Exercício 6

Nome: Rodrigo Neves Rios
Matrícula: 16/0144094

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}16 & -1 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[k]$$

$$y[k] = [1 \quad 0]\, x[k]$$

1. Sabemos que a realimentação de estados $\bar{F}$ na F.C.C. é dada por: $\bar{F} = [f_2 \quad f_1] = [\bar{\alpha}_2 - \alpha_2 \quad \bar{\alpha}_1 - \alpha_1]$, onde os α_i's são os coeficientes do polinômio característico em malha aberta e os $\bar{\alpha}_i$'s os coeficientes do polinômio característico com realimentação de estados.

Como os autovalores são $\lambda_{1,2} = 0{,}5 \pm 0{,}5j$, temos:

$$\Delta_f(z) = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2) = z^2 - z + 0{,}5 = z^2 + \bar{\alpha}_1 z + \bar{\alpha}_2$$

$$\Rightarrow \bar{\alpha}_1 = -1 \qquad \bar{\alpha}_2 = 0{,}5$$

Em malha aberta:

$$\Delta(z) = \det(zI - G) = \begin{vmatrix} z & -1 \\ 0{,}16 & z+1 \end{vmatrix} = z^2 + z + 0{,}16 = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = 0{,}16$$

Assim: $\bar{F} = [\bar{\alpha}_2 - \alpha_2 \quad \bar{\alpha}_1 - \alpha_1] = [0{,}34 \quad -2]$

$$P = \mathcal{C} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [H \quad GH] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A realimentação pode então ser calculada: $F = \bar{F} P^{-1} = [0{,}34 \quad -2]$

2. Simulação.

3. Primeiro devemos verificar se (C,G) é observável

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (C,G) \text{ é observável}$$

Para que o sistema tenha polos em $z_{1,2} = 0,5 \pm 0,5j$ devemos ter $\Delta_f(z) = (z-z_1)(z-z_2) = z^2 - z + 0,5$ (I)

$$\Delta_f(z) = \det(zI - G + LC) = \det\left(\begin{bmatrix} z & -1 \\ 0,16 & z+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} z+L_1 & -1 \\ 0,16+L_2 & z+1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= z^2 + (L_1+1)z + L_1 + L_2 + 0,16 \quad \text{(II)}$$

Comparando as expressões (I) e (II)

$$\begin{cases} L_1 + L_2 + 0,16 = 0,5 \\ L_1 + 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} L_2 = 2,34 \\ L_1 = -2 \end{matrix} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} -2 \\ 2,34 \end{bmatrix}$$

4. Simulação.

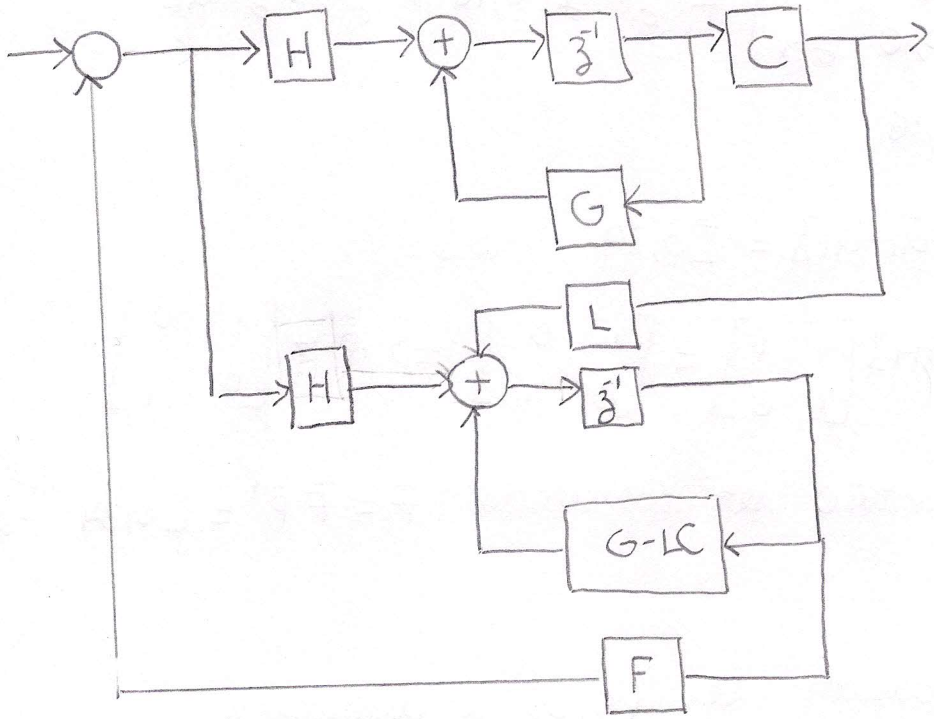
5. Escolhendo $z_{1,2} = 0$ temos

$$\Delta_f(z) = \det(zI - G + LC) = z^2 + (L_1+1)z + L_1 + L_2 + 0,16 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} L_1 = -1 \\ L_2 = 0,84 \end{matrix} \qquad \therefore \; L = \begin{bmatrix} -1 \\ 0,84 \end{bmatrix}$$

Foram feitas simulações pelos mesmos métodos do item anterior

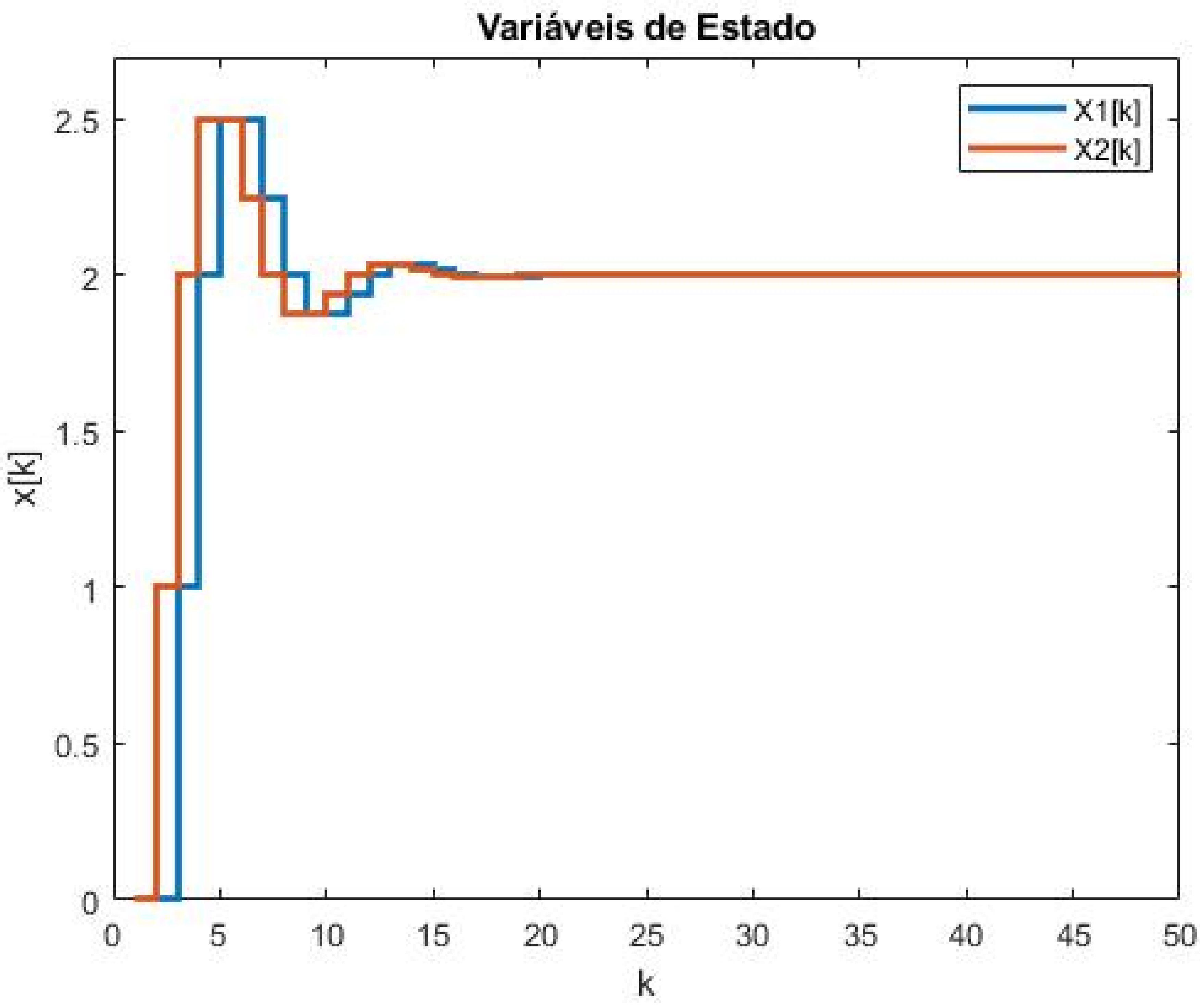
6.



