
SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES NO LINEALES

INTRODUCCIÓN

MÉTODO DE BISECCION

METODO DE PUNTO FIJO

MÉTODO DE NEWTON RAPSHON

MÉTODO DE LA SECANTE

MÉTODO DE POSICON FALSA

ACELERACIÓN DE LA CONVERGENCIA

RAÍCES COMPLEJAS

INTRODUCCIÓN

En el campo de la tecnología principalmente en la ingeniería nos encontramos generalmente con el siguiente problema:

Determinar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, (en el caso de una variable)

Para dar solución a estos problemas existen distintos algoritmos o métodos para encontrar las raíces, pero debemos tener en cuenta que **ninguno es general**, pues en otras palabras no existe un método que funcione con todas las ecuaciones perfectamente.

Sólo será posible obtener las raíces exactas de $f(x) = 0$, es decir cuando se trata de $f(x)$ factorizable, en tal sentido tenemos:

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$$

Donde $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$; son las raíces de la ecuación es decir la solución al problema planteado.

Métodos Cerrados:

Se ocupa de métodos que aprovechan el hecho de que una función cambia de signo en la vecindad de una raíz. A estas técnicas se les llama *métodos cerrados*, o de *intervalos*, porque se necesita de dos valores iniciales para la raíz. Como su nombre lo indica, dichos valores iniciales deben “encerrar”, o estar a ambos lados de la raíz. Los métodos particulares descritos aquí emplean diferentes estrategias para reducir sistemáticamente el tamaño del intervalo y así converger a la respuesta correcta, por ejemplo el método de Bisección

Métodos Abiertos

Se parte de una aproximación inicial y tienen un cierto radio de convergencia. En general lo hacen mucho más rápido que los métodos cerrados. Por ejemplo, método del punto fijo, Newton, Secante, entre otros

Método Gráfico:

Un método simple para obtener una aproximación a la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ consiste en graficar la función y observar dónde cruza el eje x . Este punto, que representa el valor de x para el cual $f(x) = 0$, **ofrece una aproximación inicial de la raíz**

Método de Bisección

Supongamos que se tiene una función continua en el intervalo $[a, b]$ y de tal manera que $f(a) \cdot f(b) < 0$ esto quiere decir que $f(x)$ tiene un cero en el intervalo abierto (a, b) .

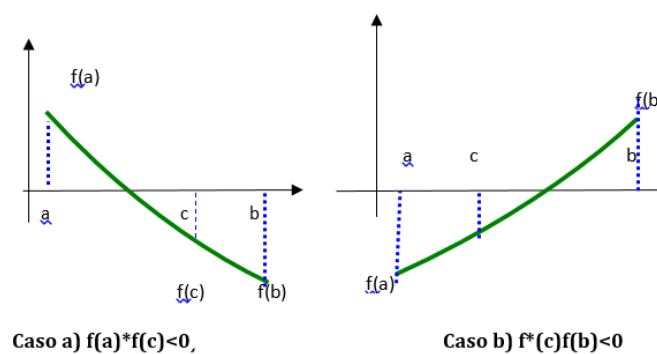
Lo anterior se basa en el teorema:

Teorema de Bolzano

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ continua en } [a, b], \\ f(a) \cdot f(b) < 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Existe un } \alpha \in (a, b) \text{ tal que } f(\alpha) = 0.$$

Los *métodos de búsqueda incremental* aprovechan esta característica localizando un intervalo en el que la función cambie de signo. Entonces, la localización del cambio de signo (y, en consecuencia, de la raíz) se logra con más exactitud al dividir el intervalo en varios subintervalos. Se investiga cada uno de estos subintervalos para encontrar el cambio de signo. El proceso se repite y la aproximación a la raíz mejora cada vez más en la medida que los subintervalos se dividen en intervalos cada vez más pequeños.

Interpretación Gráfica



En general el método se puede resumir en el siguiente pseudocódigo:

Paso 1: Elija valores iniciales inferior, x_l , y superior, x_u , que encierren la raíz, de forma tal que la función cambie de signo en el intervalo. Esto se verifica comprobando que $f(x_l) \cdot f(x_u) < 0$.
 Paso 2: Una aproximación de la raíz x_r se determina mediante:

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

 Paso 3: Realice las siguientes evaluaciones para determinar en qué subintervalo está la raíz:
 a) Si $f(x_l) \cdot f(x_r) < 0$, entonces la raíz se encuentra dentro del subintervalo inferior o izquierdo. Por lo tanto, haga $x_u = x_r$ y vuelva al paso 2.
 b) Si $f(x_l) \cdot f(x_r) > 0$, entonces la raíz se encuentra dentro del subintervalo superior o derecho. Por lo tanto, haga $x_l = x_r$ y vuelva al paso 2.
 c) Si $f(x_l) \cdot f(x_r) = 0$, la raíz es igual a x_r ; termina el cálculo.

EJEMPLO

Determinar una raíz real del polinomio $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$, considerando un error de tamaño: 10^{-3}

Solución

El primer paso es determinar los valores de a y b donde la función cumple las condiciones del teorema, en particular que se produzca un cambio de signo dado que la función es continua en todo real.

Considerando el razonamiento del método observamos que en el intervalo $[1,2]$ existe una raíz de la funcional. En este caso nuestros valores de $a = 1$, $b = 2$

Segundo, determinamos el número de iteraciones n considerando la siguiente relación

$$n = \frac{\ln(a) - \ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$$

Ejercicio:

Demostrar la fórmula anterior

En donde a es la longitud del intervalo, en nuestro caso $n = \frac{\ln(2 - 1) - \ln(10^{-3})}{\ln(2)} = 7$

Tercero determinar el punto medio de la primera iteración determinando

$$c = (2+1) / 2 = 1.5; f(1.5) = (1.5)^3 + 2*(1.5)^2 + 10(1.5) - 20 = 2.88$$

Observamos que $f(c) = 2.88 > 0$ distinto signo que $f(a)$ luego reemplazamos el valor de b por el valor de c es decir se tiene el siguiente intervalo $(1, 1.5)$, entonces

Segunda Iteración:

$$c = \frac{1+1.5}{2} = 1.25;$$

$$f(1.25) = (1.25)^3 + 2*(1.25)^2 + 10*(1.25) - 20 = -2.42$$

Observamos que $f(c) = -2.42 < 0$ reemplazamos el valor de a por el valor de c es decir se tiene el siguiente intervalo $(1.25, 1.5)$.

