiten zwischen den Spalten wie in der ursprünglichen Steuerbarkeitsmatrix.

Etwas umfassender noch besagt der *Satz von Brunovski*:

Die ungeordnete Menge der Kronecker-Indices bildet ein vollständiges System von unabhängigen Invarianten des Paares  $(A, B)$  unter den Transformationen

$$\begin{aligned} (A, B) &\rightarrow (TA T^{-1}, TB), \quad \det T \neq 0, \\ (A, B) &\rightarrow (A - BK, B), \\ (A, B) &\rightarrow (A, BV), \quad \det V \neq 0, \end{aligned} \quad (54)$$

die in beliebiger Reihenfolge angewandt werden können.

Daß diese Invarianten unabhängig sind, ergibt sich unmittelbar aus ihrer Berechnung in Gl. (50). Daß sie vollständig sind, zeigt sich darin, daß man allein aus der Kenntnis der  $n_i$  eine kanonische Form angeben kann, in die jedes Paar  $(A, B)$  durch die genannten drei Transformationen gebracht werden kann.

## 9. Kanonische Form und Invariantensatz

Zu jedem Paar  $(A, B)$  existieren Transformationsmatrizen  $T_{AB}$ ,  $K_{AB}$  und  $V_{AB}$  durch die die Systemgleichungen die folgende kanonische Form erhalten:

$$\dot{x} = A_c x + B_c u = T_{AB}(A - BK_{AB})T_{AB}^{-1}x + T_{AB}BV_{AB}u \quad (55)$$

mit

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ n_1 & 0 & 0 & & & & \\ \hline & \vdots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ n_r & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \\ \hline & \vdots & \\ & 0 & 0 \\ & & \vdots & \\ & & & 0 \\ & & & \\ & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Die Form von  $A_c$  kann entweder als Jordan-Form mit allen

Eigenwerten bei Null aufgefaßt werden oder zusammen mit  $\mathbf{B}_c$  als phasenvariable Form zu jedem Eingang, wobei alle Koeffizienten der letzten Zeile zu jedem Block, also der Zeilen  $n_1, n_1 + n_2, \dots, n$ , verschwinden.

Die Berechnung von  $\mathbf{T}_{AB}$ ,  $\mathbf{K}_{AB}$  und  $\mathbf{V}_{AB}$  sei hier nur rezeptartig angegeben:

Aus den in Gl. (50) ausgewählten  $n$  linear unabhängigen Spalten (regulären Spalten) der Steuerbarkeitsmatrix bildet man die reguläre  $(n \times n)$ -Matrix

$$\mathbf{Q}_{AB} = [\mathbf{Q}_1 \ \mathbf{Q}_2 \ \dots \ \mathbf{Q}_r], \quad \mathbf{Q}_i = [\mathbf{b}_i, A\mathbf{b}_i, \dots, A^{n_i-1}\mathbf{b}_i]. \quad (57)$$

Definiert man

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_r \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{AB}^{-1}, \quad (58)$$

so ist der Steuerbarkeitsvektor  $\mathbf{e}'_i$  die letzte Zeile der  $(n_i \times n)$ -Matrix  $\mathbf{R}_i$ . Dann ist

$$\mathbf{T}_{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{T}_r \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_i \\ \mathbf{e}'_i A \\ \vdots \\ \mathbf{e}'_i A^{n_i-1} \end{bmatrix}. \quad (59)$$

Aufgrund von Gl. (50) existieren Koeffizienten  $a_{ijk}$ , mit denen die lineare Abhängigkeit der Vektoren  $A^{n_i}\mathbf{b}_i$  von links davon stehenden regulären Spalten folgendermaßen ausgedrückt wird:

$$[\mathbf{A}^{n_1}\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{A}^{n_r}\mathbf{b}_r] = -[\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_1, \dots, A^{n_1-1}\mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_2, \dots | \dots | \mathbf{b}_r] \times \begin{bmatrix} a_{110} & \dots & a_{r10} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11n_1-1} & \dots & a_{rn_1-1} \\ a_{120} & \dots & a_{r20} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1rn_r-1} & \dots & a_{rrn_r-1} \end{bmatrix}. \quad (60)$$

Unter den Koeffizienten  $a_{ijk}$  sind nun drei Fälle zu unterscheiden:

1. Wegen des Auswahlprinzips in Gl. (50) darf in der linearen Abhängigkeit von  $A^{n_i}\mathbf{b}_i$  kein rechts davon stehender regulärer Vektor vorkommen, das bedeutet

$$a_{ijk} = 0 \quad \text{für } k > n_i - 1, \quad i < j, \\ k > n_i, \quad i > j. \quad (61)$$

