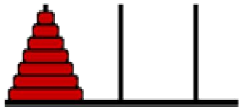
CẤU TRÚC DỮ LIỆU
VÀ THUẬT TOÁN

CHƯƠNG 1: CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN



NỘI DUNG

1.1. Ví dụ mở đầu

1.2. Thuật toán và độ phức tạp

1.3. Ký hiệu tiệm cận

1.4. Giả ngôn ngữ

1.5. Một số kĩ thuật phân tích thuật toán

Ví dụ mở đầu

- Bài toán tìm dãy con lớn nhất:

  Cho dãy số

  $$a_1, a_2, \dots , a_n$$

  Dãy số $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$ với $1 \le i \le j \le n$ được gọi là **dãy con** của dãy đã cho và $\sum_{k=i}^{j} a_k$ được gọi là **trọng lượng** của dãy con này

  Bài toán đặt ra là: *Hãy tìm trọng lượng lớn nhất của các dãy con, tức là tìm cực đại giá trị* $\sum_{k=i}^{j} a_k$. Để đơn giản ta gọi dãy con có trọng lượng lớn nhất là ***dãy con lớn nhất***.

- **Ví dụ:** Nếu dãy đã cho là -2, **11, -4, 13**, -5, 2 thì cần đưa ra câu trả lời là 20 (là trọng lượng của dãy con 11, -4, 13)

Thuật toán trực tiếp

- Thuật toán đơn giản đầu tiên có thể nghĩ để giải bài toán đặt ra là: Duyệt tất cả các dãy con có thể

$$a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j \quad \text{với} \quad 1 \le i \le j \le n$$

và tính tổng của mỗi dãy con để tìm ra trọng lượng lớn nhất.

- Trước hết nhận thấy rằng, tổng số các dãy con có thể của dãy đã cho là

$$C(n,2) + n = n^2/2 + n/2 .$$

Thuật toán trực tiếp

- Thuật toán này có thể cài đặt trong đoạn chương trình sau:

```
int maxSum = 0;
for (int i=0; i<n; i++) {
    for (int j=i; j<n; j++) {
        int sum = 0;
        for (int k=i; k<=j; k++)
            sum += a[k];
        if sum > maxSum
            maxSum = sum;
    }
}
```

Thuật toán trực tiếp

- **Phân tích thuật toán:** Ta sẽ tính số lượng phép cộng mà thuật toán phải thực hiện, tức là đếm xem dòng lệnh

```
Sum += a[k]
```

phải thực hiện bao nhiêu lần. Số lượng phép cộng sẽ là

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i}^{n-1}(j-i+1)=\sum_{i=0}^{n-1}(1+2+\ldots+(n-i))=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-i)(n-i+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$=\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$$

Thuật toán nhanh hơn

- Để ý rằng tổng các số hạng từ i đến j có thể thu được từ tổng của các số hạng từ i đến j-1 bởi 1 phép cộng, cụ thể là ta có:

$$\sum_{k=i}^{j} a[k] = a[j] + \sum_{k=i}^{j-1} a[k]$$

- Nhận xét này cho phép rút bớt vòng lặp for trong cùng.

Thuật toán nhanh hơn

- Ta có thể cài đặt như sau

```
int maxSum = a[0];
for (int i=0; i<n; i++) {
    int sum = 0;
    for (int j=i; j<n; j++) {
        sum += a[j];
        if sum > maxSum
            maxSum = sum;
    }
}
```

Thuật toán nhanh hơn

- **Phân tích thuật toán.** Ta lại tính số lần thực hiện phép cộng và thu được kết quả sau:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(n-i) = n + (n-1) + \ldots + 1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

- Để ý rằng số này là đúng bằng số lượng dãy con. Dường như thuật toán thu được là rất tốt, vì ta phải xét mỗi dãy con đúng 1 lần.

Thuật toán đệ qui

- Ta còn có thể xây dựng thuật toán tốt hơn nữa! Ta sẽ sử dụng kỹ thuật chia để trị. Kỹ thuật này bao gồm các bước sau:
  - Chia bài toán cần giải ra thành các bài toán con cùng dạng
  - Giải mỗi bài toán con một cách đệ qui
  - Tổ hợp lời giải của các bài toán con để thu được lời giải của bài toán xuất phát.
- Áp dụng kỹ thuật này đối với bài toán tìm trọng lượng lớn nhất của các dãy con: Ta chia dãy đã cho ra thành 2 dãy sử dụng phần tử ở chính giữa và thu được 2 dãy số (gọi tắt là dãy bên trái và dãy bên phải) với độ dài giảm đi một nửa.

Thuật toán đệ qui

- Để tổ hợp lời giải, nhận thấy rằng chỉ có thể xảy ra một trong 3 trường hợp:
  - Dãy con lớn nhất nằm ở dãy con bên trái (nửa trái)
  - Dãy con lớn nhất nằm ở dãy con bên phải (nửa phải)
  - Dãy con lớn nhất bắt đầu ở nửa trái và kết thúc ở nửa phải (giữa).
- Do đó, nếu ký hiệu trọng lượng của dãy con lớn nhất ở nửa trái là w_L, ở nửa phải là w_R và ở giữa là w_M thì **trọng lượng cần tìm sẽ là**

$$\max(w_L, w_R, w_M).$$

Thuật toán đệ qui

- Việc tìm trọng lượng của dãy con lớn nhất ở nửa trái (w_L) và nửa phải (w_R) có thể thực hiện một cách đệ qui
- Để tìm trọng lượng $\mathbf{w_M}$ của dãy con lớn nhất bắt đầu ở nửa trái và kết thúc ở nửa phải ta thực hiện như sau:
  - Tính trọng lượng của dãy con lớn nhất trong nửa trái kết thúc ở điểm chia (w_{ML}) và
  - Tính trọng lượng của dãy con lớn nhất trong nửa phải bắt đầu ở điểm chia (w_{MR}).
  - Khi đó $w_M = w_{ML} + w_{MR}$.

