Espacios de "Hilbert" (Dirac)

Si $\Psi(x) \Leftrightarrow \tilde{\Psi}(p)$ entonces Ψ es un estado.

$\mathcal{H}$ espacio vectorial lineal.

Sea $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ "ket"

(i) Si $|A\rangle, |B\rangle \in \mathcal{H} \Rightarrow a|A\rangle + b|B\rangle = |\Psi\rangle \in \mathcal{H}$; $a, b \in \mathbb{C}$

(ii) $\exists$ operadores $\ni\cdot$ $\hat{A}|\psi\rangle = |\zeta\rangle \in \mathcal{H}$

$\mathbb{1}|\psi\rangle = |\psi\rangle$ unidad

(iii) $\forall |\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ $\exists \langle\psi|$ "bra"

$\langle\Psi|$ es el transpuesto conjugado de $|\Psi\rangle$

... $\langle\Psi| \in \mathcal{H}^*$ (espacio dual de $\mathcal{H}$)

(i) $a\langle A| + b\langle B| = \langle\psi| \in \mathcal{H}^*$; $a, b \in \mathbb{C}$

$$|\chi\rangle + \langle\psi| = ¿!$$ X

$\langle\psi|\hat{B} = \langle\alpha|$, $\langle\psi|\mathbb{1} = \langle\psi|$

Producto interno "bra y ket"

$\langle\phi||\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle \in \mathbb{C}$

Propiedad

$\langle\psi|\phi\rangle = (\langle\phi|\psi\rangle)^* = \langle\phi|\psi\rangle^* \Leftrightarrow \langle\psi|\phi\rangle = b \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \langle\phi|\psi\rangle = b^*$

Dado $\hat{A}$, definimos $\hat{A}^\dagger$ "A daga".

$\hat{A}^\dagger$ es el transpuesto conjugado de $\hat{A}$, o adjunto de $\hat{A}$, o Hermitiano conjugado de $\hat{A}$:

- $\hat{A}|\Psi\rangle = |\phi\rangle \Rightarrow \langle\psi|\hat{A}^\dagger = \langle\phi|$
- $\hat{A}|\psi\rangle = |\phi\rangle \Rightarrow \underbrace{\langle\chi|\hat{A}|\psi\rangle}_{\text{"elemento de matriz"}} = \langle\chi|\phi\rangle \in \mathbb{C}$
- $\langle\psi|\hat{A}^\dagger = \langle\phi| \Rightarrow \langle\psi|\hat{A}^\dagger|\chi\rangle = \langle\phi|\chi\rangle \in \mathbb{C}$
  $= \langle\chi|\phi\rangle^*$
- $\langle\psi|\hat{A}^\dagger|\chi\rangle = \langle\chi|\hat{A}|\psi\rangle^*$

Notamos: $\hat{A}\hat{B} = \hat{C}$

- $\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle = \hat{A}(\hat{B}|\psi\rangle) = \hat{A}|\phi\rangle = |\chi\rangle \Leftrightarrow \hat{C}|\psi\rangle = |\chi\rangle$
- $\hat{C} = \hat{A}\hat{B} \Rightarrow \hat{C}^\dagger = B^\dagger A^\dagger$
- $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ o bien $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$

Conmutador: $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \begin{cases} 0 & \text{si conmutan} \\ n \neq 0 & \text{si no conmutan} \end{cases}$

Ejemplo: Hilbert FINITO $N\times N$

Sea $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \Rightarrow \langle\psi| = [a_1^*, a_2^*, \dots, a_N^*]$; $a_j \in \mathbb{C}$, $j \in \{1, 2, \dots, N\}$

y también sea $|\phi\rangle = [b_1, b_2, \dots, b_N]^T$. De tal modo,

$$\langle\phi|\psi\rangle = [b_1^*, b_2^*, \dots, b_N^*]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = b_1^* a_1 + b_2^* a_2 + \dots + b_N^* a_N \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \langle\psi|\phi\rangle = a_1 b_1^* + a_2 b_2^* + \dots + b_N^* a_N = \langle\phi|\psi\rangle^*$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} = a_{ij} \Rightarrow \hat{A}^\dagger = a_{ji}^*$$

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{N} e_i e_i^T$$

Producto "externo"

Note $|\psi\rangle\langle\phi| = \hat{B}$ (¡operador!)