En el siguiente cuadro que contiene las 7 iteraciones deseadas en donde denotaremos

| k | a_k | b_k | c_k | $ C_k - C_{k+1} $ | $ f(C_k) $ |
|---|---------|---------|---------|-------------------|------------|
| 0 | 1.00000 | 2.00000 | | | |
| 1 | 1.00000 | 2.00000 | 1.50000 | 0.25000 | 2.87500 |
| 2 | 1.00000 | 1.50000 | 1.25000 | 0.12500 | 2.42188 |
| 3 | 1.25000 | 1.50000 | 1.25000 | 0.06250 | 2.42188 |
| 4 | 1.25000 | 1.37500 | 1.37500 | 0.03125 | 0.13086 |
| 5 | 1,31250 | 1.37500 | 1,31250 | 0.01563 | 0.52481 |
| 6 | 1.34375 | 1.37500 | 1.34375 | 0.00781 | 0.19846 |
| 7 | 1.35938 | 1.37500 | 1.35938 | 0.00395 | 0.03417 |

| | | | | | |
|---|---------|---------|---------|---------|---------|
| 8 | 1.36719 | 1.37500 | 1.36719 | 0.00195 | 0.04825 |
| 9 | 1.36719 | 1.37109 | 1.37109 | 0.00098 | 0.00702 |

Cota superior de error

Proposición En la fase n , el error del método de la bisección cumple:

$$|e_n| = |\alpha - c_n| \leq \frac{b_1 - a_1}{2^n}.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} |e_1| &\leq \frac{b_1 - a_1}{2}, \\ |e_2| &\leq \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{b_1 - a_1}{4}, \\ |e_3| &\leq \frac{b_3 - a_3}{2} = \frac{b_2 - a_2}{4} = \frac{b_1 - a_1}{8}. \end{aligned}$$

De forma análoga, resulta

$$|e_4| \leq \frac{b_1 - a_1}{16} = \frac{b_1 - a_1}{2^4}, \quad |e_5| \leq \frac{b_1 - a_1}{32} = \frac{b_1 - a_1}{2^5},$$

y en general

$$|e_n| = |\alpha - c_n| \leq \frac{b_1 - a_1}{2^n}. \quad \square$$

Estimación del error

La estimación del error se puede calcular cuando el error verdadero cuente por debajo de algún nivel prefijado. Esta estrategia en algunos casos es inconveniente, dado que se basa en el valor verdadero de la raíz de la función. Luego, en forma real sino se conoce el verdadero valor de la raíz, se puede calcular el error relativo porcentual ε_α

$$\varepsilon_\alpha = \left| \frac{x_r^{\text{nuevo}} - x_r^{\text{anterior}}}{x_r^{\text{nuevo}}} \right| 100\%$$

Luego, el procedimiento termina cuando $\varepsilon_\alpha < \text{valor prefijado}$

Ejercicio:

Utilice el método gráfico y de bisección para determinar el coeficiente de arrastre c necesario para que un paracaidista de masa $m = 68.1$ kg tenga una velocidad de 40 m/s después de una caída libre de $t = 10$ s.
Nota: La aceleración de la gravedad es 9.8 m/s²

MÉTODO DE PUNTO FIJO

Este método es conocido también como aproximaciones sucesivas de iteración funcional. Dado que el problema es encontrar r tal que $f(r) = 0$

A partir de $f(x)$ se transforma a $g(x) = x$. Esta transformación se realiza mediante operaciones algebraicas o simplemente sumando x a cada lado de la ecuación original.

Por ejemplo,

Sea $f(x) = 2x^2 - x - 5 = 0$

Se pueden obtener diversas funciones

$$a) \ x = 2x^2 - 5; \quad b) \ x = \sqrt{\frac{x+5}{2}}, \quad c) \ x = \frac{5}{2x-1}; \quad d) \ x = x - \frac{2x^2 - x - 5}{4x - 1}$$

Una vez determinado la expresión algebraica equivalente, el paso que se debe de seguir es; determinar un valor inicial que debe estar cerca de la raíz exacta.

Para decir en nuestros ejemplos tenemos que en $x = 2$ son valores cercanos a una raíz se denota por X_0 . En general para determinar este valor inicial se recomienda bosquejar una gráfica de dicha ecuación, claro está si es posible.

Terminado el segundo paso se evalúa la relación encontrada en x_0 denotándose el resultado de esta evaluación como x_1 , esto es $g(x_0) = x_1$

El siguiente paso es comparar x_1 con x_0 , resultando dos alternativas:

Primera Alternativa. Que $x_1 = x_0$

Esto quiere decir que el valor que se ha elegido como valor inicial es una raíz de $f(x)$ y el problema termina.

Segunda Alternativa. Que $x_1 \neq x_0$

Este es el caso más frecuente e indica que x_1 y x_0 son diferentes de la raíz. Entonces el resultado se le denota con x_2 es decir, $x_2 = g(x_1)$, esto se repite de manera iterativa obteniendo el siguiente esquema:

| | | |
|---------------|--------------------|--------------|
| Valor inicial | x_0 | $f(x_0)$ |
| Iteración 1 | $x_1 = g(x_0)$ | $f(x_1)$ |
| Iteración 2 | $x_2 = g(x_1)$ | $f(x_2)$ |
| Iteración 3 | $x_3 = g(x_2)$ | $f(x_3)$ |
| | : | |
| Iteración k | $x_k = g(x_{k-1})$ | $f(x_k)$ |
| Iteración k+1 | $x_{k+1} = g(x_k)$ | $f(x_{k+1})$ |

La utilidad de la ecuación de $x = g(x)$ es que proporciona una fórmula para predecir un nuevo valor de x en función del valor anterior. De esta manera, dado un valor inicial para la

raíz x_i , la ecuación $x = g(x)$ se utiliza para obtener una nueva aproximación x_{i+1} , expresada por la fórmula iterativa

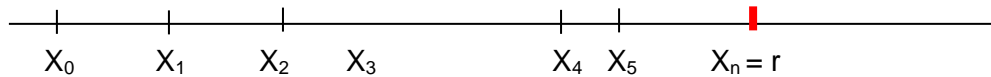
$$x_{i+1} = g(x_i)$$

Y el error normalizado se da por:

$$\varepsilon_\alpha = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| 100\%$$

Observación

Debemos resaltar que la sucesión $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots$ se va acercando al valor de la raíz r_1 , de manera que x_k se encuentra más cerca de r que x_{k-1} o se van alejando de la raíz.



$d_i = |x_{i+1} - x_i|$, esta sucesión debe de tender a cero en este caso se dice que el proceso converge a r_1 , y debe de continuar hasta un d_i menor de un error

Cuando $x = 2$, a) $x = 2x^2 - 5$; b) $x = \sqrt{\frac{x+5}{2}}$, Para el caso (a) el proceso diverge y para el caso (b) converge es decir.

| Iteraciones k | Valor de x_k | $g(x_k) = 2x^2 - 5$ |
|------------------|----------------|---------------------|
| 0 | 2 | 3 |
| 1 | 3 | 13 |
| 2 | 13 | 333 |
| 3 | 333 | 221773 |

Caso: (a)

| Iteraciones k | Valor de x_k | $g(x_k) = \sqrt{\frac{x+5}{2}}$ |
|------------------|----------------|---------------------------------|
| 0 | 2 | 2.87083 |
| 1 | 2.87083 | 1.85349 |
| 2 | 1.85349 | 1.85115 |
| 3 | 1.85115 | 1.85083 |

Caso: (b)

Observamos que en el caso (a) el valor diverge, pero en el caso (b) converge al valor 1.85078 que es una raíz de la función inicial.

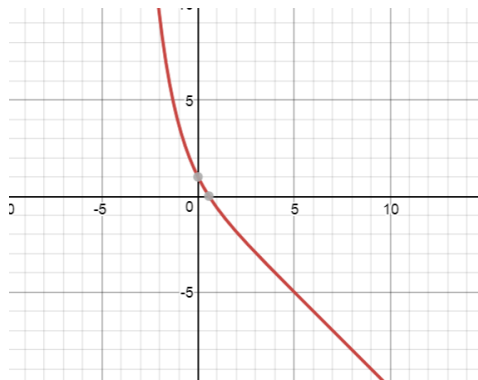
Ejemplo

Sea $f(x) = e^{-x} - x$ encontrar la raíz de la función continua para todo x .

