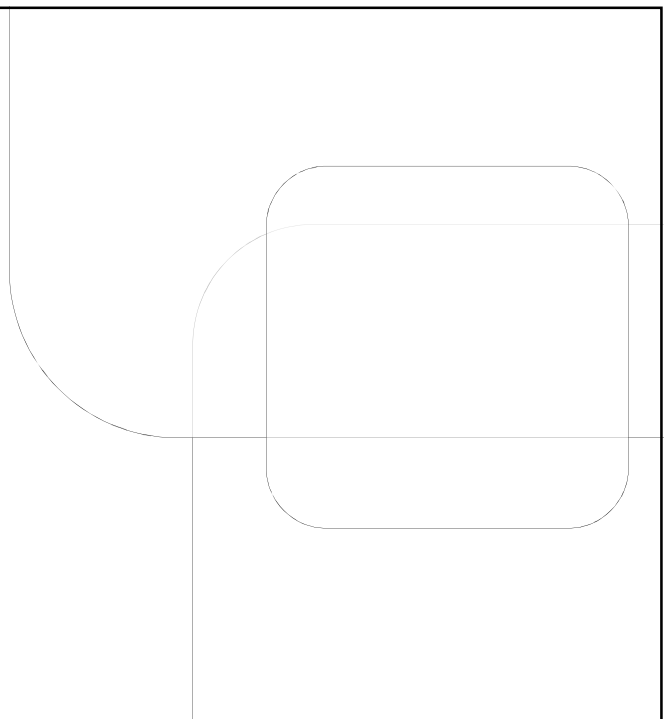


# **MATEMÁTICA FINANCEIRA**

**Investimento**

Profa. Me. Marcelo Silva de Jesus



- Unidade de Ensino: 4
  - Competência da Unidade: Conhecer os métodos e técnicas de cálculo de valor do dinheiro no tempo e as técnicas de cálculo de financiamentos e investimentos.
  - Resumo: Nessa unidade você estudará situações bancárias, aprenderá a programar seu dinheiro para realizações futuras, como calcular os juros do cheque especial e a taxa de juros de investimento
  - Palavras-chave: Taxas de juros; Investimento; Amortização.
  - Título da Teleaula: Investimento
  - Teleaula nº: 4
-

## Contextualização

Um investimento é toda aplicação de dinheiro visando ganhos. A aplicação pode ser realizada em:

- Caderneta de poupança;
- Fundos;
- Ações.

Como são realizados os cálculos em diferentes investimentos?



Fonte: shutterstock\_1228631287. Disponível em:  
[www.shutterstock.com](http://www.shutterstock.com). Acesso em 02 ago. 2019.

Conceitos

**Valor futuro** -  
**aplicações**

## Valor Futuro - aplicações

Valor Futuro (VF)

O valor futuro está embasado no resultado de uma aplicação com depósitos iguais e periódicos.

Para determinar o valor futuro usamos a seguinte fórmula matemática:

$$VF = \text{dep.} \left[ \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$$

## Valor Futuro - aplicações

$$VF = dep. \left[ \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$$

Em que:

*VF*: valor futuro; resultado da aplicação ou investimento.

*dep*: refere-se ao valor do depósito.

*n*: número total de depósitos periódicos e iguais.

*i*: taxa de juros compostos.

---

Resolução da SP

# Situação-problema 1: Financiamento

Você, como sócio proprietário de uma Metalúrgica, deverá gerenciar as finanças da reforma do novo pátio de distribuição da empresa.

Calcule a entrada paga para a execução da reforma do novo pátio de distribuição, que foi resultado de uma aplicação mensal de R\$ 20.000,00 durante três anos sob regime de juros compostos e taxa de 1,20% a.m.



Fonte: shutterstock\_566835985. Disponível em: [www.shutterstock.com](http://www.shutterstock.com). Acesso em 02 ago. 2019.



Solução:

$$VF = dep \left[ \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$$

Em que:

*VF*: valor futuro; saldo da aplicação ao seu término, o que desejamos conhecer.

*dep*: R\$ 20.000,00 por mês.

*n*: 36 depósitos periódicos e iguais, pois trata-se de depósitos mensais durante três anos.

*i*: 1,20% *a. m*

---

$$E = VF = 20.000 \left[ \frac{(1 + 0,012)^{36} - 1}{0,012} \right]$$

$$E = VF = 20.000 \left[ \frac{1,5364 - 1}{0,012} \right]$$

$$E = VF = 20.000 \cdot 44,70$$

$$VF = R\$894.000,00$$

O valor da entrada paga para a reforma do novo pátio de distribuição foi R\$ 894.000,00.