Thuật toán đệ qui

- m – điểm chia của dãy trái, m+1 là điểm chia của dãy phải

$$a_1,\ a_2, \ldots, a_m, \qquad a_{m+1},\ a_{m+2}, \ldots, a_n$$

Tính W_{ML} của dãy con lớn nhất trong nửa trái kết thúc tại a_m

Tính W_{MR} của dãy con lớn nhất trong nửa phải bắt đầu từ a_{m+1}

Thuật toán đệ qui

- **Để tính trọng lượng của dãy con lớn nhất ở nửa trái (từ a[i] đến a[j]) kết thúc ở a[j] ta dùng thuật toán sau:**

```
MaxLeft(a, i, j);
{
  maxSum = -∞; sum = 0;
  for (int k=j; k>=i; k--) {
        sum = sum+a[k];
        maxSum = max(sum, maxSum);
   }
    return maxSum;
}
```

Thuật toán đệ qui

- **Để tính trọng lượng của dãy con lớn nhất ở nửa phải (từ a[i] đến a[j]) bắt đầu từ a[i] ta dùng thuật toán sau:**

```
MaxRight(a, i, j);
{
      maxSum = -∞; sum = 0;
      for (int k=i; k<=j; k++){
         sum = sum+a[k];
         maxSum = max(sum, maxSum);
    }
    return maxSum;
}
```

Thuật toán đệ qui

Sơ đồ của thuật toán đệ qui có thể mô tả như sau:

```
MaxSub(a, i, j);
{
  if (i = j) return a[i]
  else
  {   m = (i+j)/2;
      wL = MaxSub(a, i, m);
      wR = MaxSub(a, m+1, j);
      wM = MaxLeft(a, i, m)+
           MaxRight(a, m+1, j);
      return max(wL, wR, wM);
  }
}
```

Thuật toán đệ qui

- **Phân tích thuật toán:**

  Ta cần tính xem lệnh gọi MaxSub(a,1,n) để thực hiện thuật toán đòi hỏi bao nhiêu phép cộng?

- Trước hết nhận thấy MaxLeft và MaxRight đòi hỏi

  $n/2 + n/2 = n$ phép cộng

- Vì vậy, nếu gọi $T(n)$ là số phép cộng cần tìm, ta có công thức đệ qui sau:

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{2}) + n = 2T(\frac{n}{2}) + n & n > 1 \end{cases}$$

Thuật toán đệ qui

- Ta khẳng định rằng $T(2^k) = k.2^k$. Ta chứng minh bằng qui nạp
- **Cơ sở qui nạp:** Nếu k=0 thì $T(2^0) = T(1) = 0 = 0.2^0$.
- **Chuyển qui nạp:** Nếu k>0, giả sử rằng $T(2^{k-1}) = (k-1)2^{k-1}$ là đúng. Khi đó

$$T(2^k) = 2T(2^{k-1})+2^k = 2(k-1).2^{k-1} + 2^k = k.2^k.$$

- Quay lại với ký hiệu n, ta có

$$T(n) = n \log n\ .$$

- **Kết quả thu được là tốt hơn thuật toán thứ hai !**

So sánh các thuật toán

- Cùng một bài toán ta đã đề xuất 3 thuật toán đòi hỏi số lượng phép toán khác nhau và vì thế sẽ đòi hỏi thời gian tính khác nhau.

Thuật toán Quy hoạch động

Việc phát triển thuật toán dựa trên DP bao gồm 3 giai đoạn:

1. Phân rã: Chia bài toán cần giải thành những bài toán con nhỏ hơn có cùng dạng với bài toán ban đầu.
2. Ghi nhận lời giải: Lưu trữ lời giải của các bài toán con vào một bảng.
3. Tổng hợp lời giải: Lần lượt từ lời giải của các bài toán con kích thước nhỏ hơn tìm cách xây dựng lời giải của bài toán kích thước lớn hơn, cho đến khi thu được lời giải của bài toán xuất phát (là bài toán con có kích thước lớn nhất).

Thuật toán QHĐ

- **Phân rã.** Gọi s_i là trọng lượng của dãy con lớn nhất trong dãy $a_1, a_2, ..., a_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

  Rõ ràng s_n là giá trị cần tìm.

- **Tổng hợp lời giải.**
  - Trước hết, ta có

$$s_1 = a_1.$$

  - Giả sử $i > 1$ và s_k là đã biết với $k = 1, 2, ..., i\text{-}1$. Ta cần tính s_i là trọng lượng của dãy con lớn nhất của dãy

$$a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i \text{ .}$$

Thuật toán QHĐ

- Do dãy con lớn nhất của dãy này hoặc là có chứa phần tử a_i *hoặc là không chứa phần tử* a_i, *nên nó chỉ có thể là một trong hai dãy:*
  - Dãy con lớn nhất của dãy $a_1, a_2, ..., a_{i-1}$
  - Dãy con lớn nhất của dãy $a_1, a_2, ..., a_i$ *kết thúc tại* a_i.
- Từ đó suy ra

$$s_i = max\ \{s_{i-1}, e_i\},\ i = 2, ..., n.$$

trong đó e_i *là trọng lượng của dãy con lớn nhất của dãy* $a_1, a_2, ..., a_i$ *kết thúc tại* a_i.

