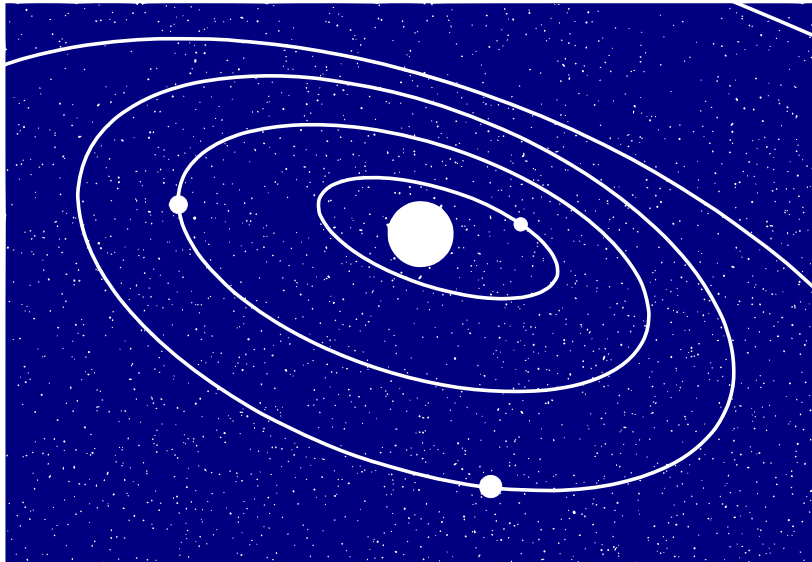




UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

SCUOLA DI INGEGNERIA
Progetto del corso di Robotica Aerospaziale



Pianificazione preliminare di una missione interplanetaria col metodo delle coniche raccordate

Studente: **Roberto Mauceri**
Anno Accademico **2017/2018**

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Definizione degli obiettivi	2
1.2	Definizione del modello matematico	2
1.3	Assegnazione dei parametri del modello	4
1.4	Codice e Funzioni	5
2	Manovre Orbitali	7
2.1	Sistemi di Riferimento	7
2.2	Fasi Eliocentriche	7
2.3	Fasi Planetocentriche	13
3	Conclusioni	22

1 Introduzione

1.1 Definizione degli obiettivi

Il presente lavoro si pone come obiettivo la pianificazione preliminare di un insieme di manovre orbitali, utili al compimento di una missione interplanetaria che prevede il trasferimento di una sonda dalla Terra a Venere e il suo successivo rientro.

Il viaggio sarà composto dalle seguenti fasi:

- iniziale orbita di parcheggio circolare equatoriale attorno alla Terra ad una quota di 200 km
- fuga dalla Terra in data successiva al 1 *Gennaio* 2018
- trasferimento eliocentrico dalla Terra a Venere che includa almeno un incontro iperbolico (flyby)
- cattura da parte di Venere
- acquisizione di un'orbita circolare polare attorno a Venere ad una quota di 500 km (mantenuta per almeno un mese)
- fuga da Venere
- trasferimento diretto alla Hohmann per il rientro sulla Terra
- cattura da parte della Terra
- acquisizione dell'iniziale orbita di parcheggio

1.2 Definizione del modello matematico

Un modello per questo tipo di problema, che si mostri, sì, sufficientemente accurato nelle previsioni, ma allo stesso tempo agevole da maneggiare nella sua formulazione matematica e moderato nella richiesta di risorse di calcolo, non può prescindere dall'adozione di alcune ipotesi e semplificazioni.

Nella trattazione che verrà sviluppata si ricorrerà al **modello kepleriano**, caratterizzato dalle seguenti assunzioni:

- è valida la meccanica newtoniana
- sono presenti solamente due corpi fisici dotati di massa
- un corpo ha massa trascurabile rispetto a quella dell'altro
- per ciascun corpo è adottato il modello di punto materiale
- le forze agenti su ciascun corpo sono unicamente di natura gravitazionale

L'utilità di questo modello, seppur estremamente semplice, risiede nel fatto che fornisce soluzioni di immediata interpretazione geometrica e fisica. È da questo modello infatti che sono deducibili le ben note *leggi di Keplero* sul moto relativo dei due corpi (limitate al caso di orbite ellittiche e, quindi, con periodo di valore finito):

1. *L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.*
2. *Il segmento (raggio vettore) che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.*
3. *I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo delle loro distanze medie dal sole.*

In generale, esiste anche la possibilità di avere traiettorie paraboliche ed iperboliche. Ciò che va notato però è che, in presenza di sole forze centrali (come quelle gravitazionali), il momento angolare del corpo orbitante si conserva e dunque, qualunque sia l'orbita, questa giace interamente su di un piano e rimane invariata nel tempo. Inoltre, poiché una qualsiasi forza centrale a simmetria sferica è conservativa, segue che anche l'energia meccanica del sistema si mantiene costante nel tempo. In definitiva, si possono ricavare alcune semplici formule che verranno ampiamente sfruttate nel seguito della trattazione:

- conservazione dell'energia meccanica:

$$\mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

- legge dei periodi (per orbite ellittiche):

$$T = 2\pi \sqrt{a^3/\mu}$$

dove \mathcal{E} è l'energia meccanica del sistema; a e T sono il semiasse maggiore e il periodo dell'orbita; r e v i moduli dei vettori posizione e velocità; μ il parametro gravitazionale. Un'altra formula di fondamentale importanza, che discende direttamente dalla seconda legge di Keplero, è **l'equazione dei tempi di Keplero**, la quale, risolta, fornisce la legge oraria del moto relativo dei due corpi. Per la sua risoluzione bisogna però utilizzare necessariamente un approccio di tipo numerico.

Se si pensa alla struttura del nostro sistema solare ci si rende subito conto che, sebbene la quasi sfericità dei pianeti e la loro ridotta estensione in relazione alle dimensioni caratteristiche del problema, unitamente a valori modesti delle masse e delle velocità in gioco (se riferiti ai limiti imposti dalla meccanica relativistica), rendano verosimili gran parte delle suddette assunzioni, il problema in esame non può essere affrontato mediante l'applicazione diretta del modello kepleriano a causa della presenza intrinseca di più di due corpi e di forze di natura non esclusivamente gravitazionale (spinte propulsive).

Si procede dunque con un metodo (detto delle **coniche raccordate**) che consente di suddividere il moto di un satellite lungo il suo tragitto interplanetario in una successione di moti kepleriani, al costo di introdurre un certo grado di approssimazione. Tale metodo trae giustificazione dal concetto di **sfera d'influenza** (SOI). Questa è una superficie sferica riferita ad un pianeta, di opportuno raggio e centrata sul corpo celeste stesso, che individua due regioni: una interna, nella quale si assume che la forza attrattiva del pianeta predomini su quella del Sole tanto da ritenere quest'ultima nulla ai fini pratici, e una esterna, in cui avviene l'esatto opposto. È evidente che il bordo comune di queste regioni costituisce una zona di singolarità, sulla quale il campo gravitazionale mostra delle discontinuità che nella realtà fisica non esistono. È proprio in prossimità della sfera d'influenza che l'approssimazione ottenuta con questa tecnica risulterà grossolana e la validità dei risultati discutibile.

La missione viene quindi suddivisa in più fasi, in ciascuna delle quali la sonda risentirà dell'azione gravitazionale di un singolo corpo attrattore (che sia esso il Sole o un pianeta) e sarà lecito usufruire dei risultati offerti dal modello kepleriano: il moto della sonda evolverà lungo una traiettoria costituita da archi di sezioni coniche, convenientemente raccordati nei punti di attraversamento delle sfere di influenza.