2. In dem Ausdruck  $A^{n_i}\mathbf{b}_i$  bezeichnet man die Koeffizienten der in  $\mathbf{A}^{n_i}\mathbf{B}$  links von  $A^{n_i}\mathbf{b}_i$  stehenden regulären Vektoren als  $\beta$ -Parameter, also

$$\beta_{ij} = a_{ijn_i} \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, r \text{ und für jede ganze} \\ \text{Zahl } j \in \{1, \dots, i-1\} \text{ für die } n_j > n_i. \quad (62)$$

3. Alle übrigen Koeffizienten nennt man  $\alpha$ -Parameter

$$\alpha_{ijk} = a_{ijk}. \quad (63)$$

Die Unterscheidung der  $\alpha$ - und  $\beta$ -Parameter ist wichtig im Hinblick auf den *Invariantensatz von Popov*:

a) Die Kronecker-Indices  $n_i$ , die  $\alpha$ -Parameter und die  $\beta$ -Parameter bilden einen vollständigen Satz von unabhängigen Invarianten unter allen Transformationen

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \mathbf{T}\mathbf{B}), \quad \det \mathbf{T} \neq 0.$$

b) Die Kronecker-Indices  $n_i$  und die  $\beta$ -Parameter bilden einen vollständigen Satz von unabhängigen Invarianten unter allen Transformationen

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{T}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{T}^{-1}, \mathbf{T}\mathbf{B}), \quad \det \mathbf{T} \neq 0.$$

Während die  $\alpha$ -Parameter also durch die Wahl der Rückführmatrix  $\mathbf{K}$  beliebig geändert werden können, gilt dies nicht für die  $\beta$ -Parameter. Um sie zu ändern, ist eine Eingangstransformation  $\mathbf{V}$  erforderlich. Sie werden in der kanonischen Form zunächst einmal zu Null gemacht durch eine Eingangstransformation

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}\mathbf{V}_{AB}$$

mit

$$\mathbf{V}_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_{21} & \dots & \beta_{r1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 1 & \beta_{rr-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Die Koeffizienten der Dynamik-Matrix werden dann durch eine Rückführung  $\tilde{\mathbf{K}}$  zu Null gemacht. Dabei ist

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{V}_{AB}^{-1} \mathbf{K}_{AB}, \quad (65)$$

$$\mathbf{K}_{AB} = \begin{bmatrix} \alpha'_{11} & \dots & \alpha'_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{r1} & \dots & \alpha'_{rr} \end{bmatrix}, \quad (66)$$

$\alpha'_{ji}$  ist der  $1 \times n_i$ -Vektor,

$$\alpha'_{ji} = [\alpha_{ij0} \ \dots \ \alpha_{ij\min(n_i, n_j)-1} \ 0 \ \dots \ 0]. \quad (67)$$

## 10. Beispiel

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 6 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}. \quad (68)$$

Es ist  $n_1 = 2, n_2 = 1$  und nach Gl. (57)

$$\mathbf{Q}_{AB} = [\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Aus Gl. (58)

$$\mathbf{Q}_{AB}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

entnimmt man

$$e'_1 = [1 \quad 1 \quad -1], \quad e'_2 = [0 \quad -1 \quad 1],$$

also mit Gl. (59)

$$T_{AB} = \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_1 A \\ e'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Durch eine Transformation  $x^* = T_{AB}x$  erhält das System die Darstellung

$$\dot{x}^* = T_{AB} A T_{AB}^{-1} x^* + T_{AB} B u,$$

$$\dot{x}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix} x^* + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u.$$

Nach Gl. (60) wird

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{110} & a_{210} \\ a_{112} & a_{211} \\ a_{120} & a_{220} \end{bmatrix} &= -\mathbf{Q}_{AB}^{-1} [A^2 b_1, A b_2] = \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 14 & 24 \\ 20 & 31 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 28 & 31 \\ -3 & -5 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Der  $\beta$ -Parameter  $\beta_{21} = a_{211} = -5$  ist durch eine Zustandsvektor-Rückführung nicht zu ändern, d.h. jedes Paar  $(A - BK, B)$  für beliebiges  $K$  hat wieder diesen Parameter  $\beta_{21} = -5$ . Mit ihm wird

$$V_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gebildet.

