Exercício de Simulação 2

Nome: Rodrigo Neves Rios
Matrícula: 16/0144094

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

a) Segurador de ordem zero em série

$$G_{ho}G(z) = (1-z^{-1})\, Z\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(s+2)(s+3)}\right\} = (1-z^{-1})\cdot Z\left\{\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+3}\right\}$$

$$A = s\,G(s)\big|_{s=0} = \frac{1}{6}$$

$$B = (s+2)\,G(s)\big|_{s=-2} = -\frac{1}{2}$$

$$C = (s+3)\,G(s)\big|_{s=-3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow G_{ho}G(z) = \frac{1}{6}(1-z^{-1})\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{3}{1-z^{-1}e^{-2T}} + \frac{2}{1-z^{-1}e^{-3T}}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{(1+2e^{-3T}-3e^{-2T})z^{-1} + (e^{-5T}-3e^{-3T}+2e^{-2T})z^{-2}}{(1-z^{-1}e^{-2T})(1-z^{-1}e^{-3T})}$$

b) Regra retangular para frente

Neste caso: $s \leftarrow \frac{z-1}{T}$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{1}{\left(\frac{z-1}{T}+2\right)\left(\frac{z-1}{T}+3\right)}$$

Reescrevendo:

$$G(z) = \frac{T^2}{(z-1+2T)(z-1+3T)}$$

c) Regra retangular para ~~frente~~ trás.

Neste caso: $s \leftarrow \frac{z-1}{Tz}$

$$G(z) = \frac{1}{\left(\frac{z-1}{Tz}+2\right)\left(\frac{z-1}{Tz}+3\right)} = \frac{T^2 z^2}{(z-1+2Tz)(z-1+3Tz)}$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{T^2}{(1+2T)(1+3T)} \cdot \frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{1+2T}\right)\left(z-\frac{1}{1+3T}\right)}$$

d) Regra trapezoidal

Neste caso: $s \leftarrow \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$

$$G(z) = \frac{1}{\left(\frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1}+2\right)\left(\frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1}+3\right)} = \frac{T^2(z+1)^2}{(2(z-1)+2T(z+1))(2(z-1)+3T(z+1))}$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{T^2}{(2T+2)(3T+2)} \cdot \frac{(z+1)^2}{\left(z+\frac{2T-2}{2T+2}\right)\left(z+\frac{3T-2}{3T+2}\right)}$$

e) Mapeamento exato de polos e zeros

polos: $s=-2$ e $s=-3$. Então: $z=e^{-2T}$ e $z=e^{-3T}$

zeros: $s_1 = s_2 = \infty$. Então $z_1 = z_2 = -1$

ganho: $|G(s)|\Big|_{s=0} = 1/6$

$$\Rightarrow K \cdot \frac{(z+1)^2}{(z-e^{-2T})(z-e^{-3T})}\Bigg|_{z=1} = 1/6 \quad \Rightarrow K \cdot \frac{2^2}{(1-e^{-2T})(1-e^{-3T})} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow K = \frac{(1-e^{-2T})(1-e^{-3T})}{24}$$

Assim: $G(z) = K \cdot \frac{(z+1)^2}{(z-e^{-3T})(z-e^{-3T})}$, com K dado acima

Agora calcularemos a solução para cada caso, considerando $u(t)=0$ e $T=0{,}1$ s nas discretizações. Além disso, consideramos as condições iniciais $y(0)=100$ e $\dot{y}(0) = 0$

No sistema a tempo contínuo: $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$

Isso nos dá a equação diferencial $\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = ~~0~~ = U(t)$. Aplicando $\mathcal{L}$ e considerando as condições iniciais:

$Y(s)(s^2+5s+6) - 100s - 500 = U(s)$. Como $u(t)=0$, escreveremos:

$$Y(S) = 100 \cdot \frac{S+5}{(S+2)(S+3)} = 100\left(\frac{3}{S+2} - \frac{2}{S+3}\right)$$

Logo $y(t) = 100\,(3e^{-2t} - 2e^{-3t})$

Agora calcularemos $y(K)$ para cada discretização

a) Segurador de ordem zero

$$G(z) = \frac{1}{6} \cdot \frac{0{,}02544\,z + 0{,}02154}{z^2 - 1{,}5595\,z + 0{,}6065}$$

