Commande et estimation pour la robotique mobile

SYS5240

ESIEA 5A

S. Bertrand
sbertrand@esiea.fr

Estimation

- Introduction à la problématique
- Odométrie
- Représentation des incertitudes
- Fusion de mesures
- Filtre de Kalman
- Introduction au SLAM

Introduction à la problématique

- Planification de trajectoire ou commande :
  - besoin de connaître la localisation du robot et d'autres informations (orientation, vitesse, etc.)

- Problème : on dispose d'un ou plusieurs capteur(s) délivrant des mesures
  - imparfaites (bruit, biais, mesures aberrantes, etc.)
  - non disponibles à chaque instant
  - ne correspondant pas directement aux grandeurs dont on a besoin

Estimation

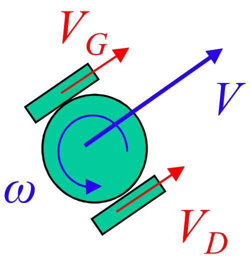
- Introduction à la problématique
- Odométrie
- Représentation des incertitudes
- Fusion de mesures
- Filtre de Kalman
- Introduction au SLAM

Odométrie

- « *Dead reckoning* »
  - Calcul de la position actuelle à partir de la position précédente et d'une estimation du déplacement réalisé / de la vitesse

- Utilisation des encodeurs pour estimer
  - la vitesse de rotation et la vitesse linéaire de chaque roue :

$$v_L = R_L.\omega_L \qquad v_R = R_R.\omega_R$$



  - la vitesse de rotation et la vitesse linéaire du véhicule

$$V = \frac{v_R + v_L}{2} = R\frac{\omega_R + \omega_L}{2}$$

$$\omega = \frac{v_R - v_L}{d} = R\frac{\omega_R - \omega_L}{d}$$

Hypothèse $R=R_L=R_R$

Rayons des roues

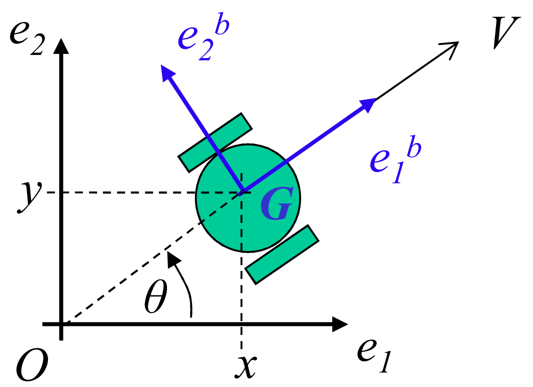
d : distance entre les roues

Odométrie : estimation de l'état du robot

- Calcul de la position et de l'orientation du véhicule

À partir du modèle cinématique :

$$\begin{cases} \dot{x} = V.\cos\theta \\ \dot{y} = V.\sin\theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$



$$x(t) = x(0) + \int_0^t V(\tau)\cos(\theta(\tau))d\tau$$

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + \dfrac{R}{2}\displaystyle\int_0^t (\omega_R(\tau) + \omega_L(\tau))\cos(\theta(\tau))d\tau \\ y(t) = y(0) + \dfrac{R}{2}\displaystyle\int_0^t (\omega_R(\tau) + \omega_L(\tau))\sin(\theta(\tau))d\tau \\ \theta(t) = \theta(0) + \dfrac{R}{d}\displaystyle\int_0^t (\omega_R(\tau) - \omega_L(\tau))d\tau \end{cases}$$

Et en pratique ?

Odométrie : implémentation pratique

- Discrétisation du modèle cinématique

$$\begin{cases} \dot{x} = V.\cos\theta \\ \dot{y} = V.\sin\theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta t.V_k.\cos\theta_k \\ y_{k+1} = y_k + \Delta t.V_k.\sin\theta_k \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \Delta t.\omega_k \end{cases}$$

- On suppose que pendant Δt le mouvement s'est réalisé selon l'orientation définie par θ_k (raffinements possibles)