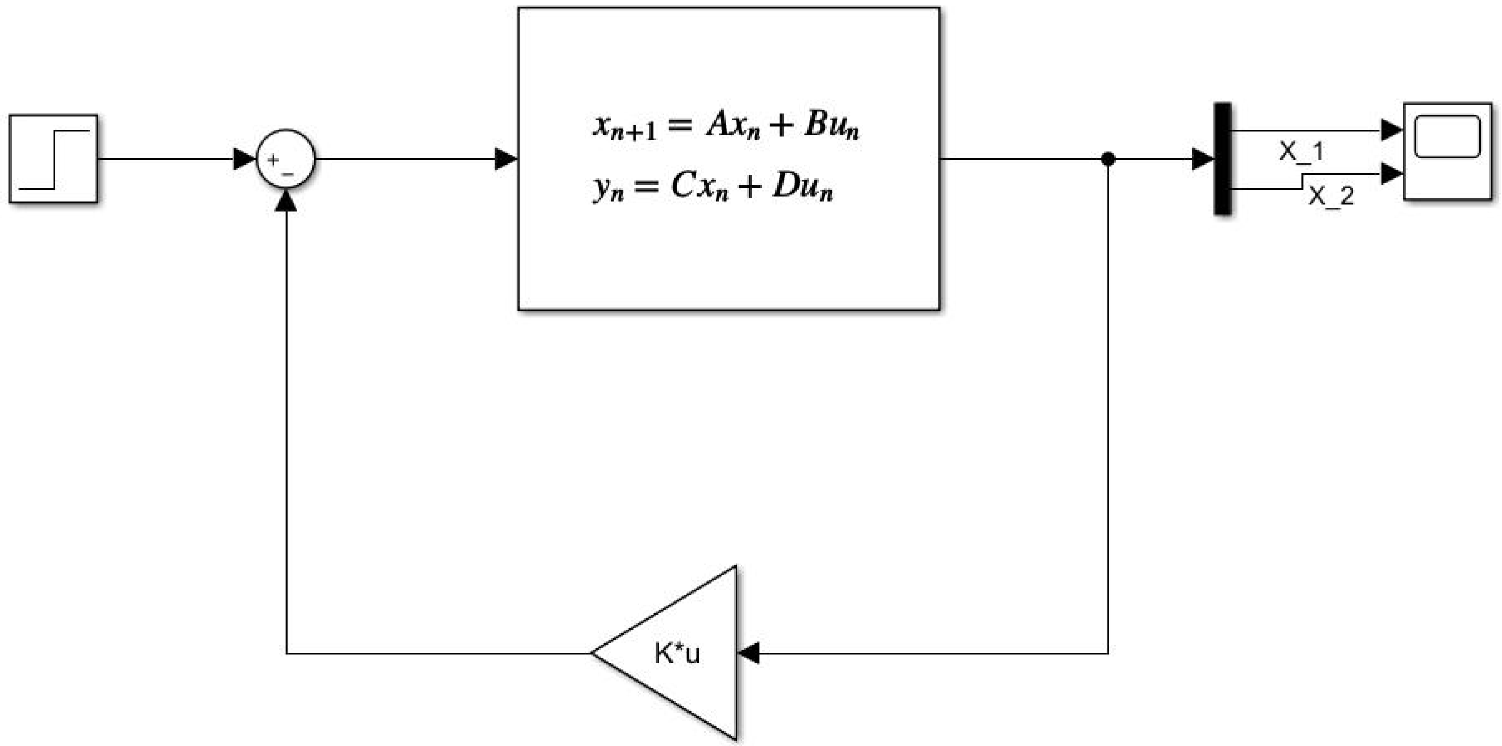
Foram feitas simulações pelos dois métodos para observador do item 3 $\left(L = \begin{bmatrix} -2 \\ 2,34 \end{bmatrix}\right)$ e também p/ o observador do item 5 $\left(L = \begin{bmatrix} -1 \\ 0,84 \end{bmatrix}\right)$

