

Lista 1 - Instrumentação de Controle

Nome: Rodrigo Naves Rios

Matrícula: 1610144094

1a) Histograma na Figura 1. Dados gerados ao final do relatório (Apêndice).

b) $\hat{\mu} = 227,271 \quad \hat{\sigma} = 3,043$

Os valores obtidos de $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}$ diferem de μ e σ , pois foi tomada uma amostra finita da variável aleatória. Espera-se que $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}$ converjam para μ e σ quando o número de amostras tender ao infinito.

c) O valor de $\sigma = 3V$ se explica também pela própria variância da tensão RMS da rede, para além daquela do voltímetro. Nesse sentido, pode-se inferir que o comportamento probabilístico da rede introduz mais variância ao sistema que o instrumento de medição.

2.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Poderemos verificar o resultado para a função distribuição acumulada $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$ para a qual esperamos

$$F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{10} \frac{1}{10} dx = \left[\frac{1}{10} \cdot x \right]_0^{10} = 1$$

b) Histograma na Figura 2.b.

Não, a forma do histograma não é idêntica à função do item "a". Para que isso ocorresse, a frequência relativa de cada intervalo do histograma deveria ser igual. Como foram tomados 1000 somostros, espera-se que haja, de fato, um desrepônia em relação à função do item "a".

c) Observa-se, no histograma, que os valores se limitaram aos intervalos $[4,56, 5,59]$. Isto é natural, uma vez que se tomou o valor médio de uma variável aleatória contínua uniformemente distribuída no intervalo $[0, 10]$, cujo valor intermediário é 5.

3.

a) 0,5 mm. A incerteza na medição não pode ser maior, já que a resolução corresponde à menor mensuração que se pode fazer.

$$b) \bar{X} = 162,25 \pm 0,25 \text{ mm}$$

Incerteza: 0,25 mm. Resolução: 0,5 mm

A diferença entre a resolução e a incerteza se deve ao fato de que o instrumento de medição último (régua) é comológico. Com isso,

c) O paquímetro indicaria uma medida entre 1,60 mm e 1,65 mm, pois ele tem menor divisão em décimos de milímetro.
Resolução = 0,1 mm. Incerteza = 0,05 mm

O motivo é o mesmo do item b).

- d) A resolução e a incerteza permanecem inalteradas
e) A lente altera o valor medido. O paquímetro, a resolução

$$4. O(I) = KI + a + N(I)$$

Da definição de sensibilidade:

$$\frac{dO}{dI} = K + \frac{dN}{dI} \quad (I)$$

Pela condição imposta:

$$\frac{d\Omega}{dI} = K \quad (\text{II})$$

Igualando (I) e (II), temos:

$$\frac{dN}{dI} + K = K \Rightarrow \frac{dN}{dI} = 0 \quad (\text{III})$$

De (III) concluímos que $N(I)$ assume um valor de máximo.

5. $\bar{K} = 3,1 \cdot 10^6 \Omega$; $\bar{\beta} = -2254,473 \text{ K}$; $\sigma_K = 1,2 \cdot 10^5 \Omega$; $\sigma_\beta = 11,94 \text{ K}$

a) $R(\theta) = K \exp\left(\frac{\beta}{\theta}\right)$; $I_{\min} = -55^\circ\text{C} = 218 \text{ K}$; $\theta_{\max}^{I_{\max}} = 120^\circ\text{C} = 393 \text{ K}$; $Q_{\min} = 100 \Omega$; $Q_{\max} = 10 \text{ k}\Omega$

$$K = (Q_{\max} - Q_{\min}) / (I_{\max} - I_{\min}) = 56,57 \Omega \text{ K}^{-1}$$

$$\alpha = Q_{\min} - K \cdot I_{\min} = -1,22 \cdot 10^4 \Omega$$

$$\Rightarrow \Omega(I) = 56,57 \cdot I - 1,22 \cdot 10^4$$

b)

$$R_{\text{ideal}}(\theta) = 56,57 \theta - 1,22 \cdot 10^4$$

$$N(\theta) = R(\theta) - R_{\text{ideal}}(\theta) = K \exp\left(\frac{\beta}{\theta}\right) - 56,57 \theta + 1,22 \cdot 10^4$$