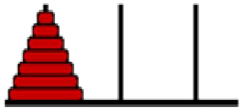
- Để tính e_i, *ta cũng có thể sử dụng công thức đệ qui sau:*
  - $e_1 = a_1$;
  - $e_i = max\ \{a_i, e_{i-1} + a_i\},\ i = 2, ..., n.$

Thuật toán QHĐ

```
MaxSub(a);
{
    smax = a[1];            (* smax – trọng lượng của dãy con lớn nhất  *)
    maxendhere = a[1];      (* maxendhere – trọng lượng của dãy con lớn nhất kết thúc tại a[i] *)
    imax = 1;               (* imax - vị trí kết thúc của dãy con lớn nhất  *)
    for i = 2 to n {
            u = maxendhere + a[i];
            v = a[i];
            if (u > v) maxendhere = u
             else maxendhere = v;
            if (maxendhere > smax)then {
                smax := maxendhere;
                imax := i;
            }
    }
}
```

Phân tích thuật toán:

Dễ thấy số phép toán cộng phải thực hiện trong thuật toán (số lần thực hiện câu lệnh **u = maxendhere + a[i];**) là *n*.



NỘI DUNG

1.1. Ví dụ mở đầu

1.2. Thuật toán và độ phức tạp

1.3. Ký hiệu tiệm cận

1.4. Giả ngôn ngữ

1.5. Một số kĩ thuật phân tích thuật toán

Khái niệm bài toán tính toán

- **Định nghĩa.** *Bài toán tính toán F* là ánh xạ từ tập các xâu nhị phân độ dài hữu hạn vào tập các xâu nhị phân độ dài hữu hạn:

$$F : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*.$$

- **Ví dụ:**
  - Mỗi số nguyên x đều có thể biểu diễn dưới dạng xâu nhị phân là cách viết trong hệ đếm nhị phân của nó.
  - Hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$ có thể biểu diễn dưới dạng xâu là ghép nối của các xâu biểu diễn nhị phân của các thành phần của ma trận A và vectơ b.
  - Đa thức một biến $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ hoàn toàn xác định bởi dãy số $n, a_0, a_1, ..., a_n,$ mà để biểu diễn dãy số này chúng ta có thể sử dụng xâu nhị phân.

Khái niệm thuật toán

- **Định nghĩa.** *Ta hiểu thuật toán giải bài toán đặt ra là một thủ tục xác định bao gồm một dãy hữu hạn các bước cần thực hiện để **thu được đầu ra** cho **một đầu vào cho trước** của bài toán.*
- *Thuật toán có các đặc trưng sau đây:*
  - ***Đầu vào (Input):*** *Thuật toán nhận dữ liệu vào từ một tập nào đó.*
  - ***Đầu ra (Output):*** *Với mỗi tập các dữ liệu đầu vào, thuật toán đưa ra các dữ liệu tương ứng với lời giải của bài toán.*
  - ***Chính xác (Precision):*** *Các bước của thuật toán được mô tả chính xác.*
  - ***Hữu hạn (Finiteness):*** *Thuật toán cần phải đưa được đầu ra sau một số hữu hạn (có thể rất lớn) bước với mọi đầu vào.*
  - ***Đơn trị (Uniqueness):*** *Các kết quả trung gian của từng bước thực hiện thuật toán được xác định một cách đơn trị và chỉ phụ thuộc vào đầu vào và các kết quả của các bước trước.*
  - ***Tổng quát (Generality):*** *Thuật toán có thể áp dụng để giải mọi bài toán có dạng đã cho.*

Giải bài toán là gì?

What is Problem Solving?

- Problem solving
  - Là quá trình đặt bài toán và phát triển chương trình máy tính để giải bài toán đặt ra
- Lời giải bài toán bao gồm:
  - Thuật toán (Algorithms)
    - *Algorithm: là dãy các bước cần thực hiện để từ dữ liệu vào (input) đưa ra kết quả đầu ra (output) của bài toán trong thời gian hữu hạn.*
  - Cấu trúc dữ liệu:
    - *Cách tổ chức lưu trữ dữ liệu vào - ra*

Độ phức tạp của thuật toán

- *Đánh giá **độ phức tạp tính toán** của thuật toán là đánh giá **lượng tài nguyên các loại** mà thuật toán đòi hỏi sử dụng*. Có hai loại tài nguyên quan trọng đó là **thời gian** và **bộ nhớ**. Trong giáo trình này ta đặc biệt quan tâm đến đánh giá thời gian cần thiết để thực hiện thuật toán mà ta sẽ gọi là *thời gian tính* của thuật toán.
- Thời gian tính phụ thuộc vào dữ liệu vào.
- **Định nghĩa.** *Ta gọi kích thước dữ liệu đầu vào (hay độ dài dữ liệu vào) là số bít cần thiết để biểu diễn nó.*
- Ta sẽ tìm cách đánh giá thời gian tính của thuật toán bởi một ***hàm của độ dài dữ liệu vào.***

Phép toán cơ bản

- Đo thời gian tính bằng đơn vị đo nào?
- **Định nghĩa.** *Ta gọi phép toán cơ bản là phép toán có thể thực hiện với thời gian bị chặn bởi một hằng số không phụ thuộc vào kích thước dữ liệu.*
- Để tính toán thời gian tính của thuật toán ta sẽ đếm ***số phép toán cơ bản*** mà nó phải thực hiện.

Các loại thời gian tính

Chúng ta sẽ quan tâm đến

– Thời gian tối thiểu cần thiết để thực hiện thuật toán với mọi bộ dữ liệu đầu vào kích thước *n*. Thời gian như vậy sẽ được gọi là *thời gian tính tốt nhất* của thuật toán với đầu vào kích thước *n*.

– Thời gian nhiều nhất cần thiết để thực hiện thuật toán với mọi bộ dữ liệu đầu vào kích thước *n*. Thời gian như vậy sẽ được gọi là *thời gian tính tồi nhất* của thuật toán với đầu vào kích thước *n*.

