Exercício 5

1.
$$G(z) = 0{,}0125 \cdot \frac{(z+0{,}195)(z+2{,}821)}{z(z-1)(z-0{,}368)(z-0{,}8187)}$$

a) Primeiramente devemos notar a diferença entre polos e zeros da planta:

$$n = n_p - n_z = 2$$

Como queremos a resposta em tempo mínimo, escolhemos K (diferença entre polos e zeros da FTMF M(z) igual a 2:

$K = 2$ (K que provê erro nulo mais rápido)

Agora encontramos o valor do parâmetro p:

$$p = \max(n_p \text{ de } R(z) \text{ em } 1,\ n_p \text{ de } G(z) \text{ em } 1) = \max(1,1) = 1$$

Assim:

$$M(z) = (1 + 2{,}821 z^{-1})(M_2 z^{-2})$$
$$1 - M(z) = (1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})$$

Montando o sistema para a_1, a_2, M_2

$$\begin{cases} 2{,}821 M_2 - a_2 = 0 \\ M_2 + a_2 - a_1 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = 1 \\ M_2 = 0{,}2617 \\ a_2 = 0{,}7383 \end{matrix}$$

$$M(z) = (1 + 2{,}821 z^{-1})(0{,}2617 z^{-2}) = 0{,}2617 \frac{(z+2{,}821)}{z^3}$$

$$1 - M(z) = (1 - z^{-1})(1 + z^{-1} + 0{,}7383 z^{-2}) = \frac{(z-1)(z^2+z+0{,}7383)}{z^3}$$

Desse modo:

$$G_c(z) = \frac{1}{G(z)} \cdot \frac{M(z)}{1-M(z)} = 20{,}936 \cdot \frac{z(z-0{,}368)(z-0{,}8187)}{(z+0{,}195)(z^2+z+0{,}7383)}$$

Resposta ao degrau

$$C(z) = M(z)R(z) = 0{,}2617 \cdot \frac{(z+2{,}821)}{z^3} \cdot \frac{z}{z-1} = 0{,}2617 \cdot \frac{(z+2{,}821)}{z^2(z-1)}$$

Utilizando divisão longa:

$$C(z) = 0{,}2617 \cdot z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \ldots \Rightarrow C[K] = 0{,}2617 \cdot \delta[K-2] + \delta[K-3] + \delta[K-4] + \ldots$$

$$U(z) = \frac{C(z)}{G(z)} = \frac{z(z-1)(z-0{,}368)(z-0{,}8187)}{0{,}0125(z+0{,}195)(z+2{,}821)} \cdot 0{,}2617 \cdot \frac{(z+2{,}821)}{z^2(z-1)}$$

$$\Rightarrow U(z) = 20{,}396 \cdot \frac{(z-0{,}368)(z-0{,}8187)}{z(z+0{,}195)} \xrightarrow{D.L.} U[K] = 20{,}396\,\delta[K] - 28{,}18\,\delta[K-1] + 11{,}64\,\delta[K-2] - 2{,}27\,\delta[K-3] + \ldots + 0$$

$$(U[K] \to 0)$$

b) Observa-se erro nulo em tempo finito. Imagens ao final do relatório.

c) Procedemos de forma análoga ao item (a), agora para $R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$

Note que $p = \max(np \text{ de } R(z) \text{ em } 1, np \text{ de } G(z) \text{ em } 1) = \max(2,1) = 2$

Assim $M(z) = (1 + 2{,}821\,z^{-1})(M_2 z^{-2} + M_3 z^{-3})$

$1 - M(z) = (1 - z^{-1})^2 (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})$

Montando o sistema a partir da identidade:

$$\begin{cases} a_1 - 2 = 0 \\ 1 - 2a_1 + a_2 = -M_2 \\ a_1 - 2a_2 = -2{,}821\,M_2 - M_3 \\ a_2 = -2{,}821\,M_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_2 = 2{,}0216 \\ M_2 = 0{,}9784 \\ M_3 = -0{,}7166 \end{array}$$

Logo:

$$M(z) = \frac{(z+2{,}821)(0{,}9784z - 0{,}7166)}{z^4} \qquad 1 - M(z) = \frac{(z-1)^2(z^2 + 2z + 2{,}0216)}{z^4}$$

$$G_c(z) = \frac{1}{G(z)} \cdot \frac{M(z)}{1-M(z)} = 78{,}272 \cdot \frac{z(z-0{,}368)(z-0{,}8187)(z-0{,}7324)}{(z-1)(z+0{,}195)(z^2+2z+2{,}0216)}$$

$$C(z) = M(z)R(z) = \frac{0{,}9784z^2 + 2{,}0435z - 2{,}0215}{z^4} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$\Rightarrow C(z) = T \cdot \frac{0{,}9784z^2 + 2{,}0435z - 2{,}015}{z^3(z-1)^2}$$

Por meio de divisão longa: $C(z) = T(0{,}9784\,z^{-3} + 4z^{-4} + 5z^{-5} + \ldots)$

Portanto, $c[k] = T(0,9784\,\delta[k-3] + 4\,\delta[k-4] + 5\,\delta[k-5] + \dots)$

$$U(z) = \frac{C(z)}{G(z)} = \frac{z(z-1)(z-0,368)(z-0,8187)}{0,0125(z+0,195)(z+2,821)} \cdot 0,9784 \cdot T \frac{(z+2,821)(z-0,7324)}{z^3(z-1)^2}$$

$$\Rightarrow U(z) = 78,272\,T \cdot \frac{(z-0,368)(z-0,8187)(z-0,7324)}{z^2(z-1)(z+0,195)}$$

$\xrightarrow{D.L.} u[k] = T(78,272\,\delta[k-1] - 87,203\,\delta[k-2] + 36,68\,\delta[k-3] + \dots + 2\,\delta[k-N])$ $(u[k] \to 2)$

d) Como no item (b), opta-se, por uma questão de escala, por mostrar o sinal da ação de controle U em um gráfico separado, a fim de melhorar a visualização. Desse modo, percebem-se:

- O sinal C acompanha a rampa;
- O erro vai a zero nos instantes de amostragem após o tempo mínimo;
- O sinal da ação de controle U permanece constante em 2 após um número finito de amostragens.

As imagens constam ao final do relatório.

2.

$$G(z) = 0,0003916 \cdot \frac{(z+2,8726)(z+0,19)}{(z-1)^2(z-0,2865)}$$

a) $n = n_p - n_z = 1$

Temos a condição $K \geq n$. Escolhemos $K=1$, pois queremos resposta deadbeat em tempo mínimo.