Note que:

$$\frac{dN}{d\theta}(\theta) = -\frac{K\beta \exp(\beta/\theta)}{\theta^2} - 56,57 = \frac{6,99 \cdot 10^9}{\theta^2} \exp\left(-\frac{2254}{\theta}\right) - 56,57$$

$$\frac{d^2N}{d\theta^2} = \frac{(1,58 \cdot 10^{13}) \cdot \exp(-2254/\theta)}{\theta^4} - \frac{1,39}{\theta^2} \exp(-2254/\theta)$$

Observe que $\frac{d^2N}{d\theta^2} > 0 \quad \forall \theta \in [218, 393 \text{ K}]$

Com isso, verifica-se que a função é monótona, portanto o valor máximo absoluto é único.

c) Resolvendo $\frac{dN(\theta)}{d\theta} = 0$, temos:

$$\hat{\theta}_N = 316,9 \text{ K}$$

$$\hat{N} = -3173 \Omega$$

$$\hat{N}_{\% \text{ fsd}} = \frac{\hat{N}}{R_{\max} - R_{\min}} \cdot 100\% = -31,73\%$$

d) $R = K \cdot \exp(\beta/\theta) = 3,1 \cdot 10^6 \cdot \exp(-2254/\theta)$

$$\dot{R}(0) = \frac{dR(0)}{d\theta} = \frac{6,989}{\theta^2} \cdot \exp(-2254/\theta)$$

$$\dot{R}(\hat{\theta}_N) = \dot{R}(316,9) = 56,57 \Omega \text{ K}^{-1}$$

Este é, com efeito, o valor calculado no item a), com esperávomos pela questão 4.

e) $\sigma_R = \sqrt{\frac{\partial R^2}{\partial \beta} \sigma_\beta^2 + \frac{\partial R^2}{\partial K} \sigma_K^2}$

$$\sigma_K = 1,2 \cdot 10^5 \Omega \quad \sigma_\beta = 11,94 \text{ K}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \beta} = \frac{1}{\theta} \cdot \exp(\bar{\beta}/\bar{\theta}) \quad \frac{\partial R}{\partial K} = \exp(\bar{\beta}/\bar{\theta})$$

Para $\bar{\theta} = 100^\circ\text{C} = 373 \text{ K}$: $\frac{\partial R}{\partial \beta} = 19,71 \quad \frac{\partial R}{\partial K} = 0,0024$

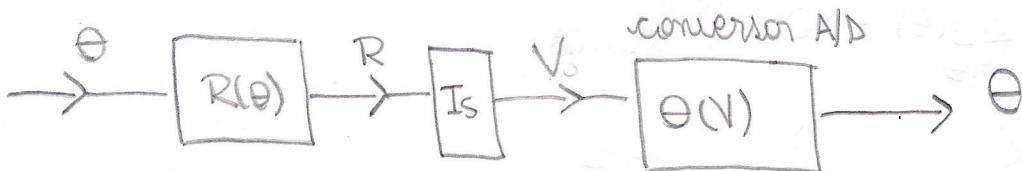
$$\therefore \sigma_R = 369,30 \Omega$$

Para $\bar{\theta} = \hat{\theta}_N = 316,9 \text{ K}$: $\frac{\partial R}{\partial \beta} = 7,951 \quad \frac{\partial R}{\partial K} = 8,13 \cdot 10^{-4}$

$$\therefore \sigma_R = 136,09 \Omega$$

f) Ver Figura 5 f na seção de figuras.

g) O conversor AD pode funcionar como elemento compensador de não linearidade.



$$\Theta(V) = \frac{V}{I_S} \cdot \bar{R}^{-1}(\Theta)$$

$$\text{Note que } R(\Theta) \cdot \bar{R}^{-1}(\Theta) = \Theta$$

h) Introduz-se uma nova fonte de variação no sistema.

