CH 4

Lie군 Lie대수

1) Lie군 Lie대수

2) 지수 로그 매핑

3) 연산(exp, 미분)

4) Sophus

Why

- 회전행렬 R(SO3)은 직교이면서, det=1, 9개의 수를 만족시킴
  제약조건이 많아 연산에 있어 복잡도 증가
  따라서 대수관계를 통해 최적화 하는 과정(매핑)이 필요
  이는 Tranformation Matrix (SE(3))에서도 똑같이 적용됨

Lie군 Lie대수

- 군 : 어떠한 집합에 대해 어떠한 연산이 닫힘성, 결합성, 항등성, 역을 만족하는 대수구조

ex) $G_S = (SO(3),*)$ | $G_Z = (Z,+)$

$R_n R_m = R_{nm} \in R$ | $n + m \in Z$

$(R_n R_m)R_l = R_n(R_m R_l)$ | $(n+m)+l = n+(m+l)$

$R_n I = R_n$ | $n + 0 = n$

$R_n R_n^T = I$ | $n + (-n) = 0$

- Lie 군 : 해석적인 군

ex) $G_z = (Z,+)$ (x)

$G_S = (SO(3),*)$ (o)

- Lie 대수: 각 군의 local성질을 대변하는 벡터공간

Lie대수 so(3)

- $\mathrm{RR^T = I} \quad \left(\mathrm{RR^T}\right)^{\mathrm{T}} = \mathrm{R^TR}$ 에서 시작
- $a \times b = det\begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = Ab = a^{\wedge}b$ 로 정의

$$\mathrm{R(t)R^T}(t) = \mathrm{I}$$

$$R(t)\dot{R^T}(t) + \dot{R}(t)R^T(t) = 0$$

$$\left(\dot{R}(t)R^T(t)\right)^{\mathrm{T}} + \dot{R}(t)R^T(t) = 0$$

$$\dot{R}(t)R^T(t) = \phi(t)^{\wedge}$$

Lie대수 so(3)

$$\dot{R}(t) = \phi(t)^{\wedge} R(t)$$

$$t \approx 0 \rightarrow \phi(t_0)^{\wedge} = \phi_0^{\wedge}, \qquad \mathrm{R}(0) = \mathrm{I}$$

$$R(t) = e^{\phi_0^{\wedge} t} \quad (t \approx 0)$$

$\phi \rightarrow$ Lie대수 (so(3))

$R(t) = e^{\phi_0^{\wedge} t}$, $R = e^{\Phi}$ $\rightarrow$ Lie대수 사이의 지수 매핑

Lie대수 se(3)

- 동일한 방식으로 대응

$$se(3) = \xi = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$$

$$\xi^\wedge = \begin{pmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(t) = e^{\xi_0^\wedge t} \quad (t \approx 0)$$

지수 매핑 so3(Φ) → SO3(R)

- $\Phi = \theta a^{\wedge}$
- $e^{\Phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Phi^n$

  $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\theta a^{\wedge})^n \quad \ldots |\theta| < \pi$

  $= \boldsymbol{cos\theta I + (1 - cos\theta) a a^T + sin\theta a^{\wedge}}$
- $e^{\Phi} v = cos\theta v + (1 - cos\theta) a a^T v + sin\theta a^{\wedge} v$

  $= \boldsymbol{cos\theta v + (1 - cos\theta)(v \cdot a) a + sin\theta (a \times v)}$

  … 로드리게스 회전 방정식

지수 매핑 so3(Φ) → SO3(R)

유도 과정

축기 단위 V

1) Φ 성질: $\Phi = \theta \hat{p} = \theta \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ $(a^2+b^2+c^2)=1$

i) $p^\wedge p^\wedge = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^2-b^2 & ab & ac \\ ab & -c^2-a^2 & bc \\ ac & bc & -a^2-b^2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a^2-1 & ab & ac \\ ab & b^2-1 & bc \\ ac & bc & c^2-1 \end{pmatrix} = pp^T - I$

ii) $p^\wedge p = p \times p = 0$

iii) $p^\wedge p^\wedge p^\wedge = p^\wedge(pp^T - I) = p^\wedge p p^T - p^\wedge = -p^\wedge$

