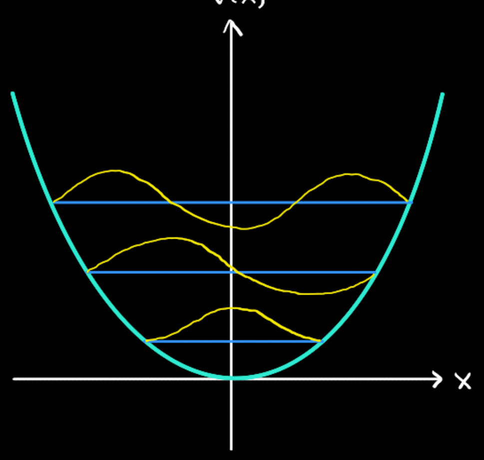
14 sept 2023

El oscilador armónico, método algebraico



Dado el problema del oscilador armónico, por vez n-ésima, sabemos que la ec. de Schrödinger será

$$-\frac{\hbar}{2m}\partial_x^2\psi + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi = E\psi$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{p}}{2m}\psi + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\psi = E\psi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}\left[\hat{p}^2\psi + (m\omega\hat{x})^2\psi\right] = E\psi$$

Note para esto último se tiene que

$$\frac{1}{2m}\left[(\hat{p}+im\omega\hat{x})(\hat{p}-im\omega\hat{x})\right]\psi = \frac{1}{2m}\left[\hat{p}^2 + im\omega(-\hat{p}\hat{x}+\hat{x}\hat{p}) + m^2\omega^2\hat{x}\right]\psi \tag{1.1}$$

$$= \frac{1}{2m}\left[\hat{p}^2 + (m\omega\hat{x})^2\right]\psi - \frac{1}{2}\omega\hbar\psi = (*)$$

denotando por $a_+ = \frac{1}{\sqrt{2m}}(\hat{p}+im\omega\hat{x})$, $a_- = \frac{1}{\sqrt{2m}}(\hat{p}-im\omega\hat{x})$, así pues

$$(*) \Rightarrow \left(a_+a_- + \frac{\hbar\omega}{2}\right)\psi = E$$

Observe que si en (1.1) se hubiese tomado $\hat{p}\hat{x}-\hat{x}\hat{p}$ en lugar de $-\hat{p}\hat{x}+\hat{x}\hat{p}$ resultaría en

$$\left(a_-a_+ + \frac{\hbar\omega}{2}\right)\psi = E$$

es decir $[a_-, a_+] = \hbar\omega$. Por Teoría de grupos resulta evidente que dada

$$\hat{H}_{OA}\psi_E = E\psi_E$$

OA = oscilador armónico

tiene como solución a $\psi_{E+} \equiv a_+\psi_E$, i.e.

$$\boxed{\hat{H}_{OA}\psi_{E+} = (E+\hbar\omega)\psi_{E+}}$$

lo cual se obtuvo de

$$\left(a_-a_+ + \frac{\hbar\omega}{2}\right)a_+\psi_E = a_+\left(a_-a_+ + \frac{\hbar\omega}{2}\right)\psi_E$$

$$= a_+(E+\hbar\omega)\psi_E$$

$$= (E+\hbar\omega)a_+\psi_E$$

por lo tanto

$$\hat{H}_{OA}a_+ - a_+\hat{H}_{OA} = a_+\hbar\omega \Rightarrow \left[\hat{H}_{OA}, a_+\right] = \hbar\omega a_+$$

Esto nos dice que a_+ nos devuelve un nuevo estado de energía mayor. Mientras que a_- devuelve un estado de energía menor. Además, deben respetar que

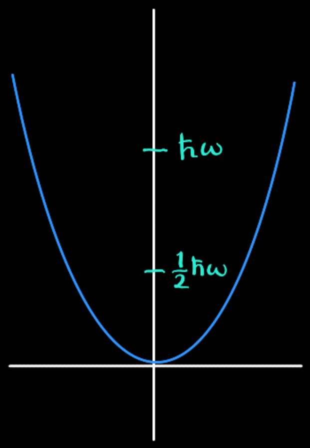
$$\int \psi_E^*\psi_E\,dx < \infty \Rightarrow \int (a_-\psi_E)^*(a_-\psi_E)\,dx < \infty$$

y para un estado base, $a_-\psi_0 = 0$. Por ejemplo,

$$\hat{H}\psi_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega\psi_0 \Rightarrow E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

18 sept 2023

Retomemos la conversación sobre las energías físicamente aceptables para el caso de un pozo de potencial finito.



Por un lado, habíamos visto que una energía "negativa" nos indica simplemente que se trata de una energía por debajo del mínimo de potencial (en nuestro caso tomamos $V_{min} = 0$ y por ello es negativo), misma que NO es físicamente aceptable pues su norma no es finita.

Ahora bien, consideremos las energías $E_i \in [0, \hbar\omega]$ las cuales tienen todas una norma infinita, salvo por $\frac{1}{2}\hbar\omega$. Aplicando a_+ a esos estados, obtenemos $E_i > \hbar\omega$, los cuales también son físicamente inaceptables por tener norma infinita salvo por $\frac{3}{2}\hbar\omega$.

Sabemos que los operadores de ascenso y descenso son

$$a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(\hat{p} \pm im\omega\hat{x}\right)$$

de lo cual podemos ver que el operador $\hat{x}$ es

$$a_+ - a_- = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(\hat{p} + im\omega\hat{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(\hat{p} - im\omega\hat{x}\right) = \frac{2}{\sqrt{2m}} im\omega\hat{x}$$

$$\therefore \boxed{\hat{x} = -i\frac{\sqrt{2m}}{2m\omega}(a_+ - a_-)}$$

Exigimos que nuestros operadores sean hermitianos pues queremos eigenvalores reales de la energía.