Per quanto riguarda le forze propulsive, si assumerà che queste abbiano **carattere impulsivo**, ovvero agiranno sulla sonda per un intervallo di tempo infinitesimo con un'intensità idealmente infinita. Ciò implica che in un lasso di tempo infinitamente piccolo il vettore velocità subirà una variazione finita (in modulo e/o direzione). Nel punto dello spazio in cui si avvierà la propulsione, la tangente locale alla traiettoria e/o la legge oraria della velocità presenteranno una discontinuità non riscontrabile nel mondo fisico. Anche in questo caso, nei punti prossimi alla singolarità, il modello risulterà inaccurato. Negli istanti di tempo immediatamente precedenti e successivi l'applicazione della forza impulsiva, le ipotesi del modello kepleriano sono verificate.

Infine, per semplificare ulteriormente la trattazione, si assumerà che i pianeti orbitino lungo traiettorie perfettamente circolari, tra loro concentriche e complanari (i valori di eccentricità e inclinazione sono effettivamente molto piccoli e possono essere ritenuti nulli), che il raggio delle sfere di influenza sia trascurabile rispetto al raggio delle orbite dei pianeti, e che le fasi di fuga, incontro iperbolico e cattura possano considerarsi con buona approssimazione manovre istantanee.

1.3 Assegnazione dei parametri del modello

Una volta che è stato definito il modello da utilizzare, il passaggio successivo consiste nell'assegnare gli opportuni valori ai parametri che lo caratterizzano. Nella Tabella 1 sono riportati i valori che verranno utilizzati nella fase di progetto.

Coerentemente con quanto detto nella sezione 1.2, non sono stati riportati i valori di eccentricità (e) e inclinazione (i) perché considerati nulli. Inoltre, come conseguenza di questa assunzione, non risultano più definite la linea dei nodi e la linea degli apsidi. Come intuibile dalla Figura 1 gli angoli di ascensione retta del nodo ascendente (Ω), argomento del perigeo (ω) e anomalia vera (ν) perdono di significato. Si introduce quindi

	R [km]	m [10^{23} kg]	T [giorni]	a [AU]	L [°]	R_{SOI} [10^3 km]
Terra	6371,01	59,736	365,25	1	100,464	924,6
Venere	6051,84	48,685	224,70	0,723	181,979	616,4

Tabella 1: dati essenziali relativi ai pianeti di interesse: **R** raggio medio del globo, **m** massa, **T** periodo, **a** semiasse maggiore, **L** longitudine media (riferiti all'epoca J2000.0), **R_{SOI}** raggio della sfera d'influenza.

un nuovo angolo, la longitudine media (L), che rappresenta la longitudine eclittica alla quale un corpo orbitante verrebbe a trovarsi se la sua orbita fosse circolare e contenuta sul piano dell'eclittica (ovvero se i parametri orbitali e e i della sua orbita fossero nulli). Questo nuovo angolo è legato ai precedenti mediante la relazione: $L = \Omega + \omega + M$. Ciò si giustifica osservando che al tendere dell'inclinazione a zero gli angoli Ω , ω e ν diventano progressivamente complanari, mentre al tendere dell'eccentricità a zero, l'anomalia vera ν tende a eguagliare l'anomalia media M .

I valori di semiasse maggiore e longitudine media rivestono particolare importanza perché permettono di individuare la configurazione iniziale da cui evolverà il sistema negli istanti di tempo futuri.

Ulteriori parametri indispensabili per lo svolgimento dei calcoli sono:

- la massa del Sole:
 $M_S = 1,989 \times 10^{30}$ kg
- la costante di gravitazione universale:
 $G = 6,6726 \times 10^{-20}$ km³ kg⁻¹ s⁻²

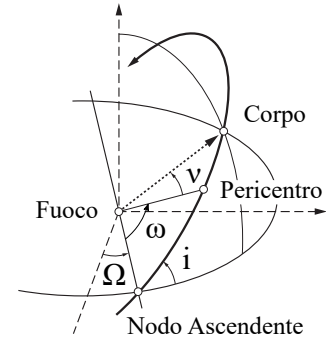


Figura 1: rappresentazione geometrica degli elementi orbitali classici

1.4 Codice e Funzioni

Tutti i calcoli necessari alla progettazione della missione sono stati svolti mediante l'uso del software **Matlab**. Il codice è stato scritto combinando opportunamente alcune delle funzioni riportate nell'Appendice D del manuale *Orbital Mechanics for Engineering Students* (rif.[1]), affiancandole ad altre create personalmente. Il codice è articolato in modo tale che il file principale (**Missione_Interplanetaria.m**) esegua una serie di script, uno per ogni fase della missione, e fornisca in uscita i risultati delle elaborazioni numeriche e la rappresentazione grafica di ciascuna delle manovre che verranno più avanti descritte. Di seguito vengono riportate le funzioni utilizzate con una loro breve descrizione.

Funzioni tratte dal manuale *Orbital Mechanics*

- **coe_from_sv.m**: restituisce i coefficienti orbitali classici ricevendo in ingresso posizione e velocità a un dato istante di tempo

- **stumpC.m**: calcola la funzione di Stumpff $C(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-z)^k}{(2k+2)!}$
- **stumpS.m**: calcola la funzione di Stumpff $S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-z)^k}{(2k+3)!}$
- **kepler_U.m**: risolve l'equazione di Keplero universale col metodo di Newton
- **lambert.m**: risolve il problema di Lambert fornendo in uscita le velocità negli istanti iniziale e finale del moto
- **f_and_g.m**: calcola i coefficienti di Lagrange f e g
- **fDot_and_gDot.m**: calcola le derivate temporali dei coefficienti di Lagrange
- **rv_from_r0v0.m**: restituisce i vettori di posizione e velocità a un generico istante di tempo a partire dagli stessi all'istante iniziale

Funzioni definite per il progetto

- **atan3.m**: equivalente ad atan2, ma con codominio nell'intervallo $[0, 2\pi]$
- **conica.m**: fornisce le coordinate cartesiane di una sezione conica (contenuta nel piano xy e con l'asse di simmetria sull'asse x) noti semiasse maggiore (con segno) ed eccentricità
- **Posizione_Pianeta.m**: fornisce il vettore posizione lungo una traiettoria circolare di un dato pianeta in un determinato istante
- **Velocità_Pianeta.m**: fornisce il vettore velocità lungo una traiettoria circolare di un dato pianeta in un determinato istante
- **Grafica_Pianeta.m**: definisce le caratteristiche grafiche dell'elemento pianeta. In particolare fornisce il grafico del globo e della sua orbita
- **Grafica_Sole.m**: definisce le caratteristiche grafiche dell'elemento Sole e del sistema di riferimento eliocentrico-eclittico
- **Tempo_di_Attesa.m**: calcola il tempo necessario per raggiungere la configurazione da cui far partire una manovra di trasferimento alla Hohmann
- **Fuga.m**: gestisce la manovra di fuga
- **Cattura.m**: gestisce la manovra di cattura
- **FlyBy.m**: gestisce la manovra di flyby
- **Cambio_Piano.m**: gestisce la manovra di modifica del piano orbitale

Script definiti per il progetto

- **Missione_Interplanetaria**: script principale. Contiene l'intero codice
- **Traiettoria_PreFlyBy**: contiene il codice che elabora i dati relativi alla traiettoria di pre-flyby
- **Traiettoria_PostFlyBy**: contiene il codice che elabora i dati relativi alla traiettoria post-flyby
- **Traiettoria_Sosta**: contiene il codice che elabora i dati relativi alla traiettoria di sosta
- **Traiettoria_Hohmann**: contiene il codice che elabora i dati relativi alla traiettoria di Hohmann
- **Animazione**: contiene il codice che crea il video con l'animazione della missione

2 Manovre Orbitali

2.1 Sistemi di Riferimento

In questa sezione verranno riportate tutte le manovre orbitali necessarie al compimento della missione. Ognuna di queste manovre è caratterizzata da una traiettoria che, come detto in precedenza, consiste in un arco di sezione conica di varia forma e orientamento nello spazio. E' indispensabile quindi introdurre uno o più sistemi di riferimento sui quali proiettare i vettori posizione e velocità del corpo in movimento.

