

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Análise de Financiamentos

Profa. Me. Marcelo Silva de Jesus

- Unidade de Ensino: 3
- Competência da Unidade: Conhecer os métodos e técnicas de cálculo de valor do dinheiro no tempo e as técnicas de cálculo de financiamentos e investimentos.
- Resumo: Nessa unidade você estudará diversas formas de financiamentos e como calcular parcelas, taxas de juros e número de parcelas a financiar.
- Palavras-chave: Taxas de juros; Financiamento; Prestações.
- Título da Teleaula: Análise de Financiamentos.
- Teleaula nº: 3

Contextualização

Frequentemente somos colocados em situações nas quais são oferecidas diversas formas de pagar alguma compra, como por exemplo, parcelar em valores mensais e iguais.



Fonte: shutterstock_1228631287. Disponível em: www.shutterstock.com. Acesso em 02 ago. 2019.

Financiamento



Fonte: shutterstock_86898862. Disponível em: www.shutterstock.com. Acesso em 02 ago. 2019.

Contextualização

Como são realizados os cálculos em diferentes financiamentos?



Fonte: shutterstock_560809768. Disponível em: www.shutterstock.com. Acesso em 02 ago. 2019.

Conceitos

Valor presente - financiamento

Valor presente - financiamento

O financiamento tem como base de cálculo a série de juros compostos, que também pode ser chamado de valor presente.

Para determinar o valor presente (financiamento) usamos a seguinte fórmula matemática:

$$VP = \text{parc.} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

Valor presente - financiamento

$$VP = \text{parc.} \cdot \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

Onde:

VP: valor presente, capital, valor à vista.

parc: parcela, prestações iguais.

n: número total de parcelas, prestações iguais e periódicas.

i: taxa de juros compostos, taxa efetiva.

Vantagens

$$C = \sum_{j=1}^j \frac{M_j}{(1 + i)^{n_j}}$$

• Trabalhar com qualquer condição de parcelamento, as parcelas não têm que ser iguais.

• Trabalhar com parcelamentos não periódicos.

$$VP = \text{parc.} \cdot \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

• Trabalhar com parcelamentos com número muito grande de parcelas, como 60, 120, 180 parcelas.

Desvantagens

$$C = \sum_{j=1}^j \frac{M_j}{(1 + i)^{n_j}}$$

• Não é aconselhável para parcelamentos com o número de parcelas superiores a quatro, por ter que executar um número excessivo de cálculo de parcelas individuais.

$$VP = \text{parc.} \cdot \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

• Só calcula parcelas iguais.

• As parcelas sempre deverão ter vencimentos periódicos, como mensais, bimestrais, semestrais, entre outros.

Resolução da SP**Situação-problema 1:
Financiamento**

Você deseja financiar um veículo cujo valor à vista é R\$ 38.000,00, sendo que seu salário é de R\$ 2.700,00. Sabe-se que o financiamento será aprovado se o valor das parcelas for, no máximo, de 1/3 do salário do comprador. Sendo assim, o vendedor da loja de veículos apresenta a seguinte proposta:

- 48 vezes mensais e iguais sob a taxa nominal de 18% a.a.

Você deverá determinar o valor da parcela dessa proposta de financiamento



Fonte: shutterstock_86898862. Disponível em: www.shutterstock.com. Acesso em 02 ago. 2019.

Solução:

Valor máximo da parcela: 1/3 do valor do salário

$$= \frac{1}{3} \cdot 2.700 = 900$$

Portanto, para que seu financiamento seja aprovado, a parcela não deverá ser superior a R\$ 900,00.

$$i_{ef} = \left(\frac{d}{n} + 1\right)^f - 1$$

$$i_{ef} = \left(\frac{0,18}{360} + 1\right)^{30} - 1$$

$$i_{ef} = (0,0005 + 1)^{30} - 1$$

$$i_{ef} = 1,0151 - 1$$

$$i_{ef} = 0,0151 \text{ a.m} = 1,51\% \text{ a.m}$$

$$VP = \text{parc} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

Onde:

$$VP = AV = R\$38.000,00$$

$\text{parc} = ?$

$n = 48$ parcelas mensais e iguais.

