30 enero 23

Mecánica Analítica

Francisco Javier Mandujano
frmas@ciencias.unam.mx
Lab. de Fluidos, 4° piso dpto. Física

Ulises Jesús Gutiérrez Hernández
ulisses@ciencias.unam.mx

Calificación

- Tareas 60%
- Exámenes 40%

Ambos promedios deben ser aprobatorios

$X.Y$ t.q $X, Y \in \mathbb{N}$

↳ $Y \leq 5 \Rightarrow X$

↳ $Y > 5 \Rightarrow X+1$

Textos o Referencias

- Mecánica - Sommerfeld
- Mechanics - Landau
  - Maviour
  - Goldstein
  - Taylor

MECÁNICA NEWTONIANA

$$\left.\begin{array}{ll} (i) & \vec{p} = m\vec{v} = \text{cte} \\ (ii) & \vec{F} = m\vec{a} \\ (iii) & \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \end{array}\right\} \text{"Axiomas" de la Mecánica}$$

Note que (ii) podemos reescribirlo como $\Sigma F = 0$ y (iii) como $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$. ¿Será (iii) un caso patológico de (ii)? ¡NO! pues (iii) actúa sobre cuerpos diferentes.

(i) $F = F(t)$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t)$$

pero sabemos que $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m}\vec{F}(t)$, por lo cual

$$\int_{\vec{v}(t_0)}^{\vec{v}(t)} dv = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t')\,dt'$$

teniendo entonces $v(t) - v(t_0) = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t')\,dt'$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = v(t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t')\,dt$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + v(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt'' \int_{t_0}^{t''} F(t')\,dt'$$

(ii) $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$

Notación

- $\vec{v}$: vector
- v_i : i-ésimo elemento de $\vec{v}$
- $\mathbb{A}$: matriz
- a_{ij} : elemento ij de $\mathbb{A}$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt} = F(\vec{r}) \Rightarrow m\frac{dv_i}{dt} = F_i(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \sum_i m v_i = \sum_i v_i F_i$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \sum_i v_i F_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_iv_i\right) = \frac{1}{2}m\frac{dv_i}{dt}v_i + \frac{1}{2}m v_i\frac{dv_i}{dt} = m v_i \frac{dv_i}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{F}$$

$$\Rightarrow \int dT = \int \underbrace{\vec{v}\cdot\vec{F}}_{\text{Potencia}}\,dt \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int dT}_{\text{Trabajo}} = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow \boxed{\Delta T = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

Teorema del Trabajo y Energía

Si $\vec{F}$ no es conservativa la integral es inexacta. Pero si $\vec{F} = \nabla U$ entonces tendremos que

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \nabla U \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \left(dx\, \hat{\imath} + dy\, \hat{\jmath} + dz\, \hat{k} \right)$$

Tómese $(x, y, z) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$, entonces

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i$$

Análogamente, si $\vec{F} = -\nabla U$, se sigue $\vec{F} = -\sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i = dU(x_1, x_2, x_3)$. Del Teorema del Trabajo y Energía tendríamos

$$\Delta T = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow T_f - T_i = \int -dU = -\Delta U = U_i - U_f$$

$$\Rightarrow T_f - T_i = U_i - U_f$$

Sin embargo, si F no es conservativa $T_f + U_f \neq U_i + T_i = cte$