Per quanto riguarda le fasi eliocentriche, queste verranno descritte in un **sistema di riferimento eliocentrico-eclittico**. Esso ha origine nel Sole e l'asse z ha direzione e verso del momento angolare della Terra (quindi gli assi x e y giacciono sul piano dell'eclittica). La linea di intersezione del piano dell'eclittica col piano equatoriale definisce la direzione dell'asse x . Il verso di quest'ultimo è fornito dal segmento orientato che congiunge il centro della Terra al centro del Sole quando questa si trova all'equinozio di primavera. L'asse y è scelto in modo tale da ottenere una terna cartesiana ortogonale levogira.

Per quanto riguarda invece le fasi planetocentriche, queste verranno descritte in un sistema di riferimento di pari orientamento al precedente ma traslato nel centro del pianeta d'interesse.

Viene infine definita una data di riferimento, rispetto alla quale verrà valutato il generico giorno di inizio missione: 1 *Gennaio* 2018.

2.2 Fasi Eliocentriche

Per fasi eliocentriche si intendono tutte le porzioni di missione che si svolgono nella regione dello spazio in cui è stata assunta presente la sola azione gravitazionale del Sole. In queste fasi le curve lungo cui si muove la sonda sono sezioni coniche il cui fuoco è posizionato al centro della stella. Inoltre, poiché il rapporto tra la distanza pianeta-Sole ed il raggio della sfera di influenza del pianeta è molto grande, tali sfere saranno approssimate come punti coincidenti con il centro del pianeta corrispettivo.

Traiettoria pre-flyby

Questa prima traiettoria descrive il tragitto che intercorre tra l'uscita della sfera di influenza della Terra e il primo ingresso nella sfera di influenza di Venere, all'interno della quale si svolgerà la manovra a gravità assistita. Per tracciarla si è sfruttata una strategia che è riconducibile alla risoluzione di un **problema di Lambert**. Tale problema consiste nel determinare l'orbita di trasferimento che porta un corpo da una posizione iniziale a una finale (note) in un tempo assegnato. Poiché è possibile conoscere le posizioni dei pianeti ad un generico istante di tempo, l'intero problema viene a dipendere da quest'ultima sola variabile. Essa si mostra nel problema sotto due forme distinte: il giorno di inizio missione (che individua la posizione iniziale della sonda) e la durata di volo (che, assieme al primo, individua la posizione finale). Variando arbitrariamente questi due parametri si ottengono delle possibili soluzioni che differiscono tra loro per durata temporale (Δt) e costo in termini di consumo di propellente o, equivalentemente (per la legge di Tsiolkowsky), di variazione di velocità richiesta alla sonda nelle fasi di fuga e cattura (Δv). Volendo ottenere un compromesso tra queste due grandezze dal comportamento antitetico, dopo diversi tentativi (il codice `Matlab` è indipendente dai valori assegnati a tali parametri), si è scelto di fissare la data di partenza al 1 *Settembre* 2018 (quindi a una distanza di 243 giorni dalla data di riferimento) e la durata del volo a 120 giorni.

Mediante le funzioni `lambert.m` e `rv_from_r0v0.m` si sono valutati i vettori posizione in istanti di tempo intervallati tra loro di un giorno e se ne è tracciato il grafico (Figura 2). Si è poi convertito lo stato iniziale (posizione e velocità) in coefficienti orbitali tramite la funzione `coe_from_sv.m` e da questi si sono ricavati i dati di interesse (Tabella 2).

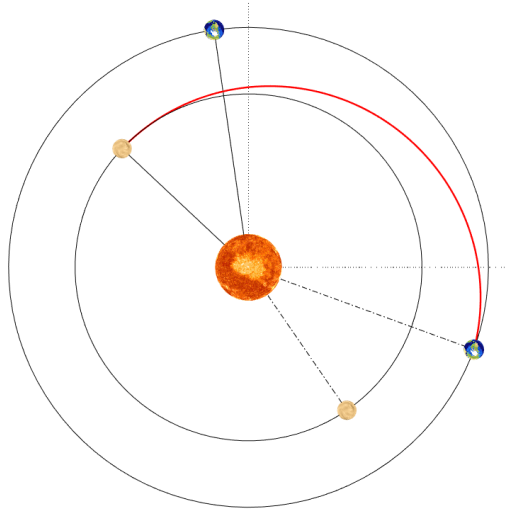


Figura 2: traiettoria di pre-flyby

semiasse maggiore [<i>AU</i>]	0,873
eccentricità [/]	0,172
tempo di volo [<i>giorni</i>]	120
distanza del pericentro [<i>AU</i>]	0,722
longitudine del pericentro [<i>rad</i>]	4,037
longitudine vera (inizio) [<i>rad</i>]	5,933

Tabella 2: dati traiettoria pre-flyby

Traiettoria post-flyby

Questa è la traiettoria descritta dalla sonda una volta terminato l'incontro iperbolico con Venere (trattato nella sottosezione 2.3). La sonda, durante l'attraversamento della sfera di influenza, ha ceduto una certa quantità di energia al pianeta, ottenendo in cambio, senza necessità di spinte propulsive, una riduzione del modulo della velocità.

La manovra di flyby è stata progettata in maniera tale che, qualunque siano le condizioni in ingresso, in uscita dalla SOI il vettore velocità nel riferimento eliocentrico avrà un modulo tale che l'orbita seguente sarà isocrona a quella di Venere. Questa tecnica permette alla sonda di raggiungere nuovamente il pianeta dopo un tempo pari al periodo dello stesso (circa 224.7 giorni) e iniziare così la fase di cattura.

L'orbita è un'ellisse completa i cui parametri orbitali sono univocamente determinati dal vettore posizione e vettore velocità al termine del flyby. Noti questi ultimi, infatti, utilizzando sempre la funzione `rv_from_r0v0.m` si sono valutati i vettori posizione negli istanti di tempo successivi e se ne è tracciato il grafico (Figura 3). Si sono poi calcolati i coefficienti orbitali con `coe_from_sv.m` e i dati d'interesse (Tabella 3).