Em termos de equação de diferenças:

$$y(K+2) - 1{,}5595\,y(K+1) + 0{,}6065\,y(K) = \frac{1}{6}\,(0{,}02544\,U(K+1) + 0{,}02154\,U(K))$$

No entanto, $y(0) = 100$, $y(0{,}1) = y(T) = 97{,}46$ e $U(K) = 0$

Daí: $Y(z)(z^2 - 1{,}5595\,z + 0{,}6065) - z^2 y(0) - z \cdot y(0{,}1) + 1{,}5595\,z\,y(0) = 0$

Logo: $$Y(z) = \frac{100\,z^2 - 58{,}4944}{z^2 - 1{,}5595\,z + 0{,}6065}$$

$$\therefore\; y(K) = 300{,}66 \cdot (0{,}82)^K - 200{,}66 \cdot (0{,}74)^K$$

b) Regra retangular para frente:

$$G(z) = \frac{T^2}{(z-1-2T)(z-1+3T)} \xRightarrow{T=0{,}1} G(z) = \frac{0{,}01}{z^2 - 1{,}5z + 0{,}56}$$

Assim: $y(K+2) - 1{,}5\,y(K+1) + 0{,}56\,y(K) = 0{,}01\,U(K)$

$\Rightarrow Y(z)(z^2 - 1{,}5\,z + 0{,}56) - z^2 y(0) - z\,y(0{,}1) + 1{,}5\,z\,y(0) = 0$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{100z^2 - 52,5444z}{z^2 - 1,5z + 0,56}$$

Aplicando Z^{-1}:

$$y(k) = 274,56 \cdot (0,8)^k - 174,56 \cdot (0,7)^k$$

c) Regra retangular para trás:

$$G(z) = 0,0064 \cdot \frac{z^2}{z^2 - 1,6025z + 0,6410}$$

Assim: $y(k+2) - 1,6025\,y(k+1) + 0,6410\,y(k) = 0,0064\,u(k+2)$

$$\Rightarrow Y(z)(z^2 - 1,6025z + 0,6410) - z^2 y(0) - z\,y(0,1) + 1,6025\,y(0) = 0$$

logo: $Y(z) = \frac{100z^2 - 62,7944z}{z^2 - 1,6025z + 0,6410}$

Aplicando Z^{-1}:

$$y(k) = 323,81 \cdot (0,83)^k - 223,81(0,77)^k$$

d) Regra trapezoidal

$$G(z) = 0,001976 \cdot \frac{(z+1)^2}{z^2 - 1,5572z + 0,6047}$$

Assim:

$$y(k+2) - 1,5572\,y(k+1) + 0,6047\,y(k) = 0,001976\,(u(k+2) + 2u(k+1) + u(k))$$

Logo: $Y(z)(z^2 - 1{,}5572z + 0{,}6047) - z^2 y(0) - z\,y(0{,}1) + 1{,}5572\,z\,y(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad Y(z) = \frac{100z^2 - 58{,}2644z}{z^2 - 1{,}5572 + 0{,}6047}$$

Aplicando Z^{-1}:

