# Методы численного интегрирования

Определенный интеграл

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$f(x)$ - подынтегральная ф-я, непрерывная на отрезке $[a; b]$

Аналитически задача нахождения определенного интеграла решается по формуле Ньютона - Лейбница.

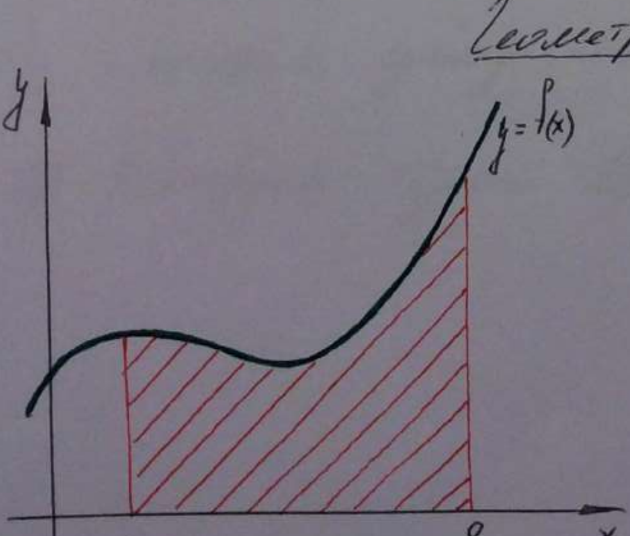
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Если интеграл невозможно вычислить аналитически, то применяются методы численного интегрирования:

- Метод левых прямоугольников
- Метод правых прямоугольников
- Метод средних прямоугольников
- Метод трапеций
- Метод Симпсона

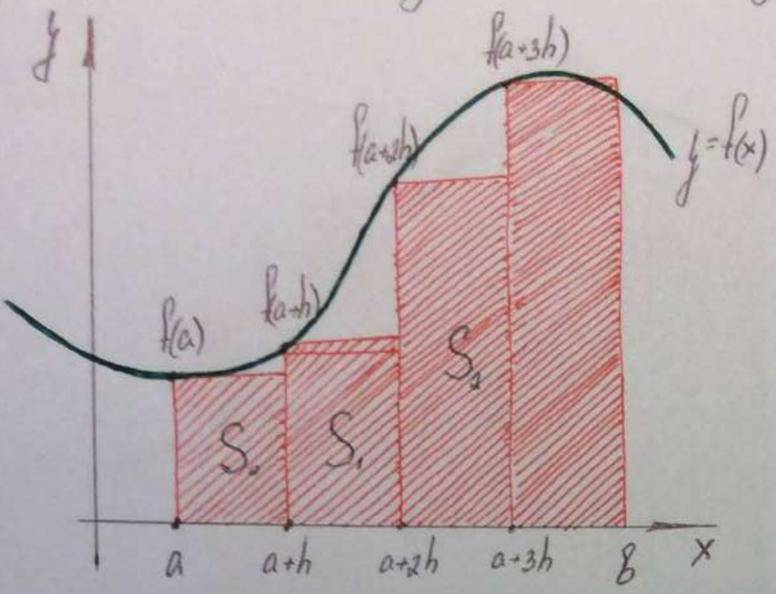
---

## Геометрический смысл интеграла




Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a; b]$ то интеграл численно равен площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, отрезком оси абсцисс, прямой $x = a$ и прямой $x = b$

# Метод левых прямоугольников




① задать границы [a; b]

$n = 10 \quad \varepsilon = 0{,}0001$

② вычисляем шаг

$$h = \frac{b-a}{n}$$

③ Площадь каждого прямоуг.