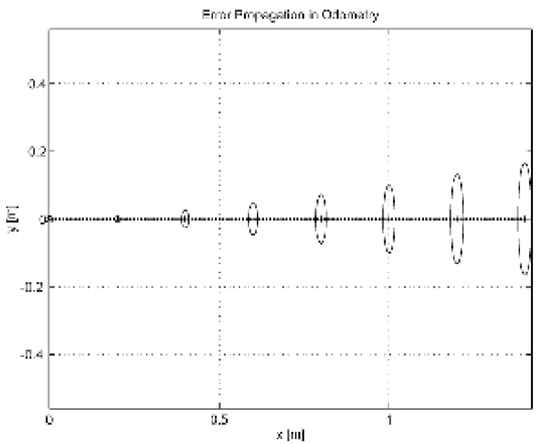
- On mesure pendant Δt des déplacements angulaires des roues $\Delta\theta_L$ et $\Delta\theta_R$ (à partir des incréments des encodeurs)

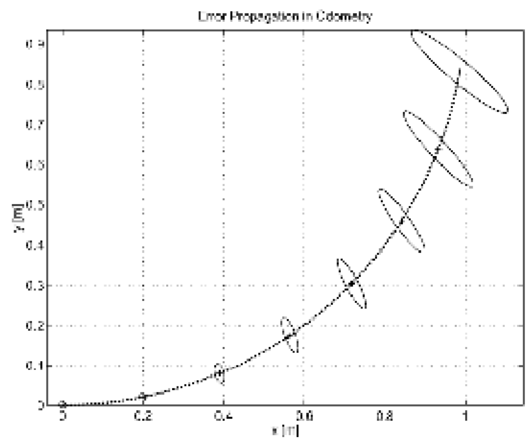
$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \dfrac{R}{2}(\Delta\theta_R + \Delta\theta_L).\cos(\theta_k) \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{R}{2}(\Delta\theta_R + \Delta\theta_L).\sin(\theta_k) \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \dfrac{R}{d}(\Delta\theta_R - \Delta\theta_L) \end{cases}$$

Odométrie : sources d'incertitudes

- Principales sources d'incertitudes :
  - Glissement des roues sur le sol, chocs
  - Déformations des roues ou du sol
  - Incertitudes sur les paramètres R et d et sur les mesures des encodeurs

=> incertitude sur la position et l'orientation calculées (croît avec le temps)





- Solutions :
  - Méthodes de calibrage, d'estimation et compensation des ces erreurs
  - Fusionner avec des mesures en provenance d'autres capteurs
- Besoin de modéliser les incertitudes

Images : *Introduction to Autonomous Mobile Robots*, R. Siegwart, MIT Press, 2004

Estimation

- Introduction à la problématique
- Odométrie
- Représentation des incertitudes
- Fusion de mesures
- Filtre de Kalman
- Introduction au SLAM

Représentation des incertitudes

- Variable déterministe : sa valeur est connue
- Variable aléatoire : incertitude sur sa valeur (probabilité que la variable prenne la valeur …)
- Utilités :
  - représenter des incertitudes
    - sur la mesure fournie par un capteur,
    - sur le calcul de la position du robot, etc …
  - tenir compte des effets de phénomènes non (facilement) modélisables
    - frottement ou glissement des roues du robot sur le sol, etc …

Représentation des incertitudes

- Variable aléatoire : X, valeurs possibles : x
- Fonction densité de probabilité : $f(x)$ $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$
- Probabilité que la valeur de X soit comprise entre a et b :

$$Pr[a < X \leq b] = \int_a^b f(x)dx$$

- Moyenne : $\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx$

Moyenne de toutes les valeurs possibles pour X, pondérées par leur densité de probabilité