$$y(k) = 301{,}48 \cdot (0{,}82)^k - 201{,}48 \cdot (0{,}74)^k$$

e) Mapeamento exato

$$G(z) = 0{,}00196 \quad \frac{(z+1)^2}{z^2 - 1{,}5595z + 0{,}6065}$$

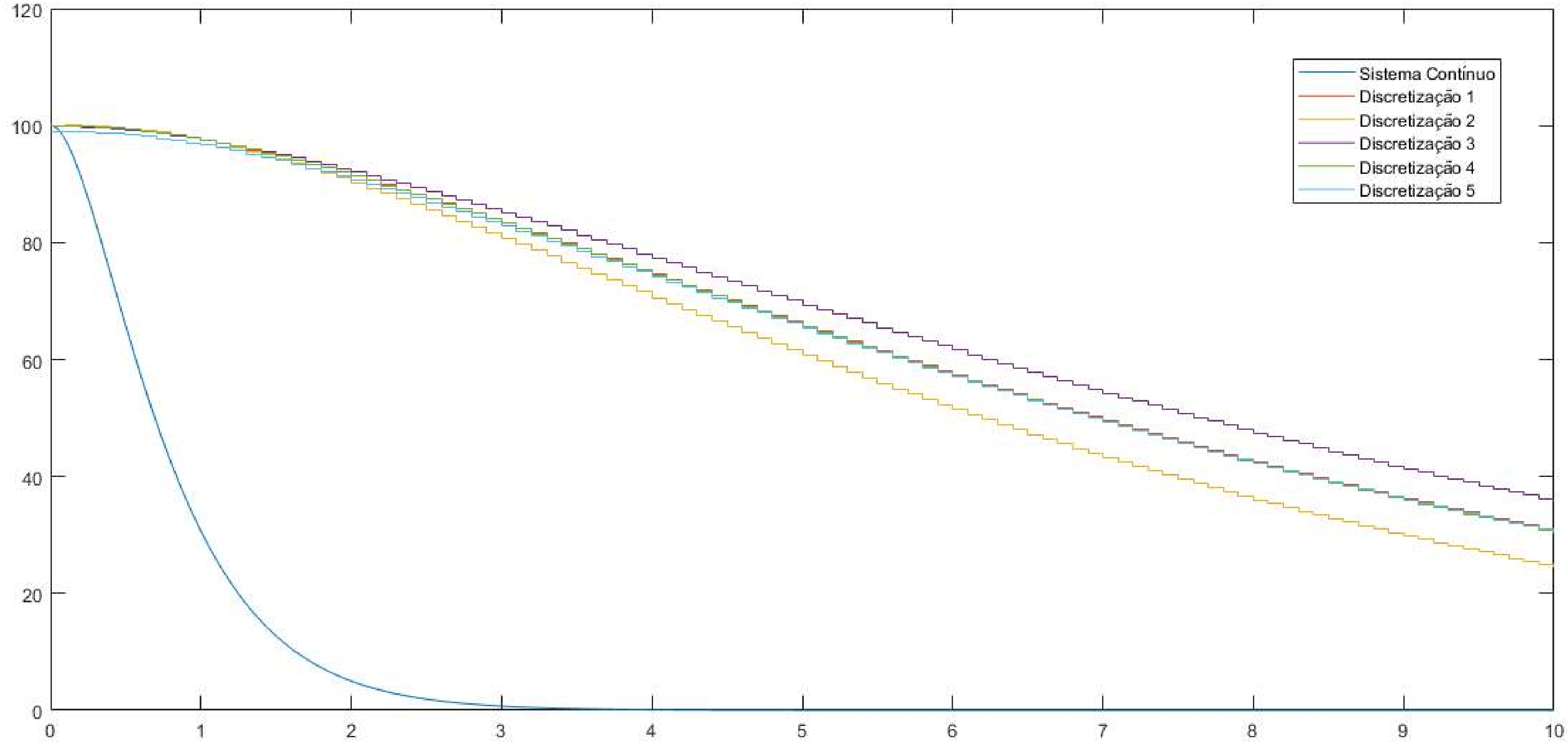
$y(k+2) - 1{,}5595\,y(k+1) + 0{,}6065\,y(k) = 0{,}00196\,(u(k+2) + 2u(k+1) + u(k))$

$\Rightarrow Y(z)(z^2 - 1{,}5595z + 0{,}6065) - z^2 y(0) - z\,y(0{,}1) + 1{,}5595\,z\,y(0) = 0$

