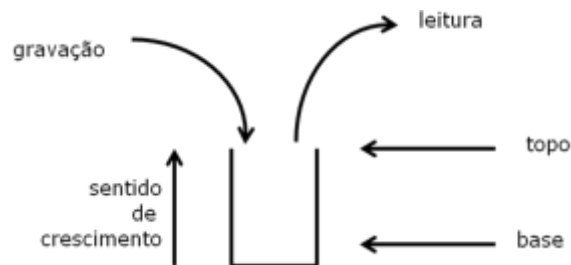


Aula 14 – Autômato com Pilha

Analogamente as Linguagens Regulares, a Classe das Linguagens Livres do Contexto pode ser associada a um formalismo do tipo autômato, denominado *Autômato com Pilha*.

O Autômato com Pilha é análogo ao Autômato Finito, acrescido de uma pilha que representa a memória auxiliar e a facilidade do não-determinismo. A pilha é independente da fita de entrada e não possui limite máximo de tamanho, o que implica uma noção de “tão grande quanto se queira” (infinito contável). Portanto, é baseada na noção de conjunto *infinitamente contável*.

A sua principal característica é que o último símbolo gravado é o primeiro a ser lido. A base de uma Pilha é fixa e define o seu início. O *topo* é variável e define a posição do último símbolo gravado. Observe a figura abaixo:



A facilidade de não-determinismo é importante e necessária, pois aumenta o poder computacional dos Autômatos com Pilha, permitindo reconhecer exatamente a Classe das Linguagens Livres do Contexto.

Definição Formal de Autômato com Pilha

O modelo Autômato com Pilha possui duas definições universalmente aceitas que diferem no critério de parada do autômato, como segue:

- O valor inicial da pilha é vazio e o autômato para aceitando ao atingir um estado final;
- A pilha contém, inicialmente, um símbolo especial denominado símbolo inicial da pilha. Não existem estados finais, e o autômato para aceitando quando a pilha estiver vazia.

As duas definições são equivalentes (possuem o mesmo poder computacional), sendo fácil modificar um autômato com pilha para satisfazer a outra definição. Adotaremos a definição que usa estados finais, por ser a mais utilizada.

Partes do Autômato com Pilha

Um Autômato com Pilha Não-Determinístico ou Autômato com Pilha é composto basicamente, por quatro partes:

- **Fita:** análoga à do autômato finito;
- **Pilha:** memória auxiliar do tipo pilha que pode ser usada para leitura e gravação (mesma fundamentação da estrutura Pilha);

- **Unidade de Controle:** reflete o estado corrente da máquina. Possui uma cabeça de fita e uma cabeça de pilha;

- **Programa, Função Programa ou Função de Transição:** comanda a leitura da fita, leitura e gravação da pilha e define o estado da máquina.

A Pilha é dividida em células, armazenando, cada uma, um símbolo do alfabeto auxiliar (pode ser igual ao alfabeto de entrada ou não). A leitura e gravação são sempre no topo. Não possui tamanho fixo, nem máximo, sendo seu tamanho corrente igual ao tamanho da palavra armazenada. Seu valor inicial é vazio (contém a palavra vazia).

A unidade de controle possui um número *finito e predefinido* de estados. Possui uma cabeça de fita e uma cabeça de pilha, como segue:

- *Cabeça da Fita:* Unidade de leitura que acessa uma célula da fita de cada vez e se movimenta exclusivamente para a direita (inicia sempre pela esquerda). É possível testar se a entrada foi completamente lida;

- *Cabeça da Pilha:* Unidade de leitura e gravação a qual se move para a esquerda (ou “para cima”) ao gravar, e para a direita (ou “para baixo”) ao ler um símbolo. Acesa um símbolo que cada vez, estando sempre posicionada no topo. A leitura exclui o símbolo lido. É possível testar se a pilha está vazia. Em uma mesma gravação, é possível armazenar uma palavra composta por mais de um símbolo. Neste caso, o símbolo do topo é o mais à esquerda da palavra gerada.

Observe que, embora a unidade de controle possua um número finito e predefinido de estados, tal unidade não é dita de controle finito (em oposição aos autômatos finitos), pois o conteúdo da pilha também caracteriza o estado geral do sistema.