- Variance : $\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2.f(x)dx$

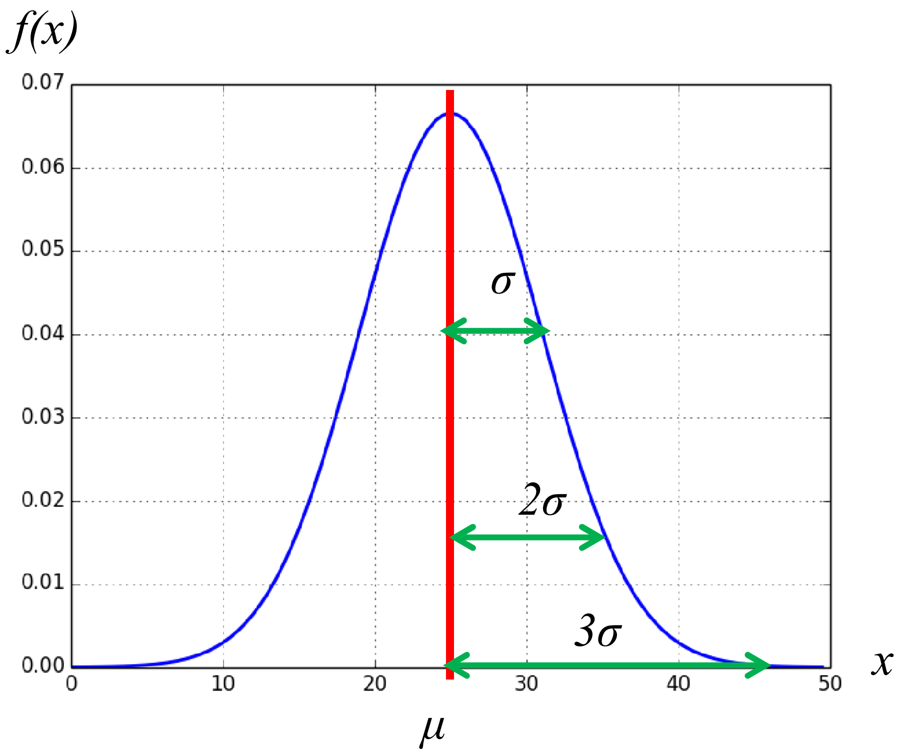
« Lageur» des valeurs possibles pour X autour de sa moyenne

- Ecart type : $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

Représentation des incertitudes

- Un exemple de modélisation très utilisée :
  la distribution gaussienne (*normal distribution*)

- Pour une V.A. à une dimension : $X \in \mathbb{R}$



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\}$$

$$Pr[\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma] = 68.26\%$$

$$Pr\left[\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma\right] = 95.44\%$$

$$\boxed{Pr\left[\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma\right] = 99.72\%}$$

Représentation des incertitudes

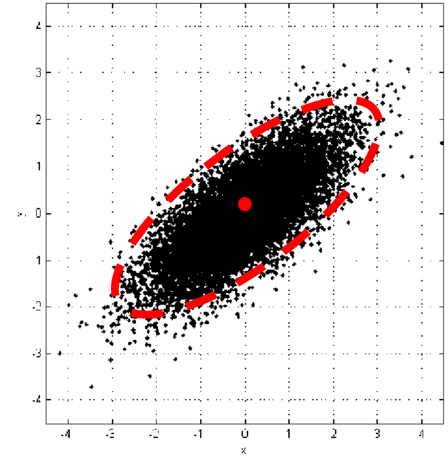
- Pour une V.A. à n dimensions : $$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}$$

Matrice de covariance

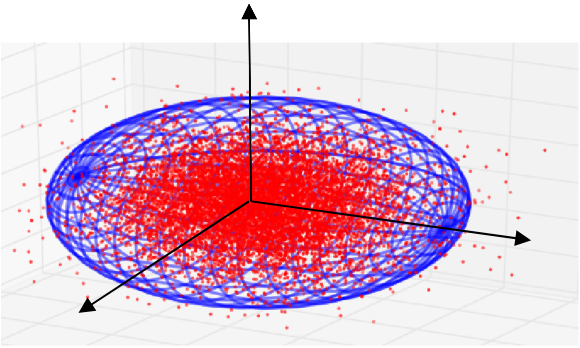
- n=2 $$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$\rho_{12} < 1$: coefficient de corrélation
(=0 si pas de corrélation entre X_1 et X_2)



Ellipse à «3σ»

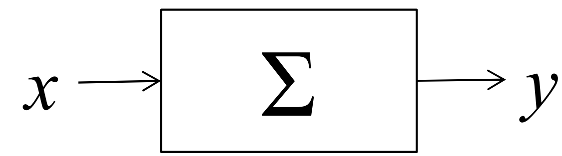
- n=3



Ellipsoïde à «3σ»

Propagation d'incertitudes

- Incertitude sur l'entrée : $x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \Sigma_x)$
- Sortie du système : $y = h(x)$



- Incertitude sur la sortie : $y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \Sigma_y)$

$$\mu_y = ?$$
$$\Sigma_y = ?$$

- Calcul de la moyenne : $\mu_y = f(\mu_x)$
- Calcul de la matrice de covariance :

$$\Sigma_y = H^x \Sigma_x (H^x)^T$$

Ligne i, colonne j : $[H^x]_{i,j} = \left[\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}\right]_{(x=\mu_x)}$