– Thời gian trung bình cần thiết để thực hiện thuật toán trên tập hữu hạn các đầu vào kích thước *n*. Thời gian như vậy sẽ được gọi là *thời gian tính trung bình* của thuật toán.

NỘI DUNG

1.1. Ví dụ mở đầu

1.2. Giải bài toán và công nghệ phần mềm

1.3. Thuật toán và độ phức tạp

1.4. Ký hiệu tiệm cận

1.5. Giả ngôn ngữ

1.6. Một số kĩ thuật phân tích thuật toán

Ký hiệu tiệm cận

Asymptotic Notation

$$\Theta, \Omega, O$$

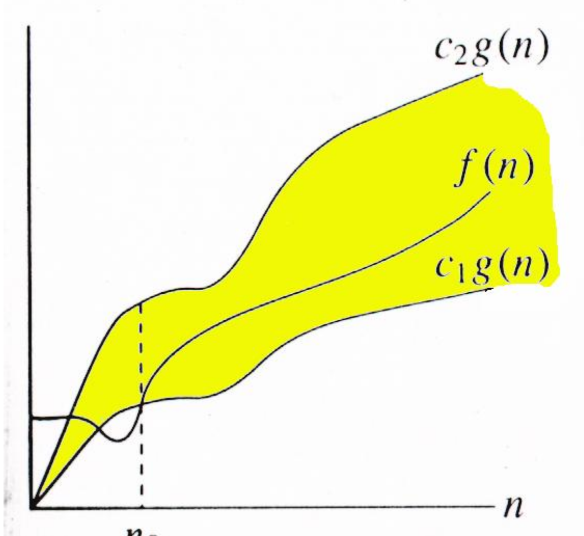
- Được sử dụng để mô tả thời gian tính của thuật toán
- Thay vì nói chính xác thời gian tính, ta nói $\Theta(n^2)$
- Được xác định đối với các hàm nhận giá trị nguyên không âm
- Dùng để so sánh tốc độ tăng của hai hàm

Ký hiệu Θ

Đối với hàm $g(n)$, ta ký hiệu $\Theta(g(n))$ là tập các hàm

$\Theta(g(n)) = \{f(n)$: tồn tại các hằng số c_1, c_2 và n_0 sao cho

$$0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n), \text{ với mọi } n \ge n_0 \}$$



$f(n) = \Theta(g(n))$

Ta nói rằng $g(n)$ là đánh giá tiệm cận đúng cho $f(n)$

Ví dụ

$$10n^2 - 3n = \Theta(n^2)\ ?$$

- Với giá trị nào của các hằng số n_0, c_1, và c_2 thì bất đẳng thức trong định nghĩa là đúng?
- Lấy c_1 bé hơn hệ số của số hạng với số mũ cao nhất, còn c_2 lấy lớn hơn, ta có

$$n^2 \le 10n^2 - 3n \le 11n^2, \textit{ với mọi } n \ge 1.$$

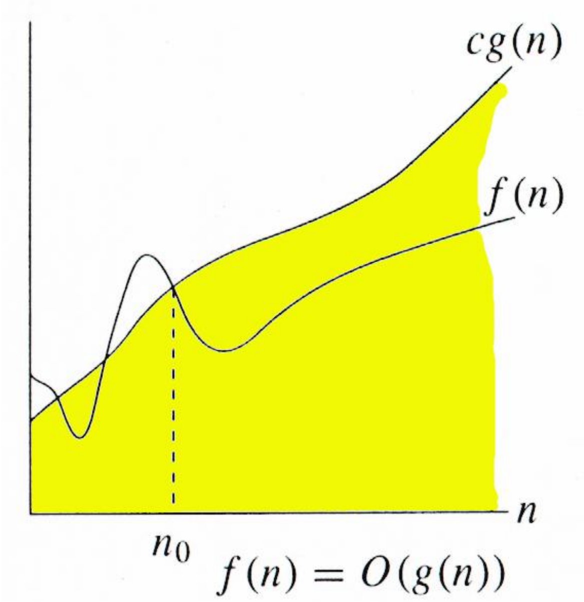
- *Đối với hàm đa thức: Để so sánh tốc độ tăng cần nhìn vào số hạng với số mũ cao nhất*

Ký hiệu *O* (*đọc là ô lớn - big O*)

Đối với hàm $g(n)$ cho trước, ta ký hiệu $O(g(n))$ là tập các hàm

$O(g(n)) = \{f(n)$: tồn tại các hằng số dương c và n_0 sao cho:

$$f(n) \le cg(n) \text{ với mọi } n \ge n_0 \}$$



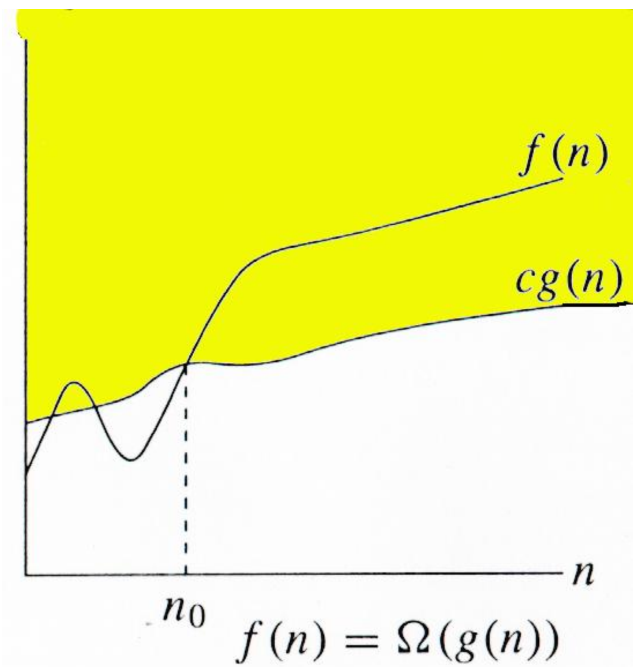
Ta nói $g(n)$ là *cận trên tiệm cận* của $f(n)$