O programa é uma Função Parcial tal que:

*dependendo do estado corrente, símbolo lido da fita e símbolo lido da pilha,
determina o novo estado e a palavra a ser gravada (na pilha)*

possui a facilidade de movimento vazio (análoga à do autômato finito), permitindo mudar de estado sem ler da fita.

Definição: Autômato com Pilha

Um Autômato com Pilha Não-Determinístico ou simplesmente chamado de Autômato com Pilha (AP) M é uma 6-upla:

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F, V)$, na qual:

Q é um conjunto de estados possíveis do autômato o qual é finito;

Σ é um alfabeto de símbolos de entrada ou simplesmente alfabeto de entrada;

δ é uma função programa ou simplesmente programa ou ainda, função de transição;

q_0 é um elemento distinguido de Q , denominado estado inicial;

F é um subconjunto de Q , denominado conjunto de estados finais;

V é um alfabeto auxiliar ou alfabeto da pilha.

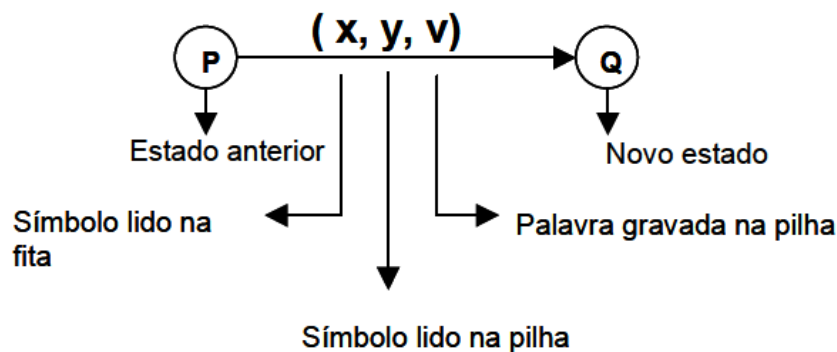
As seguintes características da Função programa devem ser consideradas:

- Trata-se de uma função parcial e, portanto, pode ser indefinida para alguns argumentos do conjunto de partida;
- A omissão do parâmetro de leitura, representada por "?", indica o teste da pilha vazia ou toda palavra de entrada lida;
- O símbolo ϵ na leitura indica a facilidade de *movimento vazio* da fita ou da pilha (o autômato não lê, nem move a cabeça). Note-se que, para o movimento ser considerado não-determinístico, é suficiente que o movimento seja vazio na fita;
- O símbolo ϵ na gravação indica que nenhuma gravação é realizada na pilha (e não move a cabeça).

Por exemplo: $\delta(p, ?, \epsilon) = \{(q, \epsilon)\}$ indica que, no estado p , se a entrada foi completamente lida, não lê da pilha, assume o estado q e não grava na pilha.

A Função Programa de um Autômato com Pilha pode ser representada na forma de um diagrama, observe a figura abaixo:

Suponha a transição $\delta(P, x, y) = \{(Q, v)\}$



A computação de um autômato com pilha, para uma palavra de entrada w , consiste na sucessiva aplicação da função programa para cada símbolo de w (da esquerda para a direita) até ocorrer uma condição de parada.

Entretanto, é possível que um autômato com pilha nunca atinja uma condição de parada. Neste caso, fica processando indefinidamente (ciclo ou *loop* infinito). Um exemplo simples de ciclo infinito é um programa que empilha e desempilha um mesmo símbolo indefinidamente, sem ler a fita.

Um autômato com pilha pode parar, aceitando ou rejeitando a entrada, ou ficar em *loop* infinito, como segue:

- a) **Aceita a entrada w .** Pelo menos um dos caminhos alternativos atinge um estado final (não importa se leu ou não toda a entrada): o autômato para, e a palavra w é aceita;
- b) **Rejeita a entrada w .** Todos os caminhos alternativos rejeitam a entrada (a função programa é definida para cada caso): o autômato para, e a palavra w é rejeitada;

- c) **Fica em loop para a entrada w.** Pelo menos um caminho alternativo está em *loop* infinito e os demais rejeitam ou também estão em *loop* infinito: o autômato está em *loop* infinito.

Para definir formalmente o comportamento de um autômato com pilha, é necessário estender a definição da função programa, usando-se como argumento um estado e uma palavra.