Lo primero, es expresar la ecuación $e^{-x} - x = 0$ en forma recursiva como $e^{-x} = x$, es decir:

$$x_{i+1} = e^{-x_i}$$

Donde el dato siguiente es estimado con el dato anterior.



Teniendo como valor inicial $x_0 = 0$ y aplicando la ecuación iterativa $x_{i+1} = e^{-x_i}$

$$x_1 = e^{-0} = 1$$

$$x_2 = e^{-1} = 0.367879$$

.

.

.

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| 100\%$$

$$\varepsilon_0 = \left| \frac{1 - 0}{1} \right| 100\%$$

$$\varepsilon_0 = \left| \frac{0.367879 - 1}{0.367879} \right| 100\% = 171.8$$

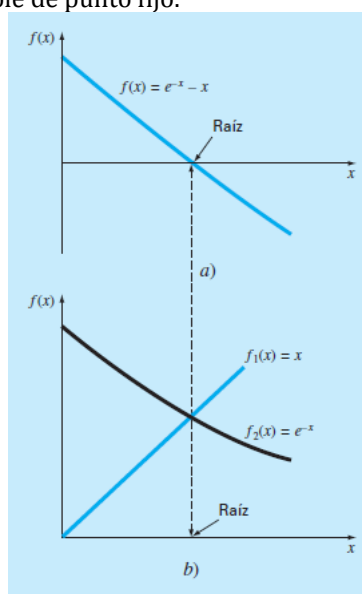
.

.

.

| i | x_i | ε_a (%) | ε_t (%) |
|-----|----------|---------------------|---------------------|
| 0 | 0 | | 100.0 |
| 1 | 1.000000 | 100.0 | 76.3 |
| 2 | 0.367879 | 171.8 | 35.1 |
| 3 | 0.692201 | 46.9 | 22.1 |
| 4 | 0.500473 | 38.3 | 11.8 |
| 5 | 0.606244 | 17.4 | 6.89 |
| 6 | 0.545396 | 11.2 | 3.83 |
| 7 | 0.579612 | 5.90 | 2.20 |
| 8 | 0.560115 | 3.48 | 1.24 |
| 9 | 0.571143 | 1.93 | 0.705 |
| 10 | 0.564879 | 1.11 | 0.399 |

Note que el error relativo porcentual verdadero en cada iteración es proporcional (por un factor de 0.5 a 0.6) al error de la iteración anterior. Esta propiedad, conocida como *convergencia lineal*, es característica de la iteración simple de punto fijo.



El Método gráfico de las dos curvas

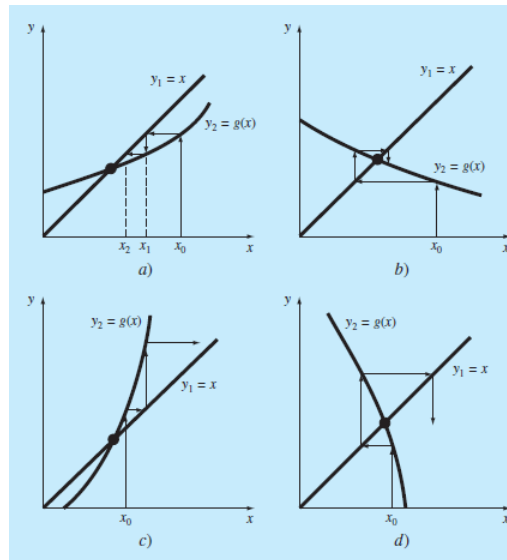
El método que consiste en separar la ecuación $e^{-x} - x = 0$ en dos partes y determine su raíz en forma gráfica. Reformule la ecuación como $y_1 = x$; $y_2 = e^{-x}$

| x | y_1 | y_2 |
|-----|-------|-------|
| 0.0 | 0.0 | 1.000 |
| 0.2 | 0.2 | 0.819 |
| 0.4 | 0.4 | 0.670 |
| 0.6 | 0.6 | 0.549 |
| 0.8 | 0.8 | 0.449 |
| 1.0 | 1.0 | 0.368 |

Luego, la raíz se encuentra en la intersección de las dos curvas

El método de las dos curvas también se utiliza para ilustrar la convergencia y divergencia de la iteración de punto fijo. El valor inicial sirve para determinar el punto $[x_0, g(x_0)]$ correspondiente a la curva 2. El punto (x_1, x_1) se encuentra moviéndose horizontalmente a la izquierda hasta la curva y_1 . Estos movimientos son el equivalente a la primera iteración en el método de punto fijo: $x_1 = g(x_0)$

De esta manera, tanto en la ecuación como en la gráfica se usa un valor inicial x_0 para obtener una aproximación de x_1 . La siguiente iteración consiste en moverse al punto $[x_1, g(x_1)]$ y después a (x_2, x_2) . Esta iteración es equivalente a la ecuación: $x_2 = g(x_1)$



Análisis de la Convergencia

Con la finalidad de saber cuándo la sucesión $x_0, x_1, x_2, x_3; \dots x_k \dots$ converge o diverge de la raíz buscada podemos calcular en $f(x_0), f(x_1), f(x_3), \dots, f(x_k)$ si dicha sucesión tiende a cero entonces el proceso anterior converge a la raíz deseada, y mencionado proceso se continuará hasta que $|f(x_k)| < \varepsilon_1$ donde el valor de épsilon es un valor pequeño que indica la exactitud o acercamiento de x_k a la raíz r en este caso se toma x_k como una raíz aproximada.

En caso contrario si $f(x_0), f(x_1), f(x_3), \dots, f(x_k)$ no tiende a cero entonces la sucesión $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ diverge de la raíz r y el proceso deberá de detenerse y ensayar con otra función $g(x)$.

CRITERIOS DE CONVERGENCIAS

Con la finalidad de analizar la convergencia de las sucesiones formadas estudiaremos otro criterio para nuestro proceso iterativo del método anterior visto basado en que $g(r) = r$

No olvidar que r es la raíz donde la sucesión $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots$ debe converger esto quiere decir que los valores consecutivos de esta sucesión se van acercando cada vez más a dicha raíz conforme se realice el proceso iterativo esquemáticamente se tendrá:

$$X_0, X_1, X_2, X_3, \dots, X_{10}, \quad X_{20}, \dots, X_K, \dots, r$$

Observemos que un modo práctico de saber si los valores consecutivos arriba escritos se acercan a la raíz r es ir calculando las distancias entre ellos $d_1, d_2, d_3; \dots d_k$ es decir

$$d_k = |x_{k+1} - x_k|$$

y si esta nueva sucesión se acerca a cero se puede pensar entonces que nuestro método en análisis de punto fijo converge a una raíz $x = r$, y se debe seguir hasta que $d_k < \varepsilon$ en este caso tomar x_{k+1} como la raíz buscada.

En el caso que la sucesión $d_1, d_2, d_3; \dots d_k$ no converge para un número grande de iteraciones, entonces la sucesión $x_0, x_1, x_2, x_3; \dots x_k$ diverge de la raíz $x = r$, se tiene que parar el proceso y luego modificar la función $g(x)$. Como se ha visto en los ejemplos anteriores en el caso (a) se tenía que parar y luego se determinó la nueva relación $g(x)$ para la cual si convergía.

Resulta mas seguro calcular, $f(x_0), f(x_1), f(x_3), \dots, f(x_k), \dots$, por mientras.

