Sabemos que el principio D'Alambert es

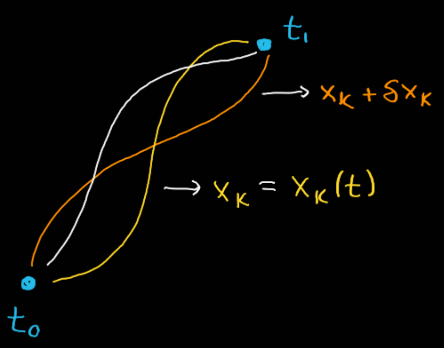
$$\sum_{k=1}^{3n}\{m_k \ddot{x}_k - X)\delta x_k\} = 0 \quad (1)$$

Por otro lado, note que $\delta x_k \ddot{x}_k = \frac{d}{dt}(\dot{x}_k \delta x_k) - \dot{x}_k \delta \dot{x}_k$. Tenemos que

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k m_k \dot{x}_k \delta x_k\right) = \sum \tfrac{1}{2} m_k \delta \dot{x}_k^2 + \sum_k (X \delta x_k)$$

δx_k: variación virtual de la trayectoria

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} dt\, \frac{d}{dt}\left(\sum_k m_k \dot{x}_k \delta x_k\right) = \int_{t_0}^{t_1}\left(\sum \tfrac{1}{2} m_k \delta \dot{x}_k^2 + \sum_k (X\delta x_k)\right)dt$$



$$\Rightarrow \sum_k m_k \dot{x}_k \cancelto{0}{\delta x_k}\Big|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1}\left(\sum \tfrac{1}{2} m_k \delta \dot{x}_k^2 + \sum_k (X\delta x_k)\right)dt$$

pues $\delta x_k(t_0) = \delta x_k(t_1) = 0$

$$\Rightarrow 0 = \int_{t_0}^{t_1}\left(\delta\left(\sum \tfrac{1}{2} m_k \dot{x}_k^2\right) + \delta(X x_k)\right)dt$$

$$\Rightarrow 0 = \int_{t_0}^{t_1}(\delta T + \delta W)\,dt$$

T: Energía cinética

W: trabajo

(i) Fuerzas conservativas: $\delta W = \sum X_k \delta x_k$

$$X_k = -\frac{\partial V}{\partial x_k}, \quad \delta W = -\sum_k \frac{\partial V}{\partial x_k}\delta x_k = -\delta V \quad (2)$$

de modo tal que (2) $\Rightarrow \delta \int (T-V)\,dt = 0$. Llamaremos por acción a

$$S = \int (T-V)\,dt = \int L\,dt$$

Notemos que $T = T(v)$ y $V = V(x)$. De modo tal que

$$L = L(x, \dot{x})$$

Lectura recomendada: "Mecánica no holonómica"

Considere las coord. generalizadas $q_i = G_k(x_1, \dots, x_k)$, $k = 1, \dots, f$ siendo $f = 3n - r$ el no. de grados de libertad y $q_k = 1, \dots, f$. Entonces,

$$F_k(x_1, \dots, x_k) = 0, \quad k = f+1, \dots, 3n$$

Derivando q_i se obtiene $\dot{q}_i = \sum \frac{\partial G_i}{\partial x_i}\dot{x}_i$. Notemos las dependencias siguientes

$$x_k = x_k(q_1, \dots, q_f) \quad y \quad \dot{x}_k = \dot{x}_k(q_1, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k)$$

por lo que podemos considerar a $L = L(q, \dot{q})$. Se sigue entonces que

$$\delta L = \sum \frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k \quad (3)$$

Buscamos encontrar un extremo de la acción, es decir $\delta S = 0 = \int \delta L\,dt$. Integrando a (3) obtenemos

$$\int \delta L\,dt = 0 = \int \left\{\sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k\right\}dt \quad (4)$$

pero $\int dt\, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k = \cancelto{0}{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right)\Big|_{t_0}^{t_1}} - \int \delta q_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)dt$. Sustituyendo esto último en (4)

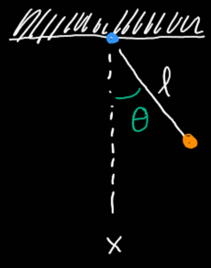
$$\int \sum_k \left\{\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\right\}\delta q_k\,dt = 0$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0}$$ Ec. Lagrange 2º tipo

Ejercicio. Derivemos la segunda ley de Newton a partir del Lagrangiano

Pendiente...

Ejercicio. Suponga tenemos un péndulo



$$T = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 \, ; \quad V(\theta) = mg\ell(1-\cos\theta)$$

$$L = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 - mg\ell(1-\cos\theta) = \frac{1}{2} I - mg\ell(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} = I\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta$$

Observación. En coord. cartesianas $L = T(\dot{x}) - V(x)$. Aplicando la ecuación de Lagrange de 2º tipo se tiene

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(T(\dot{x}) - V(x)\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial x}\left(T(\dot{x}) - V(x)\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Llamamos a $-\frac{\partial V}{\partial x}$ por fuerzas generalizadas.

Observación. Si fuese el caso en que $L = T(q, \dot{q}) - V(q)$ se tendría

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q} = Q_K$$

donde Q_K son las fuerzas disipativas.

Ahora bien, suponga tenemos la restricción geométrica

$$\sum_{k=1}^{f} F_{k\mu}(q_1, \dots, q_f)\delta q_K = 0 \, , \quad \mu = 1, \dots, r \quad \text{con } r < f$$

$$\Rightarrow \int\left(\delta L + \sum_{k,\mu} \lambda_\mu F_{k\mu}(q_1, \dots, q_f)\delta q_K\right) dt = 0$$

$$\Rightarrow \int \sum_{K}\left(\frac{\partial L}{\partial q_K}\delta q_K - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_K}\right)\delta q_K + \sum_{\mu=1}^{r} \lambda_\mu F_{K\mu}\delta q_K\right) dt = 0$$