2) 테일러급수 $e^{\phi^\wedge} = \sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n!}(\theta \hat{p})^n$

$= I + \theta p^\wedge + \frac{1}{2!}\theta^2 p^\wedge p^\wedge + \frac{1}{3!}\theta^3 p^\wedge p^\wedge p^\wedge + \frac{1}{4!}\theta^4 p^\wedge p^\wedge p^\wedge p^\wedge$

$= pp^T - p^\wedge p^\wedge + \frac{1}{2!}\theta^2 p^\wedge p^\wedge - \frac{1}{4!}\theta^4 p^\wedge p^\wedge + \dots + \theta p^\wedge - \frac{1}{3}\theta^3 p^\wedge + \frac{1}{5}\theta^5 p^\wedge \dots$

$= pp^T + (\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 \dots) p^\wedge - (1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 \dots) p^\wedge p^\wedge$

$= pp^T + \sin\theta\, p^\wedge - \cos\theta\, p^\wedge p^\wedge$

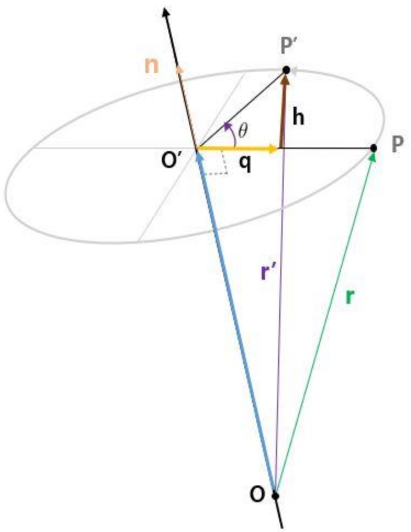
$= \underbrace{(1-\cos\theta)\, pp^T}_{?} + \sin\theta\, p^\wedge + \cos\theta\, I$ (로드리게스 회전공식)

3) $pp^T r = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(a\ b\ c) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 r_1 + ab r_2 + ac r_3 \\ ab r_1 + b^2 r_2 + bc r_3 \\ ac r_1 + bc r_2 + c^2 r_3 \end{pmatrix}$

$(r \cdot p)p = (r_1 a + r_2 b + r_3 c)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 r_1 + ab r_2 + ac r_3 \\ ab r_1 + b^2 r_2 + bc r_3 \\ ac r_1 + bc r_2 + c^2 r_3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow pp^T r = (r \cdot p) p$

$\Rightarrow e^{\phi^\wedge} =$ 로드리게스 회전공식

로드리게스 회전 방정식



$\overrightarrow{OO'} = (r \cdot n)n$

$q = (r - (r \cdot n)n) \cdot cos\theta$

$h = sin\theta \cdot (n \times r)$

$\overrightarrow{OP'} = (r \cdot n)n + (r - (r \cdot n)n) \cdot cos\theta + sin\theta \cdot (n \times r)$

$\therefore r' = cos\theta \cdot r + (1 - cos\theta) \cdot (r \cdot n)n + sin\theta \cdot (n \times r)$

로그 매핑 SO3(R) → so3(Φ)

- $\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (R - I)^{n+1}$
- $R = e^{\Phi} = cos\theta I + (1 - cos\theta)aa^T + sin\theta a^{\wedge}$
- $tr(R) = cos\theta tr(I) + (1 - cos\theta)tr(aa^T) + sin\theta tr(a^{\wedge})$
  $= 3cos\theta + 1(1 - cos\theta) + 0$
  $= 1 + 2cos\theta$
- $Ra = 1a$ (자신의 회전 축으로 회전, $Ab = \lambda b$)

