Polimios de Legendre

pt. 420

18 abril 23

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n-1)y = 0$$

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \qquad \text{Ec. de Legendre}$$

$$(1-x^2)P_n^{m\,''}(x) - 2xP_n^{m\,'}(x) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_n^m(x) = 0$$

$$P_n(x) = \begin{cases} \text{Gram-Schmidt} \\ \text{Relación de recurrencia} \\ \text{Función generadora} \quad g(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \\ \text{Fórmula de Rodrigues} \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \end{cases}$$

Tomando la n-ésima derivada de la Ec. de Legendre es

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[\underbrace{(1-x^2)}_{g}\underbrace{P_n''(x)}_{f} - \underbrace{2x}_{g}\underbrace{P_n'(x)}_{f} + n(n+1)P_n(x)\right] = 0$$

La fórmula de Leibniz nos dice que $\frac{d^m}{dx^m}fg = \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{d^{m-j}}{dx^{m-j}}f\,\frac{d^j}{dx^j}g$.

En cuyo caso,

$$\frac{d^m}{dx^m}(1-x^2)P_n'' = \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{d^{m-j}}{dx^{m-j}}\left(\frac{d^2P_n}{dx^2}\right)\frac{d^j}{dx^j}(1-x^2)$$

$$\frac{d^j}{dx^j}(1-x^2) = \begin{cases} j=0 \longrightarrow (1-x^2);\ \binom{m}{0} \\ j=1 \longrightarrow -2x;\ \binom{m}{1} \\ j=2 \longrightarrow -2;\ \binom{m}{2} \\ j>2 \longrightarrow 0; \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$(1-x^2)u'' - 2xmu' - \frac{2m(m-1)}{2}u + $$
$$-2xu' - 2mu + n(n-1)u = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)u'' + \left[-2xm - 2x\right]u' + \left[m(m-1) - 2m + n(n-1)\right]u = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)u'' + \left[-2xm - 2x\right]u' + \left[(n-m)(n+m+1)\right]u = 0$$

Sea $u(x) = (1-x^2)^{-m/2}v(x) \Leftrightarrow v(x) = (1-x^2)^{m/2}u(x)$, por lo cual

$$(*)\ \frac{du}{dx} = -\frac{m}{2}(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}(-2x)v(x) + (1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v'(x) = xm(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}v(x) + (1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v'(x)$$

$$(*)\ \frac{d^2u}{dx^2} = xm\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}v(x)\right] + m(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}v(x) + \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v'(x)\right]$$

$$= xm\left[-\frac{m}{2}-1\,(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-2}(-2x)v(x) + (1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}v'(x)\right]$$

$$+ m(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}v(x) - \frac{m}{2}(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}(-2x)v'(x) + (1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v''(x)$$

$$= 2x^2m\left(\frac{m}{2}+1\right)(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-2}v(x) + xm(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}v'(x) + m(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}v(x)$$

$$+ xm(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}v'(x) + (1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v''(x)$$

$$= 2x^2m\left(\frac{m}{2}+1\right)(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-2}v(x) + m(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}v(x)$$

$$+ xm(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}v'(x) + xm(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}v'(x) + (1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v''(x)$$

$$= 2x^2m\left(\frac{m}{2}+1\right)(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}(1-x^2)^{-2}v(x) + m(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}(1-x^2)^{-1}v(x)$$

$$+ xm(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}v'(x) + xm(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}v'(x) + (1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v''(x)$$

$$= \left[2x^2m\left(\frac{m}{2}+1\right)(1-x^2)^{-2} + m(1-x^2)^{-1}\right](1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v(x)$$

$$+ 2xm(1-x^2)^{-1}(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v'(x) + (1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v''(x)$$