$p = \max(n_p \text{ de } R(z) \text{ em } 1, n_p \text{ de } G(z) \text{ em } 1) = \max(1, 2) = 2$

$$M(z) = (1 + 2,8276\,z^{-1})(M_1 z^{-1} + M_2 z^{-2})$$

$$1 - M(z) = (1 - z^{-1})^2 (1 + a_1 z^{-1})$$

Com as duas equações temos a identidade:

$$1-(1+2{,}8276z^{-1})(M_1 z^{-1}+M_2 z^{-2}) \equiv (1-2z^{-1}+z^{-2})(1+a_1 z^{-1})$$

Com ela, temos o sistema:

$$\begin{cases} 2{,}8276M_2 + a_1 = 0 \\ 2{,}8276M_1 + M_2 - 2a_1 = -1 \\ M_1 + a_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= 1{,}2848 \\ M_1 &= 0{,}7155 \\ M_2 &= -0{,}4543 \end{aligned}$$

Assim:

$$M(z) = \frac{(z+2{,}8276)(0{,}7155z-0{,}4543)}{z^3} = 0{,}7155\,\frac{(z+2{,}8276)(z-0{,}6349)}{z^3}$$

$$1-M(z) = \frac{(z-1)^2(z+1{,}2848)}{z^3}$$

$$G_c(z) = \frac{1}{G(z)}\cdot\frac{M(z)}{1-M(z)} = \frac{(z-1)^2(z-0{,}2865)}{0{,}0003916(z+2{,}8276)(z+0{,}19)}\cdot 0{,}7155\,\frac{(z+2{,}8276)(z-0{,}6349)}{z^3}\cdot\frac{z^3}{(z-1)^2(z+1{,}2848)}$$

$$\Rightarrow G_c(z) = 1827{,}12\cdot\frac{(z-0{,}2865)(z-0{,}6349)}{(z+0{,}19)(z+1{,}2848)}$$

• Resposta ao degrau:

$$C(z) = M(z)R(z) = 0{,}7155\,\frac{(z+2{,}8276)(z-0{,}6349)}{z^3}\cdot\frac{z}{z-1}$$

$$= \frac{0{,}7155z^2+1{,}5689z-1{,}2845}{z^3-z^2}$$

Por divisão longa: $C(z) = 0{,}7155z^{-1}+2{,}2844z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+\dots$

$$\Rightarrow C[K] = 0{,}7155\,\delta[K-1]+2{,}2844\,\delta[K-2]+\delta[K-3]+\delta[K-4]+\dots$$

$$U(z) = \frac{C(z)}{G(z)} = \frac{(z-1)^2(z-0{,}2865)}{0{,}0003916(z+2{,}8276)(z+0{,}19)}\cdot 0{,}7155\cdot\frac{(z+2{,}8276)(z-0{,}6349)}{z^2(z-1)}$$

$$U(z) = 1827{,}12 \cdot \frac{(z-1)(z-0{,}2865)(z-0{,}6349)}{z^2(z+0{,}19)}$$ Por divisão longa:

$$U[K] = 1000\left(1{,}83\delta[K] - 3{,}86\delta[K-1] + 2{,}75\delta[K-2] - 0{,}85\delta[K-3] + 0{,}16\delta[K-4] + \ldots + 0\right) \quad (U[K] \rightarrow 0)$$

b) Por uma questão de escala, o sinal $U(z)$ é mostrado em um gráfico separado dos demais. Percebe-se que o erro se torna nulo em tempo finito.

c) Procedemos da mesma maneira que no item (a), agora para

$$R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$p = \max(n_p \text{ de } R(z) \text{ em } 1,\ n_p \text{ de } G(z) \text{ em } 1) = \max(2,2) = 2$

Com isso, temos que $M(z)$ terá a mesma forma do item (a).

Logo, o controlador pode ser o mesmo.

$$G_c(z) = \frac{1}{G(z)} \cdot \frac{M(z)}{1-M(z)} = 1827{,}12 \cdot \frac{(z-0{,}2865)(z-0{,}6349)}{(z+0{,}19)(z+1{,}2848)}$$

• Resposta à rampa:

$$C(z) = M(z) \cdot R(z) = \frac{0{,}7155z^2 + 1{,}5689z - 1{,}2845}{z^3} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$= T\,\frac{(0{,}7155z^2 + 1{,}5689z - 1{,}2845)}{z^2(z-1)^2}$$

Por divisão longa: $C(z) = T(0{,}7155z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + 5z^{-5} + \ldots)$

$$\Rightarrow C[K] = T(0{,}7155\,\delta[K-2] + 3\delta[K-3] + 4\delta[K-4] + 5\delta[K-5] + \ldots)$$

$$U(z) = \frac{C(z)}{G(z)} = \frac{(z-1)^2(z-0{,}2865)}{0{,}0003916(z+2{,}8276)(z+0{,}19)} \cdot \frac{0{,}7155T(z+2{,}8276)(z-0{,}6349)}{z^2(z-1)^2}$$

$$\Rightarrow U(z) = 1827{,}12T \, \frac{(z-0{,}2865)(z-0{,}6349)}{z^2(z+0{,}19)}$$

Por divisão longa:

$U[K] = 1000T\,(1{,}83\delta[K-1] - 2{,}03\delta[K-2] + 0{,}72\delta[K-3] - 0{,}1365\,\delta[K-4] + 0{,}0265\delta[K-5] + \dots + 0)$

Os coeficientes de $U[K]$ se aproximam gradativamente de 0 ($U[K] \to 0$)

d) Observa-se que o erro se torna nulo em tempo finito. Nota-se também que o sinal de controle oscila e depois tende a zero. Imagens ao final do relatório.

3.

a) $G(z) = \frac{K_p}{J} \cdot \frac{1}{s^2}$

$$G(z) = Z\{G_{ho}(s)\,G(s)\} = Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\,G(s)\right\} = (1-z^{-1})\cdot Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$$= \frac{K_p}{J}\cdot(1-z^{-1})\cdot Z\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{K_pT^2}{2J}\,\frac{(z+1)}{(z-1)^2} = \alpha \cdot \frac{(1+z^{-1})z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

Note que $\frac{Y(z)}{U(z)} = \alpha \cdot \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^2}$

$$\Rightarrow Y(z)(1-2z^{-1}+z^{-2}) = U(z)\,\alpha\,(z^{-2}+z^{-1}) \qquad (\mathrm{I})$$

Usando a propriedade $x[K-N] \xrightarrow{Z} z^{-N}X(z)$

$$y[K] - 2y[K-1] + y[K-2] = \alpha\,(u[K-1] + u[K-2])$$

b) A ação de controle é dada por:

$$u[K] = t_0 u_c[K] - s_0 y[K] - r_1 u[K-1] - s_1 y[K-1]$$

$$\Rightarrow U(z) = t_0 U_c(z) - s_0 Y(z) - s_1 z^{-1} Y(z) - r_1 z^{-1} U(z)$$

$$\Rightarrow U(z) = \frac{t_0 U_c(z) - Y(z)(s_0 + s_1 z^{-1})}{1 + r_1 z^{-1}} \qquad (\mathrm{II})$$

Substituindo (II) em (I):

$$Y(z)(1-2z^{-1}+z^{-2}) = \frac{(t_0 U_c(z) - Y(z)(s_0+s_1 z^{-1}))\cdot(\alpha z^{-1}+\alpha z^{-2})}{1+r_1 z^{-1}}$$

$$\Rightarrow Y(z)\left(1+(r_1-2)z^{-1}+(1-2r_1)z^{-2}+r_1 z^{-3}\right) = t_0\alpha z^{-1}(1+z^{-1})U_c(z) + Y(z)\left(-\alpha s_0 z^{-1}+\alpha(-s_0-s_1)z^{-2}-\alpha s_1 z^{-3}\right)$$

$$\therefore \frac{Y(z)}{U_c(z)} = \frac{t_0\alpha z^{-1}(1+z^{-1})}{1+(r_1-2+\alpha s_0)z^{-1}+(1-2r_1+\alpha(s_0+s_1))z^{-2}+(r_1+\alpha s_0)z^{-3}}$$

c) Substituindo os valores $r_1 = 0{,}75$ $s_0 = 1{,}25/\alpha$ $s_1 = -0{,}75/\alpha$ $t_0 = 0{,}5/\alpha$

$$\frac{Y(z)}{U_c(z)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{z+1}{z^2}$$