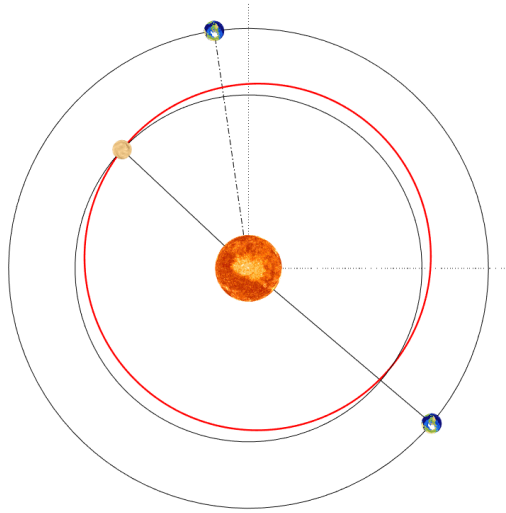


Figura 3: traiettoria di post-flyby

semiasse maggiore [AU]	0,723
eccentricità [/]	0,084
tempo di volo [$giorni$]	224,7
distanza del pericentro [AU]	0,662
longitudine del pericentro [rad]	4,037
longitudine vera (inizio) [rad]	2,388

Tabella 3: dati traiettoria post-flyby

Traiettoria di sosta

La traiettoria di sosta non è dovuta a una particolare manovra di trasferimento. Essa semplicemente descrive il moto di trascinamento della sonda quando questa si trova parcheggiata su un'orbita stazionaria attorno a Venere. A rigore tale traiettoria dovrebbe avere una forma più complessa, dovuta alla sovrapposizione dei moti di rivoluzione del pianeta attorno al Sole e della sonda attorno al pianeta. Coerentemente con l'assunzione che la sfera d'influenza ha dimensioni trascurabili, anche tutto ciò che in essa è contenuto (l'orbita di parcheggio) è stato ignorato.

L'orbita è un arco di circonferenza che congiunge la posizione al tempo di avvenuta cattura con quella al tempo di inizio fuga per immettersi sulla traiettoria di rientro. Quest'ultima posizione è individuata una volta valutato il tempo necessario a raggiungere la configurazione di avvio del trasferimento alla Hohmann (descritto nel paragrafo successivo). Nel caso in esame tale tempo è stato stimato essere 238.2 giorni (superiore al minimo imposto dalle specifiche: almeno 30 giorni). Di seguito vengono riportati il grafico (Figura 4) e i dati di interesse (Tabella 4).

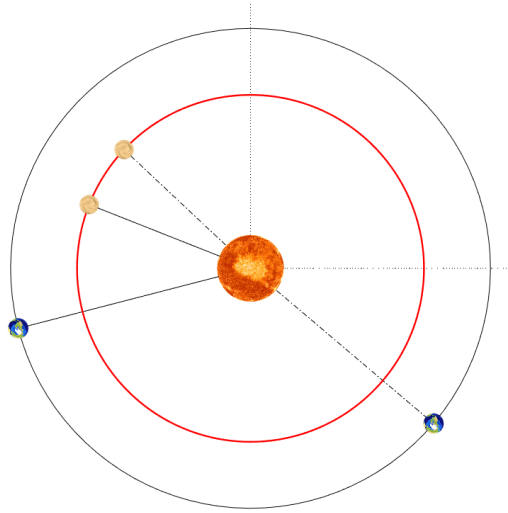


Figura 4: traiettoria di sosta

semiasse maggiore [AU]	0,723
eccentricità [/]	0
tempo di volo [giorni]	238,2
distanza del pericentro [AU]	0,723
longitudine vera (inizio) [rad]	2,387

Tabella 4: dati traiettoria di sosta

Trasferimento alla Hohmann

Per la fase di rientro è stato previsto un **trasferimento alla Hohmann**. Questa è una particolare manovra che permette al satellite di trasferirsi da un'orbita circolare ad un'altra ad essa concentrica e complanare mediante l'applicazione di due impulsi. Rientra nella classe di manovre ellittiche bitangenti, in quanto nel trasferimento si percorre una semi-ellisse, la quale risulta essere tangente sia all'orbita iniziale che a quella finale. I punti di tangenza coincidono con il pericentro e l'apocentro. Caratteristica peculiare di questa manovra è che, tra tutte le manovre a due impulsi, essa richiede il minimo consumo di Δv .

Da quanto descritto si intuisce che la distanza del pericentro è uguale al raggio dell'orbita interna, mentre la distanza dell'apocentro a quello dell'orbita esterna. Il semiasse maggiore, per le proprietà dell'ellisse, è dato dalla media aritmetica dei due:

$$a_h = \frac{r_{int} + r_{ext}}{2}$$

con ovvio significato dei simboli. Dalla conservazione dell'energia meccanica si ricavano poi i moduli delle velocità in corrispondenza degli apsi:

$$v_{pc} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{int} + r_{ext}} \left(\frac{r_{ext}}{r_{int}} \right)} \quad v_{ac} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{int} + r_{ext}} \left(\frac{r_{int}}{r_{ext}} \right)}$$

dove v_{pc} e v_{ac} rappresentano, rispettivamente, la velocità al pericentro e la velocità all'apocentro. Queste saranno poi utilizzate nella progettazione della fase di fuga da Venere e cattura da parte della Terra.

Il trasferimento alla Hohmann, affinché l'intercettazione del pianeta da parte della sonda abbia luogo, potrà avviarsi solo quando la distanza angolare tra i due pianeti all'istante di inizio manovra (θ_h) soddisfa il particolare requisito:

$$t_h = \frac{T_{fin}}{2\pi} (\pi - \theta_h) \quad \text{e quindi:} \quad \theta_h = \pi \frac{(2t_h - T_{fin})}{T_{fin}}$$

dove t_h è il tempo di volo della manovra di Hohmann e T_{fin} il periodo dell'orbita finale (ovvero il periodo orbitale del pianeta obiettivo). Tenendo conto poi che:

$$t_h = \frac{T_h}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{r_{in} + r_{fin}}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{e che} \quad T_{fin} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} (r_{fin})^{\frac{3}{2}}$$

si arriva alla formulazione dipendente solo da parametri geometrici:

$$\theta_h = \pi \left[1 - \left(\frac{1 + r_{in}/r_{fin}}{2} \right) \right]^{\frac{3}{2}}$$

In generale, in un dato istante, i pianeti si troveranno a una distanza angolare θ_0 differente da θ_h . Occorrerà quindi attendere un certo tempo t_a (tempo di attesa) affinché si raggiunga la configurazione necessaria. Ciò avviene in considerazione del fatto che i due pianeti si muovono con velocità diverse lungo le loro orbite (Figura 5). Al tempo t si avrà $\theta(t) = \theta_0 + (\omega_{fin} - \omega_{in}) t$ e imponendo che $\theta(t_a) = \theta_h$ ottengo:

$$\Delta\theta \stackrel{def}{=} \theta_0 - \theta_h = (\omega_{in} - \omega_{fin}) t_a \quad \text{e quindi} \quad t_a = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \left(\frac{1}{T_{in}} - \frac{1}{T_{fin}} \right)^{-1}$$

Nel caso in questione il tempo di attesa è pari a $t_a = 238.2$ giorni. Fatto ciò, si hanno a disposizione tutte le informazioni necessarie a tracciare la traiettoria (Figura 6) e a calcolare i dati di interesse (Tabella 5).