Logo: $$Y(z) = \frac{100z^2 - 58{,}4944z}{z^2 - 1{,}5595z + 0{,}6065}$$

Aplicando Z^{-1}: $y(k) = 299{,}67 \cdot (0{,}82)^k - 200{,}65\,(0{,}74)^k$

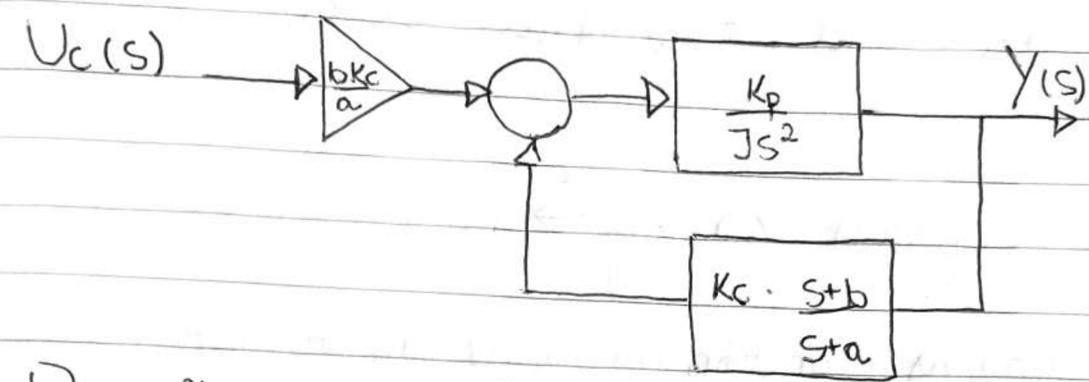
Com respeito às discretizações, observa-se que as formas fechadas de $y(k)$ de cada uma são bastante próximas. Todas elas, assim como a do sistema contínuo, partem de $y(0) = 100$. Entretanto, as discretizações demoram mais para atingir o valor final.


Sistema Contínuo
Discretização 1
Discretização 2
Discretização 3
Discretização 4
Discretização 5
120
100
80
60
40
20
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Command Window

```
>>
x = 0:0.01:10
y = 100*(3*exp(-2*x)-2*exp(-3*x))
k = linspace(0,0.1,101)
y1 = 300.656*(0.8186).^k-200.656*(0.7409).^k
y2 = 274.556*(0.8).^k-174.556*(0.7).^k
y3 = 323.808*(0.8329).^k-223.808*(0.7696).^k
y4 = 301.478*(0.8176).^k-201.4769*(0.7396).^k
y5 = 299.674*(0.8186).^k-200.654*(0.7409).^k
plot(x,y)
hold
stairs(k,y1)
stairs(k,y2)
stairs(k,y3)
stairs(k,y4)
stairs(k,y5)
```

2.



a) Da malha acima, tiramos a função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U_c(s)} = \frac{bK_c}{a} \cdot \frac{\dfrac{K_p}{Js^2}}{1+\dfrac{K_p}{Js^2}\cdot K_c\dfrac{(s+b)}{s+a}} = \frac{b}{a}K_cK_p \cdot \frac{\dfrac{1}{\cancel{Js^2}}}{\dfrac{Js^3+Js^2a+K_pK_c(s+b)}{\cancel{Js^2}(s+a)}}$$

Agora utilizamos as relações abaixo para escrever Y/U em termos de w_0:

$$a = 2w_0 \,, \quad b = w_0/2 \,, \quad K_pK_c = 2Jw_0^2$$

Assim:

$$\frac{Y(s)}{U_c(s)} = \frac{1}{4}\, 2Jw_0^2 \cdot \frac{s+2w_0}{Js^3+Js^2 2w_0+2Jw_0^2 s+Jw_0^3} = \frac{w_0^2}{2} \cdot \frac{s+2w_0}{s^3+2w_0s^2+2w_0^2s+w_0^3}$$

b) $w_c = 1{,}08$ rad/s

c) $$U(s) = \frac{b}{a}K_c U_c(s) - K_c\frac{s+b}{s+a}Y(s) = \frac{bK_c}{a}U_c(s) - K_c\frac{s+a-a+b}{s+a}Y(s)$$

$$= K_c\left(\frac{b}{a}U_c(s) - Y(s) + X(s)\right) \quad \text{com} \quad X(s) = \frac{a-b}{s+a}Y(s)$$

No domínio do tempo: $\dot{x}(t) + a x(t) = (a-b)\, y(t)$

Usando $\dfrac{dx(t)}{dt} \approx \dfrac{x(t+T) - x(t)}{T}$ e $t = kT$

$$\frac{x[k+1]-x[k]}{T} = (a-b)\,y[k] - a\,x[k]$$

$$\Rightarrow x[k+1] = x[k] + T\left((a-b)\,y[k] - a\,x[k]\right)$$

Além disso

$$U(s) = K_c\left(\frac{b}{a}U_c(s) - Y(s) + X(s)\right) \xleftrightarrow{t} K_c\left(\frac{b}{a}U_c[k] - y[k] + x[k]\right)$$

d) As figuras constam no final do relatório

e)