---



Fonte: shutterstock\_566835985. Disponível em:  
[www.shutterstock.com](http://www.shutterstock.com). Acesso em 02 ago. 2019.

Conceitos

# **Determinação da taxa de juros do valor futuro**

## Método de Newton-Raphson para Valor Futuro

Função da taxa de juros compostos

$$f(i_j) = \frac{VF}{dep} i_j - (1 + i_j)^n + 1$$

Função marginal da taxa de juros compostos

$$f'(i_j) = \frac{VF}{dep} - n(1 + i_j)^{n-1}$$

Função de Newton-Raphson

$$i_{j+1} = i_j - \frac{f(i_j)}{f'(i_j)}$$

## Método de Newton-Raphson para Valor Futuro

Onde:

$VF$ : valor futuro, ou resultado da aplicação/investimento.

$i_j$ : taxa de juros compostos.

$dep$ : valor depositado periodicamente.

$i_{j+1}$ : próxima taxa de juros compostos.

---

## Mecanismo do método

**1º passo:** estipular uma taxa de juros compostos inicial em valor relativo ( $i_j$ ).

**2º passo:** substituir  $i_j$  na função da taxa de juros compostos  $f(i_j)$ .

- Se  $|f(i_j)| \leq 0,0001$ , então  $i_j$  é a taxa de juros compostos imposta na aplicação.
- Se  $|f(i_j)| > 0,0001$ , então  $i_j$  não é a taxa de juros compostos imposta na aplicação, vá para o 3º passo.

## Mecanismo do método

**3º passo:** usando o valor da taxa de juros compostos  $i_j$ , calcule o valor da função marginal da taxa de juros compostos  $f'(i_j)$ .

**4º passo:** usando os valores da taxa de juros compostos  $(i_j)$ , da função da taxa de juros compostos  $f(i_j)$  e da função marginal da taxa de juros compostos  $f'(i_j)$ , calcule a próxima taxa de juros compostos  $(i_{j+1})$ , que deverá substituir a última taxa que não deu certo.

## Mecanismo do método

**5º passo:** com a nova  $(i_{j+1})$  determinada no passo anterior, volte ao 2º passo e refaça os cálculos como se essa fosse a taxa inicial, esquecendo-se da taxa anterior.

Os passos deverão ser repetidos até que:

$$|f(i_j)| \leq 0,0001$$

---



Resolução da SP

## **Situação-problema 2: Financiamento**

A reforma do novo pátio de distribuição da empresa em que você é sócio foi financiada e a última parcela será paga com resultado de uma aplicação de R\$ 10.000,00 por mês, durante seis meses.

Essa aplicação resultou, num período de quatro meses, o valor de R\$ 48.763,64, depositando R\$ 12.000,00 por mês. Portanto, sua missão é determinar a taxa de juros dessa aplicação, e também o resultado do investimento de R\$ 10.000,00.



Fonte: shutterstock\_680761060. Disponível em: [www.shutterstock.com](http://www.shutterstock.com). Acesso em 02 ago. 2019.

Solução:

**1ª Etapa:** determinando a taxa de juros compostos da aplicação:

$VF: R\$48.763,64$

$i_j$ : Taxa de juros compostos que desejamos encontrar.

$n: 04$

$dep: R\$12.000,00/ \text{ mês}$

---

$$f(i_j) = \frac{VF}{dep} i_j - (1 + i_j)^n + 1$$

$$f(i_j) = \frac{48.763,64}{12.000} i_j - (1 + i_j)^4 + 1$$

$$f(i_j) = 4,0636 i_j - (1 + i_j)^4 + 1$$

$$f'(i_j) = \frac{VF}{dep} - n(1 + i_j)^{n-1}$$

$$f'(i_j) = 4,0636 - 4(1 + i_j)^3$$

$$i_{j+1} = i_j - \frac{f(i_j)}{f'(i_j)}$$



Fonte: shutterstock\_566835985. Disponível em:  
[www.shutterstock.com](http://www.shutterstock.com). Acesso em 02 ago. 2019.

A taxa de juros compostos utilizada na aplicação foi de 1,14% a.m.

