11 sept 2023

El oscilador armónico, método diferencial

De forma clásica recuerde que para una fuerza $F=-kx$ su potencial es

$$V(x)=\frac{1}{2}kx^2 \tag{1.1}$$

de donde $-kx(t)=m\,\partial_t^2 x(t)$ cuya frecuencia será $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ y entonces el potencial es

$$V(x)=\frac{1}{2}\omega^2 m x \tag{1.2}$$

Sustituyendo en la ecuación de onda

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi+\frac{1}{2}\omega^2 m x^2\Psi=E\Psi \tag{2.1}$$

No obstante, note que conviene medir el sistema en $E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega$; $k=\frac{E}{E_0}$. De este modo, la ecuación (2.1) se vuelve

$$-\frac{\hbar}{m\omega}\partial_x^2\Psi+\frac{\omega m}{\hbar}x^2\Psi=k\Psi \tag{2.2}$$

Redefiniendo nuestras unidades de distancia

$$x_0=\sqrt{\frac{\hbar}{\omega m}}\ ;\quad \xi=\frac{x}{x_0}=x\sqrt{\frac{\omega m}{\hbar}}$$

Así pues, (2.2) será

$$-\partial_\xi^2\Psi(\xi)+\xi^2\Psi(\xi)=k\Psi(\xi)\Rightarrow\partial_\xi^2\Psi(\xi)=(\xi^2-k)\Psi(\xi) \tag{2.3}$$

Para $\xi\to\infty$, $\partial_\xi^2\Psi=\xi^2\Psi$ cuyas soluciones son de la forma $Pol_\pm e^{\pm\xi^2/2}$ donde Pol es es un polinomio, i.e.

$$\Psi(\xi)=h(\xi)e^{-\xi^2/2}$$

Derivando vamos a tener

* $\partial_\xi\Psi=(\partial_\xi h)e^{-\xi^2/2}-\xi h e^{-\xi^2}$
* $\partial_\xi^2\Psi=(\partial_\xi^2 h)e^{-\xi^2/2}-\xi(\partial_\xi h)e^{-\xi^2/2}-\partial_\xi(\xi h)e^{-\xi^2/2}-\xi h(-\xi e^{-\xi^2/2})$

$$=(\partial_\xi^2 h)e^{-\xi^2/2}-\xi(\partial_\xi h)e^{-\xi^2/2}-he^{-\xi^2/2}-\xi(\partial_\xi h)e^{-\xi^2/2}+\xi^2 he^{-\xi^2/2}$$

$$=(\partial_\xi^2 h)e^{-\xi^2/2}-2\xi(\partial_\xi h)e^{-\xi^2/2}-he^{-\xi^2/2}+\xi^2 he^{-\xi^2/2}$$

Sustituyendo en (2.3) obtenemos

$$(\partial_\xi^2 h)e^{-\xi^2/2}-2\xi(\partial_\xi h)e^{-\xi^2/2}-he^{-\xi^2/2}+\xi^2 he^{-\xi^2/2}=(\xi^2-k)he^{-\xi^2/2}$$

$$\Rightarrow(\partial_\xi^2 h)-2\xi(\partial_\xi h)-h+\xi^2 h=(\xi^2-k)h$$

$$\Rightarrow(\partial_\xi^2 h)-2\xi(\partial_\xi h)-h+\xi^2 h-\xi^2 h+kh=0$$

$$\Rightarrow(\partial_\xi^2 h)-2\xi(\partial_\xi h)+(k-1)h=0 \tag{2.4}$$

Proponemos a $h=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\xi^n\Rightarrow\partial_\xi h=\sum_{n=0}^{\infty}na_n\xi^{n-1}\Rightarrow\partial_\xi^2 h=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n\xi^{n-2}$. Nótese que los primeros dos términos de ∂_ξ^2 son cero, por lo cual podemos recorrer el índice dos lugares, entonces obtenemos

$$\partial_\xi^2 h=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\xi^n$$

Sustituyendo en (2.4) se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\xi^n-2\xi\sum_{n=0}^{\infty}na_n\xi^{n-1}+(k-1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n\xi^n=0$$

$$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\xi^n-2\sum_{n=0}^{\infty}na_n\xi^n+(k-1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n\xi^n=0$$

$$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(k-1-2n)a_n\right]=0$$

12 sept 2023

$$\Rightarrow a_{n+2}=-\frac{k-1-2n}{(n+2)(n+1)}a_n$$

de donde obtenemos que

$$h=a_0\Bigg(1+\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\overbrace{\prod_{j=0}^{n}\frac{2j-1-k}{(j+2)(j+1)}}^{\text{los pares}}\Big)\xi^{n+2}+a_1\Big(\xi+\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\overbrace{\prod_{j=0}^{n}\frac{2j-1-k}{(j+2)(j+1)}}^{\text{los nones}}\Big)\xi^{n+2}$$

nótese que la suma que es multiplicada con a_0 para $n\to\infty$ resulta en e^{ξ^2}.

Proponemos $k = 2N+1$, de lo cual al tomar

$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \Rightarrow k = \frac{2E}{\hbar\omega} \Rightarrow E = \frac{k\hbar\omega}{2}$, obtenemos

$$\boxed{E = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)}$$