28 feb 23

Variedades diferenciales

Def. (Espacio topológico). Un espacio topológico es un conjunto X con una familia de subconjuntos denominados abiertos tales que:

(i) $\emptyset$, X son abiertos.

(ii) Si $U, V \subseteq X$ son abiertos, entonces $U \cap V$ es abierto.

(iii) Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}} \subseteq P(X)$ son abiertos, entonces $\bigcup_\alpha U_\alpha$ es abierto.

A la colección de abiertos de X se le llama la topología de X.

Def. (Variedad diferenciable). Una variedad diferenciable n-dimensional es un espacio topológico M que cuenta con una familia de abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}}$ tales que $M = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}}$, de modo que para cada $\alpha \in I$ existe una carta $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ que es homeomorfismo, y que para cualesquiera $\alpha, \beta \in I$ se cumple que

$$\varphi_B \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_B(U_\alpha \cap U_\beta)$$

son difeomorfismos.

Ejemplos

(i) El círculo unitario, $S^1 \times \mathbb{R}$

(ii) La esfera unitaria S^2

Convención de suma de Einstein

Sea $A = (t_A, x_A, y_A, z_A)$ un evento. Para denotar a todas las coordenadas usaremos

$$x^\mu, \quad \mu \in \{0, 1, 2, 3\}$$

La convención es que índices repetidos arriba y abajo se suman. Tendríamos que

$$S = \sum_{\mu=0}^{3} A^\mu B_\mu = A^\mu B_\mu$$

Por ejemplo el escalar de curvatura de Kretschmann es

$$K = \sum_{\gamma=0}^{3}\sum_{\lambda=0}^{3}\sum_{\rho=0}^{3}\sum_{\sigma=0}^{3}\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}\sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3} g_{\sigma\mu} g^{\rho\nu} g^{\lambda\alpha} g^{\gamma\beta} R^{\sigma}{}_{\nu\alpha\beta} R^{\mu}{}_{\rho\lambda\gamma}$$

cuya notación es horripilante. Abreviamos, $K = g_{\sigma\mu} g^{\rho\nu} g^{\lambda\alpha} g^{\gamma\beta} R^{\sigma}{}_{\nu\alpha\beta} R^{\mu}{}_{\rho\lambda\gamma}$. Como $A^\alpha B_\alpha = A^\beta B_\beta = A^\mu B_\mu$, el índice de la suma es mudo. Un índice que no es mudo se llama libre. Por ejemplo, en

$$A^\mu = T^\mu{}_\nu B^\nu$$

el índice libre es μ, mientras que ν es mudo. Por cierto, esta expresión denota 4 ecuaciones diferentes, una para cada valor que puede tomar μ.