CRITERIO DE CONVERGEN DE LA PRIMERA DERIVADA

$$|g'(x)| < 1$$

Este criterio de la primera derivada tiene como base analítica el teorema del punto medio aplicado a la función $g(x)$ en el intervalo X_{k-1}, X_k es decir se tiene:

Sea $g(x)$ una función continua en (a,b) ; y además derivable entonces, existe un valor c tal que

$$g(c)' = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

En términos del problema del punto fijo se tiene que:

$$g(x_k) - g(x_{k-1}) = g'(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

En donde c_k es un punto cualquiera del intervalo en análisis es decir c_k pertenece (x_k, x_{k-1}) , si tenemos en consideración el valor que toma $g(x_k) = x_{k+1}$ y $g(x_{k-1}) = x_k$; esto quiere decir que nuestra relación se transforma en:

$$x_{k+1} - x_k = g'(c_k)(x_k - x_{k-1}),$$

Luego podemos tomar valor absoluto a esta nueva expresión obteniendo lo siguiente

$|x_{k+1} - x_k| = |g'(c_k)| |x_k - x_{k-1}|$, para $i = 1, 2, 3, \dots$ Si tratamos de ponerlo en su forma más expresiva se tiene:

$$|x_2 - x_1| = |g'(c_1)| |x_1 - x_0|, \dots, c_1 \in (x_1, x_0)$$

$$|x_3 - x_2| = |g'(c_2)| |x_2 - x_1|, \dots, c_2 \in (x_2, x_1)$$

:

Pero ahora podemos suponer que la derivada de $g(x)$ está acotada en toda la región de la sucesión $x_0, x_1, x_2, x_3; \dots x_k$ en otras palabras se tendrá que:

$|g'(x)| \leq M$ Esto para algún valor de M entonces tenemos que

$$|x_2 - x_1| \leq M|x_1 - x_0|$$

$$|x_3 - x_2| \leq M|x_2 - x_1|$$

$$|x_4 - x_3| \leq M|x_3 - x_2|$$

$$|x_5 - x_4| \leq M|x_4 - x_3|$$

::

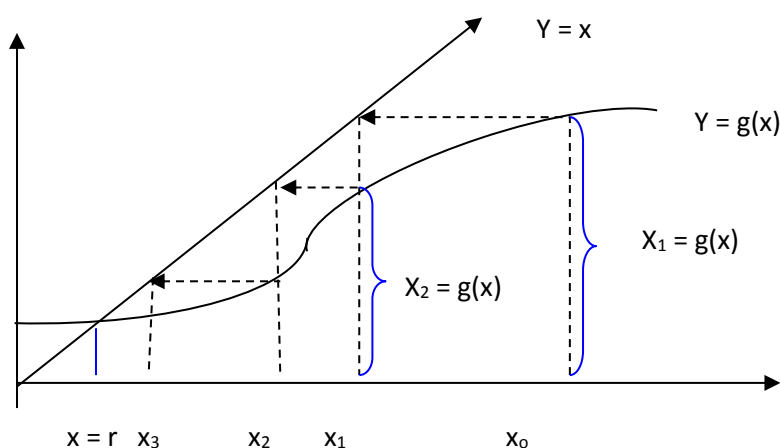
Observe que si sustituimos la primera en la segunda y está en la tercera y así sucesivamente se tiene que $|x_4 - x_3| \leq M^3|x_1 - x_0|$ y esto podemos generalizar así:

$$|x_{k+1} - x_k| \leq M^k|x_1 - x_0|$$

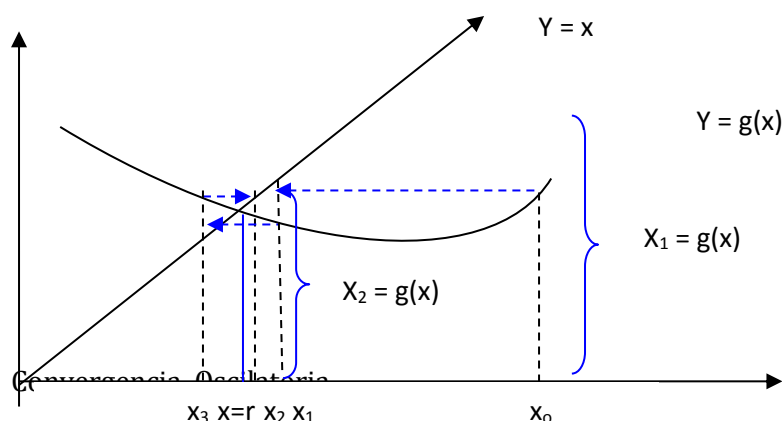
Observemos que el método del punto fijo puede converger por múltiples criterios, pero es evidente que si M es menor que uno es decir $M < 1$, dicha metodología convergirá puesto que M^k , convergirá a cero al tender k a un número grande.

Consecuentemente ya tenemos un método muy práctico y consistirá en obtener una función de $f(x)$ y luego determinar el valor absoluto de su derivada y evaluarlo en x_0 y si este valor es menor que uno entonces se debe de tomar dicha relación funcional.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



Interpretación Geométrica de $|G'(x)| < 1$, Convergencia monótona



Veamos un ejemplo:

Calcular una raíz de la función $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ considerando como valor inicial 1

Primero: Consideremos dos formas para

$$g(x) = \frac{20}{x^2 + 2x + 10} \text{ y } g(x) = x^3 + 2x^2 + 11x - 20$$

Segundo: determinemos sus derivadas de cada funcional considerada,

$$g'(x) = \frac{-20(2x+2)}{(x^2 + 2x + 10)^2} \text{ y } g'(x) = 3x^2 + 4x + 11$$

Tercero: Valorando el valor las derivadas en 1 y luego tomando su valor absoluto, tenemos:

$|g'(1)| = \left| \frac{-80}{169} \right| = 0.47$ y $|g'(1)| = 18$ entonces en este caso se debe tomar la primera relación puesto que es menor que uno; el segundo caso es mucho mayor de uno, veamos que sucede:

| iteraciones k | x_k | $ x_{k+1} - x_k $ | $ g'(x_k) $ |
|---------------|---------|-------------------|-------------|
| 0 | 1.00000 | 0.00000 | 0.47337 |
| 1 | 1.53846 | 0.53846 | 0.42572 |
| 2 | 1.29502 | 0.24344 | 0.45100 |

ANALISIS NUMERICO

Eddy Herrera Daza

| | | | |
|---|---------|---------|---------|
| 3 | 1.40183 | 0.10681 | 0.44047 |
| 4 | 1.35421 | 0.04762 | 0.44529 |
| 5 | 1.37009 | 0.02101 | 0.44317 |
| 6 | 1.36593 | 0.00937 | 0.44412 |
| 7 | 1.37009 | 0.00416 | 0.44370 |
| 8 | 1.36824 | 0.00185 | 0.44389 |
| 9 | 1.36960 | 0.00082 | 0.44386 |

Debemos observar que el valor absoluto de la derivada valorado en el punto respectivo siempre se mantiene menor que la unidad.

Una vez que llegamos a las condiciones requeridas del problema, es decir que la diferencia de las distancias entre los puntos de la sucesión $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ sea menor que 0.0001 se termina el proceso y tomamos como raíz a $r = 1.36906$.