$T = 0{,}2/\omega_o$: $\omega_s/\omega_c = 29{,}089$

$T = 0{,}5/\omega_o$: $\omega_s/\omega_c = 11{,}636$

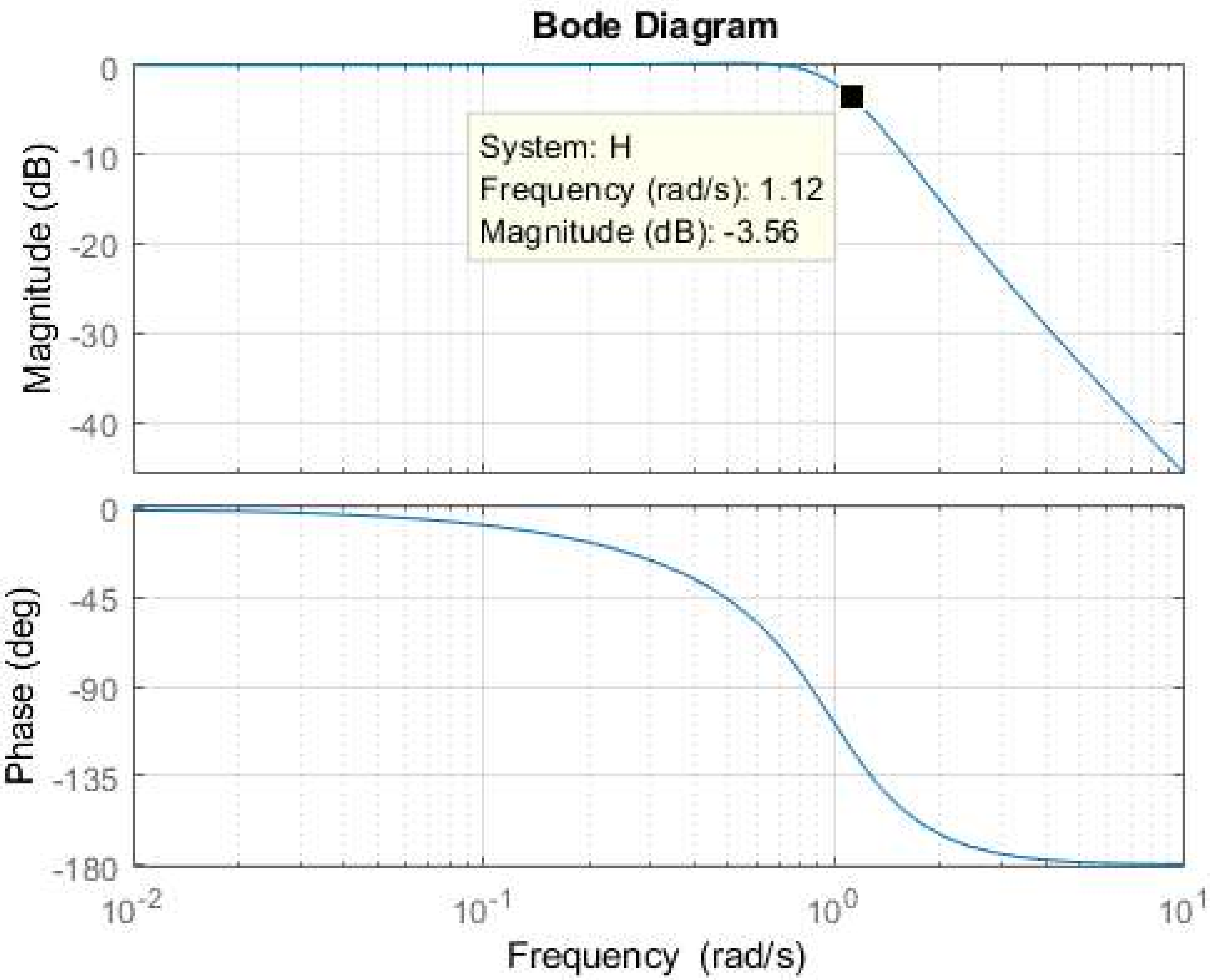
$T = 1{,}08/\omega_o$: $\omega_s/\omega_c = 5{,}387$