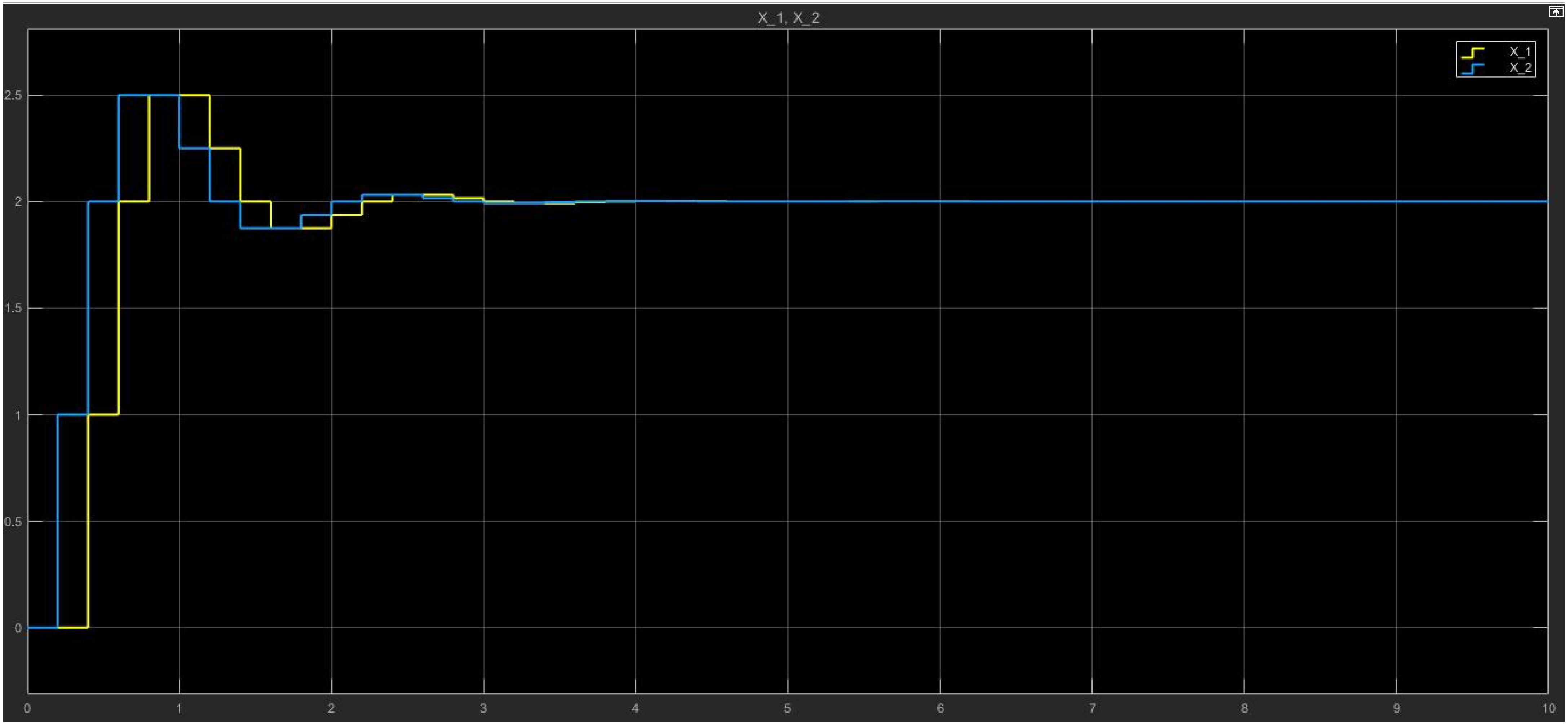
2) Método 1

```
G = [0 1; -.16 -1];
H = [0; 1];
C = [1 0];

F_cc = [.34 -2];                            % Matriz realimentação na FCC
P = [H G*H]*[1 1;1 0];                      % P = C_cal*T
F = F_cc/P;                                 % F = F_cc*P^-1
x = zeros(2,51);
for k = 1:50
    x(:,k+1) = (G-H*F)*x(:,k)+H;            % Calcula x[k+1]
end

k = linspace(1,51,51);
figure
mostra(k,x(1,k),'k','x[k]','r',0,2.7);                        %mostra x1
mostra(k,x(2,k),'k','x[k]','Variáveis de Estado',0,2.7);      %mostra x2 no
legend('X1[k]','X2[k]');                                      %mesmo grafico

function mostra(k,x,xl,yl,Title,a,b)
    stairs(k,x,'LineWidth',2);
    hold on
    title(Title);
    xlabel(xl)
    ylabel(yl)
    ylim([a b])
    xlim([0 50])
end
```


Variáveis de Estado
X1[k]
X2[k]
x[k]
k
0
0.5
1
1.5
2
2.5
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