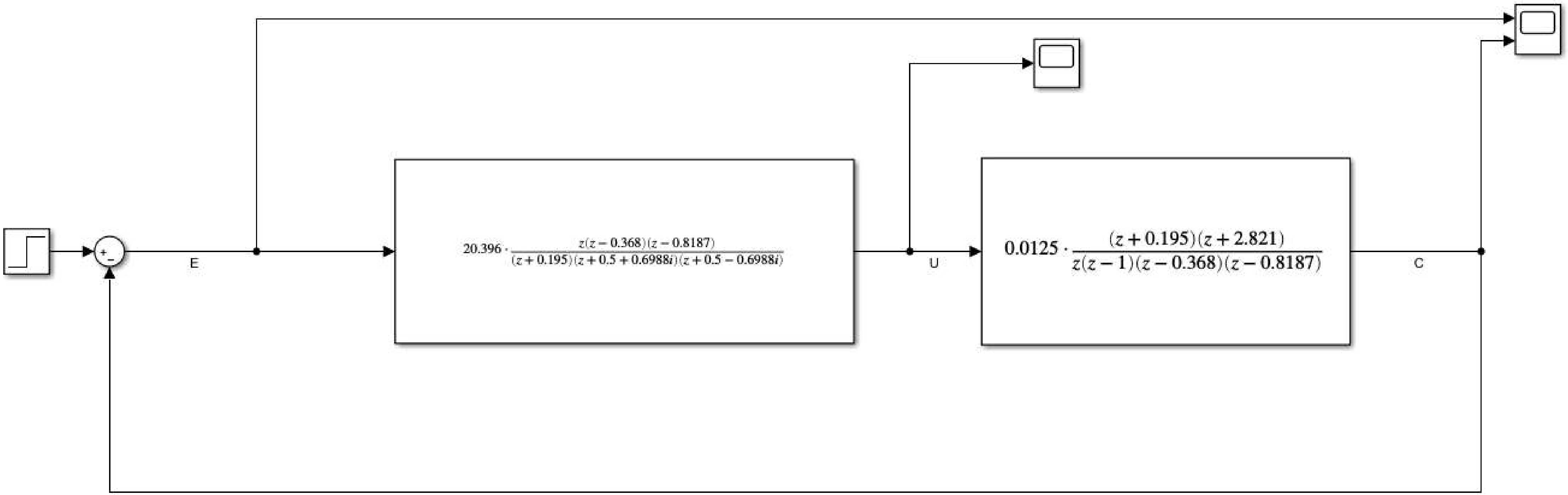
Polo duplo em $z=0$.

Note que: $$\frac{Y(z)}{U_c(z)} = \frac{z^{-1}+z^{-2}}{2}$$

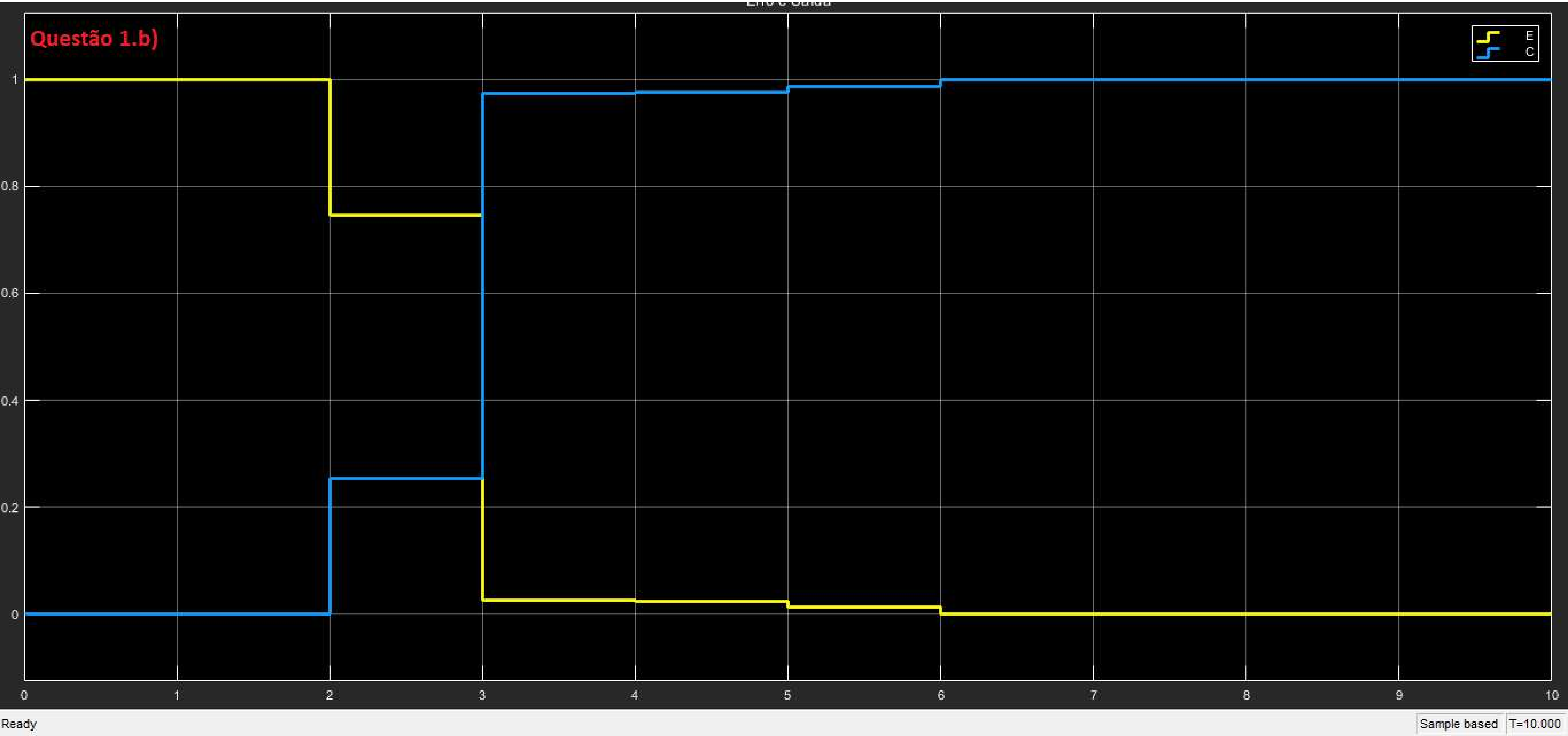
$$\Rightarrow 2\cdot Y(z) = U_c(z)(z^{-1}+z^{-2}) \Rightarrow y[k] = \frac{1}{2}\cdot(U_c[k-1]+U_c[k-2])$$

d) Observa-se que a resposta deadbeat atinge erro nulo por volta de 3 segundos, o que a torna superior aos três controladores discretizados do segundo exercício. É importante notar que a resposta deadbeat tem uma resposta transitória melhor mesmo com período de amostragem maior: $1{,}4/\omega_0$. Vale notar que a terceira discretização do segundo exercício tem $T=1{,}08/\omega_0$ e resposta transitória deteriorada.