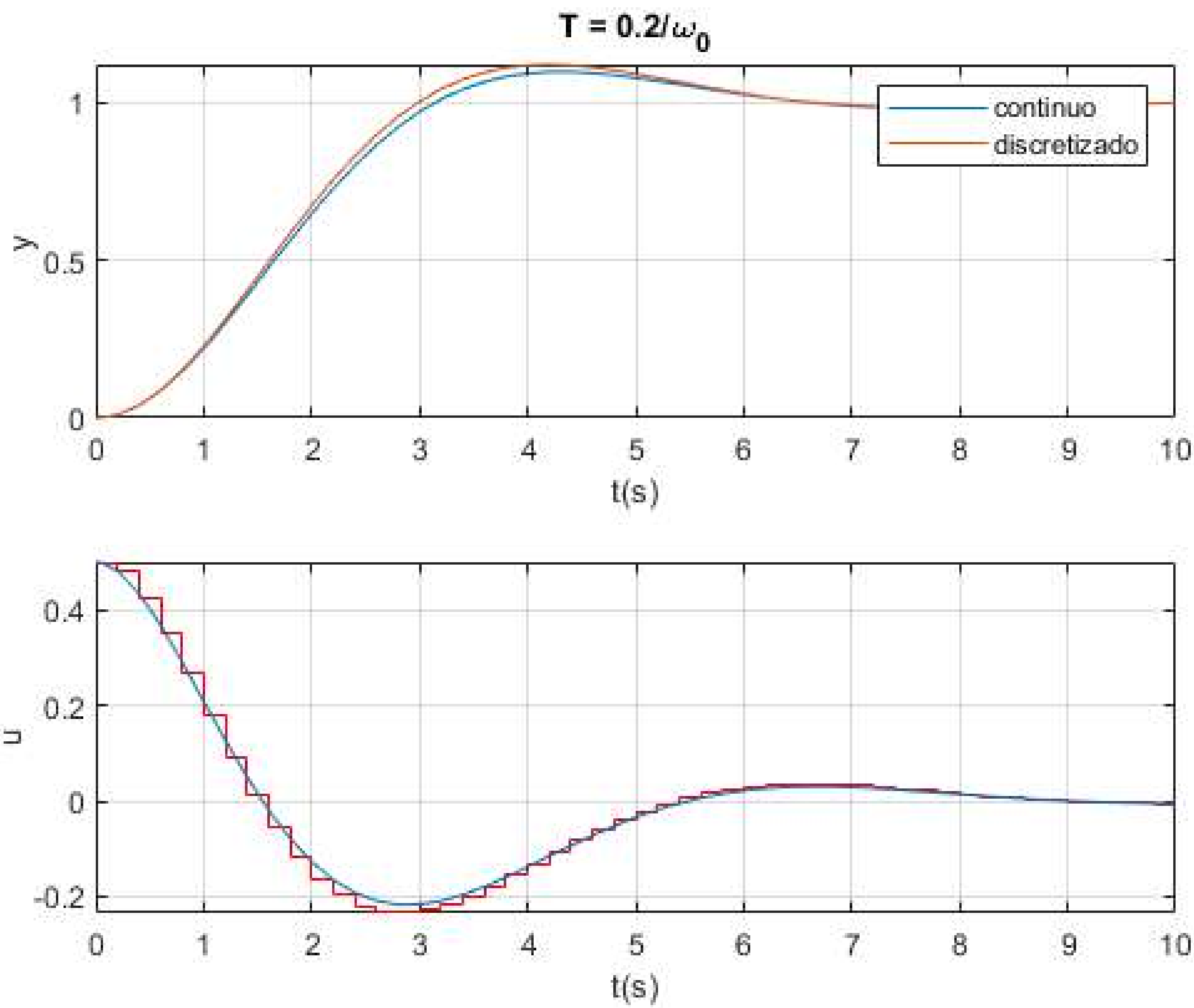
f) O tempo de assentamento aumentou à medida que se aumentou o período.