Método 2

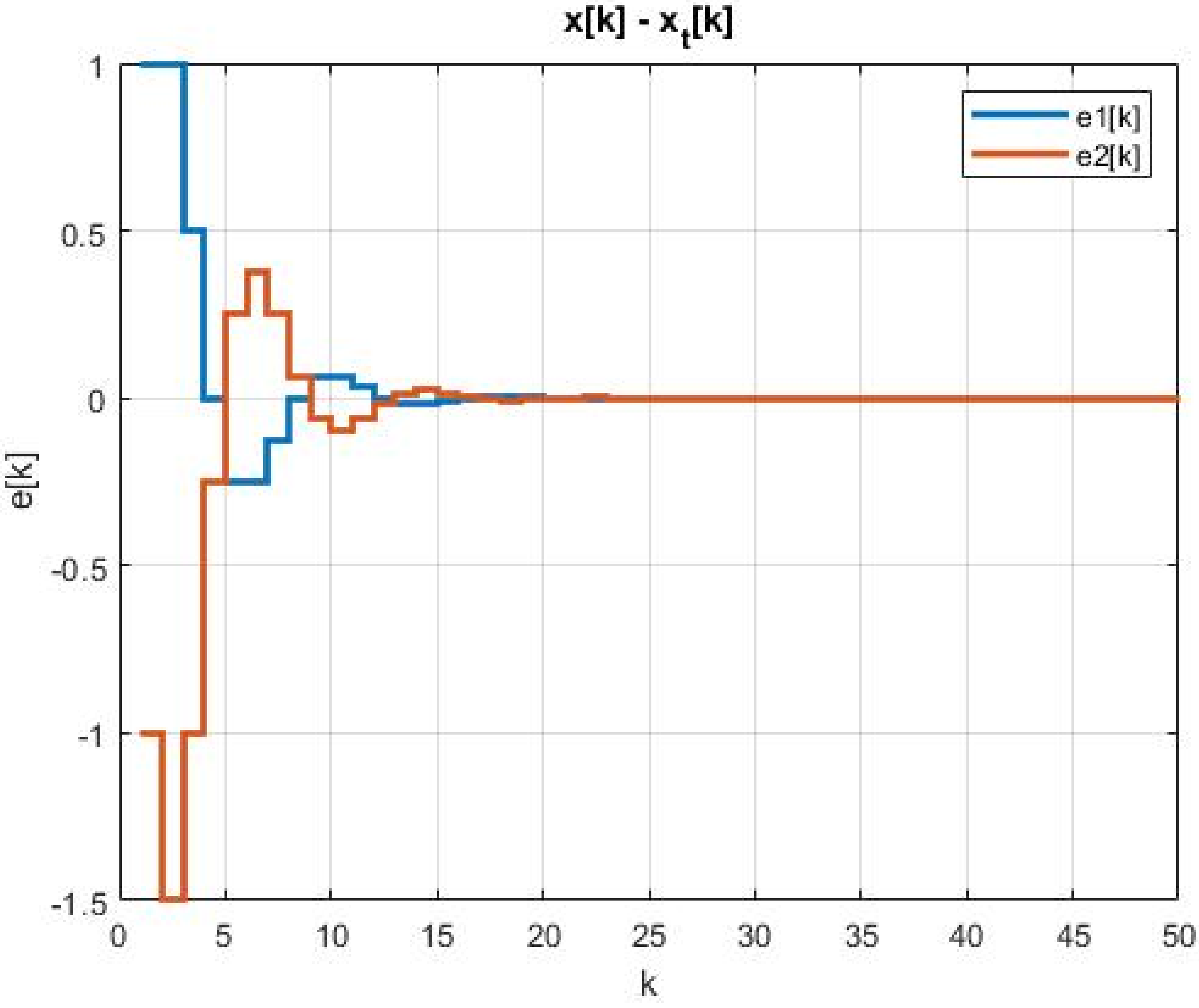




X_1, X_2
X_1
X_2
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

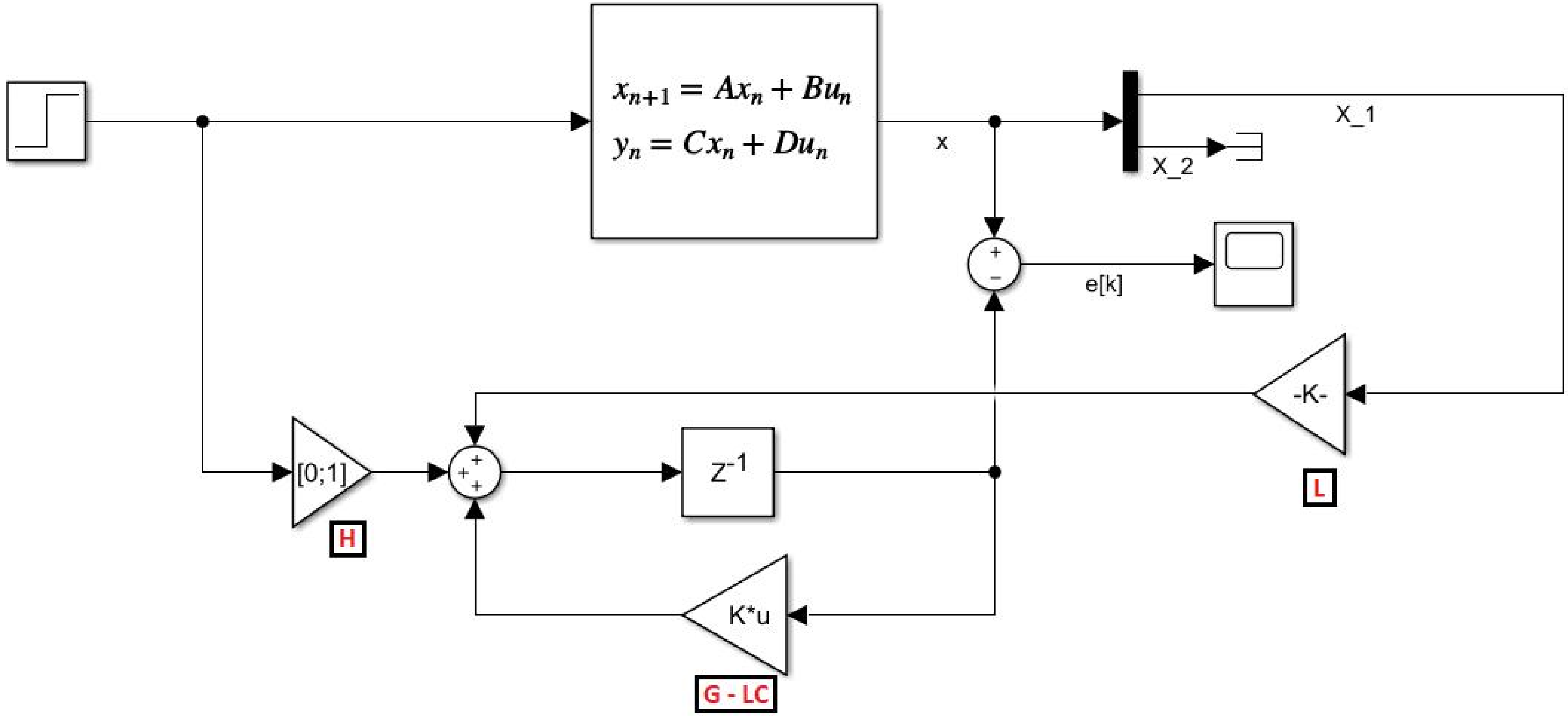
4) Método 1

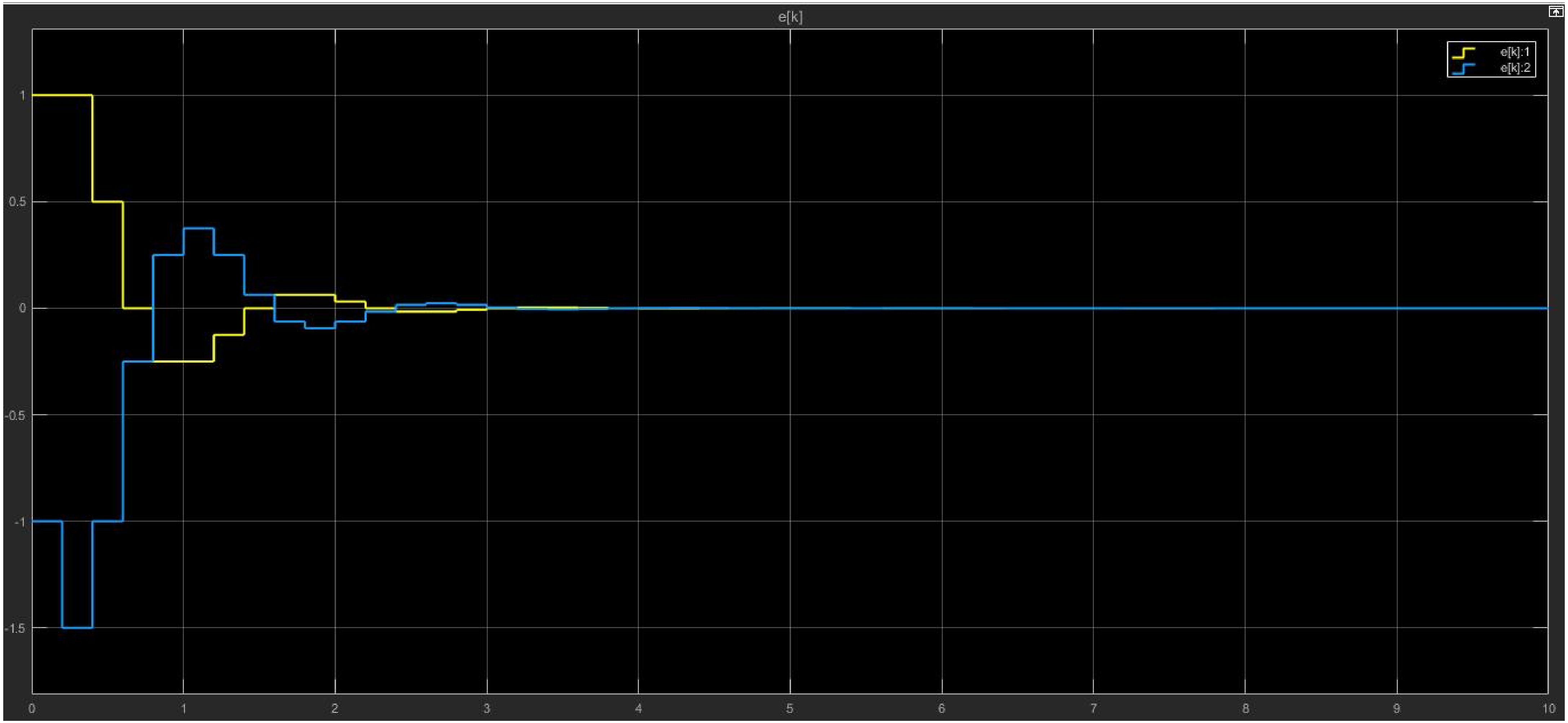
```
clear
close all
clc
%Dados
G = [0 1; -.16 -1];
H = [0; 1];
C = [1 0];

L = [-2; 2.34];
%Estados
x = zeros(2,51);
x(1,1) = 1;          % x1[0] = 1
x(2,1) = -1;         % x2[0] = -1
x_t = zeros(2,51);   % Observador

for k = 1:50
      x(:,k+1) = G*x(:,k)+H;                            %x[k+1]
      x_t(:,k+1) = (G-L*C)*x_t(:,k)+H+L*C*x(:,k);   %x_t[k+1]
end

k = linspace(1,31,31);
e = x - x_t;         %erro
figure
mostra(k,e(1,k),'k','e[k]','r',-1,1);          %mostra x1
mostra(k,e(2,k),'k','e[k]','Erro',-1.5,1);     %mostra x2 no mesmo grafico
legend('e1[k]','e2[k]');
function mostra(k,x,xl,yl,Title,a,b) ...
```