Observe que $R(373) = 7352 \Omega$ Para $I_S = 0,1 \text{ mA}$, temos:

$$V = R \cdot I_S = 7,352 \Omega \cdot 0,1 \text{ mA} = 0,7352 \text{ V.}$$

No entanto, a saída do conversor é 0,7352V e a aproximação para 0,7V (perda de informação) levará a uma descrença na temperatura medida.

$$6. \quad R_T = R_0 (1 + \alpha T)$$

$$\bar{R}_0 = 100, \quad \bar{\alpha} = 3,91 \cdot 10^3, \quad \bar{T} = 37^\circ\text{C}, \quad \sigma_{R_0} = 0,29, \quad \sigma_\alpha = 2,94 \cdot 10^{-5}$$

$$\bar{R}_T = \bar{R}_0 (1 + \bar{\alpha} \bar{T}) = 114,5 \Omega$$

$$\frac{\partial R_T}{\partial R_0} = 1 + \bar{\alpha} \bar{T} = 1,145 \quad \frac{\partial R}{\partial \alpha} = \bar{R} \bar{T} = 3700$$

$$\Rightarrow \sigma_{R_T} = \sqrt{\frac{\partial R_T^2}{\partial R_0} \cdot \sigma_{R_0}^2 + \frac{\partial R_T^2}{\partial \alpha} \cdot \sigma_\alpha^2} = 0,3493$$

$$V = V_s \cdot r \left(\frac{R_T}{R_1} - 1 \right) \text{ com: } \begin{cases} \bar{V}_s = 10 & \bar{R}_1 = 100 & \bar{r} = 0,01 \\ \sigma_{V_s} = 0 & \sigma_{R_1} = 0,89 & \sigma_r = 1,94 \cdot 10^{-4} \end{cases}$$

$$\bar{V} = \bar{V}_s \bar{r} \left(\frac{\bar{R}_T}{\bar{R}_1} - 1 \right) = 0,0145$$

$$\frac{\partial V}{\partial R_1} = - \bar{V}_s \bar{r} \frac{\bar{R}_T}{(\bar{R}_1)^2} = -0,0011 \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \bar{V}_s \left(\frac{\bar{R}_T}{\bar{R}_1} - 1 \right) = 0,0144 \quad \frac{\partial V}{\partial R_T} = \bar{V}_s \bar{r} = 0,0144$$

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{\partial V^2}{\partial R_1} \cdot \sigma_{R_1}^2 + \frac{\partial V^2}{\partial r} \cdot \sigma_r^2 + \frac{\partial V^2}{\partial R_T} \cdot \sigma_{R_T}^2} = 0,0011$$

$$n = K_1 V + b_1 \quad K_1 = 6522 \quad \sigma_{K_1} = 0 \quad b_1 = 0 \quad \sigma_{b_1} = 0,5$$

$$\sigma_{b_1} = \sigma_{b_1} / \sqrt{3} = 0,289$$

$$\bar{n}_b = [\bar{K}_1 \bar{N} + \bar{b}_1] = 94 \text{ (com arredondamento)}$$

$$\frac{\partial n}{\partial b_1} = 1 \quad \frac{\partial n}{\partial V} = 6522$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\partial n^2}{\partial b_1} \cdot \sigma_{b_1}^2 + \frac{\partial n^2}{\partial V} \cdot \sigma_V^2} = 3,260$$

$$\Rightarrow \sigma_n = 3,264$$

$$T_m = K_2 n + b_2 \quad \bar{K}_2 = 0,391; \bar{b}_2 = 0; \sigma_{K_2} = \sigma_{b_2} = 0$$

$$\bar{T}_m = \bar{K}_2 \bar{n} + \bar{b}_2 = 36,75$$

$$\frac{\partial T_m}{\partial n} = \bar{K}_2 \quad \sigma_{T_m} = \sqrt{\frac{\partial T_m^2}{\partial n} \cdot \sigma_n^2} = 2,840$$

$$\epsilon = T - \bar{T}_m = 36,75 - 37 = -0,25^\circ C$$

$$\sigma_\epsilon = \sigma_{T_m} = 2,840^\circ C$$

b) $[\bar{T}_m - 3\sigma, \bar{T}_m + 3\sigma] = [28,23^\circ C, 45,28^\circ C]$

Sim, o valor verdadeiro está neste intervalo. No entanto, o sistema de medição não é adequado. Basta olhar o intervalo de confiança ($\approx 99,7\%$) acima para concluir que ele é longo demais para a aplicação.

c) σ_V na fórmula simplificada ($V = V_S R_d T$)

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{\partial V^2}{\partial V_S} \cdot \sigma_{V_S}^2 + \frac{\partial V^2}{\partial r} \cdot \sigma_r^2 + \frac{\partial V^2}{\partial T} \cdot \sigma_T^2}$$

σ_V na fórmula original:

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{\partial V^2}{\partial V_S} \cdot \sigma_{V_S}^2 + \frac{\partial V^2}{\partial r} \cdot \sigma_r^2 + \frac{\partial V^2}{\partial R_T} \cdot \sigma_{R_T}^2 + \frac{\partial V^2}{\partial R_1} \cdot \sigma_{R_1}^2}$$

Observa-se que a primeira expressão não leva em conta os desvios-padrões de R_0 e R_1 . A segunda leva, pois V é função de R_0 e R_1 é função de R_0 .

d) Entrada de Interferência

7.a) Graficamente, podemos obter:

$$T_p = 1,05 \text{ s} \quad M_p = 38,4\% = 0,384$$

Com isso, calculamos ζ e w_n

$$\zeta = -\frac{\ln(M_p)}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(M_p))^2}} = 0,2916$$

$$\omega_d = \frac{\pi}{T_p} = 2,992 \text{ rad/s}$$

$$w_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 3,128 \text{ rad/s}$$

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} = \frac{9,784}{s^2 + 18,24s + 9,784}$$

b) A Figura 7.b mostra o gráfico da função estimada.

Observa-se que ela se ajusta bem aos dados originais.

S.

a) $G_C(s) = K \quad G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \quad H(s) = \frac{1}{\tau_f s + 1}$

Pelo método da álgebra de blocos, escrevemos C/R:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_C(s) \cdot G(s)}{1 + G_C(s) \cdot G(s) H(s)} = \frac{K \tilde{\tau}_F s + K}{\tilde{\tau} \cdot \tilde{\tau}_F s^2 + (\tilde{\tau} + \tilde{\tau}_F) s + K + 1}$$

$$E(s) = R(s) - C(s) = R(s) \left[1 - \frac{K \tilde{\tau}_F s + K}{\tilde{\tau} \cdot \tilde{\tau}_F s^2 + (\tilde{\tau} + \tilde{\tau}_F) s + K + 1} \right]$$

b) Pelo Teo do Valor final:

$$e(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s E(s))$$

$$\lim_{S \rightarrow 0} SE(s) = \lim_{S \rightarrow 0} S \cdot \frac{\tilde{C} \tilde{C}_F s^2 + (\tilde{C} + \tilde{C}_F - K \tilde{C}_F) s + 1}{\tilde{C} \cdot \tilde{C}_F \cdot s^3 + (\tilde{C} + \tilde{C}_F) s^2 + (K+1)s}$$

$$= \frac{1}{K+1} = 0,01 \Rightarrow K = 99$$

c) $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \tilde{C}_F s + K}{\tilde{C} \tilde{C}_F s^2 + (\tilde{C} + \tilde{C}_F) s + K+1}$

Para $R(s)$ de grau unitário:

$$C(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{K \tilde{C}_F s + K}{\tilde{C} \tilde{C}_F s^2 + (\tilde{C} + \tilde{C}_F) s + K+1}$$

Ganho em regime permanente (A):

$$A = \lim_{S \rightarrow 0} S C(s) = \frac{K}{K+1}$$

Da expressão $(Y(s)/R(s))$ podemos encontrar ξ e ω_n :

$$\omega_n^2 = \frac{K+1}{\tilde{C} \tilde{C}_F} \quad \xi = \frac{1}{2\omega_n} \cdot \frac{\tilde{C} + \tilde{C}_F}{\tilde{C} \tilde{C}_F}$$

Para $\tilde{C} = 10 \text{ s rad}^{-1}$, $\tilde{C}_F = 2 \text{ s rad}^{-1}$ e $K = 99$, temos:

$$\omega_n = 2,236 \text{ rad/s} \quad \xi = 0,1342$$

d) $C(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\frac{K}{\tilde{C}} s + \frac{K}{\tilde{C} \tilde{C}_F}}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} \left[\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} + \frac{\frac{K}{\tilde{C}} s - \frac{1}{\tilde{C} \tilde{C}_F}}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \right]$