Propagation d'incertitudes

- Exercice 1 : mesure de vitesse

$$x = [p_x \; p_y \; v_x \; v_y]^T \qquad y = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

Vecteur d'état du robot
(position, vitesse)

- Exercice 2 : mesure de distance fournie par une balise

$$x = [p_x \; p_y \; v_x \; v_y]^T \qquad y = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

=> Calculer H^x

Propagation d'incertitudes

- Exemple : pour un système dynamique

$$X_k \sim \mathcal{N}(x_k, P_k) \longrightarrow \boxed{X_{k+1} = f(X_k, U_k)} \longrightarrow X_{k+1} \sim \mathcal{N}(x_{k+1}, P_{k+1})$$

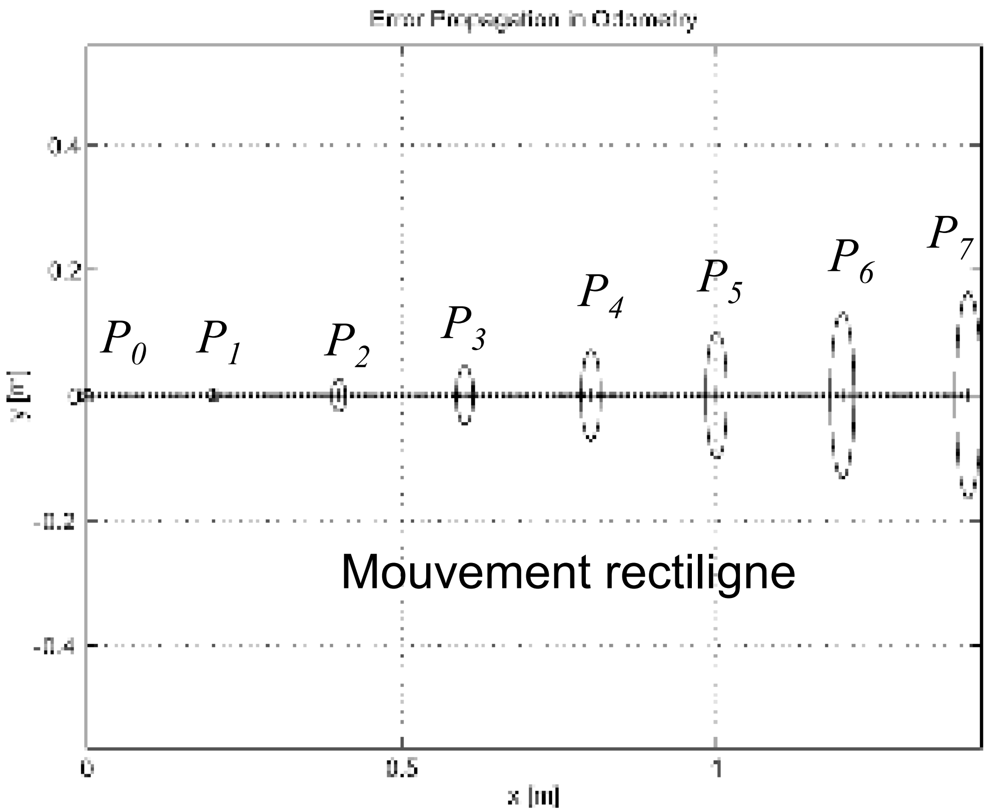
$$U_k \sim \mathcal{N}(u_k, \Sigma_{uk}) \longrightarrow$$