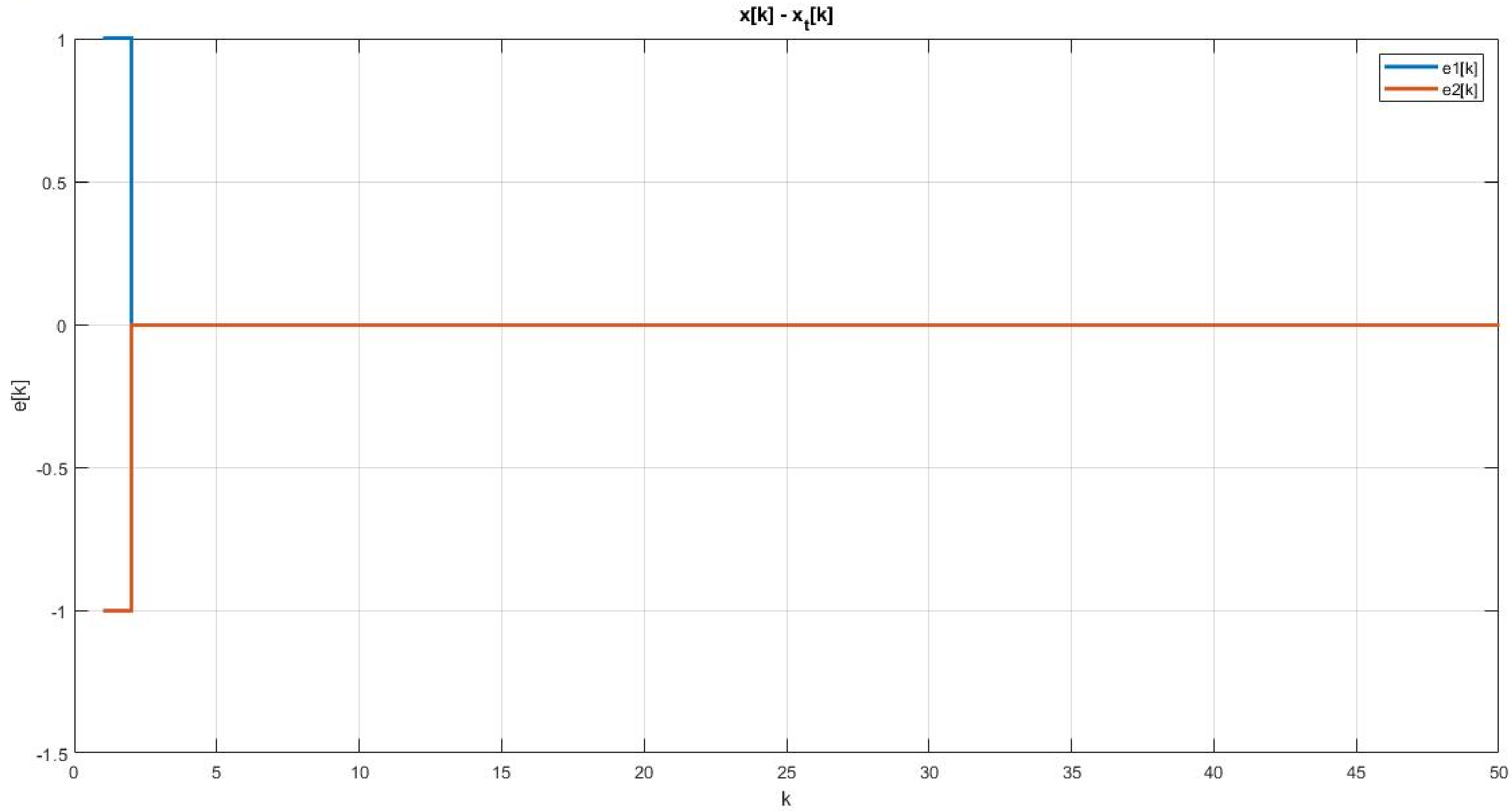
x[k] - x_t[k]
e1[k]
e2[k]
e[k]
k
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