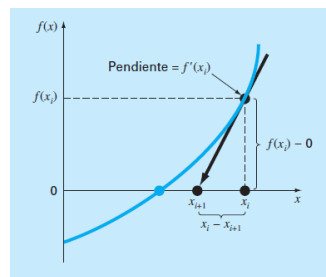
Si hubiésemos tomado las otras funciones equivalentes no obtendríamos la convergencia de las distancias y más aún el valor de la derivada en cada punto sería mayor que uno en muchos casos.

```

FUNCTION Fixpt(x0, es, imax iter, ea)
  xr = x0
  iter = 0
  DO
    xrold = xr
    xr = g(xrold)
    iter = iter + 1
    IF xr ≠ 0 THEN
      ea =  $\left| \frac{xr - xrold}{xr} \right| \cdot 100$ 
    END IF
    IF ea < es OR iter ≥ imax EXIT
  END DO
  Fixpt = xr
END Fixpt

```

MÉTODO DE NEWTON RAPSHÓN¹



El método en análisis es un procedimiento que puede ser aplicado en una diversidad de oportunidades, principalmente cuando se trata de funciones que tengan raíces reales.

Supongamos que estamos interesados en determinar las raíces de $f(x)$ numéricamente siendo r una raíz y considerando que x es una aproximación a este valor, consideremos que f'' existe y es continua luego tendremos por el Teorema de Taylor lo siguiente:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

$$0 = f(r) = f(x+h) = f(x) + hf'(x) + 0.(h^2)$$

En donde $h = r - x$, que ocurre si h se aproxima a cero entonces x se aproxima a la raíz r . Si ignoramos el tercer término podemos determinar el valor para h . es decir tenemos que:

¹ Ver Análisis numérico de David Kincaid

$0 = f(x) + hf'(x) \Rightarrow h = -\frac{f(x)}{f'(x)}$ Si aproximamos x a la raíz r entonces $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ deberá encontrarse más cerca de r . De esta manera el Método de Newton comienza con una estimación x_0 para r y a partir de la cual se define usando inducción la sucesión de aproximación que se representa de la siguiente manera:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ para } n \geq 0$$

El método de Newton- Raphson es convergente en forma cuadrática. Es decir, el error es proporcional al cuadrado del error anterior:

$$E_{i,i+1} \cong \frac{-f''(x_r)}{2f'(x_r)} E_{i,i}^2$$

ALGORITMO DE SEUDOCODIGO

```
Input  $x_0, M, \delta, \varepsilon$ 
 $y \leftarrow f(x_0)$ 
output 0,  $x_0, y$ 
if  $|y| < \varepsilon$ 
then stop
for  $k = 1, 2, 3, \dots, M$ 
 $x \leftarrow x - y / f'(x)$ 
 $y \leftarrow f(x_1)$ 
Output  $k, x_1, y$ 
if  $|x_1 - x_0| < \delta$  or  $|y| < \varepsilon$ ,
Then stop
 $x_0 \leftarrow x_1$ 
End
```

Es importante destacar que se debe de tener un programa para Calcular el valor de $f(x)$ y de su derivada

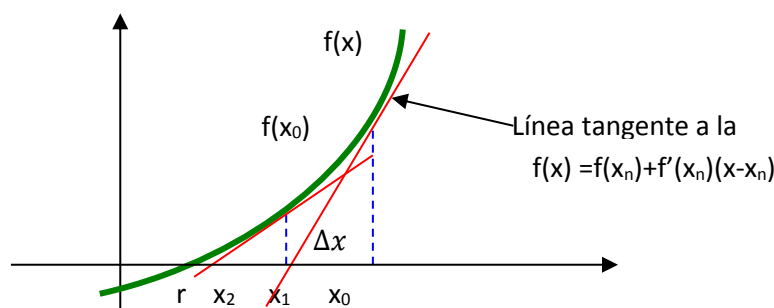
INTERPRETACIÓN GRÁFICA DEL MÉTODO

Antes de continuar con el análisis del método consideremos la idea de bosquejar una interpretación gráfica. En estas circunstancias podemos decir que el método de Newton consiste en la linealización de la función esto quiere decir que la función $f(x)$ será sustituida por una función lineal y esto ocurre cuando usamos la serie de Taylor del siguiente modo

$$f(x) = f(c) + (x - c)f'(c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x - c)^2 + \frac{(x - c)(x - c)(x - c)}{3!}f'''(c) + \dots$$

Luego si linealizamos tenemos

$l(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$, en este caso se observa que $l(x)$ es una buena aproximación de la función $f(x)$ en c , de hecho tenemos que la función $l(x)$ tiene el mismo valor que $f(c)$ y la misma pendiente es decir $l'(c) = f'(c)$ esto en el punto c . En otras palabras graficar el método de Newton se debe de considerar la tangente a $f(x)$ en un punto cercano de r



ESQUEMA DEL MÉTODO DE NEWTON

Esto se puede realizar de manera esquemática:

- 1.- Representar gráficamente la función $f(x)$ la cual corta al eje x en r que es la raíz de $f(x)$
- 2.- Representar x_0 como el valor inicial de la sucesión de puntos en el eje de las X .
- 3.- Trazar la tangente a la función $f(x)$ en x_0 y ubicar el punto de corte con el eje X y la tangente y denotarlo con x_1 el cual será la nueva aproximación a la raíz r .
- 4.- El proceso se repite hasta que sea necesario es decir cumpla con las exigencias en otras palabras falta que $|f(x_k)| < \delta$ y $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ se cumpla una o ambas.
5. Si en el caso de no cumplirse en un número máximo de iteraciones se sugiere reiniciar de nuevo.

Ejemplo

Determinar una raíz de $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ considerando $x_0 = 1$, y el criterio de convergencia $|x_{k+1} - x_k|$ y con un error de $\varepsilon = 10^{-3}$

Solución

- a) Primero determinamos la derivada del polinomio: $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$
- b) Aplicar la sucesión iterativa $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
- c)
$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k)^3 + 2(x_k)^2 + 10x_k - 20}{3(x_k)^2 + 4x_k + 10}$$
- d) $x_1 = 1.41176$
- e) $x_2 = 1.36934$
- f) $x_3 = 1.36881$
- g) $x_4 = 1.36881$

Cuadro que representa los diferentes cálculos para determinar la aproximación de una raíz usando el Método de Newton.

| iteraciones k | x_k | $ x_{k+1} - x_k $ | $ f'(x_k) $ |
|--------------------|---------|-------------------|-----------------------|
| 0 | 1.00000 | 0.00000 | 0.24221 |
| 1 | 1.41176 | 0.41176 | 0.02446 |
| 2 | 1.36934 | 0.04243 | 0.00031 |
| 3 | 1.36881 | 0.00053 | 1.09×10^{-6} |

| | | | |
|---|---------|---------|-------------------------|
| 4 | 1.36881 | 0.00000 | 1.2714x10 ⁻⁶ |
|---|---------|---------|-------------------------|

Debemos destacar que con este método solo se necesitaban tres iteraciones para alcanzar la aproximación necesaria y además se tiene una mayor aproximación.

MÉTODO DE LA SECANTE

Debemos recordar que una de las debilidades del método de Newton es que utiliza la derivada de la función y se trata de encontrar un cero de esta. Es en este sentido que surge una diversidad de métodos y uno de ellos es el Método de la Secante que analizaremos en adelante.

