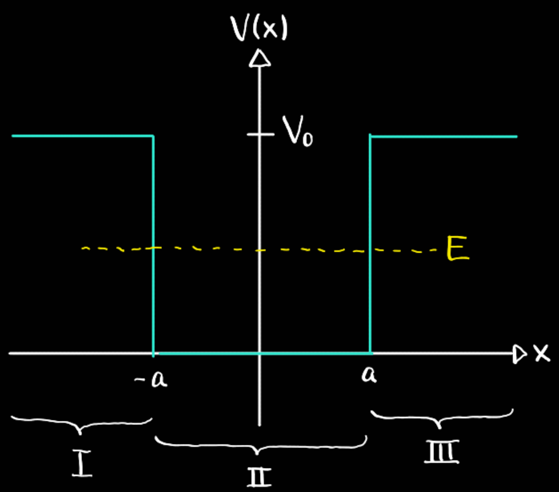
Pozo de potencial finito

4 sept 2023



En lugar de imponer al sistema cómo debe de ser medido, vamos a dejar que el sistema nos diga como medir. Tomamos como unidades a

$$\xi = \frac{x}{a}$$

Similarmente, vamos a considerar

$$\tilde{p} = \frac{a\sqrt{2mE}}{\hbar}\,; \qquad \tilde{k} = \frac{a\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

de lo cual recuperamos las soluciones a la ecuación de onda

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi + V\psi = E\psi$$

y son de la forma

$$\psi_I = A e^{-\tilde{k}\xi} + B e^{\tilde{k}\xi}$$

$$\psi_{II} = C\sin(\tilde{p}\xi) + D\cos(\tilde{p}\xi)$$

$$\psi_{III} = F e^{-\tilde{k}\xi} + G e^{\tilde{k}\xi}$$

Si bien la función es discontinua, la ecuación de Schrödinger nos exige que la derivada debe de ser continua. Viendo las soluciones, i.e. imponiendo nuestros prejuicios clásicos la función no puede ser cero pues exigimos continuidad.

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} V\psi\,dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} E\psi\,dx$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x\psi\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} V\psi\,dx = \cancelto{0}{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} E\psi\,dx}$$

si $V(x)$ no posee singularidades entonces la derivada debe de ser continua. En caso de no serlo, al evaluar la derivada en ε y $-\varepsilon$ vamos a obtener el valor de la discontinuidad.

Por lo tanto, tendremos que

$$\psi_I = \cancelto{0}{A e^{-\tilde{k}\xi}} + B e^{\tilde{k}\xi}\,; \qquad \psi_{III} = F e^{-\tilde{k}\xi} + \cancelto{0}{G e^{\tilde{k}\xi}}$$

entonces,

$$B e^{-\tilde{k}} = C\sin(-\tilde{p}) + D\cos(-\tilde{p}) \quad (i) \quad \Rightarrow \quad B\tilde{k}e^{-\tilde{k}} = \tilde{p}\left[C\cos(-\tilde{p}) - D\sin(-\tilde{p})\right] \quad (iii)$$

$$F e^{-\tilde{k}} = C\sin(\tilde{p}) + D\cos(\tilde{p}) \quad (ii) \quad \Rightarrow \quad -F\tilde{k}e^{-\tilde{k}} = \tilde{p}\left[C\cos(\tilde{p}) - D\sin(\tilde{p})\right] \quad (iv)$$

Tenemos cuatro ecuaciones. Mult. (i) por $\tilde{k}$ e igualando con (iii); y mult. (ii) con $\tilde{k}$ y sumando (iv) se sigue

$$\tilde{k}\left[C\sin(-\tilde{p}) + D\cos(-\tilde{p})\right] = \tilde{p}\left[C\cos(\tilde{p}) + D\sin(\tilde{p})\right]$$

$$\tilde{k}\left[C\sin(\tilde{p}) + D\cos(\tilde{p})\right] = -\tilde{p}\left[C\cos(\tilde{p}) - D\sin(\tilde{p})\right]$$

de lo cual

$$D\left[\tilde{k}\cos(\tilde{p}) - \tilde{p}\sin(\tilde{p})\right] = 0 \qquad (1.1)$$

$$C\left[\tilde{k}\sin(\tilde{p}) + \tilde{p}\cos(\tilde{p})\right] = 0 \qquad (1.2)$$

podemos ver que $C=0$ y $D=0$. No obstante, las combinaciones de interés son

$$D = 0 \quad \text{y} \quad \tilde{k}\sin(\tilde{p}) + \tilde{p}\cos(\tilde{p}) = 0 \qquad (1.3)$$

$$C = 0 \quad \text{y} \quad \tilde{k}\cos(\tilde{p}) - \tilde{p}\sin(\tilde{p}) = 0 \qquad (1.4)$$

