23 feb 23

Método del Wronskiano e independencia lineal

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$; soluciones $y_1(x)$, $y_2(x)$ linealmente independientes

En IFC se resolvió una ecuación de la forma $y'' + \omega^2 y = 0$. Dicha ecuación fue

$$H\Psi = E\Psi$$

pues, como $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ tenemos que

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi = E\Psi \Rightarrow \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\Psi = 0; \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\Psi}{dx^2} + k^2\Psi = 0$$

$$\Leftrightarrow y'' + \omega^2 y = 0$$

$\therefore\ \Psi(x) = A\cos(Kx) + B\sin(Kx)$.

Note que $\Psi(0) = \Psi(L) = 0$, $\Psi(0) = A = 0 \Rightarrow \Psi(x) = B\sin(Kx)$ y $\Psi(L) = B\sin(LX) = 0$. Por lo tanto, $kL = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{L}$ y entonces

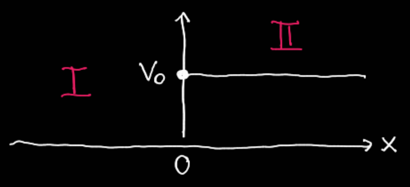
$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$k \to k_n \Rightarrow E \to E_n \Rightarrow \Psi(x) \to \Psi_n(x)$. Como $\int_0^L |\Psi_n(x)|^2 dx = 1$, entonces

$$B^2\int_0^L \sin^2(k_n x)dx = 1 \Rightarrow \frac{B^2}{2}\int_0^L dx = 1 \Rightarrow \frac{B^2}{2}L = 1$$

$\therefore\ \Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(k_n x)$, $k_n = \frac{n\pi}{L}$.

* Inserte problema de potencial de IFC *



Sea un conjunto de funciones $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^N$ y sea $\sum c_i\varphi_i(x) = 0$. Si la única forma de satisfacer la igualdad es $c_i = c_j = 0 \Rightarrow$ el conj. de funciones lin. ind. Si $\exists$ alguna $c_j \neq 0$ (o varias) $\Rightarrow$ el conj. es lin. dependiente.

$$\text{Sea } W = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_N \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_N' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(N+1)} & \varphi_1^{(N+1)} & \cdots & \varphi_N^{(N+1)} \end{vmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{si } W \neq 0 \Rightarrow \{\varphi_i\}_{i=1}^N \text{ lin. independiente} \\ \text{si } W = 0 \Rightarrow \{\varphi_i\}_{i=1}^N \text{ lin. dependiente} \end{array}$$

Así, dado $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ con soluciones linealmente independientes $y_1(x)$ y $y_2(x)$ tenemos que

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0$$

$\frac{dW}{dx} = y_1 y_2'' + \cancel{y_1' y_2'} - \cancel{y_1' y_2'} - y_2 y_1''$. Como $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones, entonces

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0$$

$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$$

y entonces
$$\frac{dW}{dx} = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = y_1\left(-P(x)y_2' - Q(x)y_2\right) - y_2\left(-P(x)y_1' - Q(x)y_1\right)$$

$$= -y_1 y_2' P(x) - \cancel{y_1 y_2 Q(x)} + y_1' y_2 P(x) + \cancel{y_1 y_2 Q(x)}$$

$$= (y_1' y_2 - y_1 y_2')P(x)$$

$$= -P(x)W(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{W(x)} = -P(x) \Rightarrow \int_a^x \frac{dW}{W} = -\int_a^x P(x')dx'$$

$$\Rightarrow \ln W\Big|_a^x = \ln W(x) - \ln W(a) = -\int_a^x P(x')dx'$$

$$\Rightarrow W(x) = W(a)\, e^{-\int_a^x P(x')dx'}$$

Por lo tanto,

$$y_1^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = W(x) \Rightarrow y_1^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = W(a) e^{-\int_a^x P(x')dx'}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2} W(a) e^{-\int_a^x P(x')dx'}$$

$$\Rightarrow d\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = dx\, \frac{W(a)}{y_1^2}\, e^{-\int_a^x P(x')dx'}$$

$$\Rightarrow \int_b^x d\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{y_2}{y_1}\Big|_b^x = \int_b^x dx' \frac{W(a)}{y_1^2(x')} e^{-\int_a^{x'} P(x'')dx''}$$

$$\Rightarrow \frac{y_2(x)}{y_1(x)} - \frac{y_2(b)}{y_1(b)} = \int_b^x dx' \frac{W(a)}{y_1^2(x')} e^{-\int_a^{x'} P(x'')dx''}$$

$$\Rightarrow y_2(x) = y_1(x)\frac{y_2(b)}{y_1(b)} + y_1(x) W(a) \int_b^x \frac{dx'}{y_1^2(x')} e^{-\int_a^{x'} P(x'')dx''}$$

$$\therefore \boxed{y_2(x) = y_1(x) W(a) \int_b^x \frac{dx'}{y_1^2(x')} e^{-\int_a^{x'} P(x'')dx''}}.$$