Supongamos que estamos interesados en solucionar la debilidad de la metodología de Newton, empecemos por reemplazar la derivada $f'(x)$ en la secuencia que origina el método de Newton por un cociente de diferencias es decir:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Recordemos que esta relación tiene como fundamento la definición de la derivada de $f(x)$ en términos de un límite, realicemos tal sustitución enunciada y así tendremos.

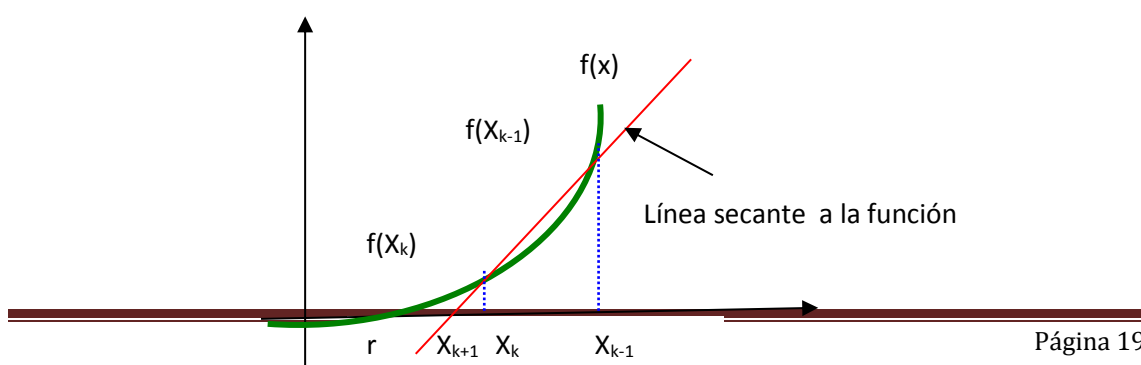
$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \dots k \geq 1, 2, 3, \dots$$

Observemos que si calculamos x_{k+1} entonces se requiere conocer x_k y x_{k-1} esto quiere decir que se deben de dar en la problemática estos dos valores.

Así también se observa que para determinar el valor de x_k sólo se requiere un cálculo de $f(x)$

INTERPRETACIÓN GRÁFICA

La interpretación gráfica es similar que la interpretación grafica del método de Newton solo que en este caso se debe de considerar la línea tangente como una línea secante



EJEMPLOS

Usar el método de la secante para encontrar una raíz real de la ecuación polinomial $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$, considere $x_0 = 0$; $x_1 = 1$, usar como criterio de convergencia la secuencia de distancias de aproximación a la raíz.

Solución

a) Aplicamos la secuencia que determina la metodología:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \dots k \geq 1, 2, 3, \dots$$

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \dots k = 1 \text{ Entonces } x_2 = 1.53846$$

b) $x_3 = 1.35031$

c) $x_4 = 1.36792$

d) $x_5 = 1.36881$

A seguir presentamos el cuadro que se obtiene al realizar dicha metodología en el cual observaremos que se trata de un método rápido en convergencia casi tan igual que el Método de Newton pero mucho más rápido que el Método de Punto Fijo

| Iteraciones k | x_k | $ x_{k+1} - x_k $ |
|------------------|---------|-------------------|
| 0 | 0.00000 | 0.00000 |
| 1 | 1.00000 | 1.00000 |
| 2 | 1.53856 | 0.53846 |
| 3 | 1.35031 | 0.18815 |
| 4 | 1.36792 | 0.01761 |

| | | |
|---|---------|---------|
| 5 | 1.36881 | 0.00090 |
|---|---------|---------|

Ejemplo

Usar el método de la secante para encontrar una raíz real de la ecuación polinomial $f(x) = x^3 - \sinh x + 4x^2 + 6x + 9$, considere $x_0 = 7$; $x_1 = 8$, usar como criterio de convergencia la secuencia de distancias de aproximación a la raíz.

Solución

a) Aplicamos la secuencia que determina la metodología:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \dots k \geq 1, 2, 3, \dots$$

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \dots k = 1 \text{ Entonces } x_2 = 7.05895$$

b) $x_3 = 7.11764$

c) $x_4 = 7.11289$

d) $x_5 = 7.11306$

e) $x_6 = 7.11306$

a seguir presentamos el cuadro que se obtiene al realizar dicha metodología en el cual observaremos que se trata de un método rápido en convergencia casi tan igual que el Método de Newton pero mucho más rápido que el Método de Punto Fijo

| iteraciones k | x_k | $ x_{k+1} - x_k $ |
|---------------|---------|-------------------|
| 0 | 7.00000 | |
| 1 | 8.00000 | 1.00000 |
| 2 | 7.05895 | 0.94105 |
| 3 | 7.11764 | 0.05859 |
| 4 | 7.11289 | 0.00475 |
| 5 | 7.11306 | 0.00017 |
| 6 | 7.11306 | 0.00000 |

MÉTODO DE POSICIÓN FALSA

Esta metodología se le conoce con el nombre de **Posición falsa**. Al igual que el método de la secante, aproxima la derivada en la expresión $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

Por el cociente en diferencias es decir $f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$

Pero en este caso x_k y x_{k-1} , se ubican en lados opuestos de la raíz que se busca esto quiere decir que $f(x_k)$ y $f(x_{k-1})$ tienen signos opuestos y determinamos el siguiente punto de aproximación x_M que aproxima a la raíz es decir.

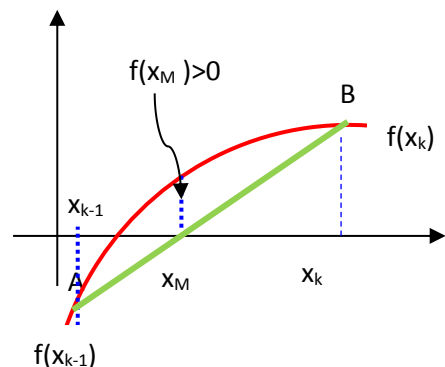
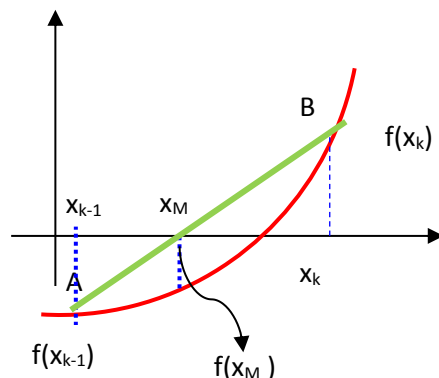
$$x_M \approx \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})};$$

$$x_M = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

En seguida se evalúa $f(x_M)$ y comparamos el signo con $f(x_k)$ si tienen signos iguales se actualiza x_k , cambiando su valor con x_M , caso contrario se realiza el intercambio con x_{k-1} , es preciso destacar que el objetivo central es obtener un intervalo (x_k, x_{k-1}) cada vez mas cerca de la raíz.

Se toma como valor mas exacto el valor ultimo de x_M , para terminar el proceso se considera $|x_k - x_{k-1}| < \epsilon$.

INTERPRETACIÓN GRÁFICA



Ejemplo. Determinar una raíz real del polinomio $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$, considerando un error de 10^{-3} , usando regula falsa.