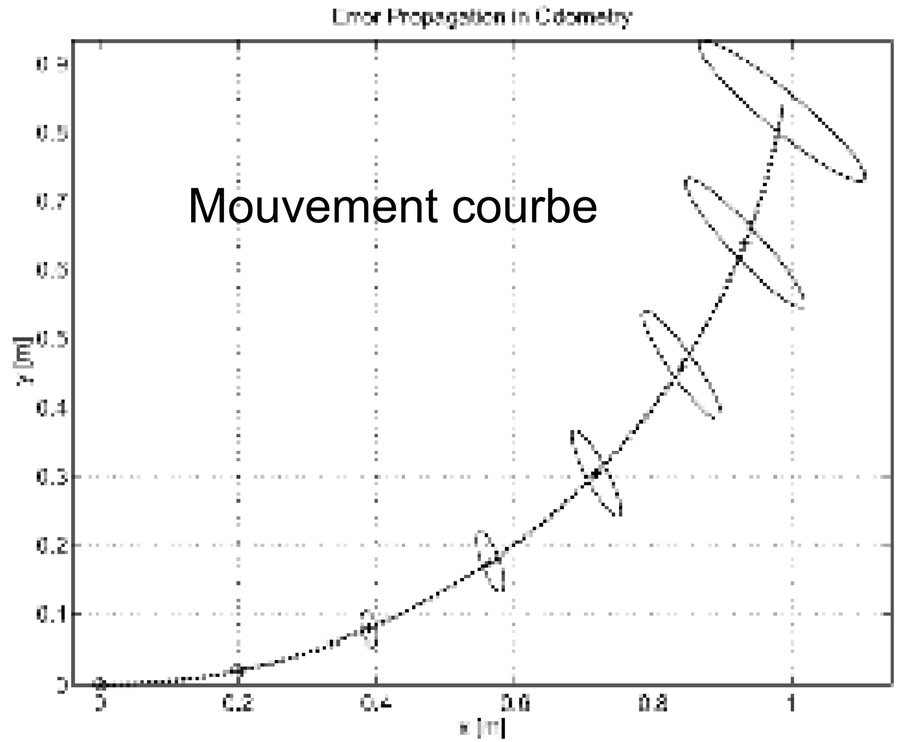
moyenne $$x_{k+1} = f(x_k, u_k)$$

covariance $$P_{k+1} = F^x P_k (F^x)^T + F^u \Sigma_{uk} (F^u)^T$$

$$[F^x]_{i,j} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{(x_k, u_k)} \qquad [F^u]_{i,j} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right]_{(x_k, u_k)}$$

Evolution de la covariance sur la position (ellipses à 3σ)





Vecteur d'état du système : pose du robot

$$X_k = [x_k \ y_k \ \theta_k]^T$$

Entrée du système : déplacements des roues

$$U_k = [\Delta\theta_{Rk} \ \Delta\theta_{Lk}]^T$$

Estimation

- Introduction à la problématique
- Odométrie
- Représentation des incertitudes
- Fusion de mesures
- Filtre de Kalman
- Introduction au SLAM

Fusion statique de deux mesures

- On cherche à calculer l'estimée $\hat{q}$ d'une grandeur q
- Mesures q_1 et q_2 fournies par deux capteurs
- Estimées associées : $\hat{q}_1 \sim \mathcal{N}(q_1, \sigma_1^2) \quad \hat{q}_2 \sim \mathcal{N}(q_2, \sigma_2^2)$
- Approche moindres carrés : trouver $\hat{q}$ qui minimise

$$J = \sum_{i=1}^{2} w_i.(\hat{q} - q_i)^2$$

- Solution :

$$\hat{q} = \frac{\sum_{i=1}^{2} w_i . q_i}{\sum_{i=1}^{2} w_i}$$

Choix des poids : $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$

Fusion statique de deux mesures

- => $$\hat{q} = \frac{\frac{1}{\sigma_1^2} q_1 + \frac{1}{\sigma_2^2} q_2}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} q_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} q_2$$

« barycentre »

$$\hat{q} = q_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \underbrace{(q_2 - q_1)}$$