Ký hiệu Ω

Đối với hàm $g(n)$ cho trước, ta ký hiệu $\Omega(g(n))$ là tập các hàm

$\Omega(g(n)) = \{f(n)$: tồn tại các hằng số dương c và n_0 sao cho:

$$cg(n) \leq f(n) \text{ với mọi } n \geq n_0 \}$$



Ta nói $g(n)$ là *cận dưới tiệm cận* cho $f(n)$

Liên hệ giữa Θ, Ω, O

Đối với hai hàm bất kỳ $g(n)$ và $f(n)$,

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

khi và chỉ khi

$$f(n) = O(g(n)) \text{ và } f(n) = \Omega(g(n))$$

tức là

$$\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$$

Cách nói về thời gian tính

- Nói "Thời gian tính là $O(f(n))$" hiểu là: Đánh giá trong tình huống tồi nhất (worst case) là $O(f(n))$. Thường nói: "Đánh giá thời gian tính trong tình huống tồi nhất là $O(f(n))$"
  - *Nghĩa là thời gian tính trong tình huống tồi nhất được xác định bởi một hàm nào đó* $g(n) \in O(f(n))$
- "Thời gian tính là $\Omega(f(n))$" hiểu là: Đánh giá trong tình huống tốt nhất (best case) là $\Omega(f(n))$. Thường nói: "Đánh giá thời gian tính trong tình huống tốt nhất là $\Omega(f(n))$"
  - *Nghĩa là thời gian tính trong tình huống tốt nhất được xác định bởi một hàm nào đó* $g(n) \in \Omega(f(n))$

Ví dụ

- *Sắp xếp chèn (Insertion sort)* đòi hỏi thời gian $\Theta(n^2)$ trong tình huống tồi nhất, vì thế bài toán sắp xếp có thời gian là $O(n^2)$.

- Mọi thuật toán sắp xếp đều đòi hỏi duyệt qua tất cả các phần tử, vì thế bài toán sắp xếp có thời gian $\Omega(n)$ trong tình huống tốt nhất.

- Trên thực tế, sử dụng (chẳng hạn) sắp xếp trộn (merge sort), bài toán sắp xếp có thời gian $\Theta(n \log n)$ trong tình huống tồi nhất.

Ký hiệu tiệm cận trong các đẳng thức

- Được sử dụng để thay thế các biểu thức chứa các toán hạng với tốc độ tăng chậm
- Ví dụ,

$$4n^3 + 3n^2 + 2n + 1 = 4n^3 + 3n^2 + \Theta(n)$$

$$= 4n^3 + \Theta(n^2) = \Theta(n^3)$$

- Trong các đẳng thức, $\Theta(f(n))$ thay thế cho một *hàm nào đó* $g(n) \in \Theta(f(n))$
  - Trong ví dụ trên, $\Theta(n^2)$ thay thế cho $3n^2 + 2n + 1$

Sự tương tự giữa so sánh các hàm số và so sánh các số

$$f \leftrightarrow g \;\approx\; a \leftrightarrow b$$

$$f(n) = O(g(n)) \;\approx\; a \le b$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \;\approx\; a \ge b$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \;\approx\; a = b$$

Liên hệ với khái niệm giới hạn

- $\lim_{n\to\infty} [f(n) / g(n)] = 0 \Rightarrow f(n) \in o(g(n))$
- $\lim_{n\to\infty} [f(n) / g(n)] < \infty \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$
- $0 < \lim_{n\to\infty} [f(n) / g(n)] < \infty \Rightarrow f(n) \in \Theta(g(n))$
- $0 < \lim_{n\to\infty} [f(n) / g(n)] \Rightarrow f(n) \in \Omega(g(n))$
- $\lim_{n\to\infty} [f(n) / g(n)] = \infty \Rightarrow f(n) \in \omega(g(n))$
- $\lim_{n\to\infty} [f(n) / g(n)]$ không xác định $\Rightarrow$ không thể nói gì

Các tính chất

- Truyền ứng (Transitivity)

$$f(n) = \Theta(g(n)) \;\&\; g(n) = \Theta(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Theta(h(n))$$
$$f(n) = O(g(n)) \;\&\; g(n) = O(h(n)) \Rightarrow f(n) = O(h(n))$$
$$f(n) = \Omega(g(n)) \;\&\; g(n) = \Omega(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(h(n))$$

- Đối xứng (Symmetry)

$f(n) = \Theta(g(n))$ khi và chỉ khi $g(n) = \Theta(f(n))$

- Đối xứng chuyển vị (Transpose Symmetry)

$f(n) = O(g(n))$ khi và chỉ khi $g(n) = \Omega(f(n))$

Ví dụ

	A	B
•	$5n^2 + 100n$	$3n^2 + 2$
•	$\log_3(n^2)$	$\log_2(n^3)$

Ví dụ

	A	B	
•	$5n^2 + 100n$	$3n^2 + 2$	$A \in \Theta(B)$

$A \in \Theta(n^2),\ n^2 \in \Theta(B) \Rightarrow A \in \Theta(B)$

•	$\log_3(n^2)$	$\log_2(n^3)$

Ví dụ

	A	B	
•	$5n^2 + 100n$	$3n^2 + 2$	$A \in \Theta(B)$

$A \in \Theta(n^2),\ n^2 \in \Theta(B) \Rightarrow A \in \Theta(B)$

•	$\log_3(n^2)$	$\log_2(n^3)$	$A \in \Theta(B)$

$\log_b a = \log_c a / \log_c b$; $A = 2\lg n / \lg 3$, $B = 3\lg n$, $A/B = 2/(3\lg 3)$