Solución

Determinamos los valores de x_{k-1} y x_k para lo cual evaluamos la función en los puntos:

$$f(0) = -20; f(1) = -7; f(-1) = -29; f(2) = 16.$$

Considerando el razonamiento del método observamos que en el intervalo $[1,2]$ existe una raíz de la funcional. En este caso nuestros valores de $x_k = 1; f(1) = -7$ $x_{k-1} = 2, f(2) = 16$.

$$x_M = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

$$x_M = 1 - \frac{(1-2)(-7)}{-7-16} = 1.30435$$

$$f(x_M) = -1.33476$$

Determinamos con quien de los extremos del intervalo se intercambia, como $f(x_M) < 0$ es decir tiene igual signo con $f(x_k)$ se intercambia el valor de x_k , por x_M , lo que implica tener el nuevo intervalo $[-1.33476, 2]$,

Se continua de la misma manera hasta conseguir el objetivo trazado

| K | X_k | X_{k-1} | X_M | $f(x_M)$ | $ f(x_M) $ |
|---|---------|-----------|---------|----------|------------|
| 0 | 1.00000 | 2.00000 | | | |
| 1 | 1.00000 | 2.00000 | 1.30435 | -1.33476 | 1.33476 |
| 2 | 1.30435 | 2.00000 | 1.35791 | -0.22914 | 0.22914 |
| 3 | 1.35791 | 2.00000 | 1.36698 | -0.03859 | 0.03859 |
| 4 | 1.36698 | 2.00000 | 1.36850 | -0.00648 | 0.00648 |
| 5 | 1.36850 | 2.00000 | 1.36876 | -0.00109 | 0.00109 |
| 6 | 1.36876 | 2.00000 | 1.36880 | -0.00018 | 0.00018 |

ACELERACIÓN DE LA CONVERGENCIA

En esta oportunidad trataremos sobre la convergencia, pues trabajando con los diversos métodos anteriores encontramos que el método de Newton converge muy rápido si tenemos una aproximación inicial suficientemente precisa y es fenómeno se sustenta que tal método proporciona una aproximación que converge cuadráticamente.

Veamos lo siguiente consideremos que un método cualquiera proporciona una sucesión $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ de aproximaciones que converge a un punto x , diremos que la convergencia es lineal si existe una constante $0 < M < 1$, de tal manera que para un n lo suficientemente grande se tiene que,

$$|x - x_{n+1}| \leq M|x - x_n|,$$

Diremos que la convergencia es cuadrática si $0 < M$ de tal manera que para un n suficientemente grande, se tiene,

$$|x - x_{n+1}| \leq M|x - x_n|^2,$$

Considerando que los métodos que convergen cuadráticamente lo hacen de manera más rápida que los que convergen linealmente, pero en realidad los de convergencia lineal son más seguros, existe una técnica que permite acelerar la convergencia es el método llamado *de Δ^2 de Aiken* que es una técnica que permite acelerar la convergencia de los métodos que presentan convergencia.

Supongamos que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión que converge linealmente a x , construimos una sucesión $\{q_n\}$, que converge a x más rápidamente que $\{x_n\}$,

Primero, suponemos que los signos de $x_n - x$, $x_{n+1} - x$ y $x_{n+2} - x$, coinciden y que n es lo suficientemente grande que se verifica,

$$\frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} \approx \frac{x_{n+2} - x}{x_{n+1} - x},$$

Luego

$$(x_{n+1})^2 - 2x_{n+1} \cdot x + x^2 \approx x_{n+2}x_n - (x_n + x_{n+2})x + x^2,$$

$$(x_{n+2} + x_n - 2x_{n+1})x \approx x_{n+2}x_n - (x_{n+1})^2,$$

Despejando x

$$x = \frac{x_{n+2}x_n - (x_{n+1})^2}{(x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n)},$$

Sumando y restando en el numerador x_n^2 , y $2x_nx_{n+1}$ tenemos

$$x = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{(x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n)},$$

El método de *Δ^2 de Aiken* consiste en usar $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ como una aproximación de x . y afirma que:

Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión que converge linealmente a x y definimos

$q_n = x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{(x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n)}$, entonces, $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ también converge a x y en general lo hace mas rápidamente.

Ejemplo.

La sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, con $x_n = \cos(\frac{1}{n})$ converge linealmente

a $x=1$, y $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ con $q_n = \cos(\frac{1}{n}) - \frac{(\cos(\frac{1}{n+1}) - \cos(\frac{1}{n}))^2}{(\cos(\frac{1}{n+2}) - 2\cos(\frac{1}{n+1}) + \cos(\frac{1}{n}))}$

Converge linealmente a $x=1$ mas rápidamente,²

| n | X_n | q_n |
|---|---------|---------|
| 1 | 0.54030 | 0.96178 |
| 2 | 0.87758 | 0.98213 |
| 3 | 0.94496 | 0.98979 |
| 4 | 0.96891 | 0.99342 |
| 5 | 0.98007 | 0.99541 |
| 6 | 0.98614 | |
| 7 | 0.98981 | |

Observemos que dada una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, definimos delta de x_n , de la siguiente manera,

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n, \text{ para } n \geq 0,$$

La potencia superior del operador Δ se define recursivamente,

$$\Delta^k x_n = \Delta(\Delta^{k-1} x_n), \text{ para } n \geq 2,$$

Usando esta definición tenemos que,

$$\begin{aligned} \Delta^2 x_n &= \Delta(\Delta x_n) = \Delta(x_{n+1} - x_n) = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n, \\ &= (x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n), \\ &= x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n \end{aligned}$$

Por lo tanto la sucesión q_n , en el método de análisis se le define de la siguiente manera.

² Ver Métodos Numericos de J. Douglasaires

$$q_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}, \text{ para todo } n \geq 0,$$

La sucesión $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$, converge a x mas rápidamente que la sucesión de partida $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$,

RAÍCES COMPLEJAS

En nuestro análisis de encontrar raíces de una ecuación $f(x)=0$ solo consideramos cuando se tienen raíces reales, pero en general se presentan el caso de ecuaciones polinomiales con coeficientes reales y con raíces complejas o bien polinomios complejos y ecuaciones trascendentes con raíces reales y complejas. Generalmente dichas ecuaciones se pueden desarrollar por el método de Newton, pero considerando como valor inicial x_0 , un complejo.

MÉTODO DE NEWTON RAPHSON

Supongamos que tenemos la siguiente función con coeficientes reales y de igual manera su derivada.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

Y su derivada

$$f'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1,$$

Si el valor de x_0 es real, entonces el valor de

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

Es real y todos los siguientes valores en consecuencia no podemos encontrar una raíz compleja, si se utiliza un valor inicial real.

Pero si consideramos un valor inicial complejo, entonces x_1 , será complejo de igual manera x_2 , y así sucesivamente. Consecuentemente si el proceso converge puede encontrarse una raíz compleja.

Ejemplo

Encontrar las raíces complejas de la ecuación. $f(x)=x^2+9=0$,

Usando el método de Newton Raphson.