$$i = 1,51\% \text{ a.m} = 0,0151 \text{ a.m}$$

$$38.000 = \text{parc} \left[\frac{1 - (1 + 0,0151)^{-48}}{0,0151} \right]$$

$$38.000 = \text{parc} \left[\frac{1 - 0,4871}{0,0151} \right]$$

$$38.000 = \text{parc} \left[\frac{0,5129}{0,0151} \right]$$

$$38.000 = \text{parc} \cdot 33,9669$$

$$\text{parc} = \frac{38.000}{33,9669} = 1.118,74$$

O financiamento proposto pelo vendedor resultará em 48 parcelas mensais e iguais a R\$ 1.118,74, mas já notamos que o financiamento não será aprovado porque a parcela apresenta valor superior a R\$ 900,00, que é limitante para a aprovação.

Conceitos

Valor presente – financiamento com entrada

Financiamento com entrada

Substituindo “VP” por “AV – E” na equação:

$$VP = \text{parc} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right],$$

passaremos a ter a equação que nos auxiliará a resolver problemas de financiamento com entrada, como apresentado a seguir:

$$AV - E = \text{parc} \cdot \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

Financiamento com entrada

Uma ferramenta que tem valor à vista de R\$5.400,00 tem sua venda anunciada em 10 parcelas mensais e iguais, sob regime de juros compostos de 3,2% a.m e entrada igual ao valor da parcela. Calcule o valor da entrada.



Fonte: shutterstock_560809768. Disponível em: www.shutterstock.com. Acesso em 02 ago. 2019.

Financiamento com entrada

Solução:

$$AV - E = \text{parc} \cdot \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

AV: R\$5.400,00

E: ?

parc: E

n: 10

i: 3,2% a.m = 0,032

Financiamento com entrada

$$5.400 - E = E \cdot \left[\frac{1 - (1 + 0,032)^{-10}}{0,032} \right]$$

$$5.400 - E = E \cdot \left[\frac{1 - (1,032)^{-10}}{0,032} \right]$$

$$5.400 - E = E \cdot \left[\frac{1 - 0,7298}{0,032} \right]$$

$$5.400 - E = E \cdot \left[\frac{0,2702}{0,032} \right]$$

Financiamento com entrada

$$5.400 - E = E \cdot [8,4438]$$

$$5.400 - E = 8,4438E$$

$$5.400 = 8,4438E + E$$

$$5.400 = 9,4438E$$

$$\frac{5.400}{9,4438} = E$$

$$E = 571,80$$

Resolução da SP

Situação-problema 2: Financiamento

Você deseja financiar um veículo cujo valor à vista é R\$ 38.000,00 e uma das propostas apresentadas pelo vendedor da Loja de Veículos é:

- 48 vezes mensais e iguais sob a taxa nominal de 18% a.a. com entrada de 20% do valor à vista.

Você deverá apresentar os valores da entrada e das parcelas dessa proposta de financiamento.



Fonte: shutterstock_86898862. Disponível em: www.shutterstock.com. Acesso em 02 ago. 2019.

$$i_{ef} = \left(\frac{d}{n} + 1\right)^f - 1$$

$$i_{ef} = \left(\frac{0,18}{360} + 1\right)^{30} - 1$$

$$i_{ef} = (0,0005 + 1)^{30} - 1$$

$$i_{ef} = 1,0151 - 1$$

$$i_{ef} = 0,0151 \text{ a.m.} = 1,51\% \text{ a.m.}$$

$$E = 0,20 \cdot 38.000$$

$$E = R\$7.600,00$$

$$AV - E = \text{parc} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

Em que:

$$VP = R\$38.000,00$$

$$E = R\$7.600,00$$

$$\text{parc} = ?$$

$$n = 48$$

$$i = 1,51\% \text{ a.m.} = 0,0151 \text{ a.m.}$$

$$38.000 - 7.600 = \text{parc} \left[\frac{1 - (1 + 0,0151)^{-48}}{0,0151} \right]$$

$$30.400 = \text{parc} \left[\frac{1 - 0,4871}{0,0151} \right]$$

$$30.400 = \text{parc} \cdot 33,9669$$

$$\text{parc} = \frac{30.400}{33,9669} = 894,99$$

Concluimos que esse financiamento terá entrada de R\$ 7.600,00 e 48 parcelas mensais e iguais a R\$ 894,99.