Nun nimmt man eine Eingangstransformation auf einen normierten Eingang  $\tilde{u} = V_{AB}^{-1}u$  vor, d.h.  $Bu = BV_{AB}\tilde{u} = \tilde{B}\tilde{u}$ .

$$\tilde{B} = B V_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\dot{x}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix} x^* + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{u}.$$

Die gewünschte kanonische Form wird offenbar erreicht durch eine Rückführung

$$\tilde{u} = -\tilde{K}x^* = -\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix} x^*.$$

Sie lautet dann

$$\dot{x}^* = (T_{AB}A T_{AB}^{-1} - T_{AB}B V_{AB}\tilde{K})x^* + BV_{AB}u,$$

$$\dot{x}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^* + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u.$$

Bezüglich der ursprünglichen Stellgrößen  $u$  gilt

$$u = V_{AB} \tilde{u} = -V_{AB} \tilde{K} x^* = -K_{AB} x^* = -\begin{bmatrix} -28 & 3 & -31 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix} x^*.$$

Diese benötigte Rückführmatrix kann auch aus den oben bereits berechneten  $\alpha$ -Parametern gemäß Gl. (66) zusammengesetzt werden. Es ist  $\alpha_{110} = a_{110} = 28$ ,  $\alpha_{111} = a_{111} = -3$ ,  $\alpha_{120} = a_{120} = -6$ ,  $\alpha_{210} = a_{210} = 31$  und  $\alpha_{220} = a_{220} = -7$ , also

$$K_{AB} = \begin{bmatrix} -\alpha_{110} & -\alpha_{111} & -\alpha_{210} \\ -\alpha_{120} & 0 & -\alpha_{220} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 & 3 & -31 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

## 11. Verallgemeinerte Polyorgabe

Die Transformation eines Paars  $(A, B)$  in die kanonische Form (56) vollzog sich in drei Schritten: 1. Wechsel der Basis,  $x^* = T_{AB} x$ , 2. Normierung des Eingangs  $\tilde{u} = V_{AB}^{-1} u$ , 3. Beseitigen der verbleibenden Koeffizienten der Dynamik-Matrix durch  $u = -K_{AB} x^*$ . Damit ist das System bildlich gesprochen auf sein unveränderliches Skelett in Form der durch die Kronecker-Indices  $n_1, \dots, n_r$  gegebenen Struktur reduziert. Durchläuft man die entsprechenden Schritte rückwärts, so wird dem System neues Leben gegeben. Mit  $u = K_{FG} x^*$  kann man offenbar  $r \times n$  neue Koeffizienten des Paars  $(F, G)$  in die kanonische Form einfügen, mit  $\tilde{u} = V_{FG} \tilde{u}$  kann man auch die  $\beta$ -Parameter des Paars  $(F, G)$  festlegen. Schließlich kann man über  $x = T_{AB}^{-1} x^*$  zu der ursprünglichen Basis des Zustandsraums zurückgehen, in der z. B. die Zustandsgrößen  $x$  gemessen werden. Durch diesen Vorgang ist die Klasse aller möglichen Paare  $(F, G) = (A - BK, BV)$  gekennzeichnet. Der Rechengang wäre jedoch auf diesem Wege recht aufwendig. Er wird deshalb im folgenden vereinfacht und zu einem einfachen Rezept zusammengefaßt. Das Ziel ist dabei, nicht die  $(r \times n)$ -Rückführverstärkungen in der Matrix  $K$  als freie Parameter zu benutzen, sondern die durch  $K_{FG}$  in der kanonischen Form eingeführten Koeffizienten, da diese in einem einfachen Zusammenhang mit der charakteristischen Gleichung stehen. Man betrachtet hierzu die allgemeine Form von

$$A_c + B_c K_{FG} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & -\varphi_{110} & \dots & -\varphi_{11n_1-1} & & -\varphi_{1r0} & \dots & -\varphi_{1rn_r-1} \\ \hline 0 & & 0 & & 0 & & 1 & \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & & 0 & & \vdots & & & \\ -\varphi_{r10} & \dots & -\varphi_{r1n_1-1} & & -\varphi_{rr0} & \dots & -\varphi_{rrn_r-1} \end{bmatrix} \quad (69)$$

Ihre charakteristische Gleichung berechnet sich aus

$$\begin{aligned} \det(sI - A_c + B_c K_{FG}) &= \det \left\{ \begin{bmatrix} s^{n_1} & 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & s^{n_r} \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} \varphi_{110} + \varphi_{111}s + \dots + \varphi_{11n_1-1}s^{n_1-1} \\ \vdots \\ \varphi_{r10} + \varphi_{r11}s + \dots + \varphi_{r1n_1-1}s^{n_1-1} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \varphi_{1rn_1-1}s^{n_1-1} \\ \vdots \\ \varphi_{rrn_r-1}s^{n_r-1} \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \det P(s) = \det \begin{bmatrix} P_{11}(s) & \dots & P_{1r}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{r1}(s) & \dots & P_{rr}(s) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (70)$$

Wegen  $A_c + B_c K_{FG} = T_{AB} F T_{AB}^{-1}$  ist sie auch die charakteristische Gleichung von  $F$ .