Ví dụ

A B

- $5n^2 + 100n$ $3n^2 + 2$ $A \in \Theta(B)$

  $A \in \Theta(n^2),\ n^2 \in \Theta(B) \Rightarrow A \in \Theta(B)$

- $\log_3(n^2)$ $\log_2(n^3)$ $A \in \Theta(B)$

  $\log_b a = \log_c a / \log_c b$; $A = 2\lg n / \lg 3$, $B = 3\lg n$, $A/B = 2/(3\lg 3)$

Ví dụ

- Với mỗi cặp hàm sau đây, hoặc $f(n) = O(g(n))$, $f(n) = \Omega(g(n))$, hoặc $f(n) = \Theta(g(n))$. Hãy xác định quan hệ nào là đúng.
  - $f(n) = \log n^2$; $g(n) = \log n + 5$ — $f(n) = \Theta(g(n))$
  - $f(n) = n$; $g(n) = \log n^2$ — $f(n) = \Omega(g(n))$
  - $f(n) = \log \log n$; $g(n) = \log n$ — $f(n) = O(g(n))$
  - $f(n) = n$; $g(n) = \log^2 n$ — $f(n) = \Omega(g(n))$
  - $f(n) = n \log n + n$; $g(n) = \log n$ — $f(n) = \Omega(g(n))$
  - $f(n) = 10$; $g(n) = \log 10$ — $f(n) = \Theta(g(n))$
  - $f(n) = 2^n$; $g(n) = 10n^2$ — $f(n) = \Omega(g(n))$
  - $f(n) = 2^n$; $g(n) = 3^n$ — $f(n) = O(g(n))$

Cận trên và cận dưới

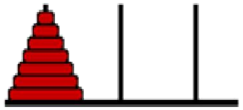
Upper Bound and Lower Bound

- **Định nghĩa** (*Upper Bound*). Cho bài toán *P*, ta nói cận trên cho thời gian tính của *P* là $\boldsymbol{O(g(n))}$ nếu để giải *P* tồn tại thuật toán giải với thời gian tính là $O(g(n))$.
- **Định nghĩa** (*Lower Bound*). Cho bài toán *P*, ta nói cận dưới cho thời gian tính của *P* là $\boldsymbol{\Omega(g(n))}$ nếu mọi thuật toán giải *P* đều có thời gian tính là $\Omega(g(n))$.

- **Định nghĩa.** Cho bài toán *P*, ta nói thời gian tính của *P* là $\boldsymbol{\Theta(g(n))}$ nếu *P* có cận trên là $O(g(n))$ và cận dưới là $\Omega(g(n))$.

Một số lớp thuật toán

- **Một số lớp thuật toán đặc biệt:**
  - $O(1)$: hằng số (constant)
  - $O(\log n)$: logarithmic
  - $O(n)$: tuyến tính (linear)
  - $O(n \log n)$: trên tuyến tính (superlinear)
  - $O(n^2)$: bình phương (quadratic)
  - $O(n^3)$: bậc ba (cubic)
  - $O(a^n)$: hàm mũ (exponential) ($a > 1$)
  - $O(n^k)$: đa thức (polynomial) ($k \geq 1$)



NỘI DUNG

1.1. Ví dụ mở đầu

1.2. Thuật toán và độ phức tạp

1.3. Ký hiệu tiệm cận

1.4. Giả ngôn ngữ

1.5. Một số kĩ thuật phân tích thuật toán

Mô tả thuật toán: giả ngôn ngữ

- Để mô tả thuật toán có thể sử dụng một ngôn ngữ lập trình nào đó. Tuy nhiên điều đó có thể làm cho việc mô tả thuật toán trở nên phức tạp đồng thời rất khó nắm bắt.
- Vì thế, để mô tả thuật toán người ta thường sử dụng ***giả ngôn ngữ*** (***pseudo language***), trong đó cho phép vừa mô tả thuật toán bằng ngôn ngữ đời thường vừa sử dụng những cấu trúc lệnh tương tự như của ngôn ngữ lập trình.
- Dưới đây ta liệt kê một số câu lệnh chính được sử dụng trong giáo trình để mô tả thuật toán.

Mô tả thuật toán: phỏng ngôn ngữ

- **Khai báo biến**

  integer x,y;

  real u, v;

  boolean a, b;

  char c, d;

  datatype x;

- **Câu lệnh gán**

  x = expression;

  hoặc

  x ← expression;

  Ví dụ: x ← 1+4; y=a*y+2;

Mô tả thuật toán: giả ngôn ngữ

- **Cấu trúc điều khiển**

if condition **then**

    dãy câu lệnh

else

    dãy câu lệnh

endif;

while condition **do**

    dãy câu lệnh

endwhile;

Mô tả thuật toán: phỏng ngôn ngữ

repeat
    dãy câu lệnh;
until condition;

for i=n1 **to** n2 [step d]
    dãy câu lệnh;
endfor;

- **Vào-Ra**

  read(X); /* X là biến đơn hoặc mảng */

  print(data**) hoặc print(**thông báo**)**

Câu lệnh case:

Case
    cond1: stat1;
    cond2: stat2;
    .
    .
    .
    condn: stat n;
endcase;

Mô tả thuật toán: giả ngôn ngữ

- **Hàm và thủ tục (Function and procedure)**

Function name(các tham số)
begin
    mô tả biến;
    các câu lệnh trong thân của hàm;
    return (giá trị)
end;

Procedure name(các tham số)
begin
    mô tả biến;
    các câu lệnh trong thân của hàm;
end;