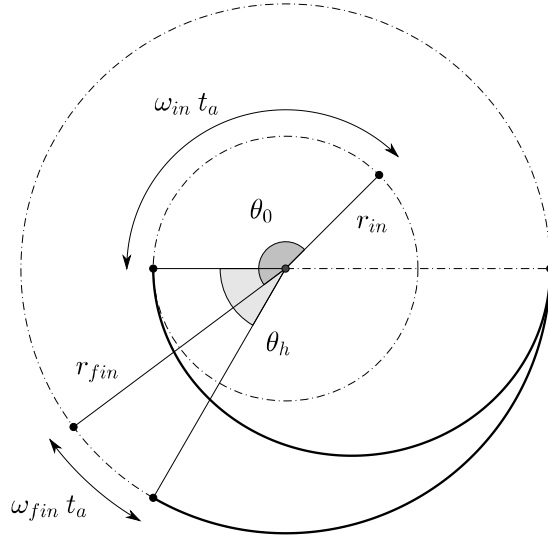


Figura 5: interpretazione del tempo di attesa

semiasse maggiore [AU]	0,861
eccentricità [/]	0,160
tempo di volo [giorni]	146,033
distanza del pericentro [AU]	0,723
longitudine del pericentro [rad]	2,765
longitudine vera (inizio) [rad]	2,765

Tabella 5: dati traiettoria di Hohmann

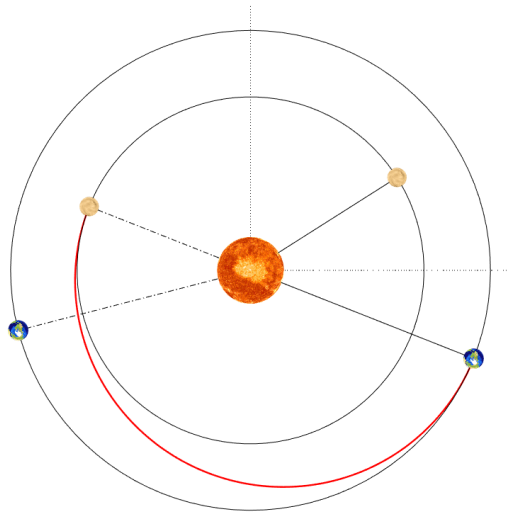


Figura 6: traiettoria di Hohmann

2.3 Fasi Planetocentriche

Per fasi planetocentriche si intendono tutte le porzioni di missione che si svolgono all'interno delle varie sfere di influenza, ovvero nelle regioni dello spazio in cui è stata assunta presente la sola azione gravitazionale del pianeta. In queste fasi le curve lungo cui si muove la sonda sono sezioni coniche il cui fuoco è posizionato al centro del pianeta attrattore. Inoltre, considerando che le dimensioni del pianeta sono di diversi ordini di grandezza minori delle dimensioni della rispettiva sfera d'influenza, il raggio di quest'ultima verrà considerato di estensione infinita.

Manovra a gravità assistita (flyby)

Questa manovra permette alla sonda, tramite un passaggio ravvicinato, di sfruttare l'interazione gravitazionale col pianeta per modificare il modulo e/o la direzione del suo vettore velocità senza dover ricorrere all'uso di motori. Va precisato che nessuna delle leggi di conservazione già menzionate viene violata. Uno dei due corpi acquista energia nella stessa misura in cui l'altro se ne priva.

Nel sistema di riferimento relativo (solidale al pianeta) si vede la sonda varcare il bordo della sfera di influenza con una certa velocità, attraversarla percorrendo un'orbita iperbolica e infine uscirne con una velocità diversa in direzione ma eguale in modulo (per simmetria). Nel sistema assoluto invece, proprio a causa di questa variazione di direzione, le velocità (ottenute sommando le velocità relative a quella assoluta del pianeta) mostrano anche una differenza in intensità.

Nel caso in questione si vorrebbe ottenere una riduzione della velocità in modo da poter contenere il valore del Δv che servirà in fase di cattura e parcheggio.

Si è poi stabilito di fissare il modulo della velocità assoluta in uscita dal flyby ($v_{S,u}^{(a)}$) ad un valore tale per cui l'orbita successiva avrà un periodo pari a quello di Venere. Fissare il periodo equivale a fissare il semiasse maggiore (legge sei periodi); fissare il semiasse maggiore equivale a fissare il modulo della velocità (conservazione dell'energia). In formule:

$$T_V = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{T_V^2}{4\pi^2} \mu}$$

$$\frac{1}{2} \left(v_{S,u}^{(a)} \right)^2 - \frac{\mu}{R_V} = -\frac{\mu}{2a} \Rightarrow \left(v_{S,u}^{(a)} \right)^2 = 2\mu \left(\frac{1}{R_V} - \frac{1}{2a} \right)$$

e dunque:

$$|v_{S,u}^{(a)}| = \sqrt{\frac{2\mu}{R_V} - \sqrt[3]{\left(\frac{2\pi\mu}{T_V} \right)^2}}$$

Un valore imposto della velocità assoluta in uscita dalla SOI si traduce in un vincolo sul valore dell'angolo tra velocità assoluta del pianeta e velocità relativa della sonda in uscita dalla SOI (α). Facendo riferimento alla Figura 7 si può scrivere la catena di uguaglianze:

$$|\vec{v}_{S,u}^{(a)}|^2 = |\vec{v}_{S,u}^{(r)} + \vec{v}_P^{(a)}|^2 = (\vec{v}_{S,u}^{(r)} + \vec{v}_P^{(a)}) \cdot (\vec{v}_{S,u}^{(r)} + \vec{v}_P^{(a)}) = |\vec{v}_{S,u}^{(r)}|^2 + |\vec{v}_P^{(a)}|^2 + 2|\vec{v}_{S,u}^{(r)}||\vec{v}_P^{(a)}| \cos \alpha$$

$$\text{da cui:} \quad \cos \alpha = \frac{|\vec{v}_{S,u}^{(r)}|^2 + |\vec{v}_P^{(a)}|^2 - |\vec{v}_{S,u}^{(a)}|^2}{2|\vec{v}_{S,u}^{(r)}||\vec{v}_P^{(a)}|}$$

$$\text{dove} \quad |\vec{v}_{S,u}^{(r)}| = |\vec{v}_{S,i}^{(r)}| \stackrel{\text{def}}{=} v_\infty \quad (\text{uguali per simmetria})$$

v_∞ non è altro che il modulo del vettore velocità ottenuto al termine della fase di pre-flyby applicando Lambert, osservato dal sistema di riferimento relativo. Per l'ipotesi di infinita estensione della SOI, esso coincide con la velocità di eccesso iperbolico. Questa equazione, come noto, ammette due soluzioni nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. Riferendoci ancora una volta alla Figura 7 e focalizzando l'attenzione sull'orientamento reciproco dei vettori $\vec{v}_{S,i}^{(r)}$ e $\vec{v}_{S,u}^{(r)}$ e sulla loro relazione col vettore $\vec{v}_P^{(a)}$, si intuisce che una è la soluzione che descrive un flyby con accesso dal lato 'oscuro' (devia la sonda verso l'interno dell'orbita di Venere) e l'altra quella che descrive un flyby con accesso dal lato 'luminoso' (devia la sonda verso l'esterno dell'orbita di Venere). Nel caso in esame è stata scelta la soluzione con α positivo.

Determinato α , si calcolano anche gli angoli β (angolo compreso tra velocità assoluta del pianeta e velocità relativa della sonda in ingresso alla SOI) e γ (angolo tra velocità relativa della sonda in ingresso alla SOI e l'asse x) applicando la funzione `atan3.m` sulle componenti dei vari vettori. Noti α e β , si può valutare l'angolo di svolta, ovvero l'angolo di cui è ruotato complessivamente il vettore velocità una volta che la sonda ha terminato l'incontro iperbolico: $\delta = \alpha - \beta$ (Figura 8). L'angolo γ invece mi permette di orientare correttamente l'iperbole nello spazio: l'asse di simmetria dell'iperbole ruota rispetto all'asse x di un angolo pari a $\gamma - \frac{1}{2}(\pi - \delta)$.

