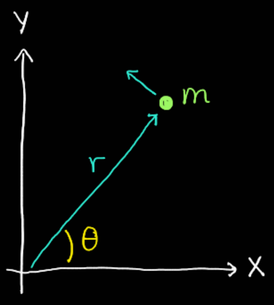
Resolución de examen

6 marzo 23

1. Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de un campo central cuyo potencial es de la forma $U = kr^2/2$. Escriba el lagrangiano en términos de las coordenadas generalizadas adecuadas y encuentre dos constantes de movimiento. Describa el tipo de trayectorias posibles en función de las dos constantes de movimiento ¿existen estados ligados?



(i) $U=\frac{1}{2}kr^2$ $\quad F=-kr\hat{r}$ $\quad \vec{v}=\dot{r}\hat{e}_r+r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

$\vec{r}\times\vec{F}=0$ $\quad \frac{d\vec{\ell}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}$ $\quad T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+\dot{r}^2\dot{\theta}^2)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}+\dot{r}^2\dot{\theta}^2)-\frac{1}{2}kr^2$$

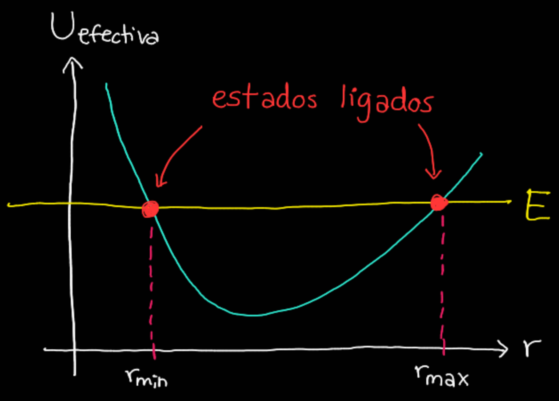
Note que $\boxed{mr^2\dot{\theta}=p_\theta=cte}$, entonces

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}+\frac{1}{2}kr^2$$

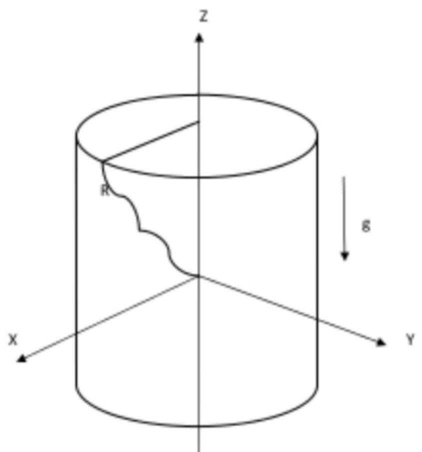
ecuaciones de mov.

Como $m\ddot{r}=m\dot{r}\dot{\theta}^2-kr$, se sigue

$$\boxed{m\ddot{r}=\frac{p_\theta^2}{mr}-kr}$$



2. Considere una partícula de masa m sobre un cilindro de radio R, unida al origen por un resorte de constante k y sujeto a una fuerza de gravedad g, como se muestra en en la figura.



a) Encuentre el lagrangiano del sistema y las ecuaciones de Euler-Lagrange.

c) Encuentre al menos dos constantes de movimiento y resuelva el sistema con estas dos constantes, bajo las condiciones iniciales $z(0)=h$, $\dot{z}(0)=v$, $\theta(0)=0$ y $\dot{\theta}(0)=\Omega$.

$T=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)$;

$\dot{\rho}=0 \Rightarrow \rho=cte$

$$T=\frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)$$

$$U=\frac{1}{2}k(\rho^2+z^2)+mgz$$

$$\therefore L=\frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)-\frac{1}{2}k(R^2+z^2)-mgz$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mR^2\dot{\theta}=p_\theta=cte$$

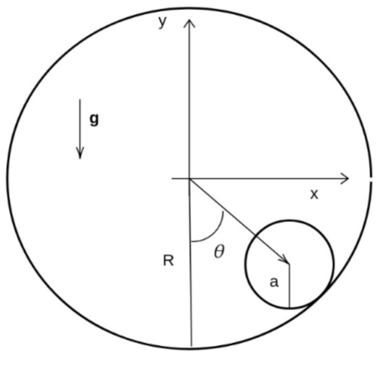
$$\boxed{m\ddot{z}=-kz-mg}$$

oscilador

Como $z(0)=h$, $\dot{z}(0)=v$, $\dot{\theta}(0)=\Omega$

siempre que tengamos problemas del oscilador busque centrarlo en su punto de equilibrio

3. Una esfera de radio a se mueve sin resbalar sobre la superficie interna de otra esfera de radio $R > a$ como se muestra en la figura.



a) Escriba el lagrangiano del problema en las coordenadas generalizadas adecuadas y encuentre las ecuaciones de movimiento.

b) Calcule la velocidad tangencial mínima inicial que debe tener la esfera para dar una vuelta completa.

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2=\frac{I_0}{2}\dot{\theta}^2+\frac{I}{2}\dot{\varphi}^2$$

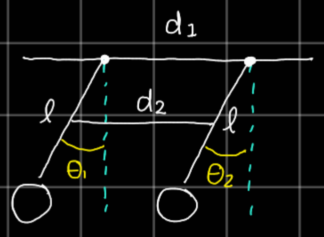
$$U=mgR(1-\cos\theta)$$

$L=\frac{I_c}{2}\dot{\theta}^2+\frac{I}{2}\dot{\varphi}^2-mgR(1-\cos\theta)$ sin reestricciones geom.

$$L=\frac{1}{2}I_c\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I\left(\frac{R+b}{b}\right)^2\dot{\theta}^2-mgR(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}\left(I_c+\left(\frac{R+b}{b}\right)^2 I\right)\dot{\theta}^2-mgR(1-\cos\theta)$$

$I_{ef}\ddot{\theta}=-mgR\sin\theta$, $\quad \ddot{\theta}\approx-\frac{mgR\theta}{I_{ef}}$; $\theta\approx\sin\theta$

4. Dos péndulos de la misma masa (m) y longitud (l) están acoplados por una barra rígida, de longitud d_1, sujeta a una distancia $l/2$ de los puntos de suspensión. Suponga que la distancia entre los puntos de suspensión es $d_2 < d_1$. Encuentre el lagrangiano del sistema y las ecuaciones de movimiento. ¿Cómo sería el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento si se cambia la barra rígida por un resorte de constante k?



$$L = \frac{1}{2} I \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I \ddot{\theta}_2^2 - mg\ell(1-\cos\theta_1) - mg\ell(1-\cos\theta_2)$$

Un mult. de Lagrange por cada restricción

$$\theta_1 = \theta_2 + \alpha \, ; \quad d\theta_1 - d\theta_2 = 0$$

$$I\ddot{\theta}_1 + mg\ell\sin\theta_1 = \lambda, \quad I\ddot{\theta}_2 + mg\ell\sin\theta_2 = -\lambda$$

$$\lambda = k(\theta_1 - \theta_2)$$