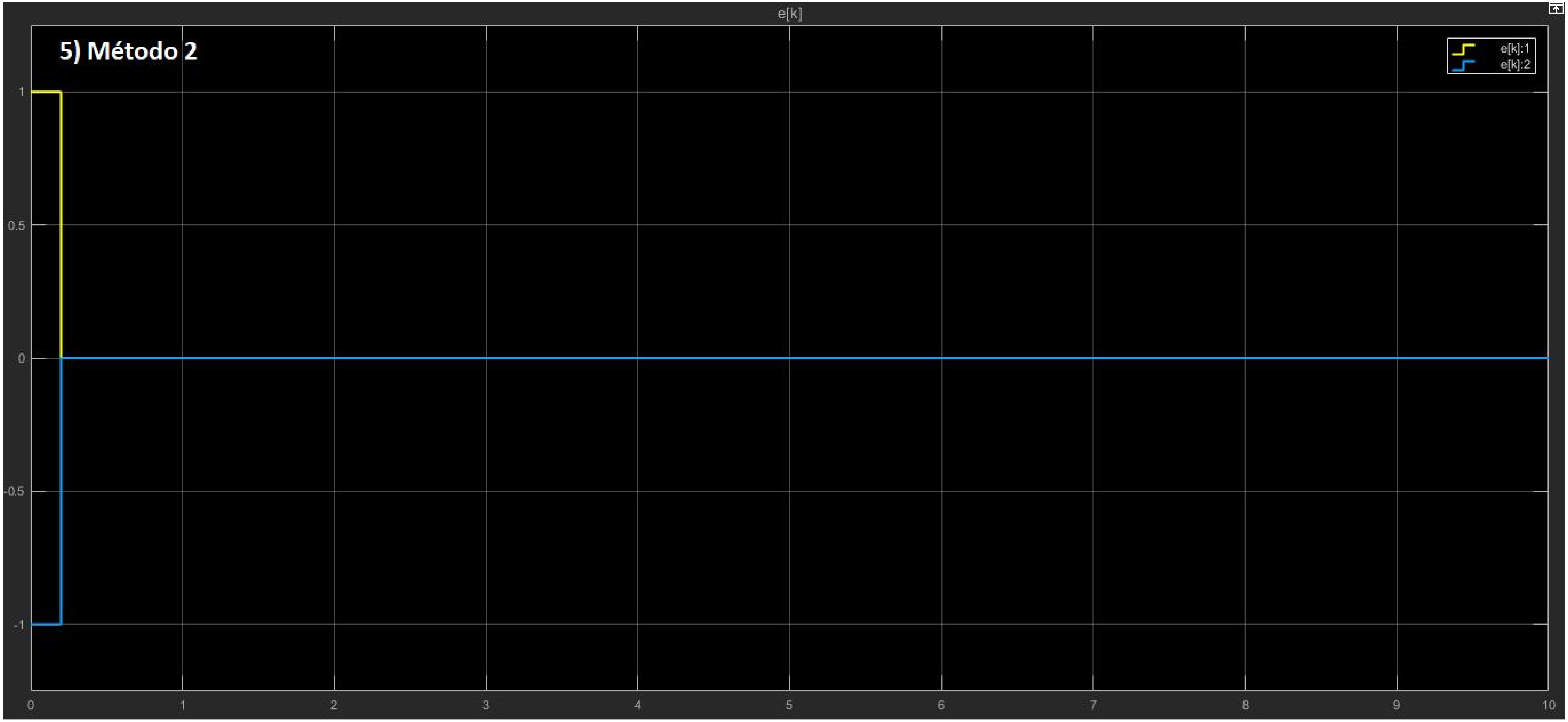
Método 2




e[k]
e[k]:1
e[k]:2
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

5) Método 1

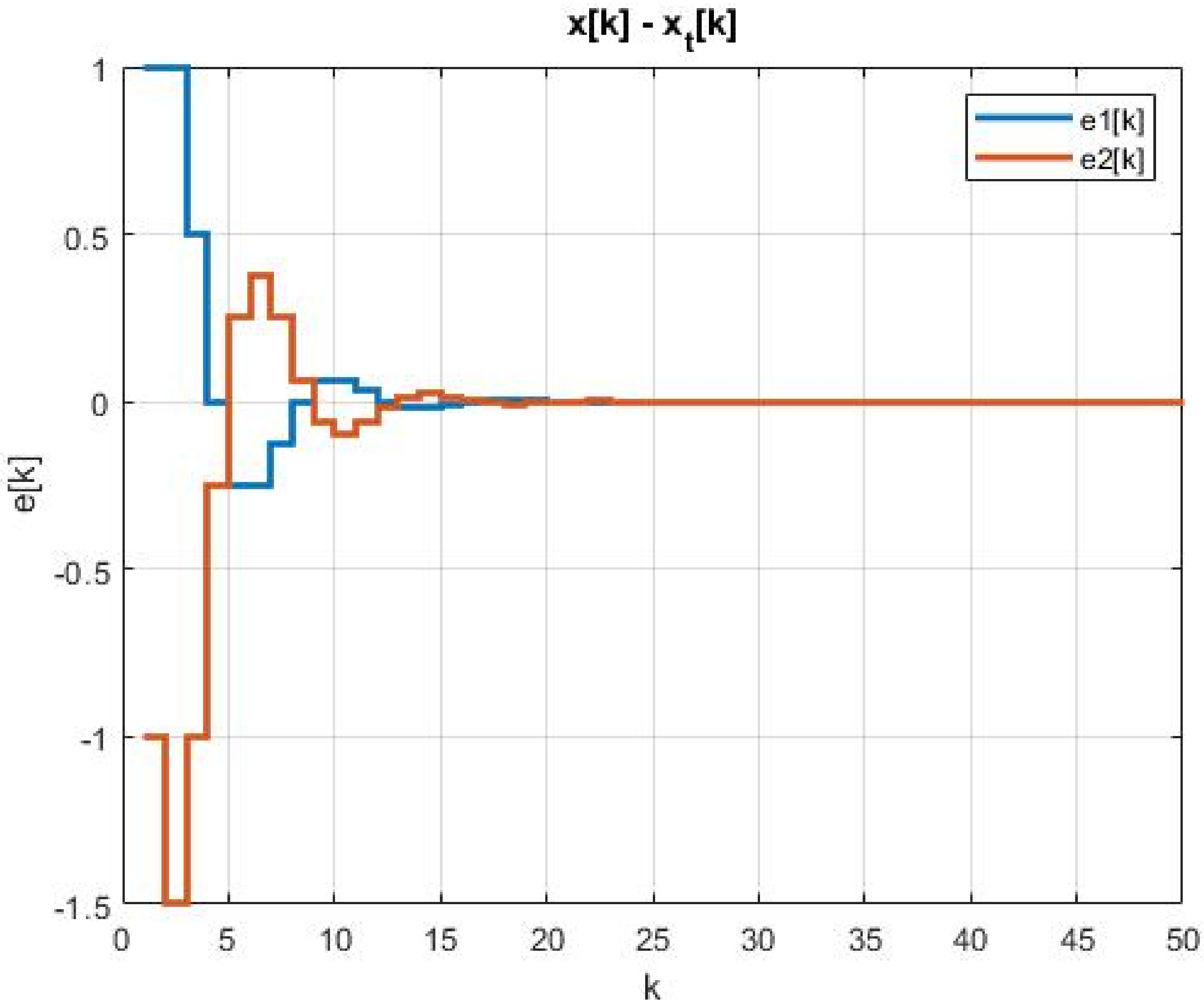



e[k]
5) Método 2
e[k]:1
e[k]:2
1
0.5
0
-0.5
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