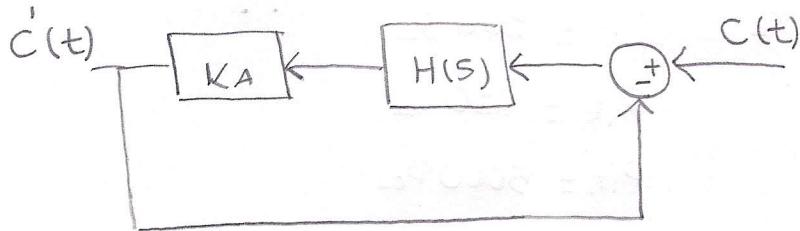
$$C(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(s)\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\xi \omega_n t} \cdot \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \phi_1) + \\ + \frac{1}{\tilde{C} \tilde{C}_F \omega_n^2} + \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sqrt{\frac{(\frac{1}{\tilde{C} \tilde{C}_F} - \xi \omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)}{\omega_n^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \phi_2)$$

Gráficamente podemos encontrar M_p e T_p da resposta $c(t)$:

$$M_p = 3,5$$

$$T_p = 0,72$$

e) Abaixo, o recorte do sistema de medição



$$\frac{C'(s)}{C(s)} = H_2(s) = \frac{K_A H(s)}{1 + K_A H(s)} = \frac{K_A}{\tilde{\tau}_F s + K_A + 1}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_C(s) G(s)}{1 + G_C(s) G(s) H_2(s)} = \frac{K \tilde{\tau}_F s + K + K K_A}{\tilde{\tau}^2 \tilde{\tau}_F s + (\tilde{\tau} + \tilde{\tau}_F + K_A \tilde{\tau}) s + K_A + K K_A + 1}$$

Nova constante de tempo:

$$H_2(s) = \frac{K_A}{\tilde{\tau}_F s + K_A + 1} = \frac{\frac{K_A}{K_A + 1}}{\frac{\tilde{\tau}_F}{K_A + 1} s + 1} \Rightarrow \tilde{\tau}_{F\text{ novo}} = \frac{\tilde{\tau}_F}{K_A + 1}$$

Nova sensibilidade:

$$\lim_{s \rightarrow 0} H_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{K_A}{\tilde{\tau}_F s + K_A + 1} \right] = \frac{K_A}{K_A + 1}$$

$$f) \tilde{\tau}_{F\text{ novo}} = \frac{\tilde{\tau}_F}{K_A + 1} = \frac{2}{K_A + 1} = 0,2 \Rightarrow K_A = 9$$

Com isso, a resposta transitoria fica mais rápida, como vemos:

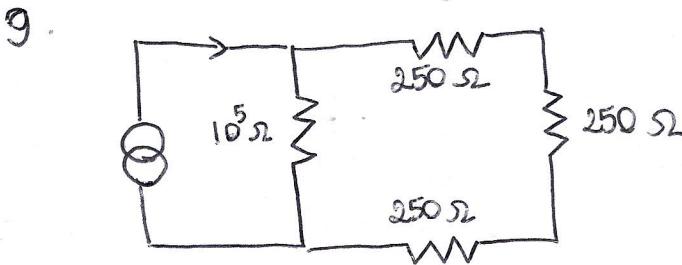
	ζ	ω_n	Mp%	Tp
Sistema antigo	0,134	2,24	353%	0,703
Sistema novo	0,380	6,71	59,9%	0,307

Erro em regime permanente:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{s} - \frac{K \tilde{\tau}_F s + K + K K_A}{\tilde{\tau} \cdot \tilde{\tau}_F^2 + (\tilde{\tau} + \tilde{\tau}_F + K_A \tilde{\tau}) s + K_A + K K_A + 1} \right]$$

$$= 1 - \frac{K + K K_A}{K_A + K K_A + 1} = -0,0988$$

g) Rode-se projeto um compensador em avanco-atraso.



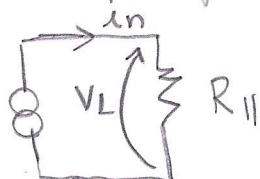
$$R_N = 10^5 \Omega$$

$$R_C = 500 \Omega$$

$$R_R = 250 \Omega$$

$$P_{in} = 5000 \text{ Pa}$$

Circuito equivalente



$$R_{II} = (R_C + R_R) \parallel R_N$$

$$\Rightarrow R_{II} = \frac{R_N (R_C + R_R)}{R_N + R_C + R_R}$$

Divisor de tensão:

$$V_R = \frac{R_R R_{II} \cdot V_L}{R_C + R_R + R_{II}} = \frac{R_R}{R_C + R_R} \cdot R_{II} \cdot i_{in} = \frac{R_N}{R_N + R_C + R_R} \cdot R_R i_{in}$$