5 sept 2023

Las soluciones a (1.3) y (1.4) serán impares y pares, respectivamente. De forma explícita

$$-\psi_{II}(-1) = \psi_{II}(1) = C\sin(\tilde{p}) \quad \therefore \quad -A = G = C\sin(\tilde{p})e^{\tilde{k}}$$

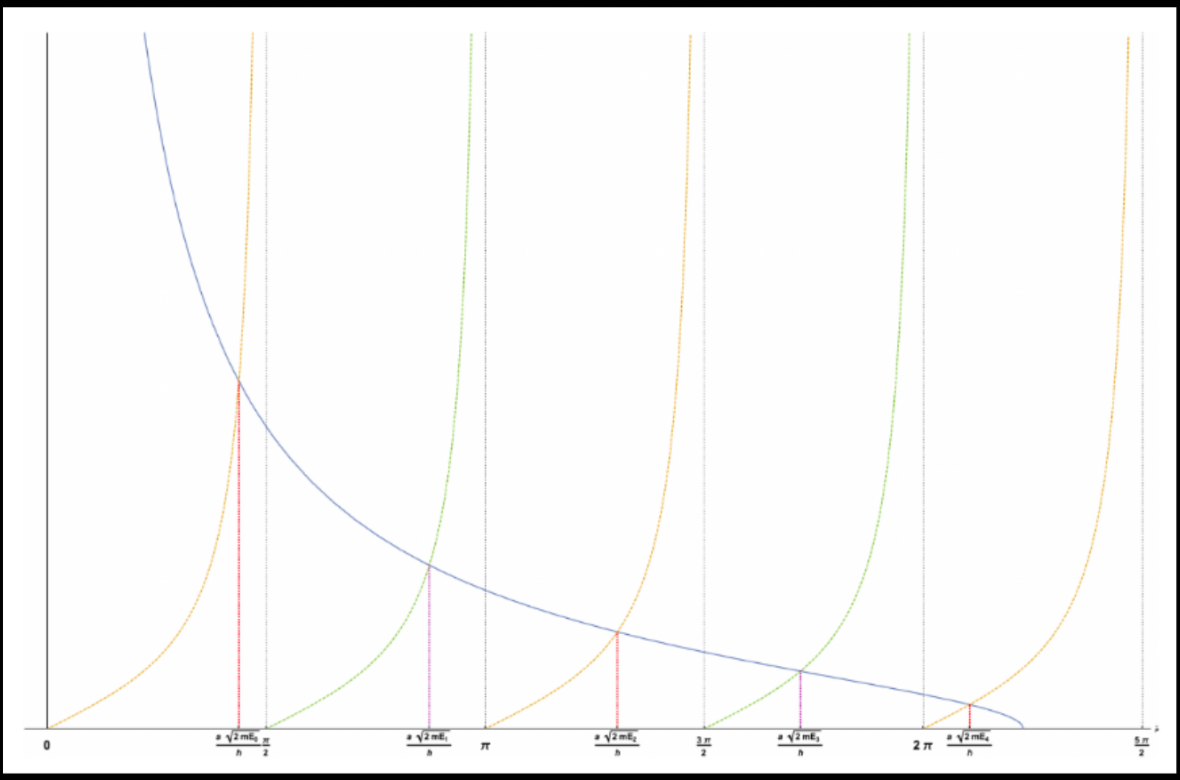
$$\psi_{II}(-1) = \psi_{II}(1) = D\cos(\tilde{p}) \quad \therefore \quad A = G = D\cos(\tilde{p})e^{\tilde{k}}$$

Escribiendo $\tilde{k} = \sqrt{\tilde{p}_0 - \tilde{p}^2}$ donde $\tilde{p}_0 = \frac{a\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$, las soluciones cumplirán con

$$\sqrt{\left(\frac{\tilde{p}_0}{\tilde{p}}\right)^2 - 1} = \tan(\tilde{p}); \qquad \text{caso par}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\tilde{p}_0}{\tilde{p}}\right)^2 - 1} = -\cot(\tilde{p}); \qquad \text{caso impar}$$

cuyas gráficas en el cuadrante positivo con $\tilde{p}_0 = 7$ lucen como



obteniendo 5 energías, las cuales al ser graficadas en el pozo de potencial son