Truyền tham số:

- Tham trị
- Tham biến
- Biến cục bộ
- Biến toàn cục

Mô tả thuật toán: phỏng ngôn ngữ

- **Ví dụ:** Thuật toán tìm phần tử lớn nhất trong mảng A(1:n)

```
Function max(A(1:n))
begin
  datatype x;  /* để giữ giá trị lớn nhất tìm được */
  integer i;
  x=A[1];
  for i=2 to n do
      if x < A[i] then
          x=A[i];
      endif
  endfor ;
 return (x);
end max;
```

Mô tả thuật toán: giả ngôn ngữ

- ***Ví dụ:*** Thuật toán hoán đổi nội dung hai biến

```
Procedure swap(x, y)
begin
    temp=x;
    x = y;
    y = temp;
end swap;
```

NỘI DUNG

1.1. Ví dụ mở đầu

1.2. Thuật toán và độ phức tạp

1.3. Ký hiệu tiệm cận

1.4. Giả ngôn ngữ

1.5. Một số kĩ thuật phân tích thuật toán

Các kỹ thuật cơ bản phân tích độ phức tạp của thuật toán

- **Cấu trúc tuần tự.** Giả sử P và Q là hai đoạn của thuật toán, có thể là một câu lệnh nhưng cũng có thể là một thuật toán con. Gọi $Time(P)$, $Time(Q)$ là thời gian tính của P và Q tương ứng. Khi đó ta có

Quy tắc tuần tự: *Thời gian tính đòi hỏi bởi* "P; Q", *nghĩa là P thực hiện trước, tiếp đến là Q, sẽ là*

$$Time(P; Q) = Time(P) + Time(Q) ,$$

hoặc trong ký hiệu Theta:

$$Time(P; Q) = \Theta(\max(Time(P), Time(Q))).$$

Vòng lặp for

for i =1 **to** m **do** P(i);

- Giả sử thời gian thực hiện P(i) là t(i)
- Khi đó thời gian thực hiện vòng lặp for sẽ là

$$\sum_{i=1}^{m} t(i)$$

Ví dụ: Tính số Fibonaci

```
function Fibiter(n)
begin
    i=0; j=1;
    for k=2 to n do
    begin
        j= j+i;
        i= j-i;
    end;
    Fibiter= j;
end;
```

- Nếu coi các phép toán số học đòi hỏi thời gian là hằng số c, và không tính đến chi phí tổ chức vòng lặp for thì thời gian tính của hàm trên là $\Theta(n)$.
- Do (công thức Muavre)

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right)$$

suy ra số bit biểu diễn f_k là $\Theta(k)$. Do đó thời gian tính của một lần lặp là $\Theta(k)$. Vậy thời gian tính của Fibiter là:

$$\sum_{k=1}^{n} c.k = c\sum_{k=1}^{n} k = c\frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$$

Phân tích vòng lặp While và Repeat

- Cần xác định một hàm của các biến trong vòng lặp sao cho hàm này có giá trị giảm dần trong quá trình lặp. Khi đó
  - Để chứng minh tính kết thúc của vòng lặp ta chỉ cần chỉ ra giá trị của hàm là số nguyên dương.
  - Còn để xác định số lần lặp ta cần phải khảo sát xem giá trị của hàm giảm như thế nào.
- Việc phân tích vòng lặp Repeat được tiến hành tương tự như phân tích vòng lặp While.

Ví dụ: Tìm kiếm nhị phân (Binary Search)

Giả thiết là x có mặt trong mảng T

Input: Mảng T[1..n] và số x
Output: Giá trị i: $1 \le i \le n$ sao cho T[i] = x.

```
function Binary-Search(T[1..n], x);
begin
    i:=1; j:=n;
    while i < j do
        k:= (i+j) div 2;
        case
            x < T[k]: j:=k-1;
            x = T[k]: i:=k; j:=k; Binary-Search=k; exit; {Found!}
            x > T[k]: i:=k+1;
        end case
    endwhile
end;
```

Phân tích Binary-Search

- Gọi $d= j-i+1$. d – số phần tử của mảng cần tiếp tục khảo sát
- Ký hiệu i, j, i^*, j^* theo thứ tự là giá trị của i, j trước và sau khi thực hiện lần lặp. Khi đó
  - Nếu $x < T[k]$, thì $i^*=i$, $j^*=(i+j)$ div 2 - 1, vì thế $d^*=j^*- i^*+1$ $= (i+j)$ div 2 - 1- $i + 1 \le (i+j)/2 - i < (j - i + 1)/2 = d/2$.
  - Nếu $x > T[k]$, thì $j^*=j$, $i^*=(i+j)$ div 2 + 1, vì thế $d^*=j^*-$ $i^*+1 = j - (i+j)$ div 2 $\le j -(i+j-1)/2 - i = (j - i + 1)/2 = d/2$.
  - Nếu $x = T[k]$, thì $d^* = 1$ còn $d \ge 2$

Binary-Search (tiếp)

- Vậy luôn có: $d^* \le d/2$
- Do vòng lặp kết thúc khi $d \le 1$, nên từ đó suy ra thuật toán phải kết thúc.
- Gọi d_p là giá trị của $j - i + 1$ ở lần lặp thứ $p \ge 1$ và $d_0 = n$. Khi đó

$$d_p \le d_{p-1}/2, \; p \ge 1.$$

- Thuật toán kết thúc tại bước p nếu $d_p \le 1$, điều đó xảy ra khi $p = \lceil \log n \rceil$.
- Vậy thời gian tính của thuật toán là $O(\log n)$

Các mô tả khác của thuật toán Binary Search

```
Function mid=bsearch1(L,p,q,key)

while q>p
    mid=floor((p+q)/2);
    if key<=L(mid)
        q=mid;
    else
        p=mid+1;
    end
end

if key==L(p)
    mid=p;
else
    mid=0;
end
```