- ширина - $h$
- высота - значение ф-ции слева

$$\left.\begin{aligned} S_0 &= h \cdot f(a) \\ S_1 &= h \cdot f(a+h) \\ S_2 &= h \cdot f(a+2h) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{gathered} S_i = h \cdot f(a+ih) \\ i = 0 \ldots n-1, \text{ шаг } 1 \end{gathered}}$$

④ Суммируем площади

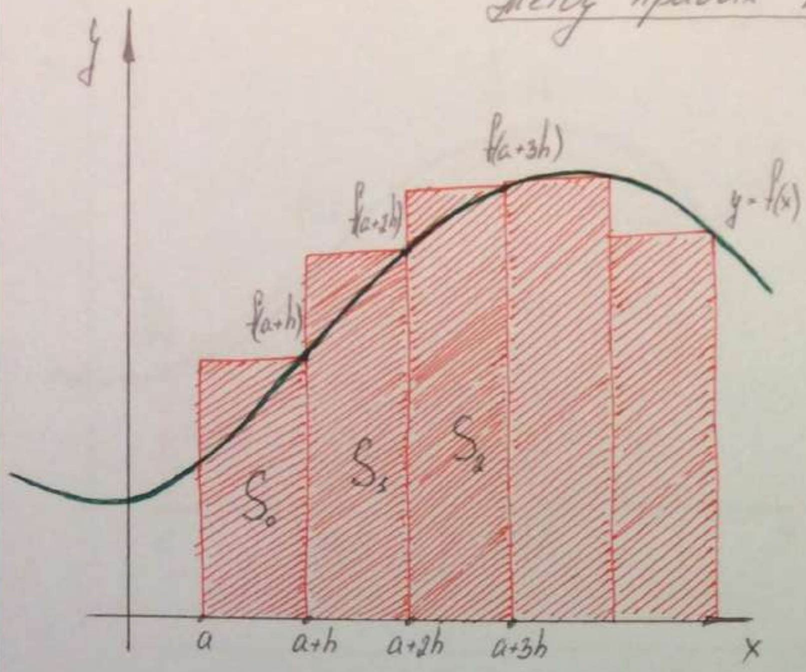
$$S_1 = \sum_{i=0}^{n-1} S_i$$

⑤ Увеличиваем число разбиений в 2 раза $n = n * 2$

- вычисляем новый шаг
- находим сумму площадей $(S_2)$

⑥ Повторяем пункты ②-⑤ пока $|S_2 - S_1| \geq \varepsilon$

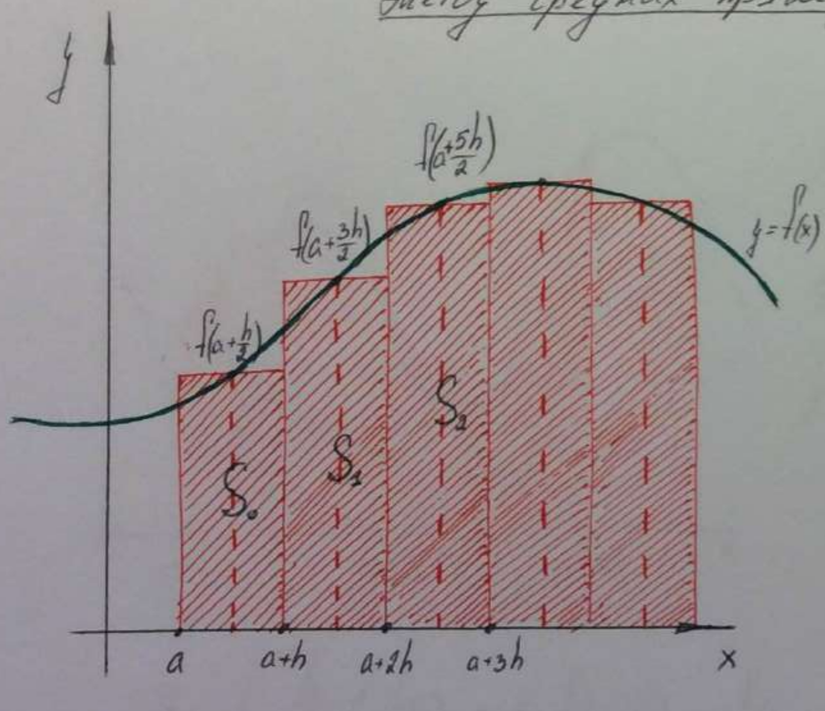
## Метод правых прямоугольников




$$S_i = h \cdot f(a+(i+1)h)$$

$i = 0 \ldots n-1$, шаг 1

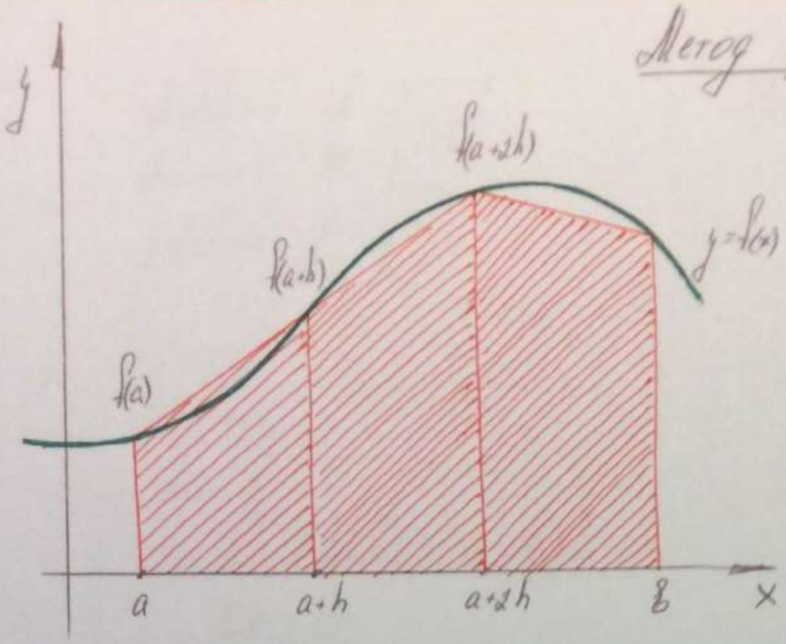