**2ª Etapa:** Determinar o resultado da aplicação de R\$10.000,00/mês.

$$VF = dep \left[ \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$$

$VF: ?$

$i_j: 1,14\% \text{ a.m} = 0,0114 \text{ a.m}$

$n: 06$

$dep: \text{R\$}10.000/ \text{mês}$

$$VF = 10.000 \left[ \frac{(1 + 0,0114)^6 - 1}{0,0114} \right]$$

$$VF = 10.000 \left[ \frac{1,0704 - 1}{0,0114} \right]$$

$$VF = R\$61.754,39$$



Fonte: shutterstock\_566835985. Disponível em:  
[www.shutterstock.com](http://www.shutterstock.com). Acesso em 02 ago. 2019.

Portanto, essa aplicação paga uma taxa de juros compostos de 1,14% a.m., por isso a aplicação de R\$ 10.000,00 por mês resultará, após seis meses, no montante de R\$ 61.754,39.

---

Interação



Conceitos

# Amortização



## **Métodos de amortização da dívida de compra**

No Brasil, para financiamento de compra de imóveis, são utilizados dois métodos de amortização da dívida de compra: o SAC (Sistema de Amortização Constante) e o PRICE (Sistema Francês de Amortização).

---

## **Métodos de amortização da dívida de compra**

### **SAC – Sistema de Amortização Constante**

Caracteriza-se por suas parcelas apresentarem um comportamento decrescente. É um sistema muito utilizado para o financiamento de compra de imóveis.

### **PRICE – Sistema Francês de Amortização**

Tem como característica suas parcelas serem iguais. Tem maior aplicação em financiamentos de veículos.

## Métodos de amortização da dívida de compra

### SAC – Sistema de Amortização Constante

Amortização  $A_m$

$$A_m = \frac{VP}{n}$$

Juros  $J_k$

$$J_k = D_{k-1} \cdot i$$

Parcela  $P_k$

$$P_k = A_m + J_k$$

Dívida  $D_k$

$$D_{k+1} = D_k - A_m$$

## Métodos de amortização da dívida de compra

### PRICE – Sistema Francês de Amortização

Parcela  $parc$

$$parc = \frac{VP \cdot i \cdot (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}$$

Juros  $J_k$

$$J_k = D_{k-1} \cdot i$$

Amortização  $A_m$

$$Am_k = parc - J_k$$

Dívida  $D_k$

$$D_k = D_{k-1} - Am_k$$

## Exemplo

Um empréstimo de R\$6.000,00 será parcelado em três vezes mensais sob o sistema PRICE de amortização, com a taxa de juros compostos de 1,2% a.m. Determine o saldo devedor a cada parcela paga.



Fonte:  
shutterstock\_5  
66835985.  
Disponível em:  
[www.shutterstock.com](http://www.shutterstock.com).  
Acesso em 02  
ago. 2019.

Resolução da SP

## Situação-problema 3:

Você será inserido como sócio proprietário de uma empresa que está reformando o novo pátio de distribuição. Reforma essa, de um ano, que está sendo executada sob contrato de financiamento em sistema de amortização constante em pagamentos trimestrais sob a taxa nominal anual de 15% no valor de R\$ 1.200.000,00.



Fonte: shutterstock\_1086642287. Disponível em: [www.shutterstock.com](http://www.shutterstock.com). Acesso em 02 ago. 2019.

Nas situações anteriores você definiu o valor de pagamento da entrada, e também definiu a verba resultante de um investimento que fará parte do pagamento da última parcela do financiamento da reforma; agora você deverá calcular o valor da última parcela a ser paga do financiamento dessa reforma.



Fonte: shutterstock\_560809768. Disponível em: [www.shutterstock.com](http://www.shutterstock.com). Acesso em 02 ago. 2019.



Sabendo que o valor da reforma é de R\$ 1.200.000,00 com entrada de R\$ 894.000,00, temos que o valor a ser financiado é:

$$VP = AV - E$$

$$VP = 1.200.000 - 894.000 = 306.000$$

Portanto, o valor financiado nas condições citadas é de R\$ 306.000,00.

---

$$i_{ef} = \left( \frac{d}{n} + 1 \right)^f - 1$$

$i_{ef}$ : taxa efetiva       $d$ : taxa nominal

$n$ : período da taxa nominal, em dias

$f$ : período da taxa efetiva, em dias

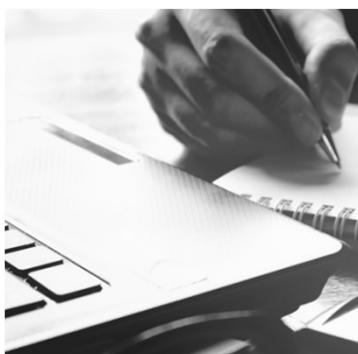
$$i_{ef} = \left( \frac{0,15}{360} + 1 \right)^{90} - 1 \Rightarrow i_{ef} = 1,0004^{90} - 1 \\ = 0,0366$$

$i_{ef}$ : 3,66% ao trimestre

---

Com as informações ajustadas, podemos determinar o valor da última parcela, que é a quarta parcela do financiamento pelo SAC (Sistema de Amortização Constante).