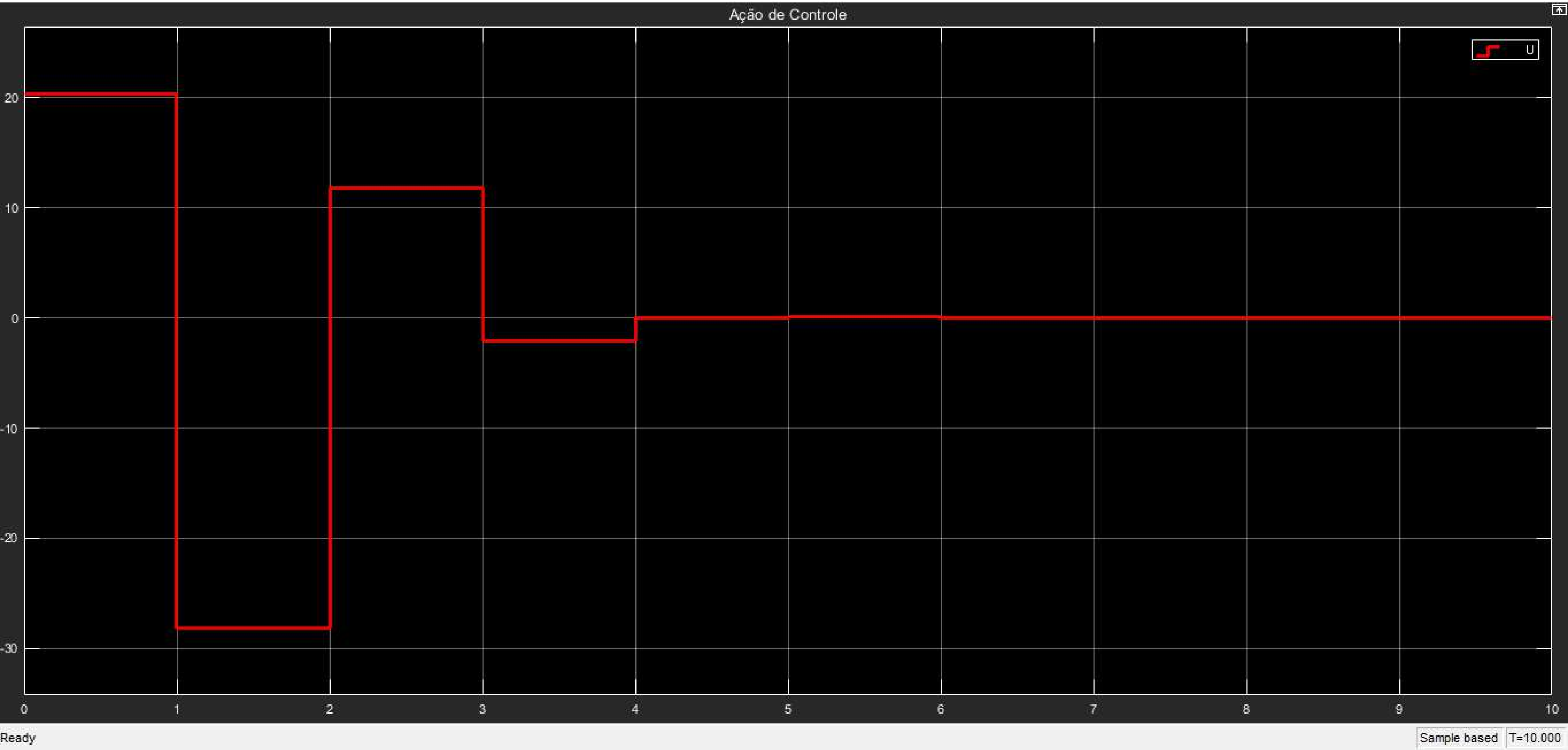
e) Nota-se que por volta de 3 segundos o sinal da ação de controle $u(t)$ se torna nulo. Com isso, observa-se que a resposta $y(t)$ não oscila entre os instantes de amostragem.

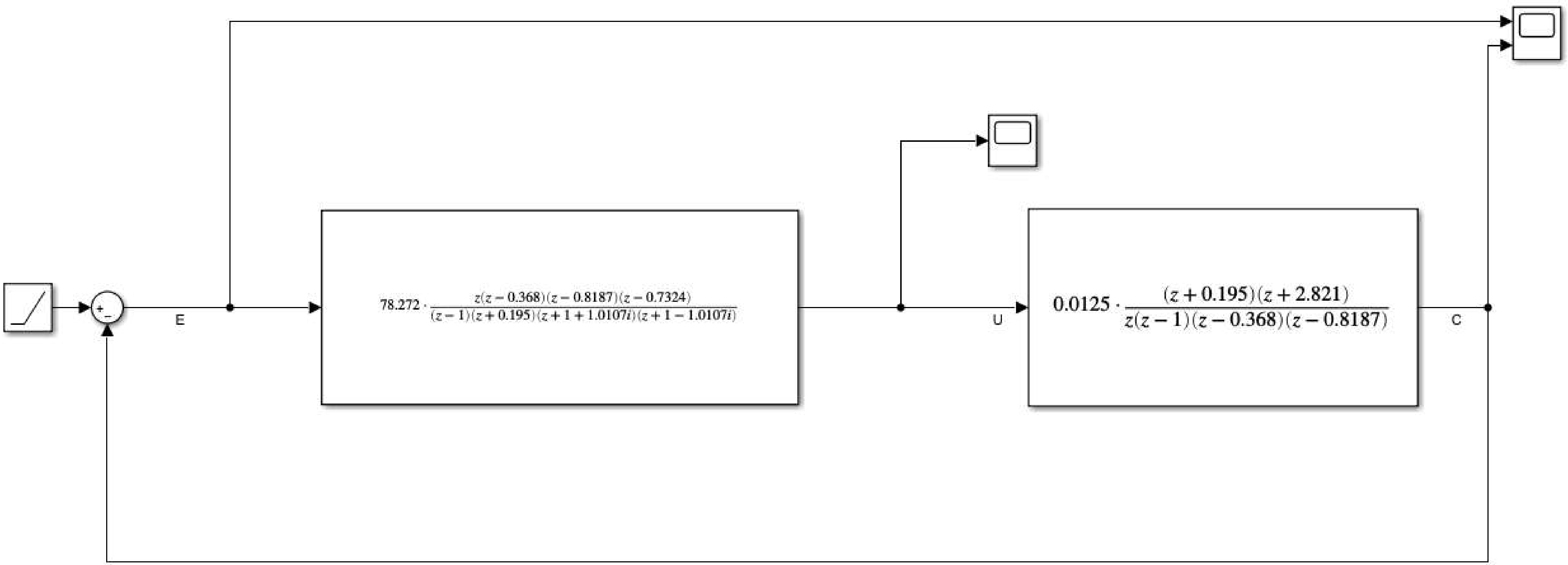


E
$20.396 \cdot \frac{z(z-0.368)(z-0.8187)}{(z+0.195)(z+0.5+0.6988i)(z+0.5-0.6988i)}$
U
$0.0125 \cdot \frac{(z+0.195)(z+2.821)}{z(z-1)(z-0.368)(z-0.8187)}$
C