Die Rückführmatrix  $K$  im ursprünglichen Koordinatensystem zur Bildung von  $F = A - BK$  ist dann

$$K = V_{AB} \begin{bmatrix} e'_1 P_{11}(A) + \dots + e'_r P_{1r}(A) \\ \vdots \\ e'_1 P_{r1}(A) + \dots + e'_r P_r(A) \end{bmatrix}. \quad (71)$$

Darin sind die  $e'_i$  die über Gl. (58) definierten Steuerbarkeitsvektoren und  $V_{AB}$  ist die unter  $K$  invariante Eingangstransformation nach Gl. (64). Die Gl. (71) stellt eine Verallgemeinerung der Gl. (15) auf den Mehrgrößenfall dar.

Nachdem man die  $e'_i$  und  $V_{AB}$  zu einem gegebenen Paar  $(A, B)$  bestimmt hat, wählt man eine  $(r \times r)$ -Polynommatrix  $P(s)$  gemäß Gl. (70). Die Anzahl der Koeffizienten in den Polynomen der  $i$ -ten Spalte ist  $n_i$ , ihre Gesamtzahl also  $r \times n$ . Über Gl. (71) wird dann  $K$  berechnet.

Man kann die Koeffizienten von  $P(s)$  anstelle der Elemente von  $K$  als freie Parameter benutzen. Der Vorteil dabei ist, daß man im ersten Schritt durch Polvorgabe die Zahl der freien Parameter um  $n$  reduziert und nun noch  $(r-1) \times n$  Parameter zur Erfüllung weiterer Forderungen variieren kann. Man wählt z. B. die Koeffizienten der Zeilen 2 bis  $r$  der Polynommatrix  $P(s)$  als freie Parameter und drückt die Koeffizienten der ersten Zeile mit Hilfe dieser freien Parameter und der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms aus. Dabei können singuläre Werte der freien Parameter auftreten, bei denen eine Rückführverstärkung unendlich wird. Diese Werte müssen bei der Wahl der freien Parameter vermieden werden. Das Vorgehen soll an dem folgenden Beispiel illustriert werden.

## 12. Beispiel

Gegeben sei eine Regelstrecke dritter Ordnung mit je zwei Ein- und Ausgangsgrößen

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 6 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} u = Ax + Bu, \quad (72)$$

$$x_a = C_a x,$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & b_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} & Ab_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} & Ab_2 &= \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ 31 \end{bmatrix} & A^2 b_1 &= \begin{bmatrix} 9 \\ 14 \\ 20 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Es ist  $\det [b_1, b_2, Ab_1] \neq 0$ ; die Kronecker-Indices sind also  $n_1 = 2$  und  $n_2 = 1$ . Die Vektoren  $Ab_2$  und  $A^2 b_1$  können als Linearkombinationen von  $b_1$ ,  $b_2$  und  $Ab_1$  ausgedrückt werden. Für die Bildung von  $V_{AB}$  interessiert hier nur der Koeffizient  $\beta_{21}$  in

$$Ab_2 = -\beta_{21} Ab_1 + c_1 b_1 + c_2 b_2$$

Er ergibt sich zu  $\beta_{21} = -5$ , also ist

$$V_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Steuerbarkeitsvektoren  $e'_1$  und  $e'_2$  erhält man aus

$$[b_1 \quad Ab_1 \quad b_2]^{-1} = \begin{bmatrix} \dots \\ e'_1 \\ e'_2 \end{bmatrix},$$

hier zu

$$e'_1 = [1 \quad 1 \quad -1],$$

$$e'_2 = [0 \quad -1 \quad 1].$$

Die charakteristische Polynommatrix für ein System mit den Kronecker-Indices  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 1$  hat die Gestalt

$$P(s) = \begin{bmatrix} s^2 + \varphi_{111}s + \varphi_{110} & \varphi_{120} \\ \varphi_{211}s + \varphi_{210} & s + \varphi_{220} \end{bmatrix}. \quad (73)$$

