CH 6

비선형 최적화

1) State Estimation

2) 비선형 최소 제곱

Review

- Slam 방정식

$$\begin{cases} x_k = f(x_{k-1}, u_k) + w_k \\ z_{k,j} = h(y_j, x_k) + v_{k,j} \end{cases}$$

- CH3-4

  x_k: Pose
  ※ Slam을 계산하기 위해 x_k는 어떤 형태를 취하는가?
  → 좌표가 아닌, 의 Camera-World-Transformation행렬

SE3

- CH4-5

  z_k: $Landmark$의 픽셀 위치
  ※ 관찰 방정식 z_k는 어떻게 얻을수 있는가?
  → 핀홀카메라 모델의 경우 $sz_k = KTP$ $\ldots\{K: Intrinsic, T(SE3): x_k \; P(Landmark): y_j\}$

State Estimation

- 1. Incremental 방식 :
  EKF등을 사용, 직전의 데이터만를 통해 x_k를 추정

- 2. Batch Proces 방식 :
  $x = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ $y = \{y_1, y_2, \dots y_m\}$ 을 모두 고려, 처리

  → 도입이 쉽고, 일괄적으로 최소제곱법으로 최적화 가능

State Estimation

- 관측, 모션 데이터 z,u 에 대한 $pose$ 추정 x, y 확률 **: P (x,y | z,u)**
- $Bayes\ Rule$

$$\mathrm{P(x, y|z, u)} = \frac{\mathrm{P(z, u|x, y)P(x, y)}}{\mathrm{P(z, u)}}$$

$$\max\ (\mathrm{P(x, y|z, u)}) = \max(\frac{\mathrm{P(z, u|x, y)P(x, y)}}{\mathrm{P(z, u)}}) \ldots MAP\ problem$$

$$\max\ (\mathrm{P(x, y|z, u)}) = \max(\mathrm{P(z, u|x, y)}) \ldots MLE\ problem$$

관측 z 에 대해 $\max \mathrm{P(x, y|z)} = \max \mathrm{P(z|x, y)} = \max\ N(h(x, y), Q)$

State Estimation

- $Gaussian$

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)}$$

$$-\ln\big(P(x)\big) = \frac{1}{2}\ln((2\pi)^N \det(\Sigma)) + \frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)$$

이때 $\max\big(\mathrm{P(x)}\big) \to \min(-\ln\big(\mathrm{P(x)}\big))$ 이고 x 에 대해 첫째 항 소거

관측 z 에 대해, $\max \mathrm{P(z|x, y)} = \max N(h(x, y), Q)$

$$\max N\big(h\big(y_j, x_k\big), Q_{k,j}\big) = \min(\big(z - h(x, y)\big)^T Q^{-1} \big(z - h(x, y)\big))$$

State Estimation

- Motion 과 관측 데이터는 서로 독립적. 따라서

$$P(z,u|x,y) = \Pi P(u|x_{k-1},x_k)\,\Pi P(z|x_k,y_j)$$

- Error텀 (노이즈 $\mathrm{w_k}$, $\mathrm{v_{k,j}} + error$) 에 대해

$$\begin{cases} e_{u,k} = x_k - f(x_{k-1},u_k) \;\ldots N(0,R_k) \\ e_{z,j,k} = z_{k,j} - h\left(y_j,x_k\right) \;\ldots N(0,Q_{k,j}) \end{cases}$$

$$\mathbf{max\,P(x},\boldsymbol{y}|\mathbf{z,u}) = \mathbf{min}\,\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{e_{u,k}^T R_k^{-1}\,e_{u,k}} \;+ \boldsymbol{\Sigma\Sigma}\,\boldsymbol{e_{z,j,k}^T Q_{j,k}^{-1}\,e_{j,k}}$$

State Estimation 예제

- 직진/후진 운동하는 모델 (k = 1, 2, 3)

$$\begin{cases} x_k = x_{k-1} + u_k + w_k & \dots w_k = N(0, Q_k) \\ z_k = x_k + n_k & \dots n_k = N(0, R_k) \end{cases}$$

$$P(x|z,u) = \prod_{k=1}^{3} P(u|x_{k-1}, x_k) \prod_{k=1}^{3} P(z|x_k)$$

$$\max P(x|z,u) = \min \sum_{k=1}^{3} e_{u,k}^T Q_k^{-1} e_{u,k} + \sum_{k=1}^{3} e_{z,k}^T R_k^{-1} e_{z,k}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \mathrm{H} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Sigma} = diag \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$$

$$\max P(x|z,u) = \min e^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} e$$

비선형 최소 제곱

- 최소 제곱 문제 : $\min F(x) = \|f(x)\|^2$
- 선형 : 극값을 통해 $\frac{dF}{dx} = 0$
- 비선형 : Iterative한 풀이

1. 주어진 초기 값 x_0
2. k 번째 반복의 경우, $\|f(x_k + \Delta x_k)\|_2^2$가 최소값에 도달하도록 증가분 $\Delta \boldsymbol{x}_k$ 를 찾는다.
3. $\Delta \boldsymbol{x}_k$ 가 충분히 작 으면 정지합니다.
4. 그렇지 않으면, $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \Delta \boldsymbol{x}_k$ 라고하고 2 단계로 돌아갑니다.

2 번의 방식에 따라 Newton법,
Gauss_Newton법, Levenberg_Marquardt 에 대해 소개

비선형 최소 제곱 Newton

- 목적함수 F 의 테일러 근사

$$\mathrm{F}(\mathrm{x} + \Delta x) \approx F + J^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T H \Delta x \ \ldots$$

- 1차 : Gradient Descent 법 *…안정적이지 않다*

$$\boldsymbol{x_{new}} = \boldsymbol{x_{old}} - \boldsymbol{J}$$

- 2차 : Newton 법 … H가 *복잡하다*

$$\boldsymbol{x_{new}} = \boldsymbol{x_{old}} + \Delta\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{H}\Delta\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{J}$$

비선형 최소 제곱 Gauss-Newton

- f 의 테일러 근사

$$f(\mathrm{x}+\Delta x) \approx f + J^T\Delta x$$

$$\min F(x) = \|f(x)\|^2 \;\rightarrow\; \min F(x) = \min\|f(x) + J^T\Delta x\;\|^2$$

$$\|f(x) + J^T\Delta x\;\|^2 = \|f\|^2 + 2fJ^T\Delta x + \Delta x^T JJ^T\Delta x$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta x} = 2Jf + 2JJ^T\Delta x = 0$$

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{new}} = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{old}} + \Delta\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{T}}\Delta\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}\ (\mathbf{H}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{g}\ )$$

비선형 최소 제곱 Levenberg-Marquardt

- $Gauss - Newton$법의 JJ^T $singularity$ 문제, 수렴 보장문제 등을 개선하고자 함

$$\min F(x) = \|f(x)\|^2 \quad \rightarrow$$

$$\min\|f(x) + J^T\Delta x\ \|^2 + \lambda\|diag(JJ^T)\Delta x\|^2$$

$$(\boldsymbol{H} + \lambda\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D})\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}$$

λ(라그랑지안) 큰 경우 : Gradient법에 가까움

작은 경우 : Gauss_Newton법에 가까움