Consecuentemente,

$$(*)\ [-2xm-2x]u' = (-2xm-2x)\left[xm(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}v(x) + (1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v'(x)\right]$$

$$= -2x(m+1)xm(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}v(x) - 2x(m+1)(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v'(x)$$

$$(*)\ (1-x^2)u'' = (1-x^2)\left[2x^2m\left(\frac{m}{2}+1\right)(1-x^2)^{-2} + m(1-x^2)^{-1}\right](1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v(x)$$

$$+ (1-x^2)2xm(1-x^2)^{-1}(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v'(x) + (1-x^2)(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v''(x)$$

$$= \left[2x^2m\left(\frac{m}{2}+1\right)(1-x^2)^{-1} + m\right](1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v(x)$$

$$+ 2xm(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v'(x) + (1-x^2)(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v''(x)$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación

$$(1-x^2)u'' + [-2xm-2x]u' + [(n-m)(n+m+1)]u = 0$$

$$\Rightarrow \left[2x^2m\left(\frac{m}{2}+1\right)(1-x^2)^{-1} + m\right](1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v(x) + 2xm(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v'(x)$$

$$+ (1-x^2)(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v''(x) - 2x^2(m+1)(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}v(x) - 2x(m+1)(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}v'(x)$$

$$+ [(n-m)(n+m+1)](1-x^2)^{-m/2}v(x) = 0$$

$$\Rightarrow v(x)\left[2x^2m\left(\frac{m}{2}+1\right)(1-x^2)^{-1} + m - 2x^2(m+1)(1-x^2)^{-1} + (n-m)(n+m+1)\right]$$

$$+ v'(x)[2xm - 2x(m+1)] + (1-x^2)v''(x) = 0$$

$$(1-x^2)v''(x) - 2xv'(x) + \left[\frac{2x^2m\left(\frac{m}{2}+1\right)}{(1-x^2)} + m - \frac{2x^2(m+1)}{(1-x^2)} + (n-m)(n+m+1)\right]v(x) = 0$$

$$\therefore \boxed{(1-x^2)v''(x) - 2x v'(x) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)}\right] v(x) = 0}$$ Ecuación asociada de Legendre

Con lo cual, se ve entonces que

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_n^m(x) - 2x\frac{d}{dx}P_n^m(x) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)}\right]P_n^m(x) = 0$$

Considerando la asignación $n \leftrightarrow \ell$,

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_\ell^m(x) - 2x\frac{d}{dx}P_\ell^m(x) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)}\right]P_\ell^m(x) = 0$$

donde $\Phi(\varphi) = e^{\pm im\varphi} = e^{\pm im(\varphi + 2\pi)}$, $m \in \mathbb{Z}$. Siendo las soluciones

$$\Phi_m(\varphi) = C_1 e^{\pm im\varphi}$$

En cuyo caso se tiene

$$C_1^2 \int_0^{2\pi} \Phi_m^*(\varphi)\Phi_{m'}(\varphi)\, d\varphi = C_1^2 \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} e^{im'\varphi} d\varphi = C_1^2 \int_0^{2\pi} e^{i\varphi(m-m')} d\varphi$$

$$= \frac{C_1^2}{i(m-m')} e^{i\varphi(m-m')}\Big|_0^{2\pi} = \begin{cases} 2\pi C_1^2 & \text{si } m=n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

Por la fórmula de Rodrigues

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell$$

$$P_\ell^m(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^\ell \ell!}\frac{d^m}{dx^m}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell \Rightarrow \begin{cases} \ell + m \geq 0 \\ \ell + m \leq 2\ell \end{cases} \Rightarrow -\ell \leq m \leq \ell$$

Considere el siguiente resultado sin demostrar $P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}P_\ell^m(x)$

Además, note que se tiene

$$\int_{-1}^{1} P_\ell^m(x)\, P_{\ell'}^m(x)\, dx = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}}\, P_\ell^m(x) \sqrt{\frac{2}{2\ell'+1}\frac{(\ell'+m)!}{(\ell'-m)!}}\, P_{\ell'}^m(x) = \delta_{\ell\ell'}$$

Definimos entonces a las soluciones normalizada de la parte angular de la ecuación $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$ como los armónicos esféricos,

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\, P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{\pm im\varphi}$$