Damit ist das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} P(s) &= \det P(s) = s^3 + \varphi_2 s^2 + \varphi_1 s + \varphi_0 = \\ &= s^3 + (\varphi_{111} + \varphi_{220})s^2 + (\varphi_{111}\varphi_{220} + \varphi_{110} - \varphi_{120}\varphi_{211})s + \\ &\quad + (\varphi_{110}\varphi_{220} - \varphi_{120}\varphi_{210}) \end{aligned} \quad (74)$$

Die drei Koeffizienten der ersten Zeile von  $P(s)$  werden zur Polfestlegung benutzt, wobei die drei Koeffizienten der zweiten Zeile als freie Parameter verbleiben; der Übersichtlichkeit halber nennt man sie  $\gamma = -\varphi_{210}$ ,  $\delta = -\varphi_{211}$  und  $\varepsilon = -\varphi_{220}$ . Aus Gl. (74) folgt dann

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_{111} - \varepsilon, \\ \varphi_1 &= -\varphi_{111} \cdot \varepsilon + \alpha_{110} + \alpha_{120} \cdot \delta, \\ \varphi_0 &= -\varphi_{110} \cdot \varepsilon + \alpha_{120} \cdot \gamma; \end{aligned}$$

aufgelöst ist

$$\begin{aligned} \varphi_{111} &= \varphi_2 + \varepsilon, \\ \varphi_{120} &= P(\varepsilon)/(\gamma + \delta\varepsilon), \\ \varphi_{110} &= \varphi_1 + \varphi_2\varepsilon + \varepsilon^2 - P(\varepsilon) \cdot \delta/(\gamma + \delta\varepsilon) \end{aligned} \quad (75)$$

mit  $P(\varepsilon) = \varphi_0 + \varphi_1\varepsilon + \varphi_2\varepsilon^2 + \varepsilon^3$ . Singuläre Werte, die vermieden werden müssen, ergeben sich für  $\gamma + \delta\varepsilon = 0$ .

Über Gl. (71) erhält man die Rückführmatrix

$$\begin{aligned} K &= V_{AB} \begin{bmatrix} \varphi_{110}e'_1 + \varphi_{111}e'_1A + e'_1A^2 + \varphi_{120}e'_2 \\ -\gamma e'_1 - \delta e'_1A - \varepsilon e'_2 + e'_2A \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (\varphi_{110} + 5\gamma)e'_1 + (\varphi_{111} + 5\delta)e'_1A + e'_1A^2 + (\varphi_{120} + 5\varepsilon)e'_2 - 5e'_2A \\ -\gamma e'_1 - \delta e'_1A - \varepsilon e'_2 + e'_2A \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die darin auftretenden Vektoren sind

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= [1 \quad 1 \quad -1], & \mathbf{e}'_2 &= [0 \quad -1 \quad 1], \\ \mathbf{e}'_1 \mathbf{A} &= [-1 \quad 0 \quad 1], & \mathbf{e}'_2 \mathbf{A} &= [6 \quad -1 \quad 1], \\ \mathbf{e}'_1 \mathbf{A}^2 &= [-1 \quad -2 \quad 5]. \end{aligned}$$

Die Elemente der Matrix

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix} \quad (76)$$

werden damit

$$\begin{aligned} k_{11} &= (\varphi_{110} + 5\gamma) - (\varphi_{111} + 5\delta) - 31, \\ k_{12} &= (\varphi_{110} + 5\gamma) - (\varphi_{120} + 5\varepsilon) + 3, \\ k_{13} &= -(\varphi_{110} + 5\gamma) + (\varphi_{111} + 5\delta) + (\varphi_{120} + 5\varepsilon), \\ k_{21} &= -\gamma + \delta + 6, \\ k_{22} &= -\gamma + \varepsilon - 1, \\ k_{23} &= \gamma - \delta - \varepsilon + 1 \end{aligned}$$

und mit Gl. (75)

$$\begin{aligned} k_{11} &= (\varphi_1 - \varphi_2 - 31) + (\varphi_2 - 1)\varepsilon + \varepsilon^2 + 5(\gamma - \delta) - \\ &\quad - P(\varepsilon)\delta/(\gamma + \delta\varepsilon), \\ k_{12} &= (\varphi_1 + 3) + (\varphi_2 - 5)\varepsilon + \varepsilon^2 + 5\gamma - P(\varepsilon)(1 + \delta)/(\gamma + \delta\varepsilon), \\ k_{13} &= (\varphi_2 - \varphi_1) + (6 - \varphi_2)\varepsilon - \varepsilon^2 + 5(\delta - \gamma) + \\ &\quad + P(\varepsilon)(1 + \delta)/(\gamma + \delta\varepsilon), \\ k_{21} &= 6 + \delta - \gamma, \\ k_{22} &= -1 + \varepsilon - \gamma, \\ k_{23} &= 1 + \gamma - \delta - \varepsilon. \end{aligned} \quad (77)$$

