11 mayo 2023

Polinomios de Laguerre y sus asociados

Habíamos visto que su función generadora

$$g(x,z) = e^{-xz/(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) z^n$$

Buscamos quienes son $L_n(x)$. Así note que su desarrollo en Taylor

$$e^{-xz/(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(-xz)^n}{(1-z)^n} \Rightarrow \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(-xz)^n}{(1-z)^{n+1}}$$

Denotando $f(z) = (1-z)^{-(n+1)}$,

$$f(0) = 1$$

$$f'(z) = (n+1)(1-z)^{-(n+2)} \Rightarrow f'(0) = n+1$$

$$f''(z) = (n+1)(n+2)(1-z)^{-(n+3)} \Rightarrow f''(0) = (n+1)(n+2)$$

$$\vdots$$

$$\frac{e^{-xz/1-z}}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n z^n \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \frac{(n+\ell)!}{n!} z^\ell$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,n!\,\ell!} (n+\ell)!\, x^n z^{n+\ell}; \qquad \text{sea } m = n+\ell \Rightarrow m-n = \ell$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,n!} \frac{m!}{(m-n)!} x^n z^m$$

Observe que $n \le m$. Por ejemplo, con $m=5$ $\begin{cases} n=0; & m = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ n=1; & m = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{e^{-xz/1-z}}{1-z} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{n!\,n!} \frac{m!}{(m-n)!} x^n z^m$$

$$\boxed{L_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{n!\,n!\,(m-n)!} m!\, x^n}$$

Punto extra para tarea: $\frac{\partial g}{\partial z}$ y $\frac{\partial g}{\partial x}$ (relaciones de recurrencia)

$$\frac{\partial g}{\partial z} \Rightarrow (n+1) L_{n+1}(x) = (2n+1-x) L_n(x) - n L_{n-1}(x)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} \Rightarrow x L_n'(x) = n L_n(x) - n L_{n-1}(x)$$

$L_0(x) = 1$

$L_1(x) = 1-x$

La forma autoadjunta de la ecuación de Laguerre es

$$\boxed{e^{-x} x L_n''(x) + e^{-x}(1-x) L_n'(x) + n e^{-x} L_n(x) = 0}$$

donde $\lambda = n$, $w(x) = e^{-x}$ y $[a,b] \to [0,\infty)$. Además,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) = \delta_{nm}$$

Sean $\varphi_n(x) = e^{-x/2} L_n(x)$ las funciones de Laguerre

$$L_n(x) = e^{x/2} \varphi_n(x)$$

$$L_n'(x) = e^{x/2} \varphi_n'(x) + \frac{1}{2} e^{x/2} \varphi_n(x) = e^{x/2}\left[\varphi_n' + \frac{1}{2}\varphi_n\right]$$

$$L_n''(x) = e^{x/2} \varphi_n''(x) + e^{x/2} \varphi_n'(x) + \frac{1}{4} e^{x/2} \varphi_n(x) = e^{x/2}\left[\varphi_n'' + \varphi_n' + \frac{1}{4}\varphi_n\right]$$

Sustituyendo,

$$e^{-x} e^{x/2} x \left[\varphi_n'' + \varphi_n' + \frac{1}{4}\varphi_n\right] + e^{-x} e^{x/2} (1-x) \left[\varphi_n' + \frac{1}{2}\varphi_n\right] + n e^{-x} e^{x/2} \varphi_n = 0$$

$$\Rightarrow x \varphi_n'' + (x + 1 - x)\varphi_n' + \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + n\right)\varphi_n = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x \varphi_n'' + \varphi_n' + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\right)\varphi_n = 0}$$

Ecuación de las funciones de Laguerre

Fórmula de Rodrigues para los polinomios de Laguerre $\quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[L_{n+k}(x)\right]$$

Definición (Polinomios asociados de Laguerre)

Relación de recurrencia para los polinomios asociados de Laguerre

* $(n+1)L_{n+1}^k(x) = (2n+k-1-x)L_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x)$
* $xL_n^{k\,\prime}(x) = nL_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x)$

$\Rightarrow \boxed{xL_n^{k\,\prime\prime}(x) + (k+1-x)L_n^{k\,\prime}(x) + nL_n^k(x) = 0}$ Ec. asociada de Laguerre

Como $P_0(x) = x$ y $P_1(x) = k+1-x \Rightarrow \frac{1}{P_0}e^{\int^x \frac{P_1(t)}{P_0(t)}dt} = x^k e^{-x}$. Veamos la condición de ortogonalidad

$$\int_0^\infty e^{-x}x^k L_n^k(x)L_m^k(x)\,dx = \delta_{nm}\frac{(n+k)!}{n!}$$

Definimos a las funciones asociadas de Laguerre por

$$\boxed{\psi_n^k = e^{-x/2}x^{k/2}L_n^k(x)}$$

La ecuación de las funciones asociadas de Laguerre

$$\boxed{x\psi_n^{k\,\prime\prime} + \psi_n^{k\,\prime} + \left(-\frac{x}{4} + \frac{(2n+k+1)}{2} - \frac{k^2}{4x}\right)\psi_n^k = 0}$$