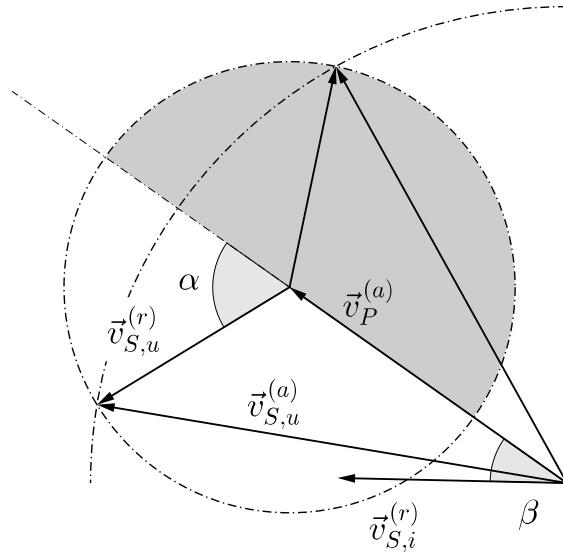


Figura 7: triangoli delle velocità

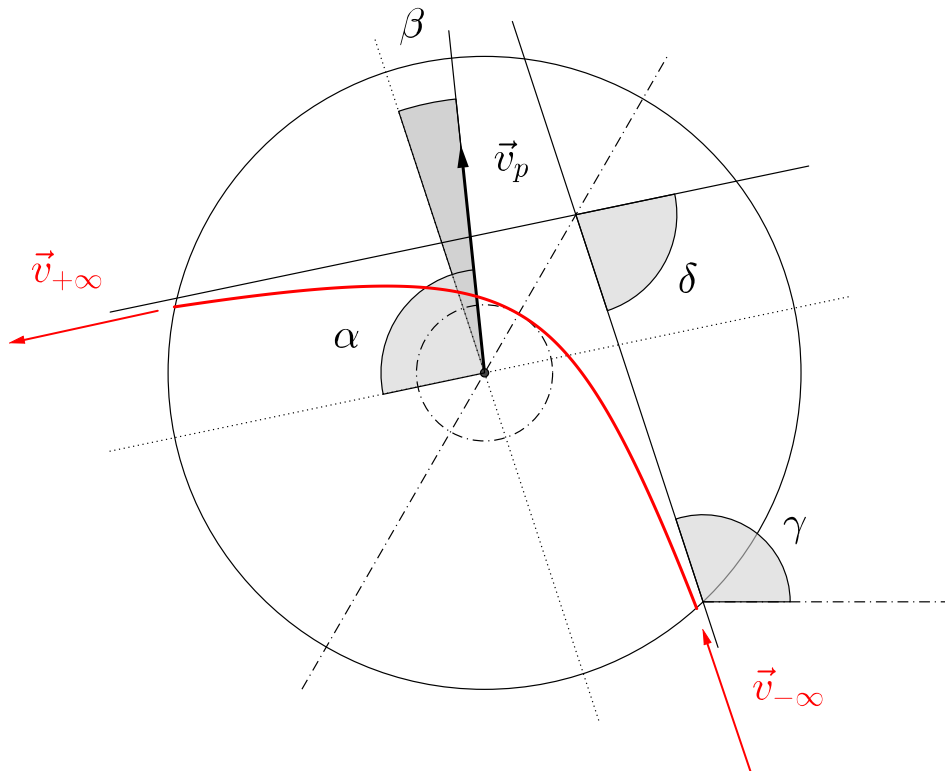


Figura 8: angoli caratteristici ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$)

Dalla conservazione dell'energia meccanica è possibile ottenere il valore del semiasse maggiore dell'iperbole:

$$\frac{v_{\infty}^2}{2} = -\frac{\mu_V}{2a} \Rightarrow a = -\frac{\mu_V}{v_{\infty}^2}$$

Dalla conoscenza dell'angolo di svolta è possibile ricavare il valore dell'eccentricità:

$$e = \left(\sin \frac{\delta}{2} \right)^{-1}$$

Noti questi, si ricavano facilmente i restanti parametri di interesse, quali la distanza del pericentro o il tempo di volo. Di seguito vengono riportati il grafico (Figura 9) e i dati elaborati dalla funzione `FlyBy.m` (Tabella 6).

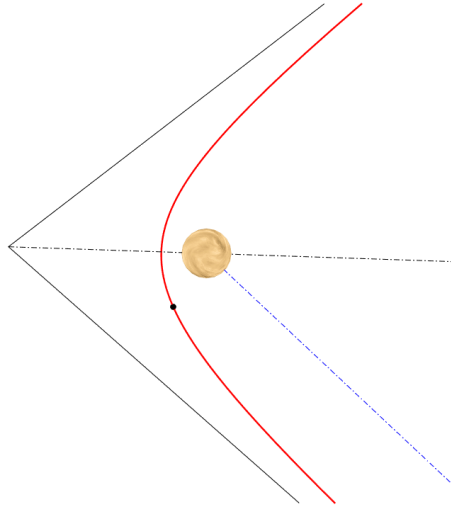


Figura 9: manovra di flyby: in blu il segmento congiungente il pianeta col Sole

semiasse maggiore (con segno) [km]	-37 123,5
eccentricità [/]	1,295
tempo di volo [giorni]	4,14
distanza del pericentro [km]	10 976,1
angolo di svolta [rad]	1,763

Tabella 6: dati manovra di flyby

Manovra di fuga - (Terra e Venere)

Questa fase permette al satellite, tramite una manovra di tipo impulsivo, di trasformare l'iniziale orbita circolare di parcheggio in un'orbita aperta che lo porterebbe, in linea teorica, ad allontanarsi indefinitamente dal pianeta attrattore. In realtà, come già accennato, raggiunto il bordo della sfera d'influenza, si entrerà nel dominio della fase eliocentrica. Poiché tale fase è già stata studiata, è noto il vettore velocità della sonda nel punto di abbandono della SOI. Da questa si ricava facilmente il vettore velocità relativa e quindi il suo modulo. Tenendo poi conto dell'ipotesi di infinita estensione della sfera di influenza, il modulo della velocità dell'oggetto che attraversa il suo bordo sarà indistinguibile ai fini pratici dal modulo della velocità di eccesso iperbolico. Nota questa e, tramite considerazioni fisiche (conservazione dell'energia) e geometriche (continuità delle traiettorie), si ricava la velocità nel punto di intersezione tra il ramo d'iperbole e la circonferenza dell'orbita di parcheggio, che, per ragioni di ottimizzazione del consumo di Δv , sarà fatto coincidere col pericentro della conica (in questo modo infatti velocità circolare e velocità al pericentro saranno parallele). In generale, quest'ultima velocità (v_{pc}) sarà in modulo differente dalla velocità circolare che ha la sonda sull'orbita iniziale (v_c). È qui che sorge la necessità di imprimere una spinta impulsiva che possa colmare il divario tra le due:

$$\Delta v = v_{pc} - v_c \quad \text{dove:} \quad v_c = \sqrt{\frac{\mu}{(R+h)}} \quad \text{e} \quad v_{pc} = \sqrt{v_\infty^2 + 2v_c^2}$$

con R raggio del pianeta e h quota dell'orbita di parcheggio.

Note poi la velocità di eccesso iperbolico e la distanza del pericentro, si possono calcolare i valori di semiasse maggiore e eccentricità e quindi tutti i valori d'interesse:

$$a = -\frac{\mu}{v_\infty^2} \quad e = 1 - \frac{(R+h)}{a}$$

Per valutare infine l'orientamento dell'iperbole nello spazio, si calcolano gli angoli γ (angolo tra il vettore velocità della sonda in uscita alla SOI e l'asse x) e ϕ (angolo di inclinazione asintoto: $\phi = \arccos(1/e)$). L'asse di simmetria dell'iperbole ruota rispetto all'asse x di un angolo pari a $\phi + \gamma - \pi$ (Figura 10).