Interação

Conceitos

VALOR PRESENTE – CONDIÇÕES ESPECIAIS

Valor presente – condições especiais

Financiamentos em que o início dos pagamentos das parcelas ocorre após determinado tempo (k).

VP é AV reajustado em função de $k-1$

$$VP = AV(1 + i)^{-(k-1)}$$



Valor presente – condições especiais

Considerando juros compostos desde o ato da compra até a primeira parcela, temos:

$$AV(1+i)^{k-1} = \text{parc.} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

Em que k é o período em que ocorrerá o início do pagamento do financiamento (período de carência).

Valor presente – condições especiais

Caso o financiamento seja com entrada:

$$(AV - E)(1+i)^{k-1} = \text{parc.} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

Resolução da SP

Situação-problema 3:

Você deseja financiar um veículo cujo valor à vista é R\$ 38.000,00 e o vendedor da Loja de Veículos lhe apresenta mais uma forma de financiamento, que é:

- 48 vezes mensais e iguais sob a taxa nominal de 18% a.a. com entrada de 20% do valor à vista, pagando a primeira após 3 meses.



Fonte: shutterstock_86898862. Disponível em: www.shutterstock.com. Acesso em 02 ago. 2019.

$$i_{ef} = \left(\frac{d}{n} + 1 \right)^f - 1$$

$$i_{ef} = \left(\frac{0,18}{360} + 1 \right)^{30} - 1$$

$$i_{ef} = (0,0005 + 1)^{30} - 1$$

$$i_{ef} = 1,0151 - 1$$

$$i_{ef} = 0,0151 \text{ a.m.} = 1,51\% \text{ a.m.}$$

$$E = 0,20 \cdot 38000$$

$$E = R\$7.600,00$$

$$(AV - E)(1+i)^{k-1} = \text{parc.} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

Em que:

$$AV = R\$38.000,00$$

$$\text{Parc} = ?$$

$$E = R\$7.600,00$$

$$k = 3 \text{ meses}$$

$$n = 48 \text{ parcelas}$$

$$i = 1,51\% \text{ a.m.} = 0,0151 \text{ a.m.}$$

$$(38.000 - 7.600)(1 + 0,0151)^{3-1} = \text{parc} \left[\frac{1 - (1 + 0,0151)^{-48}}{0,0151} \right]$$

$$30.400 \cdot 1,0304 = \text{parc} \left[\frac{1 - 0,4871}{0,0151} \right]$$

$$31.324,16 = \text{parc} \cdot 33,9669$$

$$\text{parc} = \frac{31.324,16}{33,9669} = 922,20$$

Concluimos que esse financiamento terá entrada de R\$7.600,00 e 48 parcelas mensais e iguais de R\$ 922,20.

Conceitos

DETERMINAÇÃO DA TAXA DE JUROS DO VALOR PRESENTE

Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson refere-se a um método que pode ser empregado para determinar a taxa de juros compostos de um financiamento.

Função da taxa de juros compostos

$$f(i_j) = \frac{VP}{\text{parc}} i_j + (1 + i_j)^{-n} - 1$$

Função marginal da taxa de juros compostos:

$$f'(i_j) = \frac{VP}{\text{parc}} - n(1 + i_j)^{-n-1}$$

Método de Newton-Raphson

Função de Newton-Raphson:

$$i_{j+1} = i_j - \frac{f(i_j)}{f'(i_j)}$$

Mecanismo de cálculo do método

1º passo: estipular uma taxa de juros compostos inicial em valor relativo (i_j)

Mecanismo de cálculo do método:

2º passo: substituir i_j na função da taxa de juros compostos $f(i_j)$.

- Se $|f(i_j)| \leq 0,0001$ então i_j é a taxa de juros compostos imposta no financiamento;
- Se $|f(i_j)| > 0,0001$ então i_j não é a taxa de juros compostos imposta no financiamento, vá para o 3º passo.

Mecanismo de cálculo do método:

3º passo: usando o valor da taxa de juros compostos i_j calcule o valor da função marginal da taxa de juros compostos $f'(i_j)$.