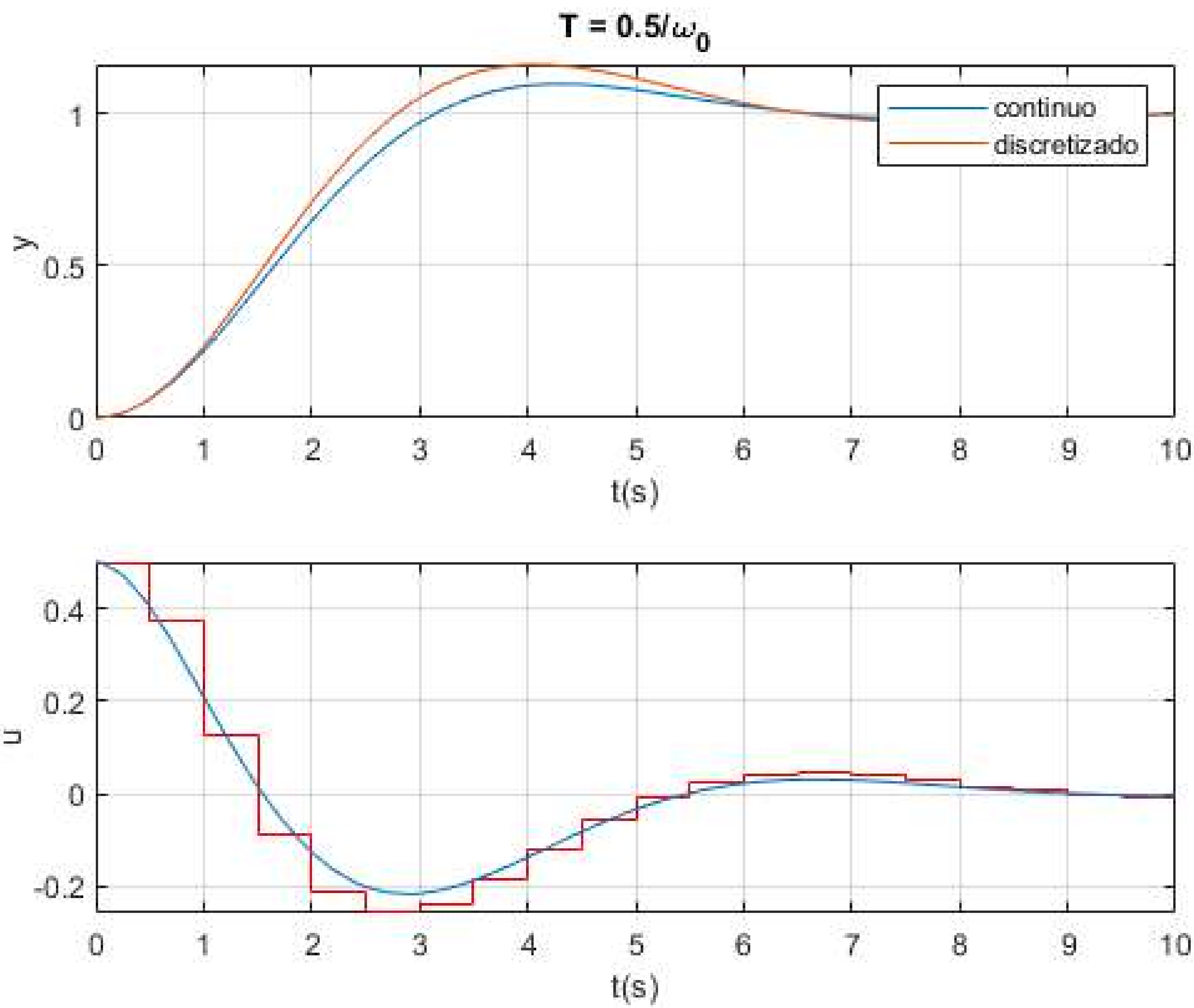
g)