Si riportano infine le rappresentazioni grafiche (Figura 11) e le tabelle coi dati d'interesse elaborati mediante la funzione `Fuga.m` (Tabelle 7 e 8).

semiasse maggiore (con segno) [km]	-31 875,4
eccentricità [/]	1,206
tempo di volo [giorni]	2,72
distanza del pericentro [km]	6571,01
deltaV (con segno) [km/s]	3,779

Tabella 7: dati manovra di fuga - Terra

semiasse maggiore (con segno) [km]	-43 434,6
eccentricità [/]	1,150
tempo di volo [giorni]	2,18
distanza del pericentro [km]	6551,84
deltaV (con segno) [km/s]	3,285

Tabella 8: dati manovra di fuga - Venere

Manovra di cattura - (Terra e Venere)

Questa fase permette al satellite, tramite una manovra di tipo impulsivo, di trasformare l'iniziale orbita iperbolica di sorvolo nell'orbita chiusa di parcheggio e in particolare in un'orbita di forma circolare e raggio stabilito. La trattazione è del tutto analoga a quanto fatto precedentemente per la manovra di fuga con la differenza che in questo caso il Δv risulta essere negativo (è necessaria una decelerazione per rendere l'orbita chiusa). L'asse di simmetria dell'iperbole ruota rispetto all'asse x di un angolo pari a $\phi - \gamma$, dove in questo caso γ è l'angolo tra il vettore velocità della sonda in ingresso alla SOI e l'asse x (Figura 10).

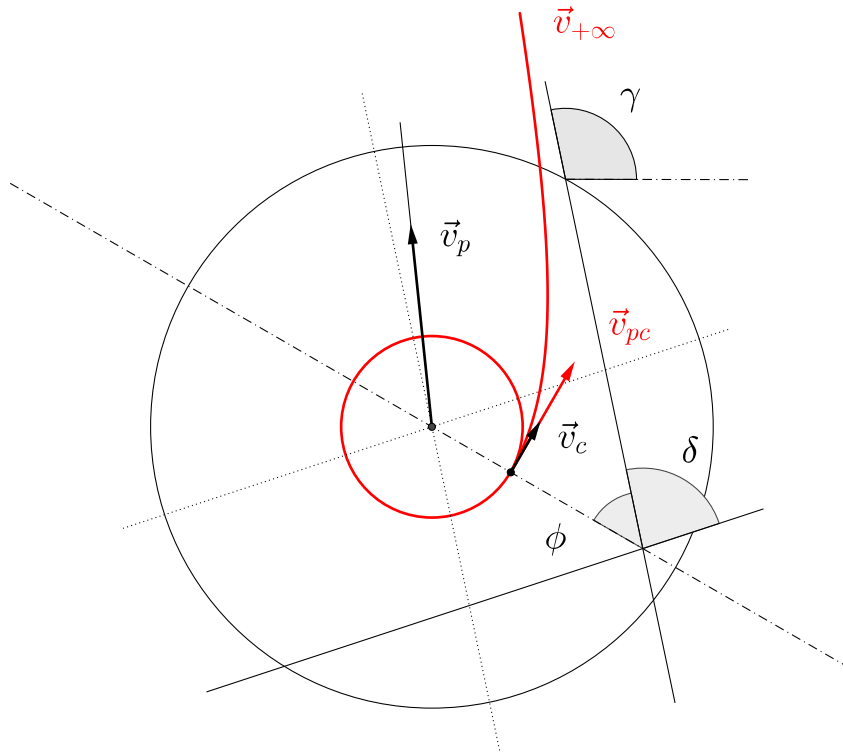
Si riportano quindi le tabelle coi dati elaborati (Tabelle 9 e 10) e le rappresentazioni grafiche (Figura 11) ottenuti con la funzione **Cattura.m**.

semiasse maggiore (con segno) [km]	-63 794
eccentricità [/]	1,103
tempo di volo [giorni]	3,58
distanza del pericentro [km]	6571,01
deltaV (con segno) [km/s]	-3,506

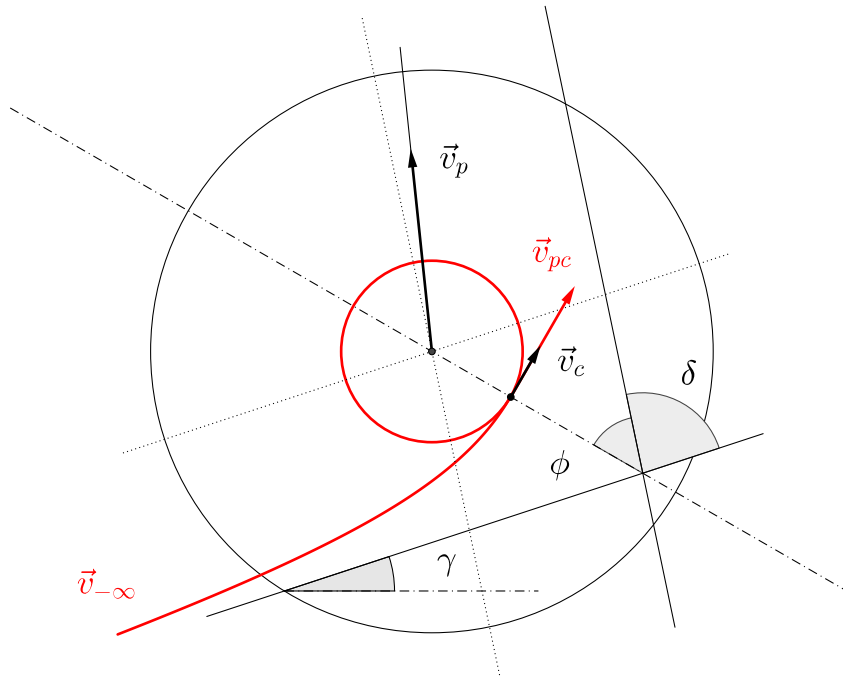
Tabella 9: dati manovra di cattura - Terra

semiasse maggiore (con segno) [km]	-37 123,5
eccentricità [/]	1,176
tempo di volo [giorni]	2,06
distanza del pericentro [km]	6551,84
deltaV (con segno) [km/s]	-3,346

Tabella 10: dati manovra di cattura - Venere

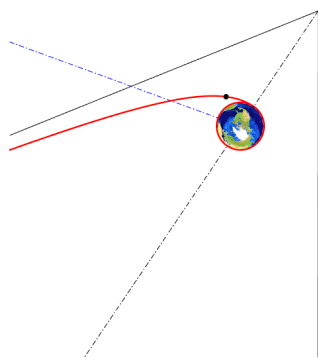


(a) schema manovra di fuga

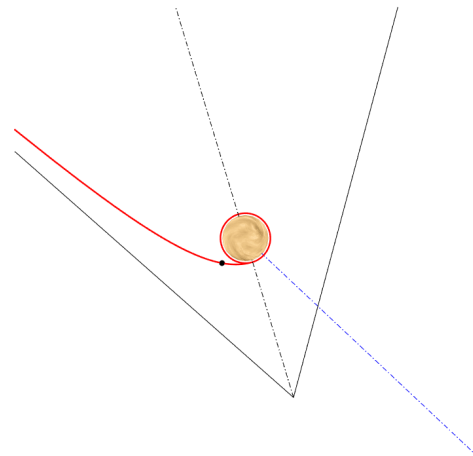


(b) schema manovra di cattura

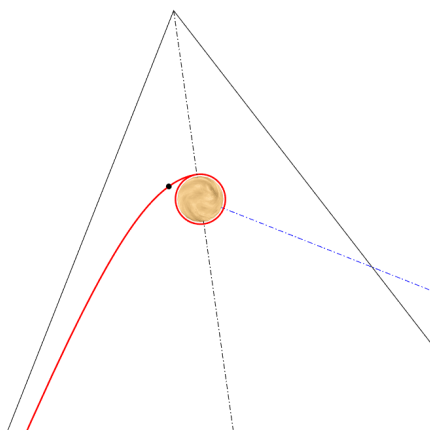
Figura 10: schemi manovre di fuga e cattura