Solución Determinamos su derivada de $f(x)$,

$$f'(x) = 2x,$$

Haciendo $x_0=i$ el valor inicial propuesto, aplicando el algoritmo se tiene

$$x_1 = i - \frac{i^2+9}{2(i)}, \text{ pero como } i^2=-1, \text{ entonces}$$

$$x_1 = i - \frac{-1+9}{2(i)} = i - \frac{8}{2i} = 5i, \quad x_2 = 5i - \frac{(5i)^2+9}{2(5i)} = 3.5i,$$

$$x_3 = 3.5i - \frac{(3.5i)^2+9}{2(3.5i)} = 3.035i, \quad x_4 = 3.035i - \frac{(3.035i)^2+9}{2(3.03i)} = 3.0002i$$

La sucesión de complejos se va acercando de manera rápida a $3i$, en consecuencia

$$f(3i) = (3i)^2 + 9 = -9 + 9 = 0,$$

Para evaluar la convergencia se utiliza

$|x_{n+1} - x_n|$, esto es la norma de números complejos es decir

$|x_{n+1} - x_n| = \sqrt{a^2 + b^2}$, es decir para el caso particular se tiene

$$|5i - i| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4,$$

$$|3.5i - 5i| = \sqrt{0^2 + 1.5^2} = 1.5,$$

$$|3.035i - 3.0002i| = \sqrt{0^2 + 0.0348^2} = 0.0348,$$

Se observa que la convergencia es notoria. Considerando que un polinomio con coeficientes reales siempre tiene un número par de raíces entonces las raíces del polinomio dado son $3i$, $-3i$.

MÉTODO DE MULLER

Debemos destacar que existen varias dificultades de cálculo para determinar raíces complejas con los métodos analizados anteriormente, por ejemplo la convergencia es lenta, más aun cuando la función y sus derivadas están cerca del cero. La metodología de Muller usa la idea de la metodología de la secante, pero mientras la secante usa la recta para aproximar Muller utiliza la parábola para aproximar.

Supongamos que se dan tres puntos iniciales x_i, x_{i-1}, x_{i-2} de aproximación distintas a una raíz de $f(x) = 0$,

Consideremos $f_i = f(x_i); f_{i-1} = f(x_{i-1}); f_{i-2} = f(x_{i-2})$;

Se sabe que

$$f[x_i, x_{i-1}] = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

$$f[x_{i-1}, x_{i-2}] = \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{x_{i-1} - x_{i-2}},$$

$$f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}] = \frac{f[x_i, x_{i-1}] - f[x_{i-1}, x_{i-2}]}{x_i - x_{i-2}},$$

$$p(x) = f_i + f[x_i, x_{i-1}](x - x_i) + f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}](x - x_i)(x - x_{i-1});$$

Es una parábola que pasa por los puntos (x_i, f_i) ; (x_{i-1}, f_{i-1}) ; (x_{i-2}, f_{i-2}) ; pero de manera usual una parábola se representa por,

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

Si comparamos esta representación con la última relación tenemos,

$$a_2 = f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}];$$

$$a_1 = f[x_i, x_{i-1}] - (x_i + x_{i-1})a_2,$$

$$a_0 = f_i - x_i(f[x_i, x_{i-1}] - x_{i-1}a_2),$$

Una vez calculados los valores de a_0 , a_1 , a_2 , las raíces del polinomio $p(x)$ se determinan usando la siguiente relación,

$$x_{i+1} = \frac{2a_0}{-a_1 \pm (a_1^2 + 4a_0a_2)^{\frac{1}{2}}},$$

Observaciones

La selección del signa del radical se hace considerando de que el denominador sea el máximo, lo que permita estar mas cerca de x_i

La raíz correspondiente es la siguiente aproximación x_{i+1} .

La razón para la presentar la formula se esta manera es con la finalidad de obtener mayor exactitud.

Puede suceder que la raíz cuadrada de la formula sea compleja. Si $f(x)$ no esta definida para valores complejos, en este caso el algoritmo debe de reiniciarse con nuevos valores iniciales.

En el caso que $f(x)$ sea un polinomio existe las posibilidades de tener raíces complejas y el valor de x se considera como aproximación de alguna raíz y deberá seguir empleándose en el algoritmo.

Ejemplo

Encuentre una raíz real del polinomio $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$,

Usar el método de Muller.

SOLUCIÓN

Primero: selección de los valores: $x_0=0$; $x_1=1$; $x_2=2$

Segundo: evaluar $f(x)$ en los puntos seleccionados considerando la nomenclatura,

$$f_0 = -20; f_1 = -7; f_2 = 16.$$

Tercero: calculo de los coeficientes del polinomio de segundo grado,

$$f[x_1, x_0] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{-7 + 20}{1 - 0} = 13,$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{16 + 7}{2 - 1} = 23,$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{23 - 13}{2 - 0} = 5,$$

Los coeficientes toman los siguientes valores:

$$a_2 = f[x_2, x_1, x_0] = 5;$$

$$a_1 = f[x_2, x_1] - (x_2 + x_1)a_2 = 23 - (2 + 1)5 = 8,$$

$$a_0 = f_2 - x_2(f[x_2, x_1] - x_1 a_2) = 16 - 2(23 - 1(5)) = -20,$$

Cuarto: calculo de los denominadores de la formula,

$$-a_1 \pm (a_1^2 + 4a_0a_2)^{\frac{1}{2}} = -8 + (64 + 400)^{\frac{1}{2}} = 13.54066,$$

$$-a_1 \pm (a_1^2 + 4a_0a_2)^{\frac{1}{2}} = -8 - (64 + 400)^{\frac{1}{2}} = -29.54066,$$

Como el segundo valor es mayor en valor absoluto se toma este para calcular x_3 .

$$x_3 = \frac{2a_0}{-a_1 \pm (a_1^2 + 4a_0a_2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2(-20)}{-29.54} = 1.35407,$$

SEGUNDA ITERACIÓN

Primero: Hacemos correr los subíndices de x : $x_0=1$; $x_1=2$; $x_2=1.354017$

Segundo: evaluar $f(x)$ en los puntos seleccionados considerando la nomenclatura,

$$f_0 = -7; f_1 = 16; f_2 = -0.30968.$$

Tercero: calculo de los coeficientes del polinomio de segundo grado,

$$f[x_1, x_0] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{16 - 7}{2 - 1} = 23,$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{-0.30968 - 16}{1.35407 - 2} = 25.2499,$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{25.24999 - 23}{1.35507 - 1} = 6.35507,$$

Los coeficientes toman los siguientes valores:

$$a_2 = f[x_2, x_1, x_0] = 6.35407;$$

$$a_1 = f[x_2, x_1] - (x_2 + x_1)a_2 = 25.2499 - (1.35407 + 2)6.35407 = 3.9378,$$

$$a_0 = f_2 - x_2(f[x_2, x_1] - x_1a_2) = -0.30968 - 1.35407(25.24999 - 2(6.35407)) = -17.29187,$$

Cuarto: calculo de los denominadores de la formula,

$$-a_1 \pm (a_1^2 + 4a_0a_2)^{\frac{1}{2}} = -8 + (64 + 400)^{\frac{1}{2}} = 17.39295,$$

$$-a_1 \pm (a_1^2 + 4a_0a_2)^{\frac{1}{2}} = -8 - (64 + 400)^{\frac{1}{2}} = -25.26855,$$

Como el segundo valor es mayor en valor absoluto se toma este para calcular x_4 .

$$x_4 = \frac{2a_0}{-a_1 \pm (a_1^2 + 4a_0a_2)^{\frac{1}{2}}} = 1.36865,$$

Se repite el procedimiento y se obtiene,

| i | x_i | $ x_{i+1} - x_i $ |
|---|---------|-------------------|
| 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 1.00000 |
| 2 | 2 | 1.00000 |
| 3 | 1.35407 | 0.64593 |
| 4 | 1.36865 | 0.01458 |
| 5 | 1.36881 | 0.00016 |