Dies ist die allgemeine Lösung des Polfestlegungsproblems für das Beispiel. Durch Vorgabe der Pole wird  $\varphi_0, \varphi_1$  und  $\varphi_2$  festgelegt. Es verbleiben drei weitere freie Parameter  $\gamma, \delta$  und  $\varepsilon$ , die so gewählt werden können, daß zusätzliche Forderungen außer der Pollage erfüllt werden.

Gibt man z. B. Pole bei  $s_1 = -1, s_2 = -2$  und  $s_3 = -3$  vor, so wird  $P(s) = (s+1)(s+2)(s+3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$ , d. h.  $\varphi_0 = 6, \varphi_1 = 11, \varphi_2 = 6$ . Aus Gl. (77) wird

$$\begin{aligned} k_{11} &= -26 + 5\varepsilon + \varepsilon^2 - 5(\delta - \gamma) - \frac{\delta}{\gamma + \delta\varepsilon} \\ &\quad (6 + 11\varepsilon + 6\varepsilon^2 + \varepsilon^3), \\ k_{12} &= 14 + \varepsilon + \varepsilon^2 + 5\gamma - \frac{\delta + 1}{\gamma + \delta\varepsilon} (6 + 11\varepsilon + 6\varepsilon^2 + \varepsilon^3), \\ k_{13} &= -5 - \varepsilon^2 - 5\gamma + 5\delta + \frac{\delta + 1}{\gamma + \delta\varepsilon} (6 + 11\varepsilon + 6\varepsilon^2 + \varepsilon^3), \\ k_{21} &= 6 + \delta - \gamma, \\ k_{22} &= -1 + \varepsilon - \gamma, \\ k_{23} &= 1 + \gamma - \delta - \varepsilon. \end{aligned} \quad (78)$$

Nimmt man nun zum Beispiel an, daß die Zustandsgröße  $x_2$  nur sehr ungenau gemessen oder rekonstruiert werden kann, so daß man auf ihre Rückführung ganz verzichten möchte. Man stellt das nichtlineare Gleichungssystem  $k_{12} = k_{22} = 0$  auf und prüft, ob es reelle Werte für  $\gamma, \delta$  und  $\varepsilon$  gibt, die die Gleichung erfüllen. Im Beispiel ist das der Fall für  $\varepsilon = -3$ ,

$\gamma = -4$  und  $\delta$  beliebig mit der einzigen Einschränkung  $\delta \neq -4/3$ . Man erhält

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -52 - 5\delta & 0 & 6 + 5\delta \\ 10 + \delta & 0 & -\delta \end{bmatrix} = \quad (79)$$

Es verbleibt also immer noch ein freier Parameter  $\delta$ , der z. B. so gewählt werden kann, daß der maximale Betrag der  $k_{ij}$  möglichst klein wird. Dies ist der Fall für  $\delta = -5,8$  und führt auf

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -23 & 0 & -23 \\ 4,2 & 0 & 5,8 \end{bmatrix}. \quad (80)$$

Die Gleichung des Regelungssystems Gl. (72) mit der Rückführung über Gl. (80) wird

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{V}\mathbf{w} = \\ &= \begin{bmatrix} 0,8 & -1 & -3,8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1,8 & -3 & -4,8 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{V}\mathbf{w}, \\ \mathbf{x}_a &= \mathbf{C}_a \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Die Matrix  $\mathbf{V}$  erhält man über Gl. (5).

Dieses Beispiel illustriert, wie man die bei der Polfestlegung bei Mehrgrößensystemen verbleibenden freien Parameter benutzen kann, um weitere Forderungen an das System zu erfüllen. Es soll zeigen, daß man die vielzitierte „Qual der Wahl“ auch als Chance der Wahl ausnutzen kann.

### 13. Anmerkungen zur Literatur und Historie

Die Steuerbarkeitsbedingungen (7) und (8) wurden in der zweiten Hälfte der 50er Jahre von Pontryagin, La Salle und anderen als hinreichende Bedingung für die Existenz einer zeitoptimalen Steuerung eingeführt. Daß sie auch notwendige Bedingungen für die Steuerbarkeit sind, wurde durch Kalman erkannt:

[1] Kalman, R.E.: On the general theory of control systems. IFAC-Kongreß, Moskau 1960.

