Hipótesis de De Broglie

Una partícula de masa m $\quad E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$, $\vec{p} = m\vec{u}/\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$. Si $u = 0 \wedge p = 0 \Rightarrow E = mc^2$

(i) No relativista. $u \ll c \Rightarrow pc \ll mc^2$.

Por lo cual,

$$E = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2c^2}{m^2c^4}} \approx mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2c^2}{m^2c^4}\right) \approx mc^2 + \overbrace{\frac{p^2}{2m}}^{\text{energía cinética}}$$

$T = E - mc^2$ energía cinética

$T \approx \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$

(ii) Ultrarelativista. $pc \gg m^2$, $u \lesssim c$

Caso extremo $m = 0 \wedge u = c \Rightarrow \boxed{E \approx pc}$

Einstein en 1905 buscando entender la termodinámica es que logra resolver el efecto fotoeléctrico. Abordó dando un tratamiento a la luz como Plank lo planteaba: "cuantos de luz",

$$E = h\nu$$

Bajo dicho tratamiento tenemos que $v = c$, $m = 0$. Por lo cual,

$E = pc \quad (E, \vec{p})$ con $p = \sqrt{|\vec{p}|^2}$ partícula

$\nu = \frac{c}{\lambda}$, $\omega = 2\pi\nu$, $h = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\lambda}c \Rightarrow \omega = ck$ onda

$\boxed{E = h\nu} \Rightarrow p = \frac{h\nu}{c} \Rightarrow \boxed{p = \frac{h}{\lambda}} \Rightarrow pc = h\nu$

De lo cual podemos obtener $p = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{h}{2\pi} = \hbar k$, $\therefore \vec{p} = \hbar\vec{k}$. Es decir, propuso que

$$\underbrace{(E, \vec{p})}_{\text{partícula}} \longleftrightarrow \underbrace{(\hbar\omega, \hbar\vec{k})}_{\text{onda}}$$

Es decir, la luz es una onda $\Rightarrow$ partícula.

de Broglie supuso que si se tiene una partícula de masa $m \neq 0$ se obtenían ondas !! Es decir,

$$(E, \vec{p}) \longrightarrow (\hbar\omega, \hbar\vec{k})$$

de donde $E = h\nu = \hbar\omega$.

Partículas NO relativistas

$$E \simeq \frac{\vec{p}}{2m}, \quad \hbar\omega \approx \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\omega \approx \frac{\hbar}{2m} k^2} & \text{onda (dispersiva)} \\ \boxed{\omega \approx ck} & \text{ondas Rad. EM (no dispersiva)} \end{cases}$$

En 1927 Davisson & Gremmer dispararon e^- a un cristal donde se apreció difracción de electrones... pero difracción $\Leftrightarrow$ ondas. El resultado encontrado fue una λ de los e^- tal que $\lambda \sim 1\,\text{Å}$.

¿Cómo estimar λ de De Broglie?

Por un lado $\lambda = h/p$ donde $h \approx 6.6 \times 10^{-27}$ erg · seg

$\boxed{p = ¿?}$ $\qquad \hbar \approx 10^{-27}$ erg · seg

Consideraremos que $1\text{eV} = \text{energía} = 1.6 \times 10^{-19}\,\text{J} = \boxed{1.6 \times 10^{-12}\,\text{erg}}$

Si $E = mc^2$, la energía en reposo del e^-... entonces

$$E = 9.1 \times 10^{-28}\text{g} \left(3 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}\right)^2 \approx 81 \times 10^{-8}\,\text{erg}$$

Como $T \approx \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p \approx \sqrt{2mT}$.

(i) Sea 1e con $T \approx 50\,\text{eV}$, entonces

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mT}} = \frac{6.6 \times 10^{-27}}{\sqrt{2 \times 9 \times 10^{-28} \times 50 \times 1.6 \times 10^{-12}}}\,\text{cm}$$

$$\approx \frac{6 \times 10^{-27}}{2\sqrt{5 \times 10^{-28-12+1+1}}}\,\text{cm}$$

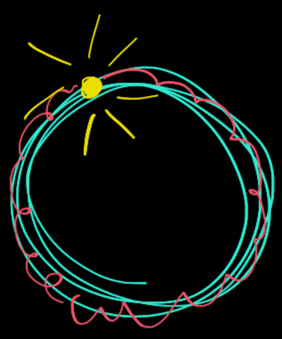
$$\approx 1.5 \times 10^{-8}\,\text{cm}$$

i.e. $\boxed{\lambda \approx 1.5\,\text{Å}}$

(ii) Ahora, si $T = 100\,\text{GeV} = 10^2 \cdot 10^9 \cdot 1.6 \times 10^{-12}\,\text{erg} \approx 1.6 \times 10^{-1}\,\text{erg}$. Entonces,

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mT}} \approx \frac{6 \times 10^{-27}}{\sqrt{2 \times 9 \times 10^{-28} \times 16 \times 10^{-1}}} \approx 3 \times 10^{-13}\,\text{cm} = 3 \times 10^{-5}\,\text{Å}$$

Esto último nos dice que, por ejemplo en el CERN las partículas que se aceleran se piensan de forma clásica: "pelotitas que chocan".



(iii) Suponga se lanza una pelota de masa $m \approx 100\text{g}$ a una velocidad $u \approx 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{10^2\, 10^5\,\text{cm}}{3600\,\text{seg}}$. Así pues,

$$p \approx \frac{100 \cdot 10^7}{3600} = \frac{10^9}{3600} \frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{seg}}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{6 \cdot 10^{-27}}{10^9} \times 3600\,\text{cm} \approx 216 \times 10^{-34}\,\text{cm}$$

Ejercicio. Suponga se tiene un cable de cobre en el cual fluyen electrones. Si $T_{emp} = 300\,K$ y $\boxed{\frac{p^2}{2m} \approx \frac{3}{2} k T_{emp}}$. ¿$\lambda_e$?

Solución. $p \approx \sqrt{3 k T_{emp}}$

"Heurístico es la forma elegante de decir que algo está cuchareado"

—V. Romero Rochín

Dado que los e^- son ondas, entonces

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad \text{(onda plana)}$$

Por De Broglie, $E = \hbar\omega \ \wedge \ \vec{p} = \hbar\vec{k}$.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{r},t) = -i\omega\,\psi(\vec{r},t) \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \hbar\omega\,\psi(\vec{r},t)$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = E\,\psi(\vec{r},t)$$

$$\nabla\psi(\vec{r},t) = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi_0\, e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$

$$= (\hat{\imath} \qquad\qquad)$$

$$\frac{\hbar}{i}\nabla\psi(\vec{r},t) = \hbar\vec{k}\,\psi(\vec{r},t)$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla\psi(\vec{r},t) = \vec{p}\,\psi(\vec{r},t)$$

Partícula libre NO relativista

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{p}}{2m}$$

Ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r},t)$$

Por lo tanto,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \frac{\vec{p}^2}{2m}\psi(\vec{r},t) = \frac{\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\cdot\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)}{2m}\psi(\vec{r},t)$$

y entonces $\vec{p} \longleftrightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla$, $E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \Leftrightarrow i\hbar(-i\omega)\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}(ik)(ik)\psi$$

$$\Leftrightarrow \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{dispersiva}$$