- $\boldsymbol{\theta = cos^{-1}(\frac{1 - tr(R)}{2})}$
- $\boldsymbol{a = eigen\ vector\ of\ R}$

지수 매핑 se3(ξ^) → SE3(T)

- $\xi^{\wedge} = \begin{pmatrix} \Phi & \rho \\ 0^T & 0 \end{pmatrix}$
- $T = e^{\xi^{\wedge}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \Phi & \rho \\ 0^T & 0 \end{pmatrix}^n$

$$= \begin{pmatrix} R & \left(\frac{sin\theta}{\theta} I + \left(\frac{1-sin\theta}{\theta} \right) aa^T + \left(\frac{1-cos\theta}{\theta} \right) a^{\wedge} \right) \rho \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} R & J\rho \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$$

지수 매핑 se3(ξ^) → SE3(T)

유도 과정

4) $e^{\xi^\wedge} = \sum^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \phi & \rho \\ 0^T & 0 \end{pmatrix}^n$

$$\begin{cases} n=0 \Rightarrow I \\ n=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} \phi & \rho \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} \\ n=2 \Rightarrow \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} \phi & \rho \\ 0^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi & \rho \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^2 & \phi\rho \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} \\ n=3 \Rightarrow \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} \phi^2 & \phi\rho \\ 0^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi & \rho \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^3 & \phi^2\rho \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} \quad \ldots \end{cases}$$

(1,2)에서 $e^{\xi^\wedge}(1,2) = \rho + \frac{1}{2!}\phi\rho + \frac{1}{3!}\phi^2\rho + \frac{1}{4!}\phi^3\rho \ldots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\phi^n\rho$$

(2,2) 에서 $n=0 \Rightarrow I$

$\therefore e^{\xi^\wedge} = \sum^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \phi & \rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\phi^n & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\phi^n\rho \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} R & J\rho \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$$

5) $J = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\phi^n = \sum^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\theta p^\wedge)^n$

$$= I + \frac{1}{2!}\theta p^\wedge + \frac{1}{3!}\theta^2 p^\wedge p^\wedge - \frac{1}{4!}\theta^3 p^\wedge - \frac{1}{5!}\theta^4 p^\wedge p^\wedge + \frac{1}{6!}\theta^5 p^\wedge$$

$$= \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{2!}\theta - \frac{1}{4!}\theta^3 + \frac{1}{6!}\theta^5 \ldots\right) p^\wedge + \left(\frac{\theta}{\theta} - \frac{\theta}{\theta} + \frac{1}{3!}\theta^2 - \frac{1}{5!}\theta^4 \ldots\right) p^\wedge p^\wedge + I$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{\theta} p^\wedge + \frac{\theta - \sin\theta}{\theta} p^\wedge p^\wedge + I$$

$$= \frac{\sin\theta}{\theta} I + \left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right) pp^T + \frac{1-\cos\theta}{\theta} p^\wedge$$

로그 매핑 SE3(T) → se3(ξ^)

- $\boldsymbol{J}$ 는 $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{a}$ 를 통해 풀이 가능

- $\boldsymbol{\theta = cos^{-1}(\frac{1-tr(R)}{2})}$
- $\boldsymbol{a = eigen\,vector\;of\;R}$
- $\mathbf{t} = \boldsymbol{J\rho}$

연산 exp

- $\mathrm{e}^{\Phi_1}\mathrm{e}^{\Phi_2} \neq \mathrm{e}^{\Phi_1+\Phi_2}$
  $ln(\mathrm{e}^{\Phi_1}\mathrm{e}^{\Phi_2}) \neq \Phi_1 + \Phi_2$

- **BCH** 공식 ($[A,B] = AB - BA$)
  $ln(e^A e^B) = A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}\left([A,[A,B]] - [B,[A,B]]\right) + \cdots$