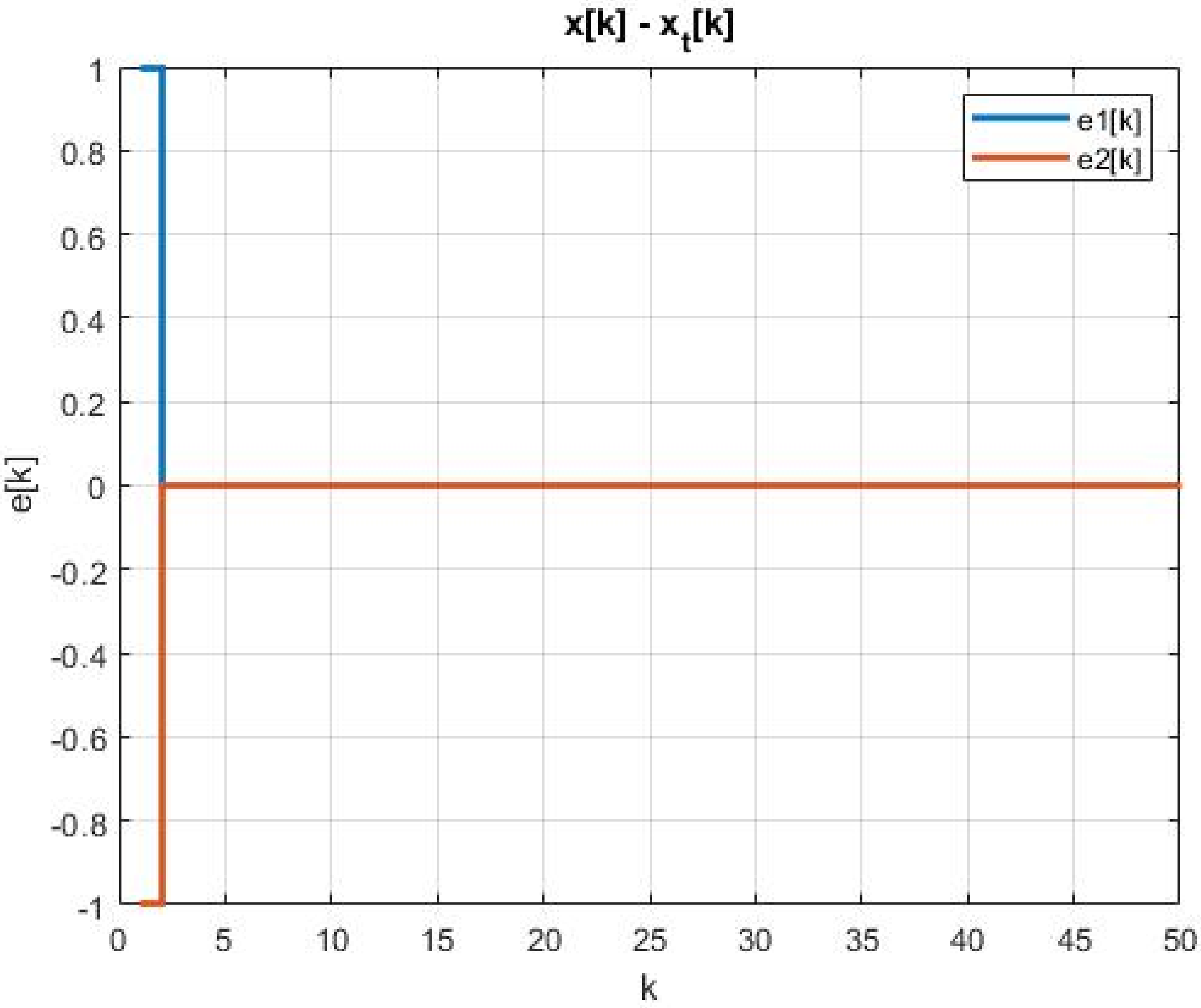
6) Método 1

```
%Dados
G = [0 1; -.16 -1];
H = [0; 1];
C = [1 0];
%Matrizes
F = [.34 -2];                   %Realimentação
L = [-2; 2.34];                 %Ganho Observador
%Estados
x = zeros(2,51);
x(1,1) = 1;                    % x1[0] = 1
x(2,1) = -1;                   % x2[0] = -1
x_t = zeros(2,51);             % Observador
u = zeros(1,51);
u(1,1) = 1 - F*x_t(:,1);       % u[0]
for k = 1:50
      x(:,k+1) = G*x(:,k)+H*u(1,k);                              %x[k+1]
      x_t(:,k+1) = (G-L*C)*x_t(:,k)+H*u(1,k)+L*C*x(:,k);         %x_t[k+1]
      u(1,k+1) = 1-  F*x_t(:,k+1);
end

k = linspace(1,51,51);
e = x - x_t;          %erro
figure
mostra(k,x(1,k),'k','e[k]','r',-1,1);          %mostra x1
mostra(k,x(2,k),'k','e[k]','x[k] - x_t[k]',-1.5,10);     %mostra x2 no mesmo grafico
legend('e1[k]','e2[k]');
 function mostra(k,x,xl,yl,Title,a,b) ...
```

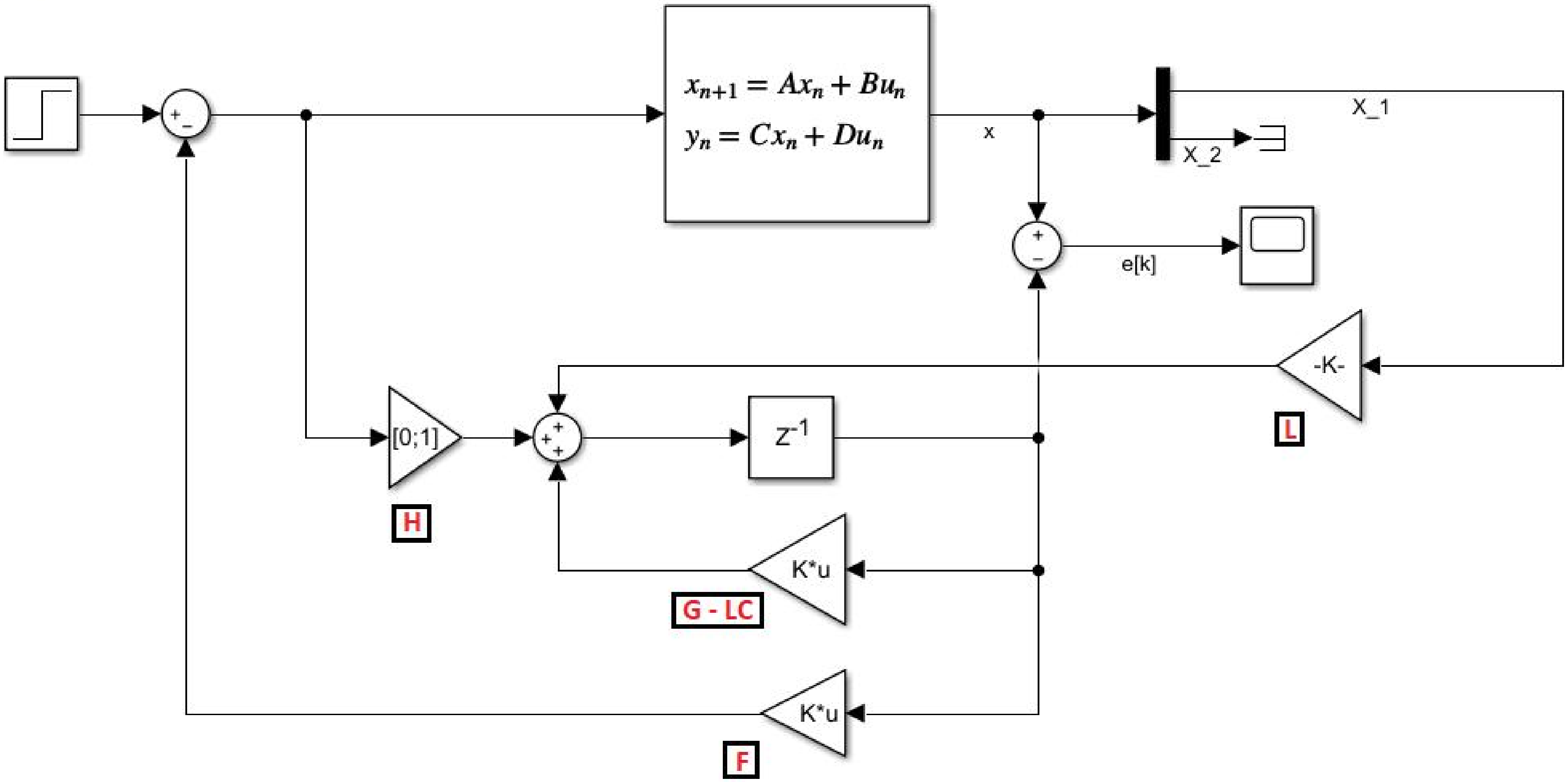
L = [-2; 2.34] (Observador item 3)