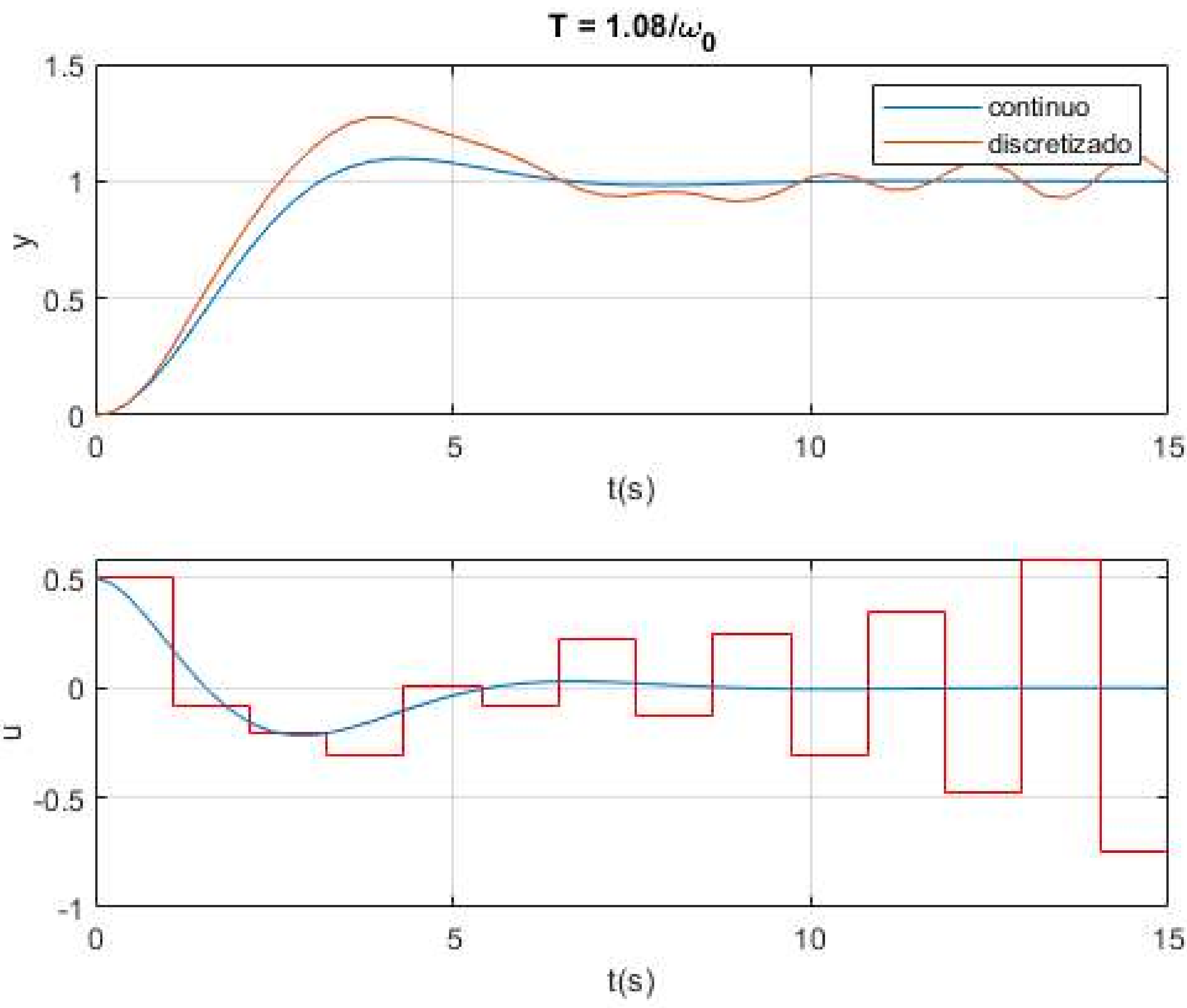
- $T = 0{,}2/\omega_o$: O sistema discretizado proveu uma saída bastante próxima à do sistema contínuo. Há um sobressinal um pouco maior.
- $T = 0{,}5/\omega_o$: O sistema discretizado tem sobressinal e tempo de acomodação maiores, mas uma resposta ainda próxima à do sistema contínuo.
- $T = 1{,}08/\omega_o$: O tempo de acomodação se deteriora completamente. As oscilações amortecidas persistem longamente e o sobressinal é grande.

h) A frequência de amostragem não pode ser baixa. Em outras palavras, ω_s/ω_c deve ser suficientemente grande.


Bode Diagram
Magnitude (dB)
0
-10
-20
-30
-40
System: H
Frequency (rad/s): 1.12
Magnitude (dB): -3.56
Phase (deg)
0
-45
-90
-135
-180
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
Frequency (rad/s)


T = 0.2/ω0
y
1
0.5
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
t(s)
continuo
discretizado
u
0.4
0.2
0
-0.2
t(s)


T = 0.5/ω0
continuo
discretizado
y
t(s)
u
t(s)



T = 1.08/ω0
continuo
discretizado
y
t(s)
u
t(s)
0
5
10
15
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1