Bald darauf stellte Bass fest, daß man einem linearen System genau dann durch Zustandsrückführung beliebige Eigenwerte geben kann, wenn es steuerbar ist. Er hat dies zunächst in einem vervielfältigten Manuskrift eines Vortrages im NASA Langley Research Center im August 1961 dargestellt. Veröffentlichung erfolgte als:

[2] Bass, R.W.; Mendelson, P.: Aspects of general control theory. Final Report AFOSR 2754, 1962.

Dieser Zusammenhang (Steuerbarkeit = „Polfestlegbarkeit“) ist seither oft wiederentdeckt worden. Der Separationssatz, der etwa besagt, daß sich Zustandsvektorrückführung und Zustandsschätzung nicht gegenseitig beeinflussen, wurde (für den Fall der Zustandsschätzung durch ein Wiener-Filter) zuerst von Joseph in seiner Dissertation bewiesen; veröffentlicht ist er unter

[3] Joseph, P.D.; Tou, J.T.: On linear control theory. Trans. AIEE 80 II (1961) S. 193–195.

Die Polfestlegung für Eingrößensysteme durch Transformation in die Regelungsnormalform (phasenvariable Form)

wurde von *Kalman* veröffentlicht:

- [4] *Kalman, R.E.*: Liapunov functions for the problem of Lure in Automatic Control. Proc. Nat'l Acad. of Sci. (USA) 40 (1963) S. 201–205.

Eine Polfestlegung für Mehrgrößensysteme wurde zuerst von *Langenhop* über die Transformation der Systemgleichungen in einen kanonische Form ausgeführt:

- [5] *Langenhop, C.E.*: On the stabilization of linear systems. Proc. American Math. Soc. 15 (1964) S. 735–742.

Gleichzeitig und unabhängig davon kam auch *Popov* zu dem gleichen Resultat:

- [6] *Popov, V.M.*: Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions. Rev. Roum. Sci. Techn., Ser. Electrotechn. Energ., 9 (1964) S. 629–690.

In dieser Arbeit wird auch der Ansatz nach Gl. (44) gemacht, der das Mehrgrößenproblem auf das Eingrößenproblem zurückführt.

Eine Polfestlegung für Eingrößensysteme ohne Transformation in die Regelungsnormalform wurde erstmals von *Bass* und *Gura* angegeben:

- [7] *Bass, R.W.; Gura, I.*: High order system design via state-space considerations. Joint Automatic Control Conference, 1965, Preprints, S. 311–318.

Das Problem der Zustandsrekonstruktion wurde von *Luenberger* behandelt:

- [8] *Luenberger, D.G.*: Observing the state of a linear system. IEEE Trans. on Military Electronics 8 (1964) S. 74–80.

- [9] *Luenberger, D.G.*: Observers for multivariable systems. IEEE Trans. Aut. Control 2 (1966) S. 190–197.

*Luenberger* bescherte uns auch eine Vielzahl von kanonischen Formen und die zum Teil trickreiche Bestimmung der Transformationsmatrizen:

- [10] *Luenberger, D.G.*: Canonical forms for multivariable systems. IEEE Trans. Aut. Control 3 (1967) S. 290–293.

Zusammen mit *Anderson* benutzte er eine davon zur Polfestlegung:

- [11] *Anderson, B.D.O.; Luenberger, D.G.*: Design of multivariable feedback systems. Proc. IEEE 114 (1967), S. 395–399.

Bei einer der in [10] enthaltenen Formen tritt in der Bestimmung der Transformationsmatrix (siehe Gl. (59)) erstmals die Berechnung der Steuerbarkeitsvektoren  $e'_i$  nach Gl. (58) auf. Die Ordnungen der Teilsysteme sind bei dieser speziellen Form gleich den Kronecker-Indices  $n_i$ .

In den Arbeiten [5], [6] und [11] wurden zur Polfestlegung kanonische Formen benutzt, die so aufgebaut sind, daß zuerst die Pole des von der ersten Eingangsgröße aus steuerbaren Teilsystems festgelegt werden. Die zweite Eingangsgröße übernimmt dann soviel von dem Rest, wie von ihr aus steuerbar ist usw. Auf diese Weise erhält die Dynamikmatrix blockweise Dreiecksgestalt mit Kopplungstermen in nur einer Richtung, in der das charakteristische Polynom leicht zu bestimmen ist. Dies schränkt jedoch die Möglichkeit zur Vorgabe konjugiert komplexer Pole ein (z.B. zwei Teilsysteme erster Ordnung können nur je einen reellen Pol haben). Diese Schwierigkeit wurde von *Wonham* durch Verwendung einer zweiten Rückführung ausgeräumt:

- [12] *Wonham, W.M.*: On pole assignment in multi-input controllable systems. IEEE Trans. Aut. Control 6 (1967) S. 660–665.