## Метод средних прямоугольников




$$S_i = h \cdot f\left(a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)h\right)$$

$i = 0 \ldots n-1$, шаг 1

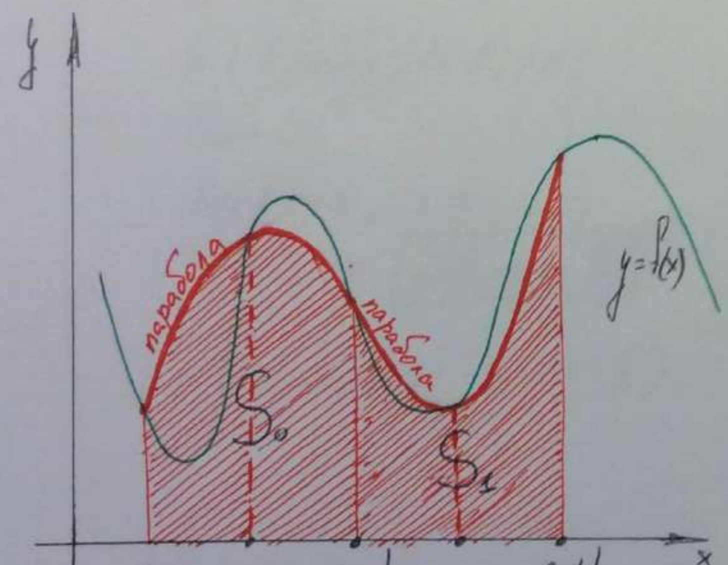
## Метод трапеций




$$\boxed{S_i = \frac{f(a+ih) + f(a+(i+1)h)}{2}\,h \qquad i = 0 \ldots n-1,\ \text{шаг } 1}$$

---

## Метод Симпсона (метод парабол)




В этом методе отрезки сдваиваются, а дуга ф-ции заменяется на дугу параболы. Т.о. кривая ф-ции заменяется кривой 2-го порядка, а не кривой 1-го порядка, как в предыдущих методах.

$$\boxed{h = \frac{b-a}{2n}}$$

$$S_0 = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)\right)$$

$$S_1 = \frac{h}{3}\left(f(a+2h) + 4f(a+3h) + f(a+4h)\right)$$

$$\boxed{S_i = \frac{h}{3}\left(f(a+2ih) + 4f(a+(2i+1)h) + f(a+(2i+2)h)\right) \qquad i = 0 \ldots n-1,\ \text{шаг } 1}$$