Matrices:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}[b_1^*, b_2^*, \dots, b_N^*] = a_i b_j^* = \begin{bmatrix} a_1 b_1^* & a_1 b_2^* & \cdots & a_1 b_N^* \\ a_2 b_1^* & a_2 b_2^* & \cdots & a_2 b_N^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_N b_1^* & a_N b_2^* & \cdots & a_N b_N^* \end{bmatrix}$$

1 Partícula en 1D

$\hat{x}$ posición, $\hat{p}$ momento

Bases de $\mathcal{H}$ de $\hat{x}$ y $\hat{p}$

(I) $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$ ← ket de x

operador

$\in$ $x \in \mathbb{R}$

$|x\rangle$: eigenestados de $\hat{x}$

x : eigenvalor de $\hat{x}$ en $|x\rangle$

Base de $\mathcal{H}$: $\{|x\rangle, \forall x \in \mathbb{R}\}$

(i) $\langle x'|x\rangle = \delta(x - x')$ ortonormalización

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x| \, dx = \hat{\mathbb{1}}$ completez

¡DETALLE! $\hat{A} \Rightarrow \hat{A}^\dagger$

Si $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ es Hermitiano ($\Rightarrow$ su base tiene eigenvalores reales)

Sea $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = a \in \mathbb{C} \Rightarrow \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle^* = \langle\psi|\hat{A}^\dagger|\psi\rangle \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}^\dagger$

Sea $|\psi\rangle \in \mathcal{H} \Rightarrow |\psi\rangle = \hat{\mathbb{1}}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x|\psi\rangle \, dx$

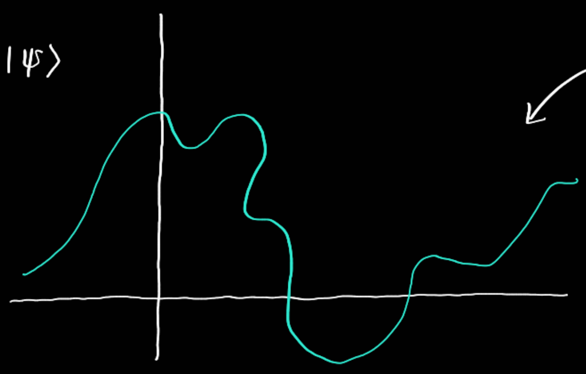
$\in \mathbb{C}$

$|\psi\rangle$ es una combinación lineal de los elementos de la base (superposición lineal)

$$\vec{a} = a_x\,\hat{x} + a_y\,\hat{y} + a_z\,\hat{z}$$

Note... ¡$\langle x|\psi\rangle \in \mathbb{C}$ es una función de x!

$\mathrm{Re}\langle x|\psi\rangle$



La función de onda es la proyección del ket sobre la base

¿$\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$?

Base de $\hat{p}$. $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle,\ \forall p \in \mathbb{R}$

(i) $\langle p'|p\rangle = \delta(p-p')$ ortonormalización

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |p\rangle\langle p|\, dp = \hat{\mathbb{1}}$ completez

¿$\langle p|\psi\rangle = \tilde{\psi}(p)$!

$\langle x|p\rangle =$ ¿?

Suponga $|\psi\rangle \in \mathcal{H} \Rightarrow |\psi\rangle = \hat{\mathbb{1}}\,|\psi\rangle \in \mathbb{C}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |p\rangle \underbrace{\langle p|\psi\rangle}_{\text{base de } p}\, dp$$

Matriz diagonal

Buscamos $\hat{A}|\alpha_n\rangle = \alpha_n|\alpha_N\rangle$ donde $|\alpha_N\rangle = [c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nn}]^T$, $\alpha_n \in \mathbb{R}$ si $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$.

Principio de incertidumbre

$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$ ¡Cuántica!

$$\Rightarrow \langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{ipx/\hbar}$$

de Broglie