14 feb 23

Las transformaciones de Lorentz

Considere un espacio tiempo 1+1-dimensional y dos SRI O y O' tales que O' se mueve con velocidad v respecto a O.

Las transformaciones de Lorentz son aquellas que

(i) La transformación es lineal

(ii) Dejan invariante al intervalo (aplica en cualquier dimensión).

Por un lado, (i) implica que $\begin{cases} t' = \rho x + \sigma t \\ x' = \alpha x + \beta t \end{cases}$; $\alpha, \beta, \rho, \sigma$ dependen de v, no del punto a evaluar (x, t, x', t').

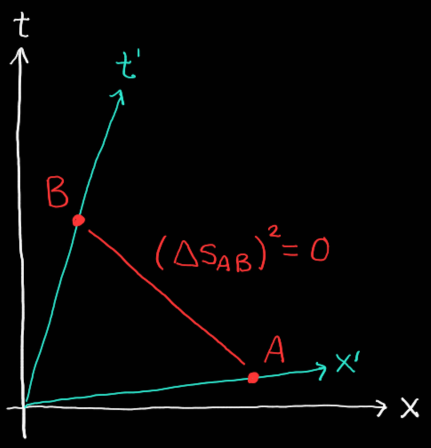
Fijemos la atención en los eventos del eje t'.

Según O', la ecuación del eje t' es $x' = 0$. Según O, la ecuación del eje t' es $x = vt$. Evaluando la transformación en el eje t' tenemos:

$$x' = \alpha x + \beta t \Rightarrow 0 = \alpha v t + \beta t = t(\alpha v + \beta)$$

$$\Rightarrow \alpha v + \beta = 0$$

$\therefore$ $\boxed{\beta = -\alpha v}$. Haciendo un cálculo análogo con el eje x' obtenemos $\boxed{\rho = -v\sigma}$.



Tenemos ahora dos eventos A y B con separación nula. Las coord. de A según O' son $t'_A = 0$, $x'_A = 1$ y las de B son $t'_B = 1$, $x'_B = 0$. Evaluamos la transformación en estos dos eventos:

$$0 = \sigma(t_A - v x_A) \qquad 1 = \sigma(t_B - v x_B)$$

$$1 = \alpha(x_A - v t_A) \qquad 0 = \alpha(x_B - v t_B)$$

Del sistema de 4 ecuaciones obtenemos:

$$t_A = \frac{v}{\alpha(1-v^2)}, \quad x_A = \frac{1}{\alpha(1-v^2)}, \quad t_B = \frac{v}{\sigma(1-v^2)}, \quad x_B = \frac{1}{\sigma(1-v^2)},$$

Por invariancia del intervalo se debe cumplir $0 = -(t_B - t_A)^2 + (x_B - x_A)^2$ de modo tal que $x_B - x_A = t_A - t_B$. Sustituyendo,

$$\frac{v}{\sigma(1-v^2)} - \frac{1}{\alpha(1-v^2)} = \frac{v}{\alpha(1-v^2)} - \frac{1}{\sigma(1-v^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{\sigma} - \frac{1}{\alpha} = \frac{v}{\alpha} - \frac{1}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} = \frac{v}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma}(v+1) = \frac{1}{\alpha}(v+1)$$

$\therefore$ $\boxed{\sigma = \alpha.}$

Tomemos ahora dos eventos C y D tales que $(\Delta s'_{CD})^2 = (\Delta s_{CD})^2 \neq 0$

$$t'_C = \alpha(t_C - v x_C), \quad x'_C = \alpha(x_C - v t_C), \quad t'_D = \alpha(t_D - v x_D), \quad x'_D = \alpha(x_D - v t_D)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t'_D - t'_C = \alpha((t_D - t_C) - v(x_D - x_C)) \\ x'_D - x'_C = \alpha((x_D - x_C) - v(t_D - t_C)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (t'_D - t'_C)^2 = \alpha^2((t_D - t_C)^2 - 2v(t_D - t_C)(x_D - x_C) + v^2(x_D - x_C)^2) \\ (x'_D - x'_C)^2 = \alpha^2((x_D - x_C)^2 - 2v(x_D - x_C)(t_D - t_C) + v^2(t_D - t_C)) \end{cases}$$

$$\therefore (\Delta s'_{CD})^2 = -(t'_D - t'_C)^2 + (x'_D - x'_C)^2 = \alpha^2(1-v^2)(-(t_D - t_C)^2 + (x_D - x_C)^2)$$

$$= \alpha^2(1-v^2)(\Delta s_{CD})^2$$

Como $(\Delta s'_{CD})^2 = (\Delta s_{CD})^2$ entonces $1 = \alpha^2(1-v^2) \Rightarrow \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$.

Si se toma $v=0 \Rightarrow \alpha = \pm 1$, pero si $v=0$ la transformación debe ser la identidad, de modo que α debe ser positiva.

$$\boxed{t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{vx}{\sqrt{1-v^2}}} \qquad \boxed{x' = \frac{vt}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-v^2}}} \qquad (1)$$

Análisis

(1) transforma las coord. de O a las de O'. Queremos la transformación de O' a O. Despejando de (1) queda

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{vx'}{\sqrt{1-v^2}} \qquad x = \frac{vt'}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{x'}{\sqrt{1-v^2}}$$

que coincide con el hecho de que O viaja a $-v$ respecto a O'.

Pasemos al caso 2+1.

O' se mueve respecto a O a velocidad v en la dirección x, tal que el origen de ambas coincide y los ejes espaciales están alineados.

$$\boxed{t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{vx}{\sqrt{1-v^2}}} \qquad \boxed{x' = -\frac{vt}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-v^2}}} \qquad \boxed{y' = y} \qquad (1)$$

La rotación dada por $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ también da una transformación de Lorentz.

Si $\vec{v} = v\cos\theta\,\hat{x} + v\sin\theta\,\hat{y}$, para transformar de O a O'

(i) R_θ (ii) Empujón (traslación) (iii) R_θ^{-1}

El grupo de Lorentz

Las transformaciones de Lorentz en d+1-dimensiones forma un grupo: un conjunto de objetos con un producto definido que cumple ciertas propiedades.

Dada la dimensión hay:

(i) En 1+1 hay una transformación de Lorentz fundamental: Boost en X (un generador).

(ii) En 2+1 hay 3 generadores: 1 rotación + 2 boost.

(iii) En 3+1 hay 6 generadores: 3 rotaciones (ángulos de Euler) + 3 boost.

Las traslaciones no son lineales, pero sí dejan invariante al intervalo. NO son transformaciones de Lorentz.

$$(\text{Grupo de Lorentz}) \cup (\text{Traslaciones}) = \text{Grupo de Poincaré}$$

¿Existen los SRI?