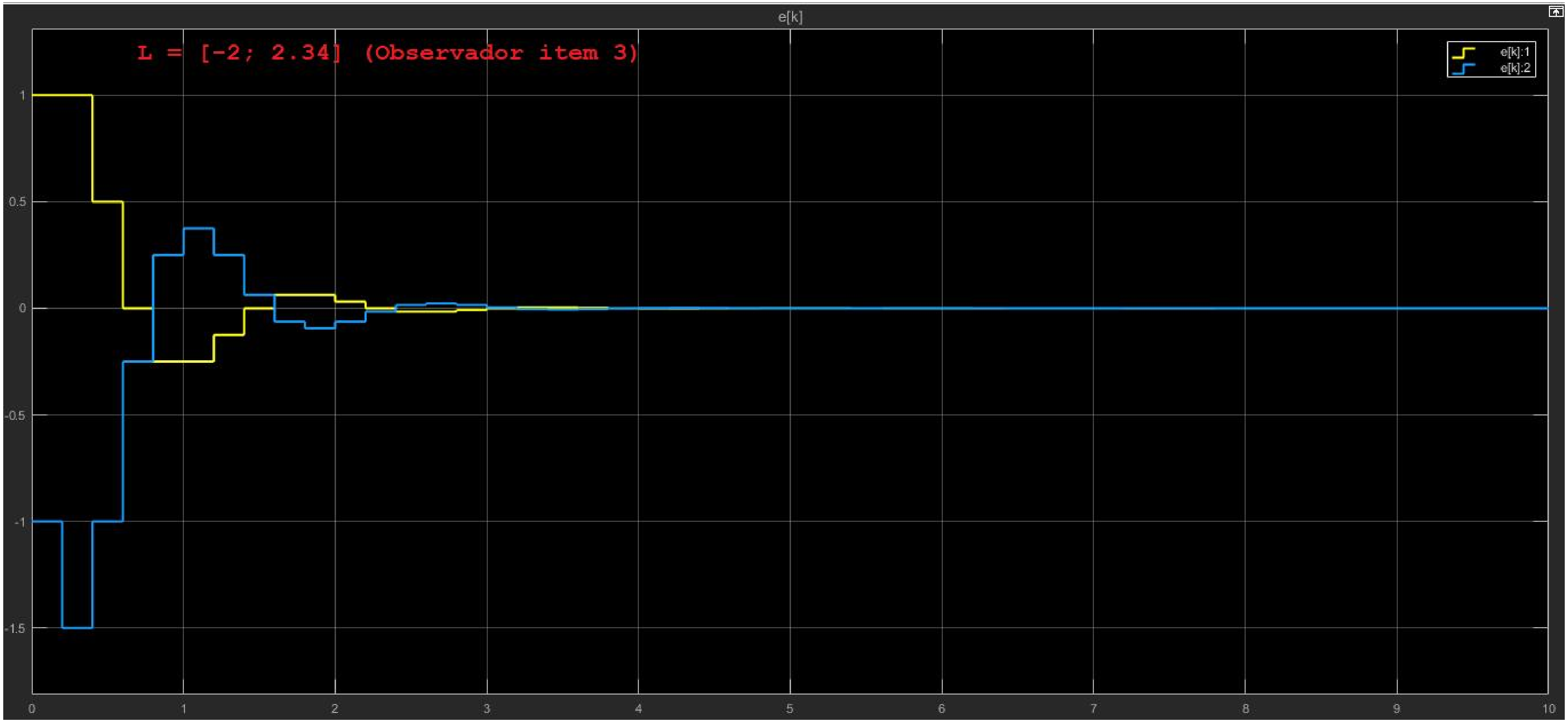


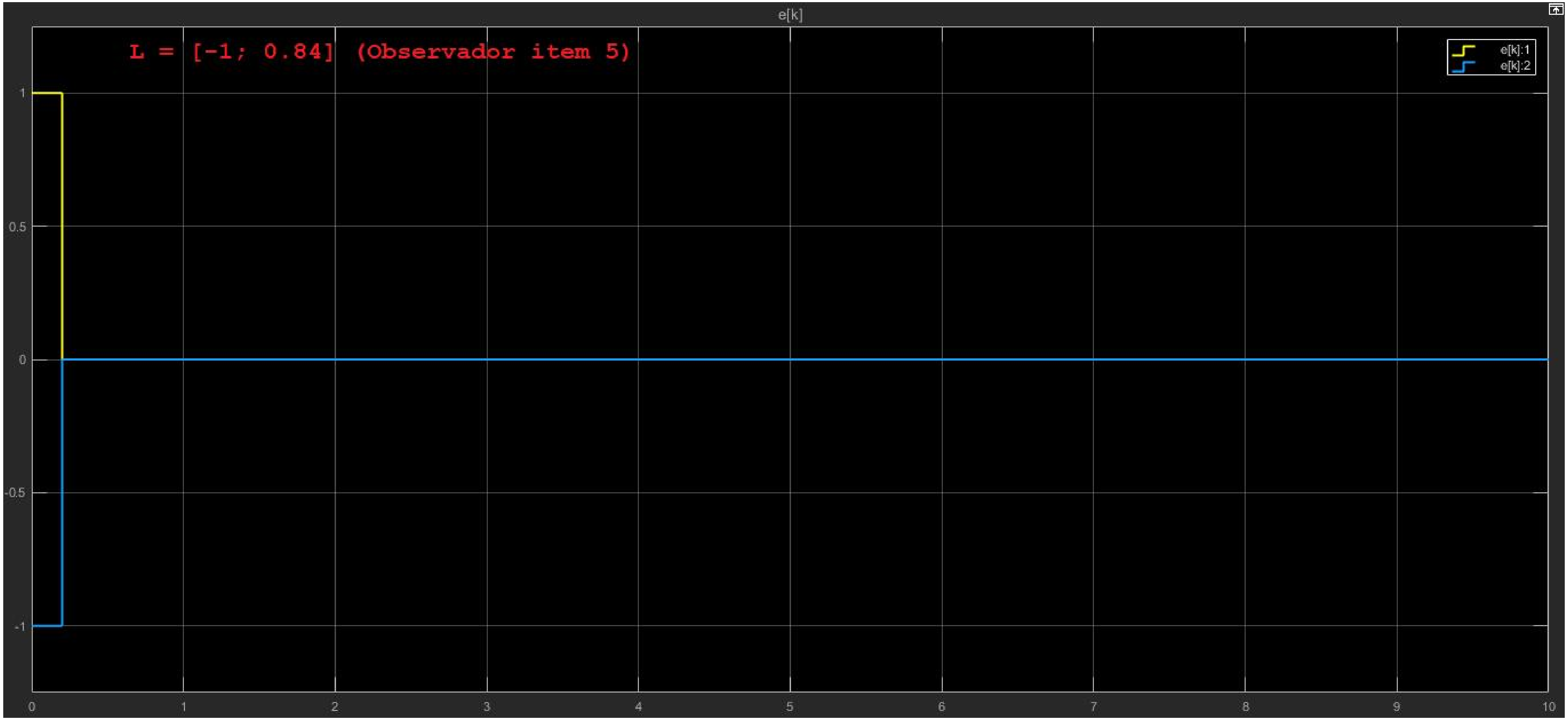
L = [-1; 0.84] (Observador item 5)



Método 2




e[k]
L = [-2; 2.34] (Observador item 3)
e[k]:1
e[k]:2
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


e[k]
L = [-1; 0.84] (Observador item 5)
e[k]:1
e[k]:2
1
0.5
0
-0.5
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10