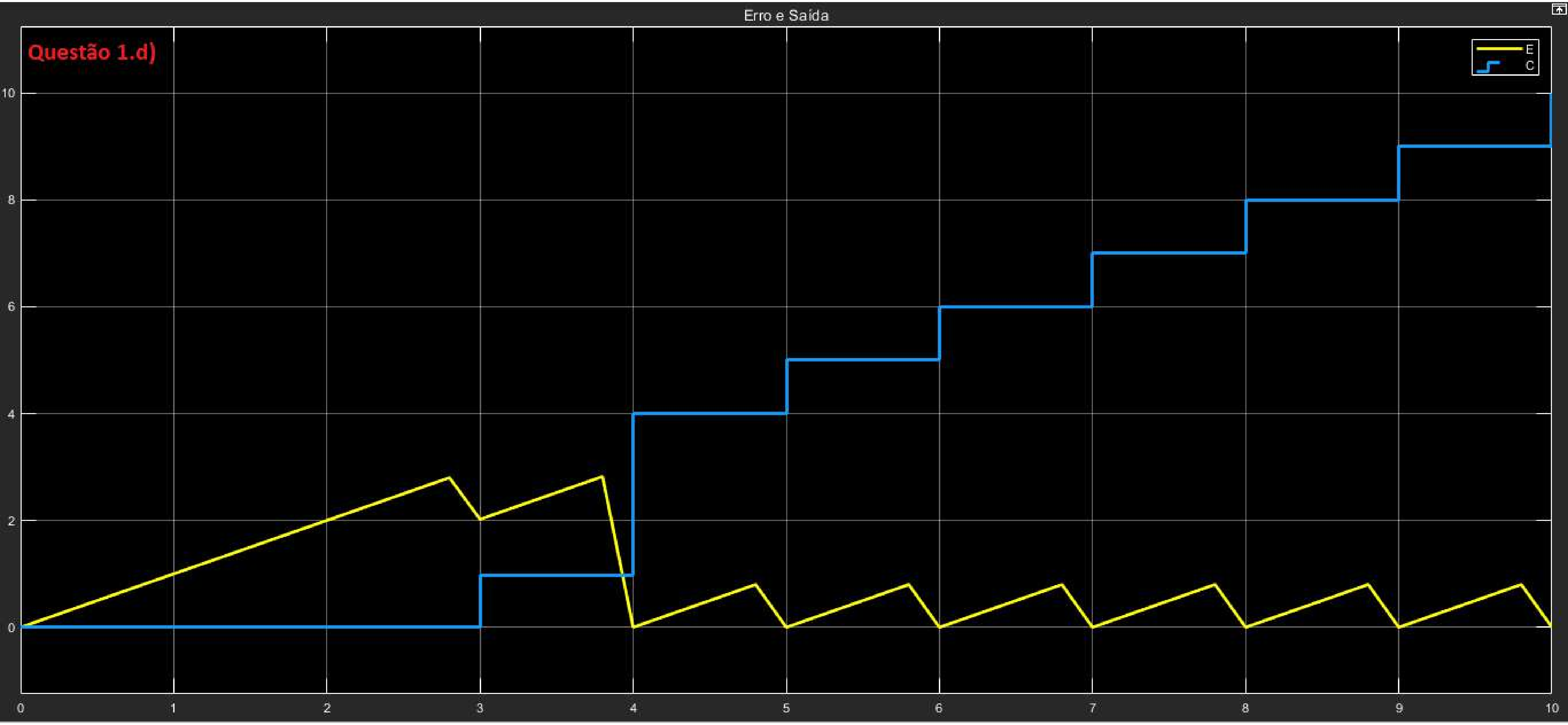


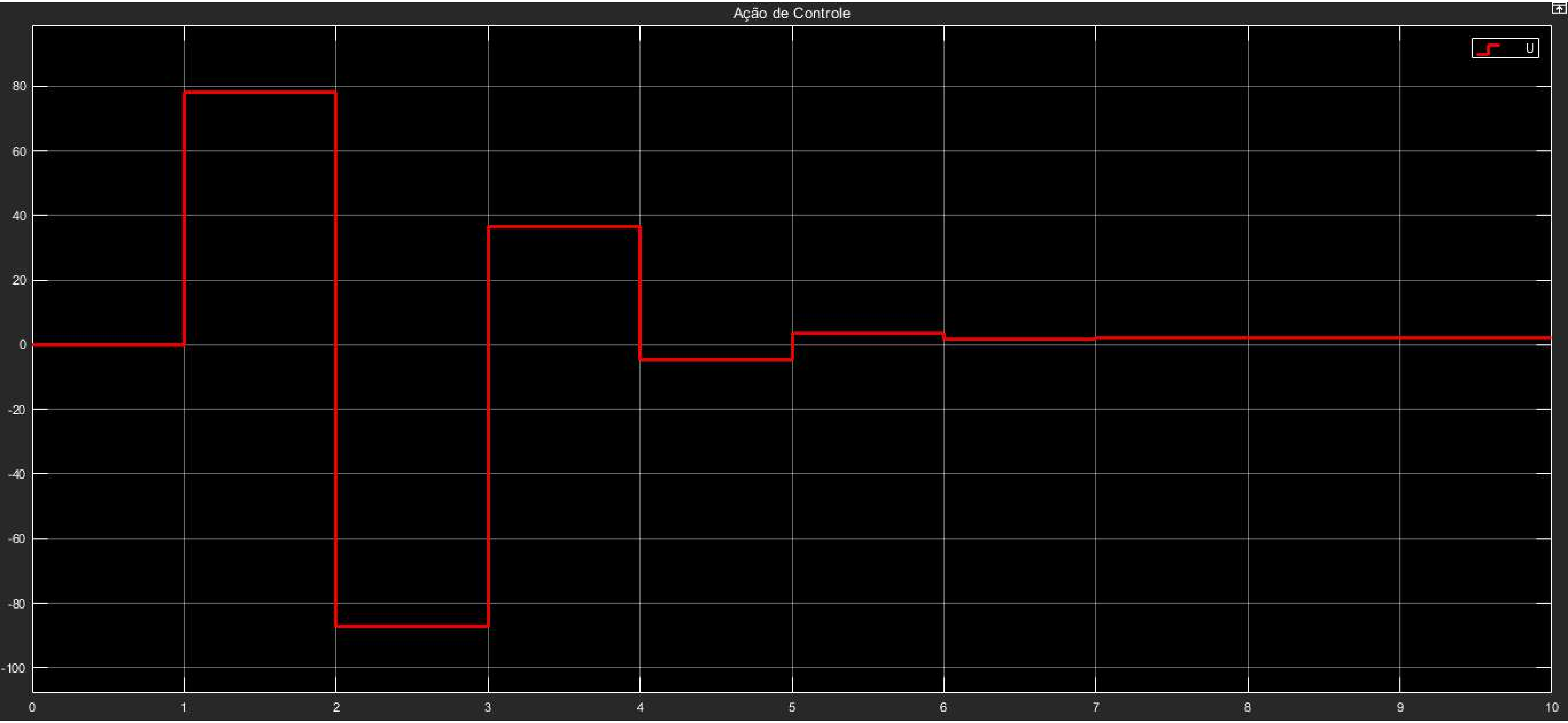
Questão 1.b)
E
C
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Ready
Sample based
T=10.000