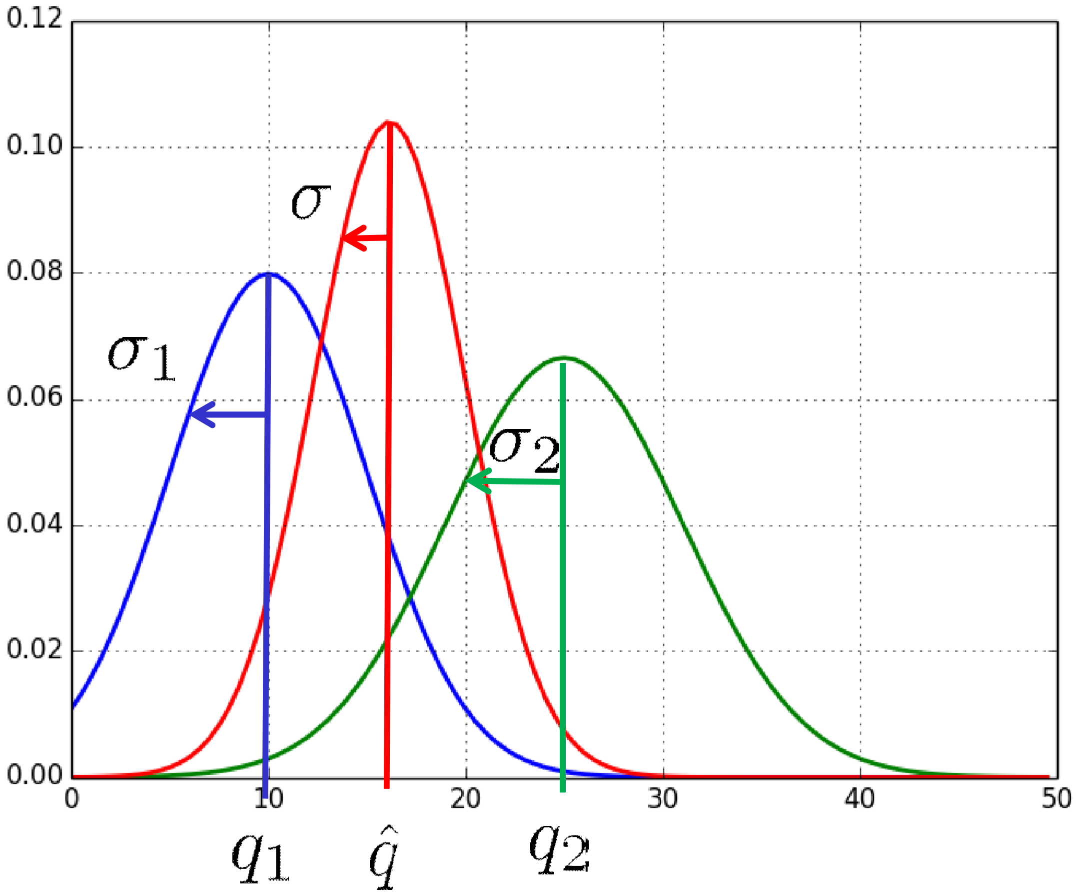
« prédiction » + « gain » * « mesure – prédiction »

« correction »

Fusion statique de deux mesures

- Quelle est l'incertitude sur $\hat{q}$?

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$



Fusion dynamique

- On dispose d'un modèle d'évolution
  - ex : $\dot{x} = v$

$$x_{k+1} = x_k + T_e v_k + w_k \qquad w_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$$

et d'un capteur donnant une mesure

  - ex : $y_k = x_k + b_k$ $\qquad b_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$

- Algorithme d'estimation :

$$x_k^- = x_k + T_e v_k \qquad {\sigma_k^-}^2 = \sigma_k^2 + T_e \sigma_w^2$$

$$x_{k+1} = x_k^- + K_{k+1}(y_{k+1} - x_k^-) \qquad K_{k+1} = \frac{{\sigma_k^-}^2}{{\sigma_k^-}^2 + \sigma_b^2}$$

=> filtre de Kalman

Estimation

- Introduction à la problématique
- Odométrie
- Représentation des incertitudes
- Fusion de mesures
- Filtre de Kalman
- Introduction au SLAM

Filtre de Kalman : formulation générale

- Equation d'état :

$$X_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k + w_k \qquad w_k \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$$

- Equation de mesure :

$$Y_k = C_k X_k + v_k \qquad v_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$$

- Objectif du filtre : fournir une estimée $\hat{X}_k$ de l'état X_k et sa matrice de covariance P_k associée

- Entrée du filtre : $\hat{X}_0$ et P_0

Filtre de Kalman : une illustration

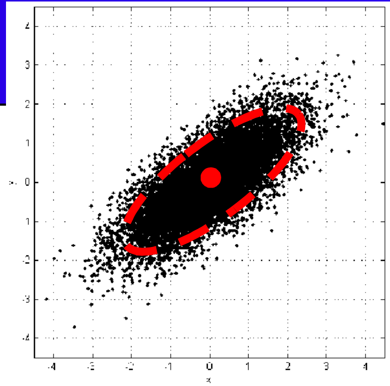
Principe (simplifié)

