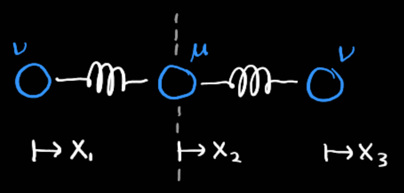
17 abril 23

Una molécula de agua 1D



$$L = \frac{1}{2}\nu(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2$$

$$\begin{cases} \nu\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) \\ \mu\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + k(x_3 - x_2) \\ \nu\ddot{x} = -k(x_3 - x_2) \end{cases}$$

$\ddot{\vec{x}} = -\Lambda\vec{x}$ de donde los valores propios del problema de eigenvalores es

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \quad \omega_2 = \sqrt{k\left(\frac{1}{\mu} + \frac{2}{\nu}\right)}, \quad \omega_3 = 0$$

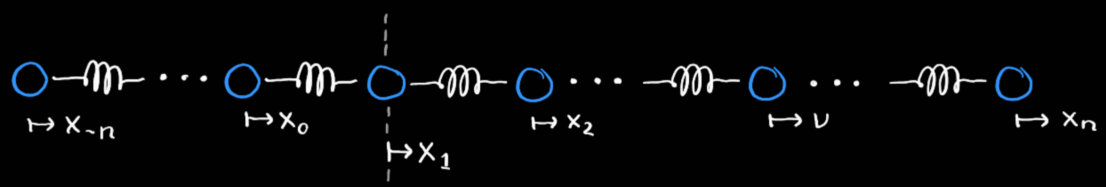
cuyos valores propios asociados son

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\mu/\nu \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución será entonces

$$\vec{x} = \sum_{\gamma} \vec{a}_\gamma \left(\alpha_\gamma e^{i\omega_\gamma t} + \alpha_\gamma^* e^{-i\omega_\gamma t}\right)$$

Cadena de osciladores armónicos



$$L = \frac{1}{2}m\sum_{-k}^{k}\dot{x}_\nu^2 - \frac{1}{2}k\sum_{n}^{n-1}(x_\nu - x_{\nu+1}) \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_{-n} = -\omega_0^2(x_{-n} + x_{-n+1}) \\ \ddot{x}_\nu = \omega_0^2(x_{\nu-1} - 2x_\nu + x_{\nu+1}) & -n+1 \leq \nu \leq n-1 \\ \ddot{x}_n = -\omega_0^2(x_n - x_{n-1}) \end{cases}$$

Proponemos como solución $x_\nu(t) = Ae^{i(k\nu a - \omega t)}$ donde $x_{\nu+\Delta\nu}(t+\Delta t) = x_\nu(t)$. De donde obtenemos

$$ak(\nu + \Delta\nu) = k\nu a - \omega\Delta t$$

$$\frac{\Delta\nu}{\Delta t} = \frac{\omega}{ka}, \quad c = \frac{a\Delta\nu}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}$$

velocidad de la onda

relación de dispersión

entonces $-\omega^2 x_\nu = \omega_0^2\left[e^{-ika} - 2 + e^{ika}\right]x_\nu \Rightarrow \boxed{\omega^2 = 4\omega_0^2\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)}$.

Sustituyendo en c se sigue

$$c(\omega) = \frac{2\omega_0}{k}\sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

donde $c_0 = a\omega_0$ es la velocidad de onda larga. Nótese que $c(\omega) < c_0$.

Lectura recomendada: Fermi-Pasta-Ulam nonlinear lattice oscillations

Oscilador Forzado

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - kx^2 + xF(t) \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \\ m\ddot{x} = -kx + F(t) \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \end{cases}$$

donde $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ y $f(t) = f_0\cos(\Omega t)$ con $f_0 = \frac{F_0}{m}$.

Proponemos como solución a $x(t) = A\cos(\omega t + \delta) + x_p(t)$ con $x_p = C\cos(\Omega t + \gamma)$, donde $C = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2}$; $\gamma = 0$. Finalmente

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \gamma) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos(\Omega t)$$

19 abril 23

Si $\omega = \Omega$,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \delta) + \frac{f_0(t)}{2\omega_0} \sin(\omega t)$$

Oscilador amortiguado y forzado

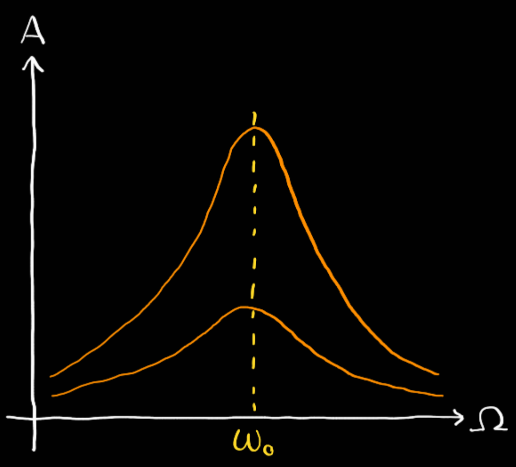
$$m\ddot{x} + kx + c'\dot{x} = F(t), \quad 2\beta = \frac{c'}{m} \quad \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\beta\dot{x} = f_0 \cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\beta\dot{x} = f_0 e^{i\Omega t}$$

$$x(t) = A e^{(-\beta + i\omega_0)t} + \Gamma e^{i\Omega t} \; ; \; \Gamma = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\beta\Omega}$$

$$\mathrm{Re}[x(t)] = \mathrm{Re}\left[A e^{(-\beta + i\omega_0)t} + \Gamma e^{i\Omega t}\right]$$

$$|\Gamma| = \frac{|f_0|}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$



Resolveremos ahora el oscilador armónico en forma matricial

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 \sin x \end{cases} \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$

los puntos críticos del sistema son $0, \pm\pi$. Considerando a la parte lineal del sistema alrededor de los ptos. singulares

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = J\Big|_p \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

donde J es la Jacobiana.