25 abril 23

Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite son las soluciones a

$$H_n'' - 2x H_n' + (\lambda - 1) H_n = 0$$

Función generadora de los polinomios de Hermite $\rightarrow$ $\boxed{g(x,t) = e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}}$

derivando respecto la generadora respecto a t

$$\frac{\partial g}{\partial t} = (-2t + 2x) e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{n t^{n-1}}{n!} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{n t^{n-1}}{n!}$$

$$\Rightarrow -2 \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^{n+1}}{n!} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x) \frac{n t^{n-1}}{n!}$$

$j = n+1$, $n = j-1$ $\qquad$ $j = n$ $\qquad$ $j = n-1$, $n = j+1$

$$\Rightarrow -2 \sum_{j=1}^{\infty} H_{j-1}(x) \frac{t^j}{(j-1)!} \frac{j}{j} + 2x \sum_{j=0}^{\infty} H_j(x) \frac{t^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} H_{j+1}(x) \frac{t^j}{j!}$$

$$\Rightarrow -2 \sum_{j=1}^{\infty} H_{j-1}(x) \frac{j t^j}{j!} + 2x \sum_{j=0}^{\infty} H_j(x) \frac{t^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} H_{j+1}(x) \frac{t^j}{j!}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \left[-2j H_{j-1}(x) + 2x H_j(x) - H_{j+1}(x) \right] \frac{t^j}{j!} + 2x H_0(x) - H_1(x) = 0$$

$$\Rightarrow 2x H_0(x) - H_1(x) = 0$$

$$\Rightarrow -2n H_{n-1}(x) + 2x H_n(x) + H_{n+1}(x) = 0$$

$\therefore \boxed{H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x)}$ Relación de recurrencia $\quad$ con $H_1(x) = 2x H_0(x)$

derivando la generadora respecto a x, $\frac{\partial g}{\partial x}$ se obtiene

$\boxed{H_n'(x) = 2n H_{n-1}(x)}$ Relación de recurrencia para la derivada

A partir de la función generadora

$$g(x,t) = e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

hacemos el desarrollo en serie de Taylor de e^z

$$e^{-t^2+2xt} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (-t^2 + 2xt)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (2x - t)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} (2x)^{j-m} (-t)^m ; \quad \text{por teorema del binomio}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} 2x^{j-m} t^m (-1)^m$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{j} \frac{t^{j+m}}{j!} \frac{j!}{m!(j-m)!} 2x^{j-m} (-1)^m$$

Renombrando índices $m=s$, $j=m+n$ entonces $j=n-m=n-s$, $j-m=n-2s$. De donde se sigue que

j	m	n	s
0	0	0	0
1	0	1	0
1	1	2	1
2	0	2	0
2	1	3	1
2	2	4	2

nuevamente, usamos

$$\left[\frac{n}{2}\right]=\begin{cases}\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par}\\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}$$

Por lo cual,

$$e^{-t^2+2xt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n-s)!}\sum_{s=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^s\frac{(n-s)!}{s!(n-2s)!}2x^{n-2s}\frac{n!}{n!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{s=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^s\frac{n!}{s!(n-2s)!}2x^{n-2s}$$ de donde

$$\boxed{H_n(x)=\sum_{s=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^s(2x)^{n-2s}\frac{n!}{s!(n-2s)!}}$$

Observe que $H_0(x)=1$, y con la relación de recurrencia + $H_1(x)$ se pueden encontrar los siguientes $H_n(x)$

Paridad de los polinomios de Hermite

$$g(-x,t)=e^{-t^2-2xt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(-x)$$

$$g(x,-t)=e^{-t^2-2xt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-t^n}{n!}H_n(x)$$

y vemos que $g(x,t)=g(x,-t)$

entonces $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(-1)^n H_n(x)$, $\therefore$ $\boxed{H_n(-x)=(-1)^n H_n(x).}$

P.d. en la tarea. $H_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}$, $H_{2n+1}(0)=0$.

Oscilador armónico cuántico

El potencial de un oscilador armónico es $\hat{V}(\hat{x})=\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$; $\hat{z}$ denota un operador.

El Hamiltoniano para ese potencial es

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

como $\hat{p}=-i\hbar\frac{d}{dx}$ $\Rightarrow$ $\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}kx^2$, $k=m\omega^2$.

La ecuación de Schrödinger

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}kx^2\right)\psi(x)=E\psi(x)$$

$\psi(x)$: función de onda del oscilador

E: energía del oscilador cuántico

Sea $y=\alpha x$ y $\alpha^4=\frac{mk}{\hbar^2}=\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}$, además $\lambda=2mE/\alpha^2\hbar^2$ por lo que

$$\frac{2mE}{\alpha^2h^2}=\frac{2E}{h}\frac{m}{\sqrt{mk}}\hbar=\frac{2E}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{k}}=\frac{2E}{\hbar\omega}=\lambda$$

Convirtiéndose la ecuación en

$$\frac{d^2\psi}{dy^2}-y^2\psi+\lambda\psi=0,\quad \text{i.e.}\quad \frac{d^2\psi}{dy^2}+(\lambda-y^2)\psi=0$$

Sean $\psi(y)=e^{-y^2/2}H_n(y)$

$\psi'(y)=e^{-y^2/2}(H_n'(y)-yH_n(y))$

$\psi''(y)=e^{-y^2/2}\left[H_n''(y)-2yH_n'(y)+(y^2-1)H_n(y)\right]$

Sustituyendo, $e^{-y^2/2}\left[H_n'' - 2y H_n' + (y^2-1) H_n + (\lambda - y^2) H_n\right] = 0$

$$\text{i.e.}\quad H_n'' - 2y H_n' + (\lambda - 1) H_n = 0$$

teníamos que la ecuación de Hermite es

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

$$H_n'' - 2x H_n' + 2n H_n = 0$$

identificando $\lambda - 1 = 2n$ terminamos,

$$E \to E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad \psi \to \psi_n = e^{-x^2/2} H_n(x)$$