UTILIZANDO UMA  
PLANILHA  
ELETRÔNICA



Fonte:  
shutterstock\_566835985.  
Disponível em:  
[www.shutterstock.com](http://www.shutterstock.com).  
Acesso em 02 ago. 2019.

	Dívida ( $D_k$ ) $D_{k+1} = D_k - Am$	Amortização (Am) $Am = \frac{VP}{n}$	Juros ( $J_k$ ) $J_k = D_{k-1} \cdot i$	Parcela ( $P_k$ ) $P_k = Am + J_k$
0	306.000,00			
1	229.500,00	76.500,00	11.199,60	87.699,60
2	153.000,00	76.500,00	8.399,70	84.899,70
3	76.500,00	76.500,00	5.599,80	82.099,80
4	0,00	76.500,00	2.799,90	<b>79.299,90</b>
$\Sigma$		306.000,00		333.999,00

Portanto, o valor da última parcela de financiamento será de R\$ 79.299,90.

Conceitos

# **Conta garantida – cheque especial**

## Método Hamburguês

O método Hamburguês é um método de cálculo dos juros a serem cobrados ao final de um período de trinta dias para conta garantida ou cheque especial.

$$J = (i + IOF) \sum SD.d$$

## Método Hamburguês

$$J = (i + IOF) \sum SD.d$$

*J*: juros a serem cobrados pelo uso da conta garantida ou cheque especial.

*i*: taxa de juros simples ao dia.

*IOF*: Imposto sobre operações financeiras ao dia.

*SD*: Saldo devedor.

*d*: número de dias em que o saldo devedor (*SD*) não se altera.

---

Resolução da SP

## Situação-problema 4:



Você sabe que a última parcela a ser paga do financiamento dessa reforma é de R\$79.299,90, e que para pagar essa parcela fará uso de uma verba de R\$61.754,39, proveniente de uma aplicação, e o restante virá da conta bancária da empresa.

Como a empresa tem outros compromissos a saldar, provavelmente deverá fazer uso de seu cheque especial, e a instituição bancária cobra uma taxa de juros simples de 144% a.a. e IOF de 0,07% ao dia.



Fonte: shutterstock\_782797126. Disponível em: [www.shutterstock.com](http://www.shutterstock.com). Acesso em 02 ago. 2019.

Você deverá, no último dia do mês, apresentar os juros a serem cobrados pelo uso do cheque especial e o saldo bancário da empresa.

O extrato bancário é dado a seguir:

Data	Histórico	Movimento	Saldo
01	De transporte		1.000,00 +
03	Cientes	400.000,00 +	
05	Fornecedores	150.000,00 -	
05	Funcionários	100.000,00 -	
10	Encargos Fiscais	170.000,00 -	
13	Cientes	50.000,00 +	

15	Pagamento da Reforma		
22	Pagamento de Manutenção	20.000,00 -	
28	Pagamento de Mat. Construção	85.000,00 -	
30	Cliente	100.000,00 +	
30	Juros do Cheque Especial		

Como a última parcela ser paga é de R\$ 79.299,90 e há uma verba de R\$ 61.754,39, o valor faltante deverá ser retirado da conta bancária da empresa. Assim:

$$V_{C/B} = 79.299,90 - 61.754,39$$

$$V_{C/B} = \mathbf{R\$ 17.545,51}$$

Valor a ser retirado  
da conta bancária

Juros a serem cobrados:

$$J = (i + IOF) \sum SD.d$$

$$J = \left( \frac{1,44}{360} + 0,0007 \right) . 279364,08$$

$$J = 0,0047.279364,08$$

$$J = \mathbf{R\$1.313,01}$$

---

## Interação

Um investimento de R\$120,00 por mês, numa aplicação que paga taxa de juros compostos de 1,08% a.m., resultou em R\$1.942,66. Determine o tempo de investimento.

Conceitos

# Recapitulando...

## Nesta aula estudamos...

- Valor presente – financiamento.
- Valor presente – financiamento com entrada.
- Valor presente – condições especiais.
- Determinação da taxa de juros do valor presente.



Fonte: shutterstock\_1151714162. Disponível em:  
[www.shutterstock.com](http://www.shutterstock.com). Acesso em 02 ago. 2019.