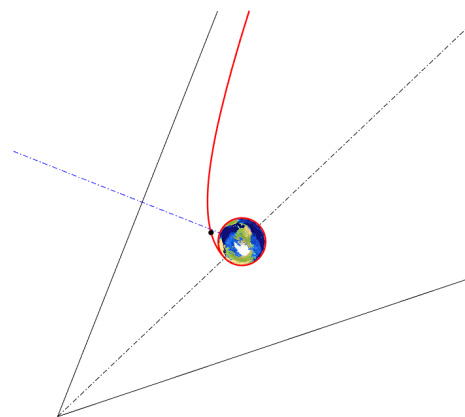
(a) fuga - Terra



(b) cattura - Venere



(c) fuga - Venere



(d) cattura - Terra

Figura 11: manovre di fuga e cattura: in blu è rappresentato il segmento congiungente il pianeta col Sole

Manovra di modifica del piano orbitale - (Terra e Venere)

Questa manovra permette alla sonda di modificare il piano su cui giace l'orbita senza cambiarne la forma. In sostanza si genera una spinta impulsiva, in uno dei due nodi orbitali, tale da variare la direzione del vettore velocità senza intaccarne il modulo. Ciò si riconduce a un semplice problema di trigonometria in cui bisogna calcolare la lunghezza della base di un triangolo isoscele avendo note le lunghezze dei lati obliqui e l'angolo θ tra essi compreso (Figura 12).

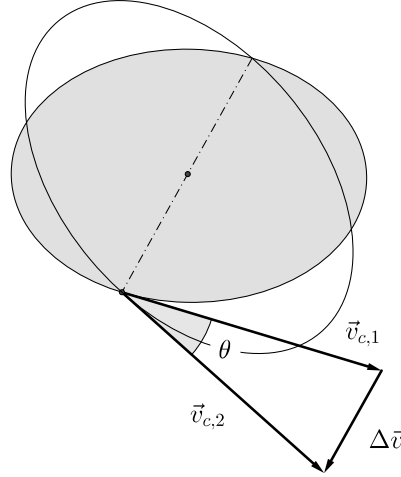


Figura 12: schema manovra di modifica del piano orbitale

$$v_{c,1} = v_{c,2} = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \stackrel{def}{=} v_c \quad \Delta v = 2 v_c \sin \frac{\theta}{2}$$

Nel caso in esame bisogna attuare questa manovra per spostarsi da un'orbita giacente sul piano dell'eclittica a una equatoriale (per la Terra) o polare (per Venere) e viceversa. Di seguito vengono riportati le tabelle coi dati elaborati (Tabelle 11 e 12) e le rappresentazioni grafiche (Figura 13). Da notare la notevole spesa di Δv nel caso del pianeta Venere; ciò è dovuto all'angolo prossimo ai 90° tra l'orbita polare e il piano eclittico.

angolo θ [gradi]	23,45
velocità circolare [km/s]	7,788
deltaV [km/s]	3,165

Tabella 11: dati manovra di cambio piano - Terra

angolo θ [gradi]	87,40
velocità circolare [km/s]	7,041
deltaV [km/s]	9,730

Tabella 12: dati manovra di cambio piano - Venere

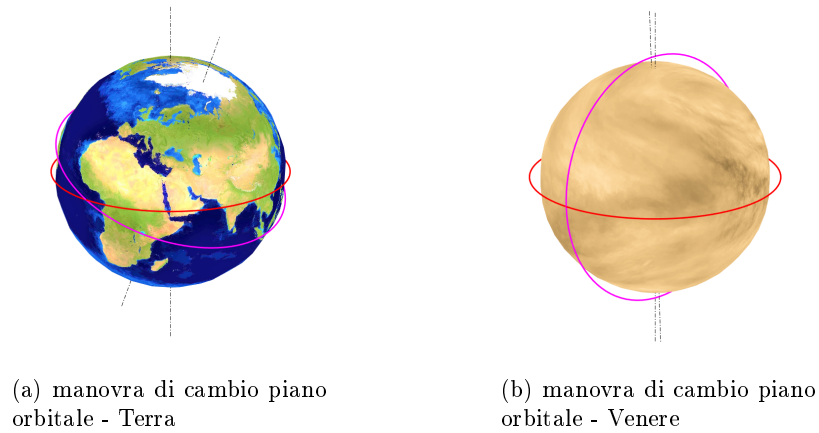
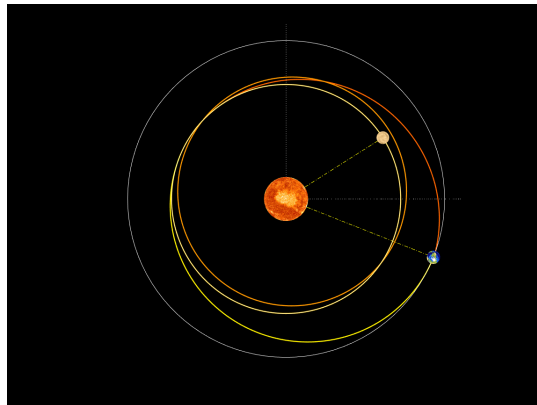


Figura 13: manovre di cambio piano orbitale: in rosso l'orbita sul piano eclittico

3 Conclusioni

In conclusione, la missione progettata rispetta tutte le specifiche, richiedendo un costo complessivo di deltaV pari a: $\Delta v = 39.7 [km/s]$. La manovra più onerosa risulta essere il cambio di piano orbitale su Venere che, da sola (considerando insieme sia la modifica *piano dell'eclittica* \rightarrow *piano polare*, sia l'inverso), contribuisce al totale con una percentuale del 49%. La missione ha una durata complessiva di circa due anni (729 giorni, trascurando i tempi di volo all'interno delle SOI) e permane in un'orbita stazionaria attorno a Venere per una durata di circa 238 giorni.

Partenza dalla Terra:	1 <i>Settembre</i> 2018
Sorvolo ravvicinato di Venere:	30 <i>Dicembre</i> 2018
Acquisizione orbita di parcheggio su Venere:	12 <i>Agosto</i> 2019
Partenza da Venere:	6 <i>Aprile</i> 2020
Rientro sulla Terra:	30 <i>Agosto</i> 2020



Bibliografia

- [1] HOWARD D. CURTIS, *Orbital Mechanics for Engineering Students, 3rd Edition*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2014.
<http://booksite.elsevier.com/9780080977478>.
- [2] GIOVANNI MENGALI e ALESSANDRO A. QUARTA, *Fondamenti di Meccanica del Volo Spaziale*. Edizioni Plus - Pisa University Press, 2006.
- [3] https://it.wikipedia.org/wiki/Problema_dei_due_corpi
- [4] https://it.wikipedia.org/wiki/Leggi_di_Keplero