17 feb 2023

Formalicemos la definición de desplazamiento virtual. Habíamos deducido que si

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x)\, dx$$

entonces

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} d\alpha \right) dx$$

por lo que al definir

$$\delta J := \frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha, \quad \delta y := \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha, \quad \delta y' := \frac{\partial y'}{\partial \alpha} d\alpha$$

de modo que

$$\delta J(\alpha) = \int \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx$$

y es tal que $\delta f = \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y'$, por lo que

$$\delta J(\alpha) = \int \delta f(y, y', x)\, dx = \delta \int f(y, y', x)\, dx$$

Así, partimos del principio de mímima acción. Se tiene que

$$S = \int \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)\, dt, \quad \delta S = 0$$

Se tienen restricciones geométricas $f = f(q_1, \dots, q_k)$, de modo que la acción cumple con (notación de Einstein)

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right] dt \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k\, dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k\, dt = 0
\end{aligned}$$

de modo que coeficiente a coeficiente se cumple

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

Dados dos sistemas A y B, si su distancia r es muy grande entonces no interactúan y

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_B$$

Más aún, si hay un cambio de sistema de referencia y dos lagrangianos difieren sólo por una función df/dt entonces la mínima acción es equivalente. Esto es,

$$\mathcal{L}'(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{df}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}'(q, \dot{q}, t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{df}{dt} \right) dt$$

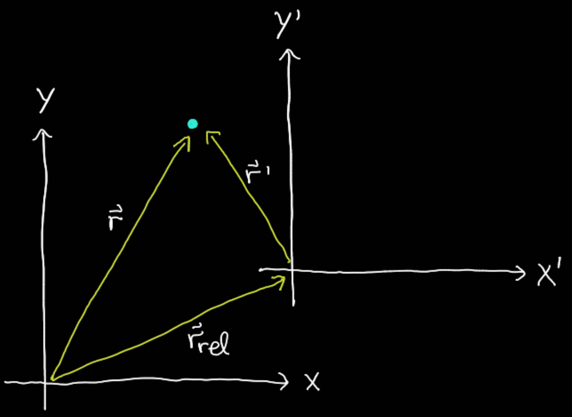
$$\Rightarrow S = S' + \mathcal{L} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$\therefore \delta S = \delta S'$.

Principio de Relatividad de Galileo

Supóngase que el sistema es homogéneo, i.e. no hay direcciones privilegiadas (como en la vida real, que $\hat{z}$ es privilegiada por $\vec{g}$). Entonces $\mathcal{L}$ no puede depender de la dirección de ningún vector ni de una coordenada particular. Así $\mathcal{L} = \mathcal{L}(v^2)$.

Dados dos sistemas de referencia con velocidades relativas $\vec{\varepsilon}$, $\varepsilon << 1$, entonces



$$\vec{r} = \vec{r}_{rel} + \vec{r}$$
$$\vec{v} = \vec{\varepsilon} + \vec{v}'$$

De esta forma, $\mathcal{L}'(v^2) = \mathcal{L}'(v^2 - 2\vec{\varepsilon}\cdot\vec{v} + \varepsilon^2) = \mathcal{L}'(v^2) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^2}(2\vec{\varepsilon}\cdot\vec{v}) + O(\varepsilon^2)$. Si se tiene que $\mathcal{L} = \partial v^2$ obtenemos que

$$\mathcal{L}'(v'^2) = \mathcal{L}(v^2) - \frac{d}{dt}(2\partial\vec{\varepsilon}\cdot\vec{r})$$

de modo que ambos sistemas se reducen al mismo Lagrangiano.

Así, si $\mathcal{L}' = \partial v^2$ entonces como $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{rel}$

$$\mathcal{L}' = \partial(v^2 - 2\vec{v}\cdot\vec{v}_{rel} + \vec{v}_{rel}^{\,2})$$
$$= \partial v^2 - \frac{d}{dt}(2\partial\vec{r}\cdot\vec{v}_{rel} - \partial v_{rel}^2 t)$$

Considérese de nuevo los dos sistemas A y B, de modo que

$$\mathcal{L} = T(q_A, \dot{q}_A) + T(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B)$$

Supóngase que $q_B = q_B(t)$ está dada, de modo que

$$\mathcal{L} = T(q_A, \dot{q}_A) + f(t) - U(q_A, t)$$

de modo que se redujo a un lagrangiano en A,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_A, \dot{q}_A, t)$$

Para escribirlo con mayor facilidad, se define

$$U'(q_A, t) = -f(t) + U(q_A, t)$$

de modo que $\mathcal{L}' = T(q_A, \dot{q}_A) - U'(q_A, t)$, que es una sola partícula en un campo que depende del tiempo.

Integrales de movimiento

Supóngase un sistema con f grados de libertad. Se sabe que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0$$

como estas son de segundo grado, al integrar habrá $2s-1$ constantes de integración. Así, habrá una solución genérica para cada coordenada de la forma

$$q_i = q_i(t - t_0, c_1, \ldots, 2s-1)$$
$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t - t_0, c_1, \ldots, 2s-1)$$