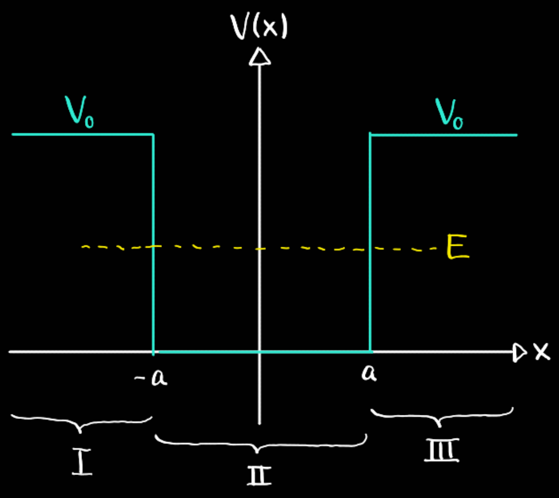
4 sept 2023



En lugar de imponer al sistema cómo debe de ser medido, vamos a dejar que el sistema nos diga como medir. Tomamos como unidades a

$$\xi = \frac{x}{a}$$

Similarmente, vamos a considerar

$$\tilde{k} = \frac{a\sqrt{2mE}}{\hbar}\,; \qquad \tilde{p} = \frac{\alpha\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

de lo cual recuperamos las soluciones a la ecuación de onda

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi + V\psi = E\psi$$

y son de la forma

$$\psi_I = Ae^{-\tilde{p}\xi} + Be^{\tilde{p}\xi}$$

$$\psi_{II} = C\sin(\tilde{k}\xi) + D\cos(\tilde{k}\xi)$$

$$\psi_{III} = Fe^{-\tilde{p}\xi} + Ge^{\tilde{p}\xi}$$

Si bien la función es discontinua, la ecuación de Schrödinger nos exige que la derivada debe de ser continua. Viendo las soluciones, i.e. imponiendo nuestros prejuicios clásicos la función no puede ser cero pues exigimos continuidad.

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} V\psi\, dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} E\psi\, dx$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x\psi\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} V\psi\, dx = \cancelto{0}{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} E\psi\, dx}$$

si $V(x)$ no posee singularidades entonces la derivada debe de ser continua. En caso de no serlo, al evaluar la derivada en ε y $-\varepsilon$ vamos a obtener el valor de la discontinuidad.

Por lo tanto, tendremos que

$$\psi_I = \cancelto{0}{Ae^{-\tilde{p}\xi}} + Be^{\tilde{p}\xi}\,; \qquad \psi_{III} = Fe^{-\tilde{p}\xi} + \cancelto{0}{Ge^{\tilde{p}\xi}}$$

entonces,

$$Be^{-\tilde{p}} = C\sin(-\tilde{k}) + D\cos(-\tilde{k}) \quad (i) \quad \Rightarrow \quad Bpe^{-\tilde{p}} = \tilde{k}\left[C\cos(-\tilde{k}) - D\sin(-\tilde{k})\right] \quad (iii)$$

$$Fe^{-\tilde{p}} = C\sin(\tilde{k}) + D\cos(\tilde{k}) \quad (ii) \quad \Rightarrow \quad -Fpe^{-\tilde{p}} = \tilde{k}\left[C\cos(\tilde{k}) - D\sin(\tilde{k})\right] \quad (iv)$$

Tenemos cuatro ecuaciones. Mult. (i) por $\tilde{p}$ e igualando con (iii); y mult. (ii) con (iv) se sigue

$$\tilde{p}\left[C\sin(-\tilde{k}) + D\cos(-\tilde{k})\right] = \tilde{k}\left[C\cos(\tilde{k}) + D\sin(\tilde{k})\right]$$

$$\tilde{p}\left[C\sin(\tilde{k}) + D\cos(\tilde{k})\right] = -\tilde{k}\left[C\cos(\tilde{k}) - D\sin(\tilde{k})\right]$$

de lo cual

$$D\left[\tilde{p}\cos(\tilde{k}) - \tilde{k}\sin(\tilde{k})\right] = 0$$

$$C\left[\tilde{p}\sin(\tilde{k}) + \tilde{k}\cos(\tilde{k})\right] = 0$$

matemáticamente podemos ver que $C=0$ y $D=0$. No obstante, físicamente esto no haría sentido, por lo que las combinaciones válidas son

* $D=0$ y $\tilde{p}\sin(\tilde{k}) + \tilde{k}\cos(\tilde{k}) = 0$
* $C=0$ y $\tilde{p}\cos(\tilde{k}) - \tilde{k}\sin(\tilde{k}) = 0$