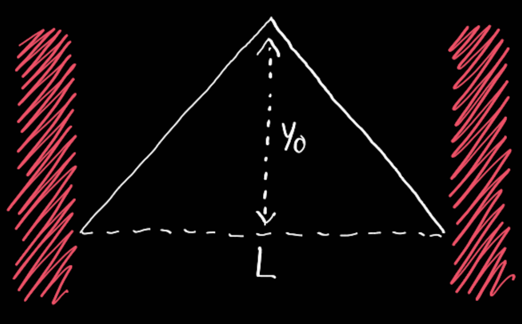
Análisis de Fourier

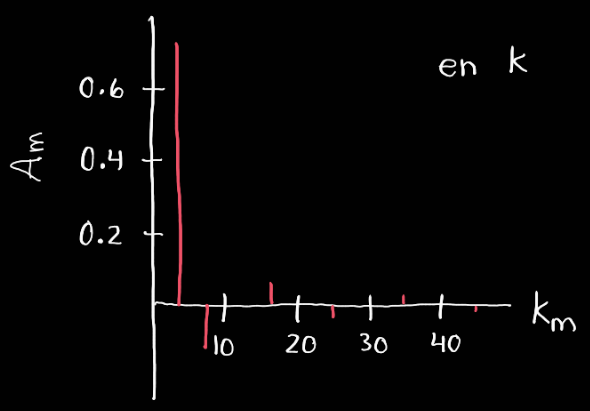
Teorema. Sea $f(x)$ una función periódica con periodo λ, esto es $f(x+\lambda)=f(x)$, más o menos bien comportada (sin muchas discontinuidades). Entonces $f(x)$ se puede escribir como la serie:

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}A_m\cos\left(\frac{2m\pi}{\lambda}\right)+\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\left(\frac{2m\pi}{\lambda}\right)$$

con $A_m=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda}f(x)\cos\left(\frac{2m\pi x}{\lambda}\right)dx$ y, $B_m=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda}f(x)\sin\left(\frac{2m\pi x}{\lambda}\right)dx$.

Una función, dos formas de representarla



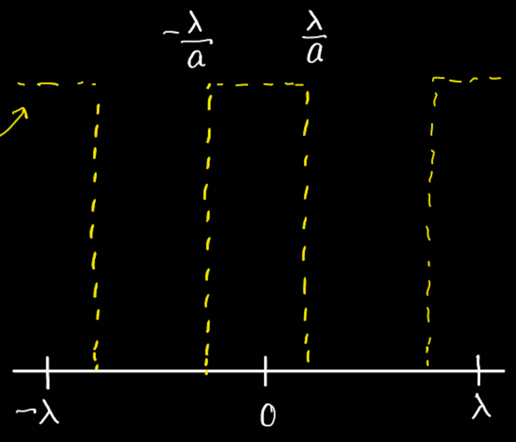


Localización de un pulso

Para localizar espacialmente una onda sin fronteras considere el siguiente ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases}1; & |x|<\frac{\lambda}{a}\\ 0; & \frac{\lambda}{a}<x<\lambda-\frac{\lambda}{a}\end{cases}$$

envolvente cuadrada y periódica

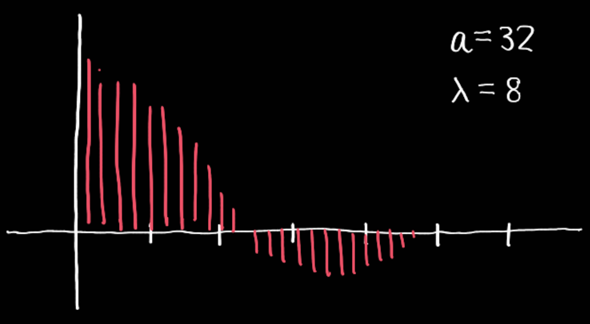


dado que $f(x)$ es par, solo aparecen coeficientes de coseno.