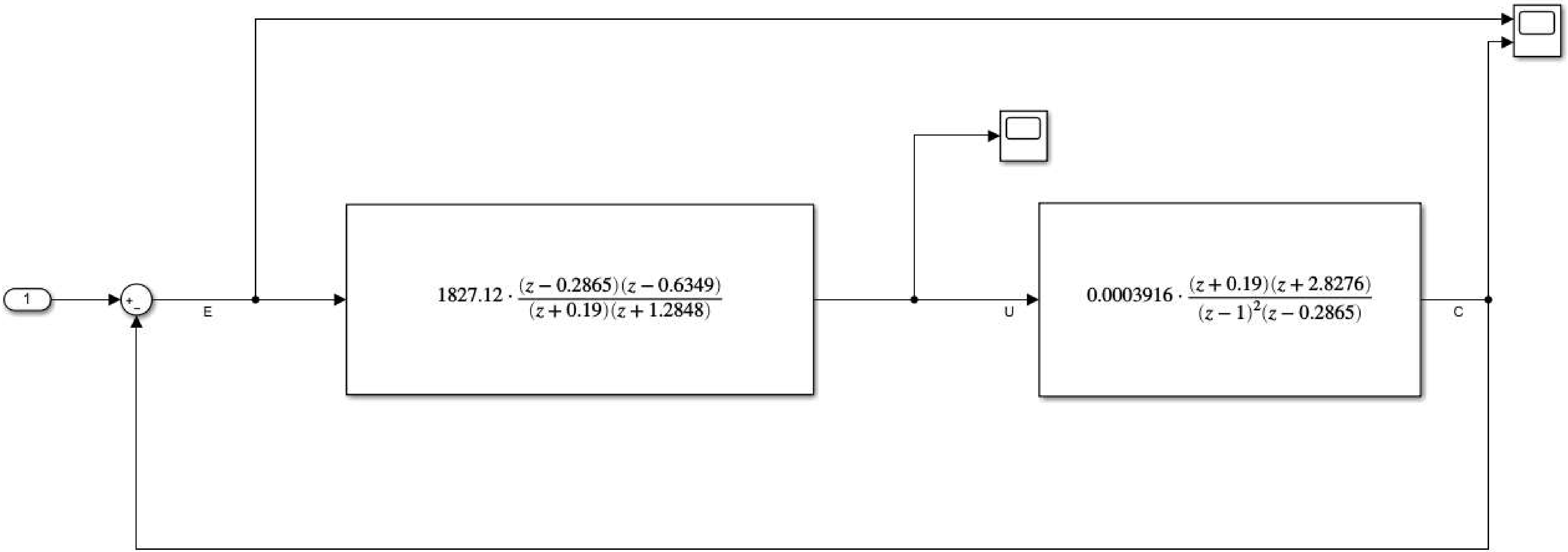

Ação de Controle
U
20
10
0
-10
-20
-30
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Ready
Sample based
T=10.000

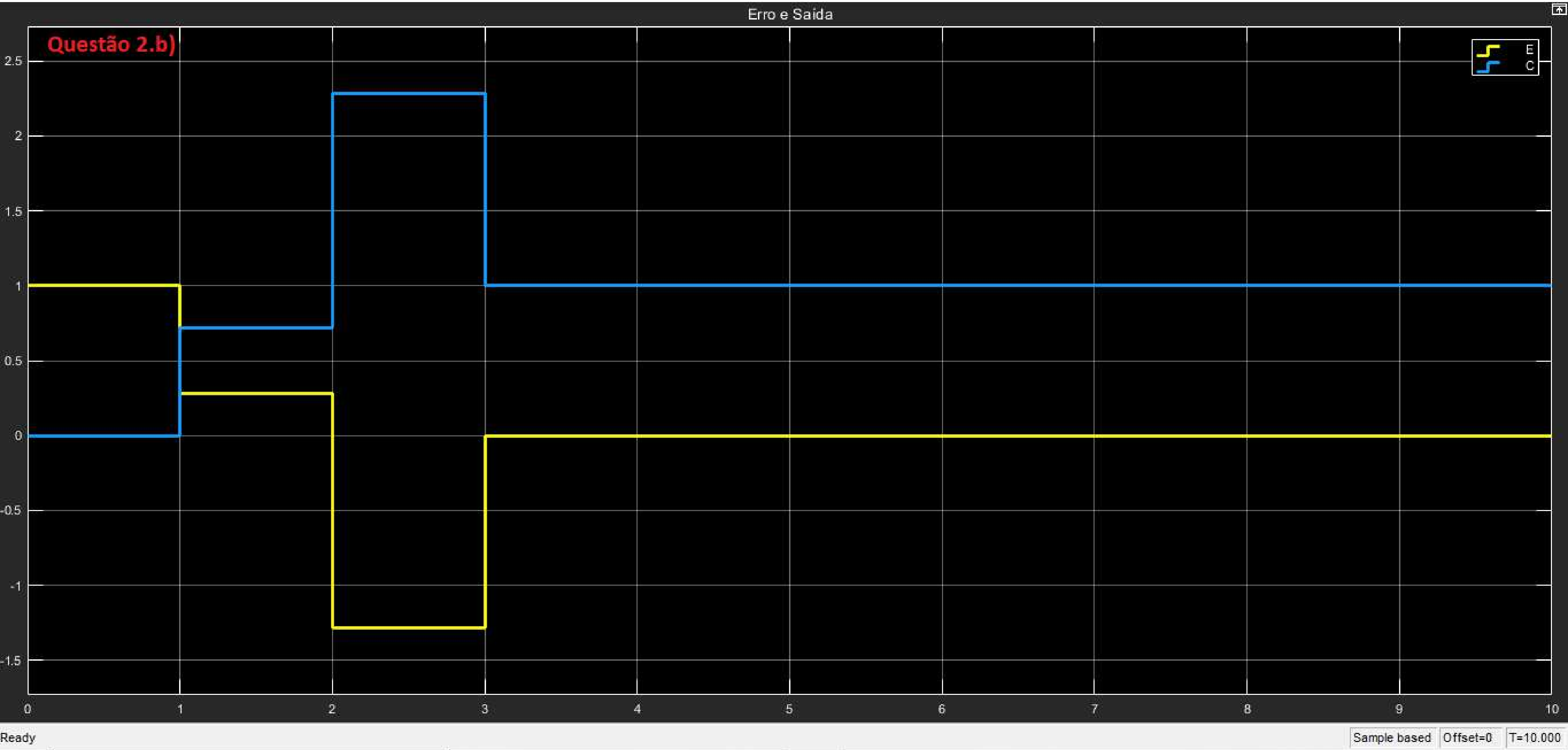


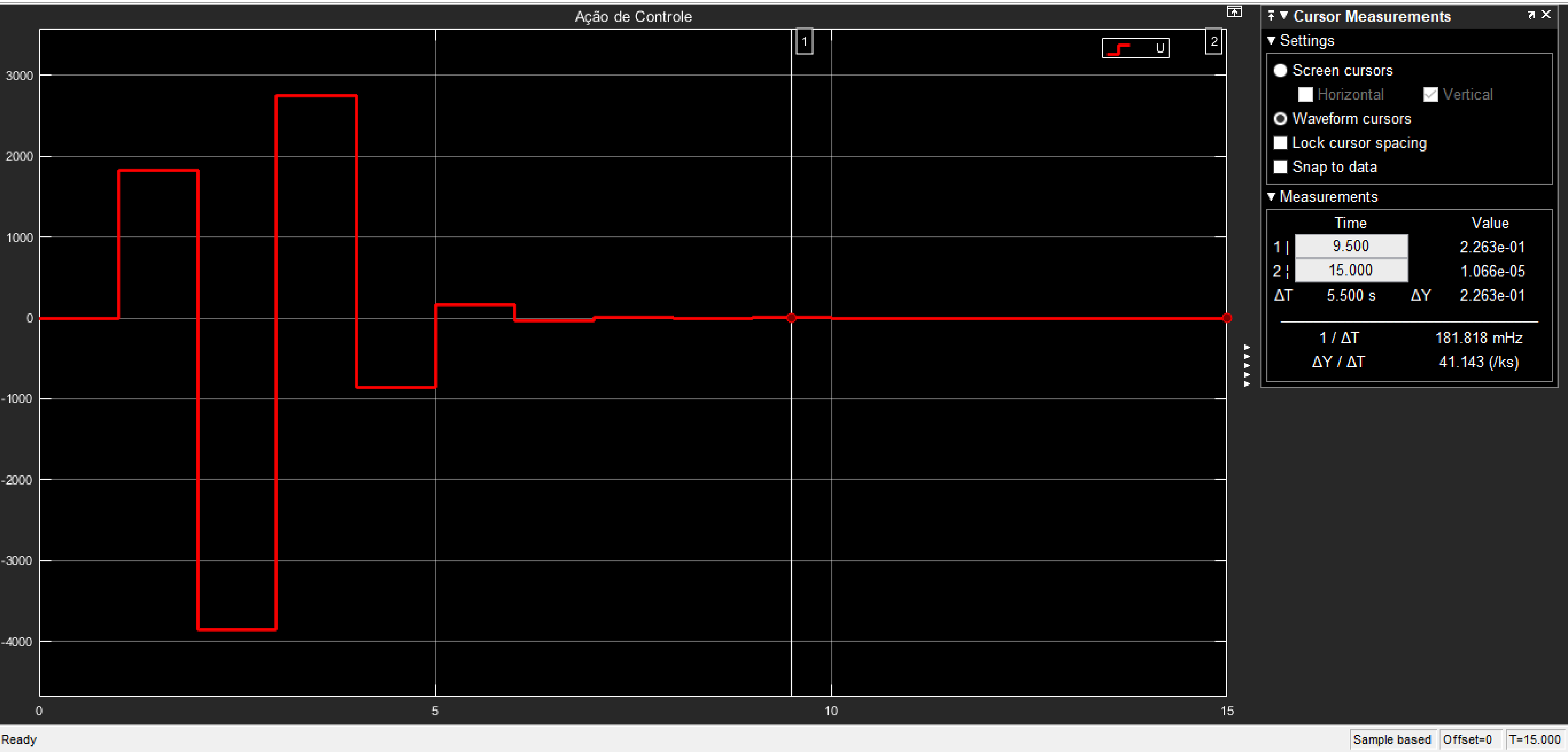
+
_
E
$78.272 \cdot \frac{z(z-0.368)(z-0.8187)(z-0.7324)}{(z-1)(z+0.195)(z+1+1.0107i)(z+1-1.0107i)}$
U
$0.0125 \cdot \frac{(z+0.195)(z+2.821)}{z(z-1)(z-0.368)(z-0.8187)}$
C


