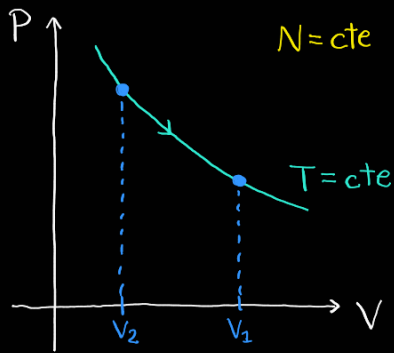


Trabajo isotérmico del gas ideal

Como contraste al problema anterior de la expansión libre, consideremos un gas ideal que sufre un proceso cuasiestático y que pasa sólo por estados de equilibrio, y que se realiza a temperatura constante T (se mantiene fijo el número de partículas N). El proceso se muestra en el diagrama $p - V$. La curva es una hipérbola dado que en ese proceso $p = \text{constante}/V$. Si el proceso es de V_1 a V_2 con $V_2 > V_1$, decimos que es una expansión isotérmica. Si el proceso es de V_2 a V_1 , entonces es una compresión isotérmica.



Dado que el proceso es cuasiestático y pasa por estados de equilibrio el trabajo no tiene por qué ser cero.

Para una expansión, el trabajo está dado por

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Por la ecuación de gas ideal, $p = NkT/V$. Dado que el proceso es isotérmico, entonces se tiene que

$$W = -NkT \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV = -NkT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Como $V_2 > V_1 \Rightarrow W < 0$ (expansión). Es decir, cuando el gas hace trabajo sobre los alrededores decimos que se tiene una expansión.

Para el caso de una compresión los límites se voltean, por lo que

$$W = -NkT \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

Como $V_2 > V_1 \Rightarrow W > 0$ (compresión). Aquí los alrededores hacen trabajo sobre el gas. Puesto que la energía no cambia en un proceso isotérmico de un gas ideal,

$$Q = -W$$

Adiabático

Proceso sin transferencia de calor... ¡PERO QUASIESTÁTICO!

$$dE = dW + dQ; \quad dQ = 0 \text{ en todo el proceso} \Rightarrow Q = \int_1^2 dQ = 0$$

$$\Rightarrow dE = dW$$

De esto último se sigue que $dE = -pdV$ y entonces

$$\underbrace{\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{N,V}}_{C_V} dT + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{N,T} dV + \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{T,V} dN = -pV \quad \dots(i)$$

$$\Rightarrow C_V dT = -pdV = -\frac{NkT}{V} dV; \quad N \text{ cte}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dT}{T} = -\frac{Nk}{C_V} \int \frac{dV}{V} \Rightarrow \ln T = -\frac{Nk}{C_V} \ln V + \ln K(N) \Rightarrow \ln(T) = \ln(V^{-Nk/C_V} K)$$

$$\Rightarrow T = KV^{-\frac{Nk}{C_V}} \Rightarrow V^{\frac{Nk}{C_V}} T = K \quad \text{depende de } N \text{ y del proceso adiabático}$$

Hayamos $C_P - C_V = Nk$ (gas ideal). Por lo tanto,

$$V^{\frac{C_P - C_V}{C_V}} T = K \Rightarrow V^{\gamma - 1} T = K; \quad \gamma \equiv \frac{C_P}{C_V}$$