- 왼쪽 곱셈 선형근사 $\Phi_2 >> \Phi_1$
  회전행렬로 생각하면, e^{Φ_2}에 의한 회전 + e^{Φ_1} 아주 작은 회전
  $y_2 = J^{-1}(x_1)\mathrm{dx} + \mathrm{y}_1$
  $ln\left(e^{\phi_1^\wedge}e^{\phi_2^\wedge}\right)^\vee \approx J^{-1}(\phi_2)\phi_1 + \phi_2$

- 오른쪽곱셈의 경우, $J_r = -J_l$

연산 미분

- $z = Tp + w$
  T: 로봇의 위치, p: 점의 위치, z: 관찰, w: 노이즈
  $\min \mathrm{J(T)} = \sum_{i=1}^{N} \| z_i - Tp_i \|_2^2$ → 목적함수 J에 대해 미분이 필요

- How?
  1. Lie 대수 모델 $\phi = \phi + \Delta\phi$ → Jacobian 필요 …복잡함
  2. **섭동 모델** $\mathbf{exp}(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}) = \mathbf{exp}(\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{1}}^{\wedge})\mathbf{exp}(\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{2}}^{\wedge})$

연산 미분 – 섭동 모델 (SO3)

- 작은 회전$\varphi^{\wedge}$ 을 추가

$$\frac{\partial(Rp)}{\partial\varphi} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{\exp(\varphi^{\wedge})\exp(\phi^{\wedge})p - \exp(\phi^{\wedge})p}{\varphi}$$

$$= \lim_{\varphi\to 0}\frac{(I+\varphi^{\wedge})\exp(\phi^{\wedge})p - \exp(\phi^{\wedge})p}{\varphi} \quad \ldots \text{ 테일러 근사}$$

$$= \lim_{\varphi\to 0}\frac{\varphi^{\wedge}(Rp)}{\varphi} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{-(Rp)^{\wedge}\varphi}{\varphi} = -(Rp)^{\wedge}$$

연산 미분 – 섭동 모델 (SE3)

- 작은 회전 $\delta\xi^{\wedge}$ 을 추가

$$\frac{\partial(Tp)}{\partial\delta\xi} = \lim_{\delta\xi\to 0} \frac{\exp(\delta\xi^{\wedge})\exp(\xi^{\wedge})p - \exp(\xi^{\wedge})p}{\delta\xi}$$

$$= \lim_{\delta\xi\to 0} \frac{(I+\delta\xi^{\wedge})\exp(\xi^{\wedge})p - \exp(\xi^{\wedge})p}{\delta\xi}$$ … 테일러 근사

$$= \lim_{\delta\xi\to 0} \frac{\delta\xi^{\wedge}\exp(\xi^{\wedge})p}{\delta\xi}$$

$$= \lim_{\delta\xi\to 0} \frac{\begin{pmatrix} \delta\phi^{\wedge} & \delta\rho \\ 0^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Rp+t \\ 1 \end{pmatrix}}{\delta\xi}$$

$$= \lim_{\delta\xi\to 0} \frac{\begin{pmatrix} \delta\phi^{\wedge}(Rp+t)+\delta\rho \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta\phi \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} I & -(Rp+t)^{\wedge} \\ 0^T & 0^T \end{pmatrix} = (Tp)^{\odot}$$

Lie 대수 sim(3)

- 스케일 s -> σ 매핑

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} sR & t \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$$

$$sim(3) = \zeta = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \sigma)^T$$

$$\zeta^{\wedge} = \begin{pmatrix} \sigma I + \phi^{\wedge} & \rho \\ 0^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{\zeta^{\wedge}} = \begin{pmatrix} e^{\sigma} R & J_s \rho \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(Sp)}{\partial\zeta} = \begin{pmatrix} I & -(sRp+t)^{\wedge} & (sRp+t) \\ 0^T & 0^T & 0 \end{pmatrix}$$

Sophus

- 예제1. useSophus
- 예제2. trajectoryerror : log매핑, trans를 통해 error 를 추정