Substituindo os valores: $V_R = 0,9926 \cdot \bar{V}$, onde $\bar{V} = R_R i_{in}$

Equação do transmissor:

$$K_L = (20 \text{ mA} - 4 \text{ mA}) / 10^4 \text{ Pa} = 1,6 \cdot 10^3 \text{ mA/Pa}$$

$$a_1 = 4 \text{ mA}$$

$$i = K_L \cdot P_{in} + a_1 = 1,6 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 = 0,012 \text{ A}$$

Equação indicador

$$K_2 = 10^4 / (5-1) = 2500 \text{ Pa/V}$$

$$a_2 = -2500 \cdot 1 = -2500 \text{ Pa}$$

Tensão verdadeira:

$$\bar{V} = R_R \cdot i = 250 \cdot 0,012 = 3 \text{ V} \Rightarrow \bar{P} = K_2 \bar{V} + a_2 = 2500 \cdot 3 - 2500$$

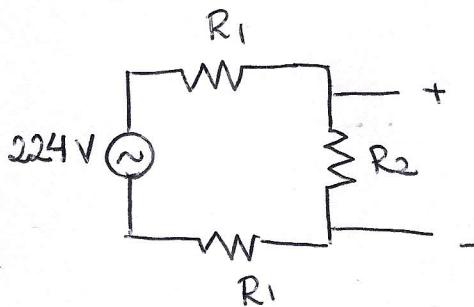
$$= 5000 \text{ Pa}$$

Tensão medida:

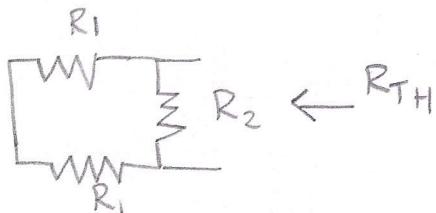
$$V_R = 0,9926 \bar{V} = 2,978 \text{ V} \Rightarrow P_m = K_2 V_R + a_2 = 4,944 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$\epsilon = P_m - \bar{P} = 4,944 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^3 = -56 \text{ Pa}$$

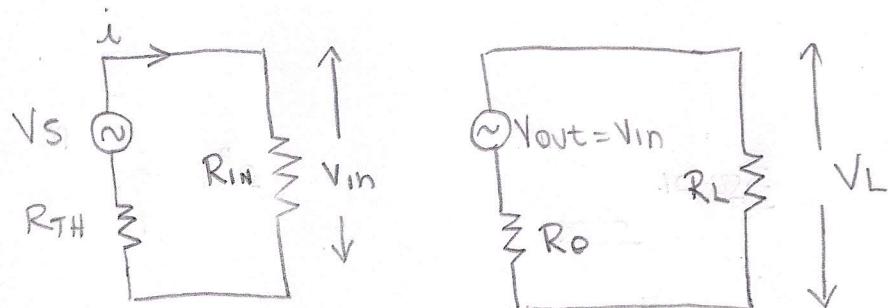
10.



a)



$$R_{TH} = 2R_1 \parallel R_2 = \frac{2R_1 R_2}{2R_1 + R_2}$$



$$V_{in} = \frac{R_{IN}}{R_{TH} + R_{IN}} \cdot V_s \quad V_L = \frac{R_L}{R_o + R_L} \cdot V_{in}$$

$$\Rightarrow V_L = \frac{R_{IN}}{R_{TH} + R_{IN}} \cdot \frac{R_L}{R_o + R_L} \cdot V_{in}$$

b)

$$\frac{\frac{10^9}{R_{TH} + 10^9} \cdot \frac{10^4}{100 + 10^4} \cdot 224}{2,5} \Rightarrow R_{TH} = 8,77 \cdot 10^9 \Omega$$

Corrente no transmissor: $i = V_s / R_{TH} = 5,17 \cdot 10^{-9} A$

Escolhendo $P_{R2} = 5W \Rightarrow R_2 = 5/i^2 = 1,87 \cdot 10^7 \Omega$

$$R_{TH} = 8,77 \cdot 10^9 = \frac{2 \cdot R_1 R_2}{2R_1 + R_2} \Rightarrow R_1 = 4,34 \cdot 10^{10} \Omega$$

$$P_{R2} = 1,157 \cdot 10^{-6} W < 1/8 W$$