Tìm thấy rồi thì dừng?!

```
Function mid=bsearch2(L,p,q,key)

while q>p
    mid=floor((p+q)/2);
    if key==L(mid)
        p=mid; break
    elseif key<L(mid)
        q=mid-1;
    else
        p=mid+1;
    end
end
% Chú ý:  p có thể có giá trị sai ở đây
if key==L(p)
    mid=p;
else
    mid=0;
end
```

Hãy thử với:
L = 1 , 2, 3
key = 1, 2, 3

Hàm trên C

```
boolean binary_search_1(int* a, int n, int x) {
/* Test xem x có mặt trong mảng a[] kích thước n. */
   int i;
   while (n > 0) {
      i = n / 2;
      if (a[i] == x)
         return true;
      if (a[i] < x) { /* Tiếp tục tìm ở nửa trái */
         a = &a[i + 1];
         n = n - i - 1; }
      else /* Tiếp tục tìm ở nửa phải */
         n = i;
   }
   return false;
}
```

Câu lệnh đặc trưng

- **Định nghĩa.** *Câu lệnh đặc trưng là câu lệnh được thực hiện thường xuyên ít nhất là cũng như bất kỳ câu lệnh nào trong thuật toán.*
- Nếu giả thiết thời gian thực hiện mỗi câu lệnh là bị chặn bởi hằng số thì thời gian tính của thuật toán sẽ cùng cỡ với số lần thực hiện câu lệnh đặc trưng
- => Để đánh giá thời gian tính có thể đếm số lần thực hiện câu lệnh đặc trưng

Ví dụ: FibIter

```
function Fibiter(n)
begin
     i:=0; j:=1;
    for k:=1 to n do
    begin
          j:= j+i;
          i:= j-i;
    end;
    Fibiter:= j;
end;
```

Câu lệnh đặc trưng

- Số lần thực hiện câu lệnh đặc trưng là n.
- Vậy thời gian tính của thuật toán là O(n)

Ví dụ: Thuật toán 1 ví dụ mở đầu

```
int maxSum =0;
for (int i=0; i<n; i++) {
    for (int j=i; j<n; j++) {
        int sum = 0;
        for (int k=i; k<=j; k++)
            sum += a[k];
        if sum > maxSum
            maxSum = sum;
    }
}
```

Chọn câu lệnh đặc trưng là sum+=a[k].

=> Đánh giá thời gian tính của thuật toán là $O(n^3)$

Ví dụ: Sắp xếp

- *Nhận xét:* Khi thuật toán đòi hỏi thực hiện nhiều vòng lặp lồng nhau, thì có thể lấy câu lệnh nằm trong vòng lặp trong cùng làm câu lệnh đặc trưng.

- Tuy vậy, cũng cần hết sức thận trọng khi sử dụng cách lựa chọn này.
- **Ví dụ. Sắp xếp kiểu nhốt chim vào chuồng (Pigeonhole Sorting).**

  Sắp xếp *n* số nguyên dương có giá trị nằm trong khoảng 1..s.

  Đầu vào: T[1..n]: mảng chứa dãy cần sắp xếp.

  Đầu ra: T[1..n]: mảng chứa dãy được sắp xếp không giảm.

  Thuật toán bao gồm 2 thao tác:

  – ***Đếm chim:*** Xây dựng mảng U[1..s], trong đó phần tử U[k] đếm số lượng số có giá trị là k trong mảng T.

  – ***Nhốt chim:*** Lần lượt nhốt U[1] con chim loại 1 vào U[1] lồng đầu tiên, U[2] con chim loại 2 vào U[2] lồng tiếp theo, ...

Sắp xếp kiểu nhốt chim

```
procedure Pigeonhole-Sorting;
begin
    (* đếm chim *)
    for i:=1 to n do inc(U[T[i]]);
    (* Nhốt chim *)
    i:=0;
    for k:=1 to s do
        while U[k]<>0 do
         begin
            i:=i+1;
           T[i]:=k;
            U[k]:=U[k]-1;
         end;
 end;
```

Sắp xếp kiểu nhốt chim

- Nếu chọn câu lệnh bất kỳ trong vòng lặp while làm câu lệnh đặc trưng, thì rõ ràng với mỗi k, câu lệnh này phải thực hiện $U[k]$ lần. Do đó số lần thực hiện câu lệnh đặc trưng là

$$\sum_{k=1}^{s} U[k] = n$$

(do có tất cả n số cần sắp xếp). Từ đó ta có thời gian tính là $\Theta(n)$.

- Ví dụ sau đây cho thấy đánh giá đó chưa chính xác.

Giả sử $T[i] = i^2$, $i = 1, ..., n$. Ta có

Sắp xếp kiểu nhốt chim

$$U[k] = \begin{cases} 1, & \text{nếu } k \text{ là số chính phương} \\ 0, & \text{nếu trái lại,} \end{cases}$$

Khi đó $s = n^2$. Rõ ràng thời gian tính của thuật toán không phải là $O(n)$, mà phải là $O(n^2)$.

- Lỗi ở đây là do ta xác định câu lệnh đặc trưng chưa đúng, các câu lệnh trong thân vòng lặp *while* không thể dùng làm câu lệnh đặc trưng trong trường hợp này, do có rất nhiều vòng lặp rỗng (khi $U[k] = 0$).
- Nếu ta chọn câu lệnh kiểm tra **$U[k]$ <> 0** làm câu lệnh đặc trưng thì rõ ràng số lần thực hiện nó sẽ là $n + s$. Vậy thuật toán có thời gian tính $O(n+s) = O(n^2)$.