à t_k: estimée initiale et incertitude associée

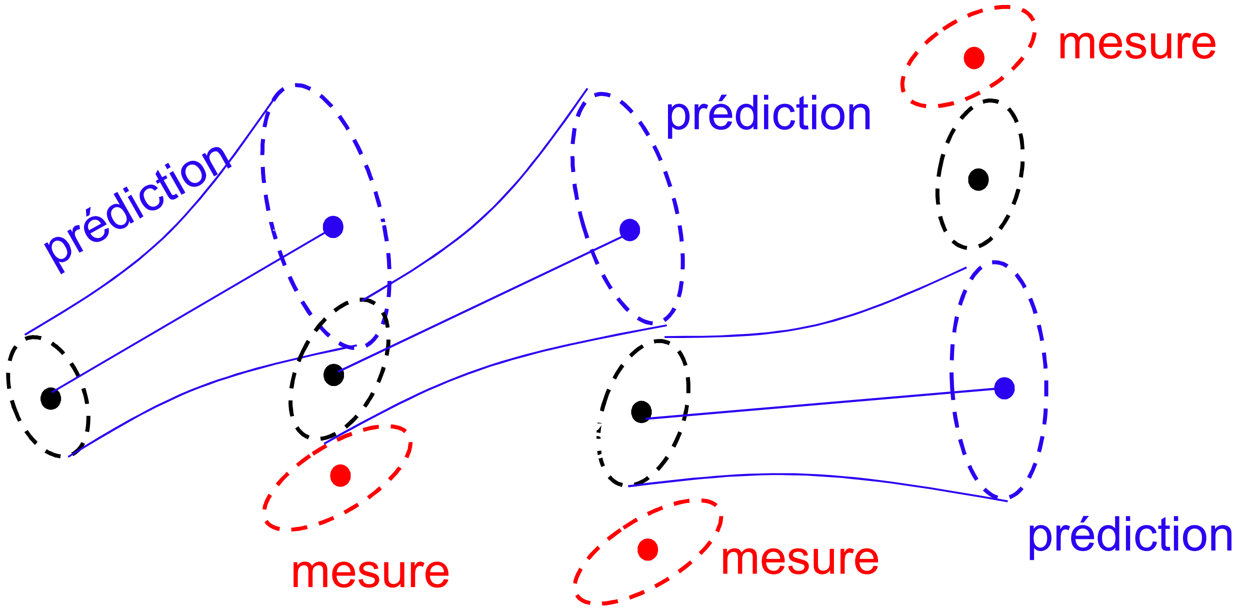
prédiction jusqu'à t_{k+1} et évolution de l'incertitude

à t_{k+1} : obtention d'une **mesure**, avec incertitude associée

correction : calcul de l'estimée (et de son incertitude) réalisant « le meilleur compromis » entre la prédiction et la mesure (et leurs incertitudes)



Incertitude gaussienne



Filtre de Kalman : formulation générale

- Etapes de prédiction (« *prediction* »)

$$\hat{X}_{k+1|k} = A_k \hat{X}_{k|k} + B_k U_k$$
$$P_{k+1|k} = A_k P_{k|k} A_k^T + Q_k$$

- Etape de correction (« *update* »)
  (si mesure est disponible)

$$\hat{X}_{k+1|k+1} = \hat{X}_{k+1|k} + K_{k+1}(Y_{k+1} - C_{k+1}\hat{X}_{k+1|k})$$
$$P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} - K_{k+1} C_{k+1} P_{k+1|k}$$