Er behandelte hier auch die Stabilisierbarkeit, die bedeutet,

dass zumindest die instabilen Eigenschwingungsformen von  $A$  steuerbar sein müssen.

Die bereits erwähnte Luenberger-Form mit bestmöglicher Gleichverteilung auf die Stellgrößen, d.h. Teilsystemordnungen gleich den Kronecker-Indices  $n_i$  und Kopplungstermen in beiden Richtungen, wurde zu einer speziellen Polfestlegung benutzt in

- [13] *Ackermann, J.*: Zeitoptimale Mehrfach-Abtastregelsysteme. Vorabdrucke zum IFAC-Symposium Mehrgrößen-Regelsysteme, Düsseldorf 1968.

Hier wurden erstmals die Matrizen  $T_{AB}$ ,  $K_{AB}$  und  $V_{AB}$  angegeben, die ein System in die Form nach Gl. (56) transformieren. Diese Form hat ein Minimalpolynom  $\lambda^\mu$ , wobei  $\mu = n_{i \max}$ . Damit wird  $(A - BK)^\mu = 0$ , d.h. angewendet auf ein diskretes System, dass der Einschwingvorgang nach  $\mu$  Abtastschritten beendet ist. In [13] ist auch gezeigt, dass die zur Herleitung des Ergebnisses benutzte kanonische Form nicht tatsächlich ausgerechnet werden muss, so dass der Rechenaufwand wesentlich reduziert werden kann.

War durch die Vielfalt der Luenberger-Formen der Eindruck entstanden, dass jede mögliche Aufteilung der Teilsysteme auf die Eingänge gleichberechtigt ist, so wurde durch eine Arbeit von *Brunovsky* die ausgezeichnete Rolle der Form nach Gl. (56) klar. Er bewies, dass die Kronecker-Indices  $n_i$  Invarianten unter den  $K$ ,  $V$  und  $T$ -Transformationen sind, d.h. ein Paar  $(A, B)$  kann nicht auf eine Form (56) mit anderen  $n_i$  als seinen Kronecker-Indices durch  $K$ ,  $V$  und  $T$  transformiert werden:

- [14] *Brunovsky, P.*: A classification of linear controllable systems. Kybernetika, Cislo 1970, S. 173–188.

Zu diesem Thema sei auch auf die folgende Arbeit hingewiesen:

- [15] *Kalman, R.E.*: Kronecker invariants and feedback. Proc. Conf. Ord. Diff. Eq., Naval Research Laboratory, Washington D.C. 1971.

Die besonders einfache Berechnung des Rückführvektors  $k' = e'(A)$  nach Gl. (15) wurde vom Autor seit 1970 in Carl-Cranz-Lehrgängen dargestellt; Veröffentlichung:

- [16] *Ackermann, J.*: Der Entwurf linearer Regelungssysteme im Zustandsraum. Regelungstechnik 20 (1972) S. 297–300.

Die Möglichkeiten der Festlegung des charakteristischen Polynoms und des Minimalpolynoms für Mehrgrößen-systeme, die sich aus der Gl. (56) ergeben, sind ausführlicher dargestellt bei:

- [17] *Ackermann, J.*: Abtastregelung. Springer-Verlag, Berlin 1972.

$\alpha$ - und  $\beta$ -Parameter als Invarianten unter den Transformationen  $(A, B) \rightarrow (TAT^{-1}, TB)$  und  $(A, B) \rightarrow (T(A - BK)T^{-1}, TB)$  wurden von *Popov* gefunden:

- [18] *Popov, V.M.*: Invariant description of linear time-invariant controllable systems. SIAM J. Control 10 (1972) S. 252–264.

Sie können benutzt werden, um ein Paar  $(F, G) = (A - BK, BV)$  zu spezifizieren und die Matrizen  $K$  und  $V$  zu berechnen:

- [19] *Ackermann, J.*: On the synthesis of linear control systems with specified characteristics. IFAC-Kongress Boston 1975; Automatica Jan. 1977, S. 89–94.

Darin werden auch die Matrizen  $V_{AB}$  und  $K_{AB}$  nach Gl. (64) und (66) eingeführt. Die Gln. (70) und (71) für die verallgemeinerte Polfestlegung werden hier erstmals vorgestellt.