Linguagem Aceita, Linguagem Rejeitada, Linguagem Loop

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F, V)$ um Autômato com Pilha. Então:

- a) A Linguagem Aceita ou Linguagem Reconhecida por M , denotada por:

ACEITA(M) ou $L(M)$

É o conjunto de todas as palavras pertencentes a Σ^* aceitas por M , a partir de q_0 .

- b) A Linguagem Rejeitada por M , denotada por:

REJEITA(M)

É o conjunto de todas as palavras pertencentes a Σ^* rejeitadas por M , a partir de q_0 .

- c) A Linguagem Loop de M , denotada por:

LOOP(M)

É o conjunto de todas as palavras pertencentes a Σ^* para as quais M fica processando indefinidamente a partir do estado inicial q_0 .

Exemplo1: Autômato com Pilha: Duplo Balanceamento

Considere a Gramática Livre do Contexto: Duplo Balanceamento

$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$

$P = \{ \langle S \rangle ::= a \langle S \rangle b \mid \varepsilon \}$

O seguinte Autômato com Pilha:

$M = (\{q_0, q_1, q_f\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_f\}, \{B\})$

no qual δ é como abaixo, é tal que $ACEITA(M) = L(M)$:

$w = aabb$

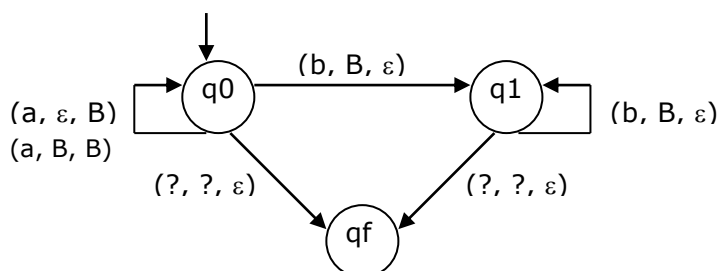
$\delta(q_0, a, \varepsilon) = \{(q_0, B)\}$

$\delta(q_0, a, B) = \{(q_0, B)\}$

$\delta(q_0, b, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$\delta(q_1, b, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$\delta(q_1, ?, ?) = \{(q_f, \varepsilon)\}$



B ε
B ε
ε

Observe que o autômato é determinístico, pois nenhuma opção é igual. No estado q_0 , para cada símbolo lido na fita, é armazenado um símbolo B na pilha. No estado q_1 , é realizada uma verificação

para cada símbolo b da fita, existe um correspondente B na pilha. O algoritmo somente aceita se, ao terminar de ler toda a palavra de entrada, a pilha estiver vazia.

Exemplo 2: Autômato com Pilha: Palavra e sua Reversa

Considere a seguinte linguagem sobre o alfabeto $\{a, b\}$:

$$L = \{ww^r \mid w \text{ pertence a } \{a, b\}^*\}$$

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P = \{ \langle S \rangle ::= a \langle S \rangle a \mid b \langle S \rangle b \mid \epsilon \}$$

$$M = ()$$

Exercício 1: Autômato com Pilha: $a^n b^m a^{n+m}$

Considere a seguinte Linguagem sobre o alfabeto $\{a, b\}$:

$$L = \{a^n b^m a^{n+m} \mid n \geq 0, m \geq 0\}$$

$$M = ()$$

Autômato com Pilha e Linguagem Livre do Contexto

A classe das Linguagens reconhecidas pelos autômatos com pilha é igual à Classe das Linguagens Livres do Contexto (ou seja, é igual à classe das linguagens geradas pelas gramáticas livres do contexto).

Gramática Livre do Contexto \rightarrow Autômato com Pilha

Se L é uma Linguagem Livre do Contexto, então existe M (Máquina), autômato com pilha tal que $ACEITA(M) = L(M)$.

Exercício 2: Gramática Livre do Contexto \rightarrow Autômato com Pilha

Considere a seguinte linguagem de duplo balanceamento:

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

Representada pela seguinte Gramática:

$$G = (\{S, B\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P = \{ \langle S \rangle ::= a \langle B \rangle \mid a \langle S \rangle \langle B \rangle$$

$$\langle B \rangle ::= b \}$$

É aceita pelo seguinte autômato com pilha abaixo, construído a partir de G :

$$M = ()$$