Por lo cual,

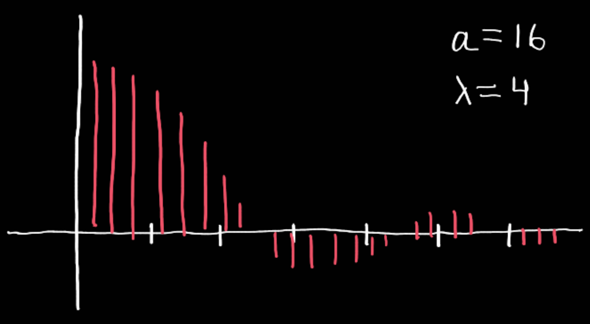
$$A_m=\int_{-\lambda/a}^{\lambda/a}\cos\left(\frac{2m\pi x}{\lambda}\right)dx=\frac{2\lambda\sin\left(\frac{2m\pi}{a}\right)}{\cancel{a}\,\frac{2m\pi}{a}}=\frac{2\lambda\sin\left(\frac{mk\lambda}{a}\right)}{mk\lambda}=\frac{2\lambda\sin\left(\frac{2m\pi}{a}\right)}{mk}$$

Tomamos $\lambda=1$ y $a=4$. Hacemos crecer a y λ, manteniendo el cociente $\lambda/a=1/4$.



La densidad de coeficientes aumenta en el espacio mk; tiende a una distribución continua.

→ Esto aisla un solo pulso.



Transformada de Fourier

Teorema. Una función no periódica "bien comportada" (cuadro integrable) se puede escribir como una superposición de ondas armónicas

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^\infty A(k)\cos(kx)dk + \int_0^\infty B(k)\sin(kx)dk\right]$$

donde $A(k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos(kx)dx$ y, $B(k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin(kx)dx$ son la transformada de Fourier de $f(x)$ en notación con seno y coseno.

Localización ~ Monocromaticidad

- El pulso está localizado espacialmente entre $-L/2$ y $L/2$.
- Anchura espacial del pulso $\Delta x = L$.
- La mayor contribución a $A(k)$ está localizada entre 0 y $2\pi/L$.
- Anchura de la distribución de $\Delta k = 2\pi/L$.

$$\Delta x\,\Delta k = \frac{2\pi}{L}L = 2\pi$$

Conclusión: para conseguir pulsos muy localizados hay que superponer intervalos más grandes de k.

Ejemplo 1: Trenes de onda

Considere un tren ondulatorio finito con frecuencia constante:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(k_0 x); & |x| < L \\ 0; & |x| > L \end{cases}$$

Calculamos su transformada:

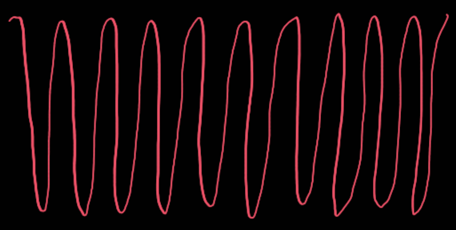
$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(kx)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-L}^{L}\cos(k_0 x)\cos(kx)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-L}^{L}[\cos(k_0 - k)x + \cos(k+k)]dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin(k_0 - k)L}{(k_0 - k)L}$$

$f(x)$



en $A(k)$ el tren es "semi" cromático

Aproximación: $k_0 - k \ll k_0 + k$

- Ancho del tren "(semi) monocromático": $\Delta x = 2L$
- Ancho de la distribución en k: $\Delta k = 2\pi/L$

Obteniendo que $\Delta x\,\Delta k = 4\pi$.

Por otra parte, si x y k están relacionadas, t y ω también lo están. En cuyo caso: $\Delta t\,\Delta\omega = 2\pi\,\Delta t\,\Delta\upsilon \approx 2\pi$, $\therefore \Delta t\,\Delta\upsilon \approx 1$.

Ancho de Banda y Coherencia

- Trenes de onda con duración $\tau = 1/$(tasa de decaimiento medio).
- Ancho de banda: anchura de distribución de frecuencias.
- Tiempo de coherencia (tiempo que dura el tren)

$$\tau = \frac{1}{\Delta\nu}$$

- Longitud de coherencia (distancia que recorre el tren durante τ): $L_{coh} = c\tau$.

Definición. Pureza espectral $\Delta\nu/\nu = \Delta\lambda/\lambda$.

long. de onda central

ancho de banda

frecuencia central

localización de longitud de onda