4º passo: usando os valores da taxa de juros compostos (i_j), da função da taxa de juros compostos $f(i_j)$ e da função marginal da taxa de juros compostos $f'(i_j)$, calcule a próxima taxa de juros compostos (i_{j+1}) que deverá substituir a última taxa que não deu certo.

Mecanismo de cálculo do método:

5º passo: com a nova taxa (i_{j+1}), determinada no passo anterior, volte ao 2º passo e refaça os cálculos como se essa fosse a taxa inicial, esquecendo-se da taxa anterior.

Os passos deverão ser repetidos até que

$$|f(t_j)| \leq 0,0001$$

Resolução da SP**Situação-problema 4:**

Você deseja financiar um veículo cujo valor à vista é R\$38.000,00 e sabe que um amigo comprou um carro de R\$30.000,00 em 48 vezes mensais e iguais de R\$789,89 numa outra revendedora. A sua tarefa, agora, consiste em determinar a taxa de juros compostos que foi aplicada ao financiamento de seu amigo e calcular o valor das parcelas para o financiamento de seu veículo em 48 parcelas mensais e iguais.



Fonte: shutterstock_86898862. Disponível em: www.shutterstock.com. Acesso em 02 ago. 2019.

$$f(i_j) = \frac{VP}{parc} i_j + (1 + i_j)^{-n} - 1$$

$$f(i_j) = \frac{30000}{789,89} i_j + (1 + i_j)^{-4} - 1$$

$$f(i_j) = 37,98 i_j + (1 + i_j)^{-4} - 1 \Rightarrow \text{2º passo}$$

$$f'(i_j) = \frac{VP}{parc} - n(1 + i_j)^{-n-1}$$

$$f'(i_j) = 37,98 - 48(1 + i_j)^{-49} \Rightarrow \text{3º passo}$$

$$i_{j+1} = i_j - \frac{f(i_j)}{f'(i_j)} \Rightarrow \text{4º passo}$$



Fonte: shutterstock_566835985. Disponível em: www.shutterstock.com. Acesso em 02 ago. 2019.

A taxa de juros compostos aplicada no financiamento de seu amigo é de 1% a.m.

$$VP = parc \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

Onde:

$$VP = R\$38.000,00$$

$$i = 1\% \text{ a.m.} = 0,01 \text{ a.m.}$$

$$n = 48$$

$$parc = ?$$



Fonte: shutterstock_566835985. Disponível em: www.shutterstock.com. Acesso em 02 ago. 2019.

$$VP = 38.000 \left[\frac{1 - (1 + 0,01)^{-48}}{0,01} \right]$$

$$VP = 38.000 \left[\frac{1 - 0,6203}{0,01} \right]$$

$$38.000 = parc \cdot 37,97$$

$$parc = \frac{38.000}{37,97} = 1.000,79$$

Portanto, comprando um veículo de R\$ 38.000,00 na mesma condição de taxa de financiamento de seu amigo, o seu financiamento será de 48 parcelas mensais e iguais de R\$ 1.000,79.



Fonte: shutterstock_566835985. Disponível em: www.shutterstock.com. Acesso em 02 ago. 2019.

Interação

Um veículo tem valor de venda à vista de R\$65.000,00, mas a revendedora o financia a uma taxa de juros compostos de 101,22% a.a. Calcule o valor das parcelas se esse veículo for financiado em 56 parcelas mensais e iguais.

Conceitos

Recapitulando...

Nesta aula estudamos...

- Valor presente – financiamento.
- Valor presente – financiamento com entrada.
- Valor presente – condições especiais.
- Determinação da taxa de juros do valor presente.



Fonte: shutterstock_3151714153. Disponível em: www.shutterstock.com. Acesso em 02 ago. 2019.

- **A primeira proposta:** 48 parcelas mensais e iguais de R\$1.118,74

A segunda proposta: entrada de R\$7.600,00 e 48 parcelas mensais e iguais de R\$894,99.

- **A terceira proposta:** entrada de R\$7.600,00 e 48 parcelas mensais e iguais de R\$922,20, com início dos pagamentos após 3 meses do ato da compra.

- **A quarta proposta:** 48 parcelas mensais e iguais de R\$1.000,79, em outra revendedora, sob uma taxa de juros compostos de 1% a.m.