Erro e Saída
Questão 1.d)
E
C
10
8
6
4
2
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

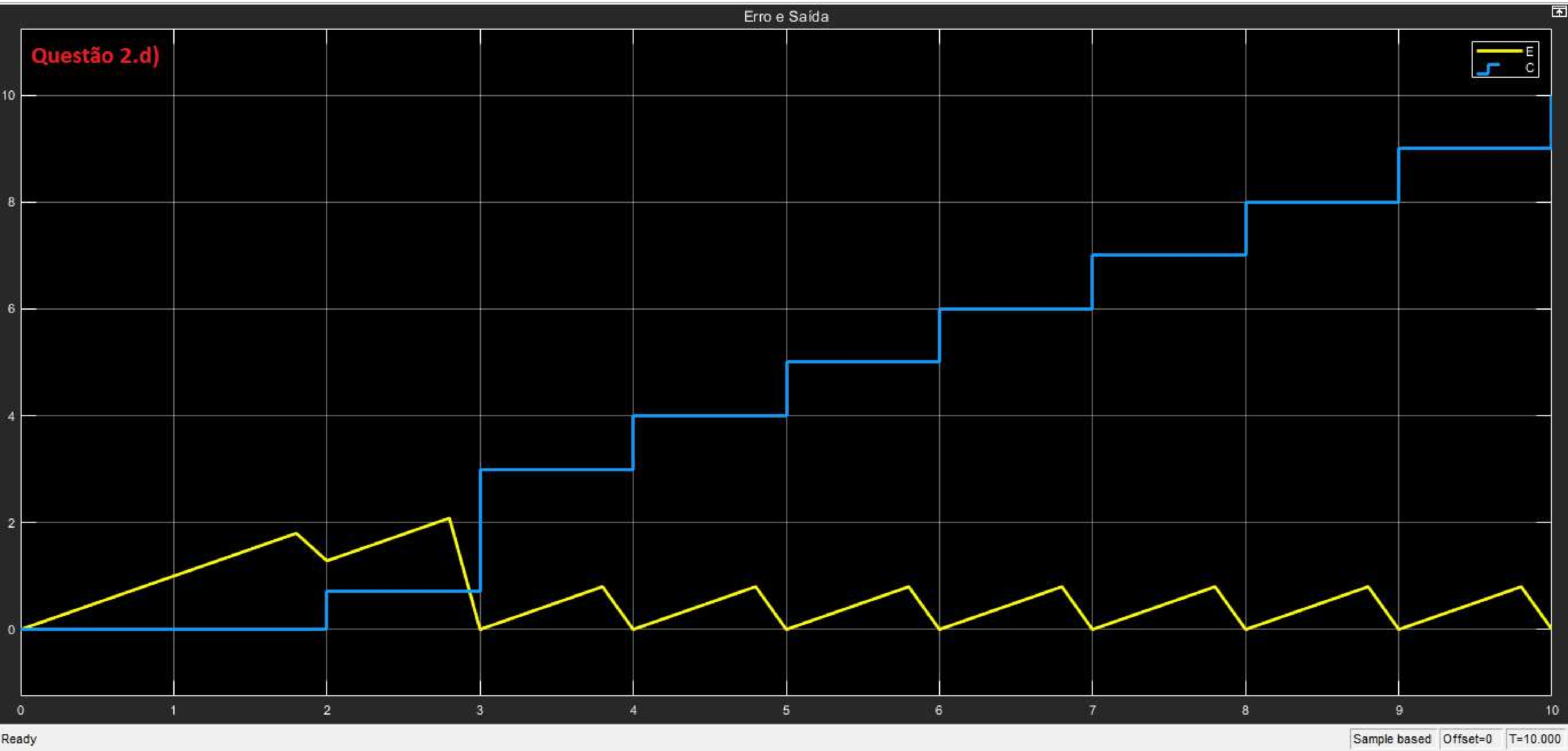

Ação de Controle
U
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

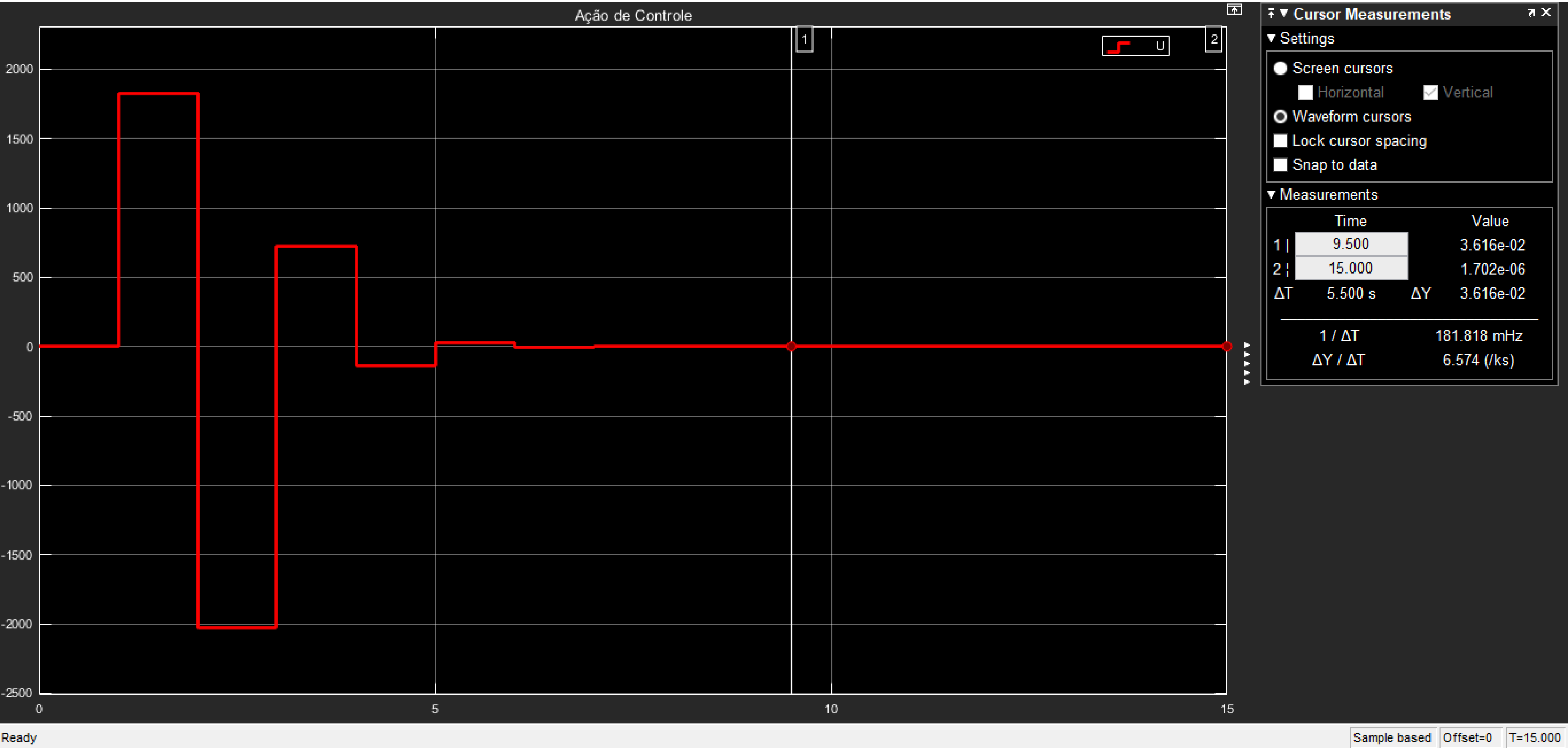

1
E
$1827.12 \cdot \frac{(z-0.2865)(z-0.6349)}{(z+0.19)(z+1.2848)}$
U
$0.0003916 \cdot \frac{(z+0.19)(z+2.8276)}{(z-1)^2(z-0.2865)}$
C


Erro e Saida
Questão 2.b)
E
C
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Ready
Sample based
Offset=0
T=10.000



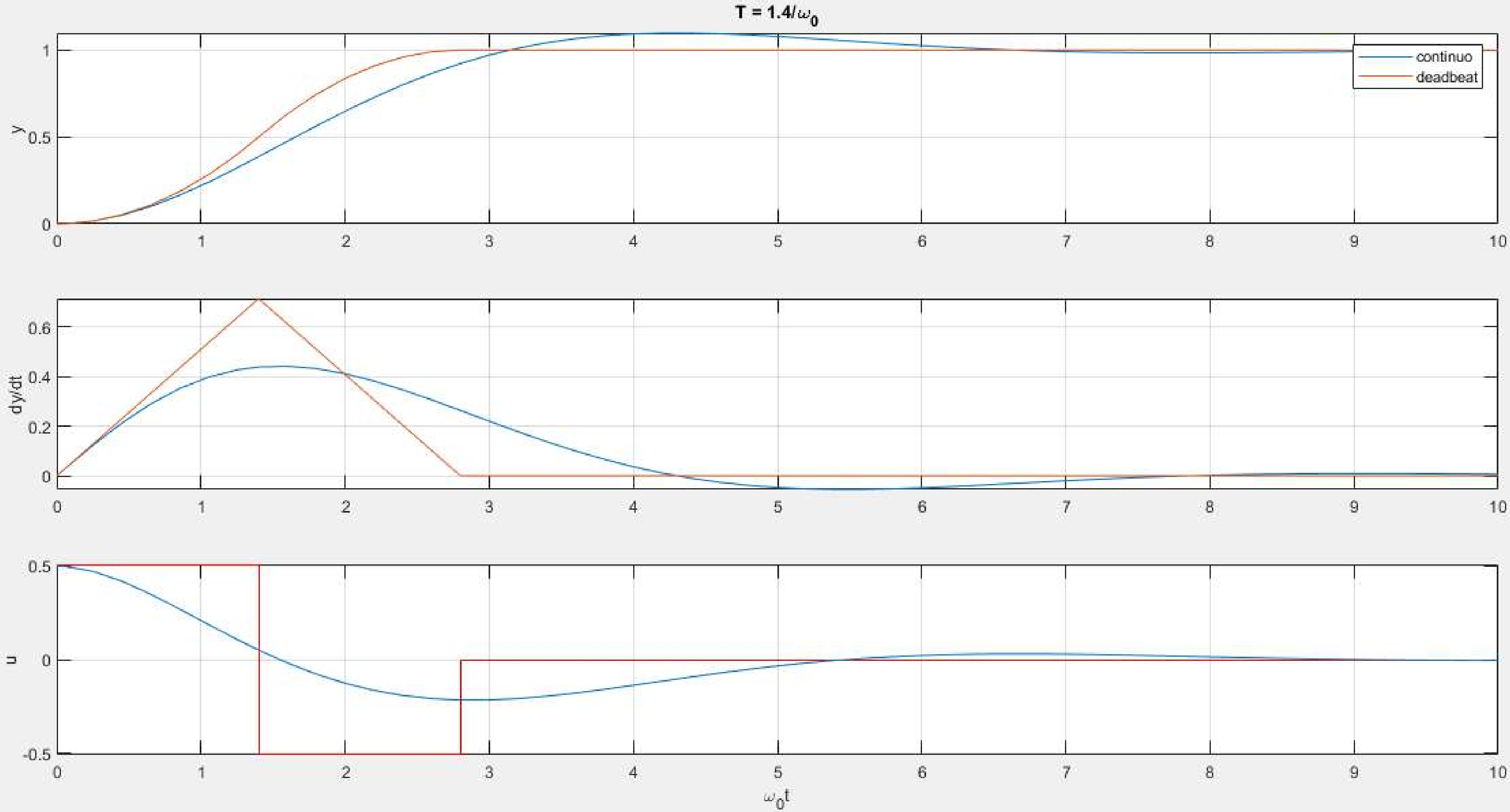
Ação de Controle
U
3000
2000
1000
0
-1000
-2000
-3000
-4000
0
5
10
15
1
2
Cursor Measurements
Settings
Screen cursors
Horizontal
Vertical
Waveform cursors
Lock cursor spacing
Snap to data
Measurements
Time
Value
1 | 9.500 2.263e-01
2 ¦ 15.000 1.066e-05
ΔT 5.500 s ΔY 2.263e-01
1 / ΔT 181.818 mHz
ΔY / ΔT 41.143 (/ks)
Ready
Sample based
Offset=0
T=15.000


Erro e Saída
Questão 2.d)
E
C
10
8
6
4
2
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Ready
Sample based
Offset=0
T=10.000



Ação de Controle
U
2000
1500
1000
500
0
-500
-1000
-1500
-2000
-2500
0
5
10
15
1
2
Cursor Measurements
Settings
Screen cursors
Horizontal
Vertical
Waveform cursors
Lock cursor spacing
Snap to data
Measurements
Time
Value
1 9.500 3.616e-02
2 15.000 1.702e-06
ΔT 5.500 s ΔY 3.616e-02
1 / ΔT 181.818 mHz
ΔY / ΔT 6.574 (/ks)
Ready
Sample based
Offset=0
T=15.000

Questão 3


T = 1.4/ω0
continuo
deadbeat
y
0
0.5
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
dy/dt
0
0.2
0.4
0.6
u
-0.5
0
0.5
ω0t