15 ago 23

Mecánica Cuántica

Vamos a retomar la idea de un cuerpo negro como Einstein lo planteó:

* Oscilador armónico
* Le mandamos radiación

} el oscilar y el envío de radiación hace que este similarmente la emita de regreso

Recordatorio: un cuerpo negro tiene una absorbancia, radiancia y eficiencia de 1.

Sin más,

¿?

densidad espectral

que tanta energía alrededor de un oscilador en el espacio

frecuencia del oscilador

$$\rho(\omega,T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\bar{E}(\omega,T)$$

temperatura del ambiente

¿Y cómo calculamos $\bar{E}$? → Principio ergódico

Para calcular el promedio de la energía en lugar de calcular la energía de un solo sistema a lo largo del tiempo, podemos medir N sistemas idénticos en un instante y tomar su promedio.

Así pues el número de partículas N que tienen una energía E es

$$N_E = \eta e^{-E/kT} \tag{1}$$

La energía total está entonces dada por

$$E_T = \int N_E E \, dE \tag{2}$$

mientras que el número total de partículas que tienen una energía E

$$N_T = \int N_E \, dE \tag{3}$$

Finalmente, $\bar{E}$ queda dada por (2) y (3)

$$\boxed{\bar{E}_\omega} = \frac{\int_0^\infty E e^{-\beta E} dE}{\int_0^\infty e^{-\beta E} dE} = -\partial_\beta \log \int_0^\infty e^{-\beta E} dE$$

$$= -\partial_\beta \log\left(-\frac{1}{\beta}e^{-\beta E}\right)\Big|_0^\infty$$

$$= -\partial_\beta \log\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

$$= \partial_\beta \log \beta$$

$$= \frac{1}{\beta}$$

$$\boxed{= kT}$$

es decir, la energía se reparte de forma igual entre todos los susbsistemas

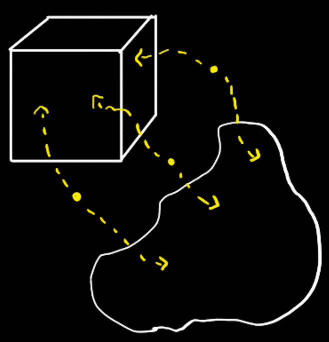
¡no depende de ω!

De modo tal que $\rho(\omega,T) = \frac{\omega^2}{\pi^2c^3}kT \sim \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right) = \frac{\omega^3}{\pi^2c^3}k\left(\frac{T}{\omega}\right)$

esto no puede estar bien pues implicaría que a $\omega \to \infty$ ... ¡hay energía infinita!

(catástrofe UV)

17 ago 23



Para dar una solución a la catástrofe UV, Planck propone que en un cuerpo negro (cada oscilador) puede intercambiar energía con el ambiente y viceversa de forma discreta.

Consideramos entonces que $E = nE_m$

$$\int_0^\infty E\eta e^{-\beta E} dE \rightleftarrows \sum_{n=0}^\infty nE_m \eta e^{-\beta n E_m}$$

densidad

cantidad finita

no son lo mismo

De tal forma, $\bar{E}_\omega$ será

$$\bar{E}_\omega = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nE_m n e^{-\beta n E_m}}{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta n E_m}} = \frac{E_m \sum_{n=0}^{\infty} n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} n x^n} = \frac{E_m x \partial_x \sum_{n=0}^{\infty} x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} ; \quad x \equiv e^{-\beta E_m} \quad \text{donde } 0<x<1$$

$$= \frac{x E_m \partial_x (1-x)^{-1}}{(1-x)^{-1}} = \frac{x E_m (1-x)^{-2}}{(1-x)^{-1}} = \frac{x E_m}{(1-x)} = \frac{E_m}{(x^{-1}-1)} = \frac{E_m}{e^{\beta E_m}-1} \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en $\rho(\omega, T)$ tenemos que

$$\rho(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{E_m}{e^{\beta E_m}-1} \quad (5)$$

Para que (5) tenga la forma de

$$\rho(\omega) = \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right) \quad (6)$$

considere $\boxed{E_m = \hbar\omega}$. Así pues, (5) resulta ser

$$\boxed{\rho(\omega) = \frac{\omega^3 \hbar}{\pi^2 c^3 \left(e^{\hbar\omega/kT}-1\right)}}$$

Distribución de Planck

Planck no afirma que esto se cumple en general, sino que sólo ocurre para el cuerpo negro.

Einstein al estudiar el efecto fotoeléctrico se da cuenta que se requiere pensar a la luz como paquetes de energía en múltiplos de $\hbar$ (i.e. ya no solo aplica para el cuerpo negro).

Similarmente, para el experimento que realiza Compton se da cuenta que al estudiar el problema de dispersión hay que pensar en colisiones

Bohr propone que el electrón se encuentra en óribtas del átomo cuya energía es

$$L_n = n\hbar$$

De Broglie defiende (en su tesis de doctorado) que la luz además del comportamiento corpuscular hay un comportamiento ondulatorio bien conocido. Por lo que la luz no es una u otra, es ambas.

$$\Rightarrow \begin{cases} E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \\ pc = \hbar\omega = h\nu \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{h}{p}} \end{cases}$$

Concluye que los corpúsculos tienen una long. de onda asociada