Innovation : $(Y_{k+1} - C_{k+1}\hat{X}_{k+1|k})$

Covariance de l'innovation : $S_{k+1} = C_{k+1} P_{k+1|k} C_{k+1}^T + R_{k+1}$

Gain de Kalman : $K_{k+1} = P_{k+1|k} C_{k+1}^T S_{k+1}^{-1}$

Filtre de Kalman : une illustration

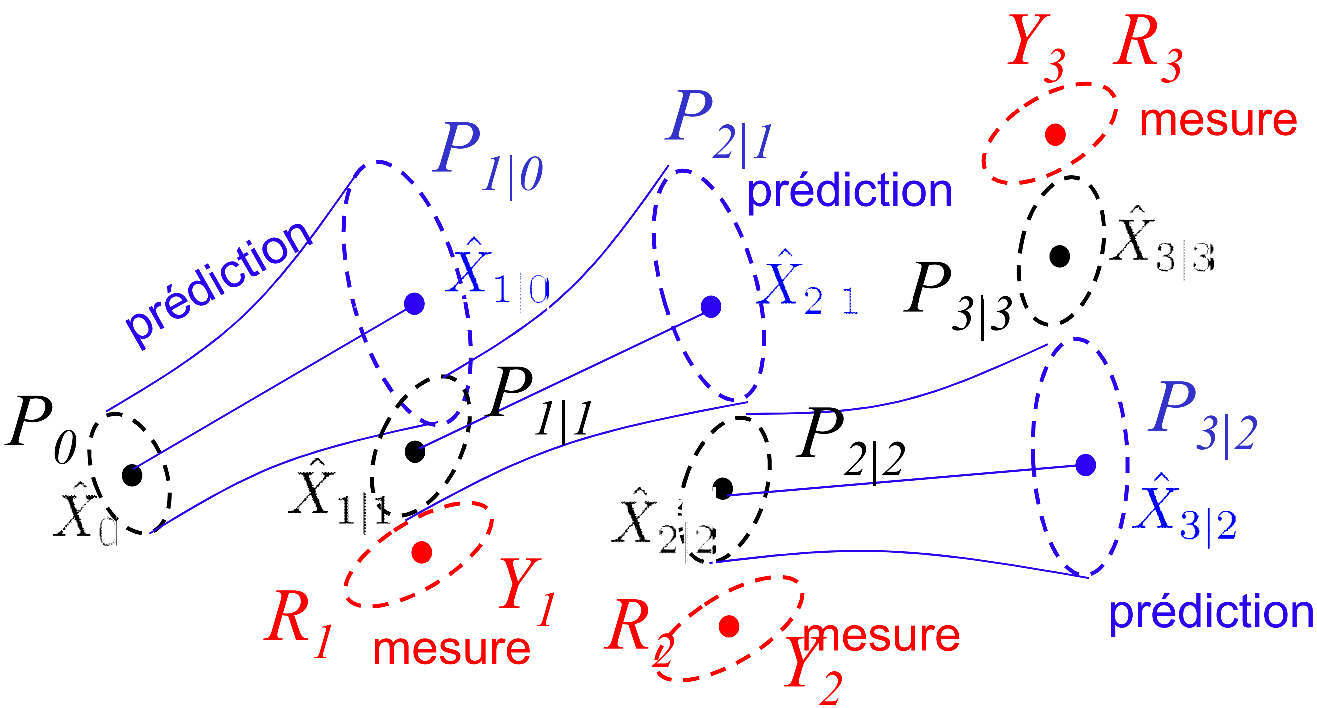
Principe (simplifié)

à t_k: estimée initiale et incertitude associée

prédiction jusqu'à t_{k+1} et évolution de l'incertitude

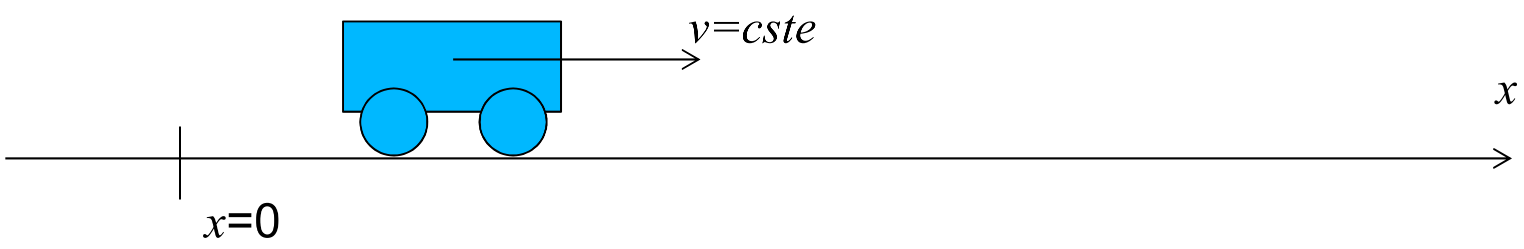
à t_{k+1} : obtention d'une **mesure**, avec incertitude associée

correction : calcul de l'estimée (et de son incertitude) réalisant « le meilleur compromis » entre la prédiction et la mesure (et leurs incertitudes)



Filtre de Kalman : exemple

- Localisation d'un robot à 1 dimension

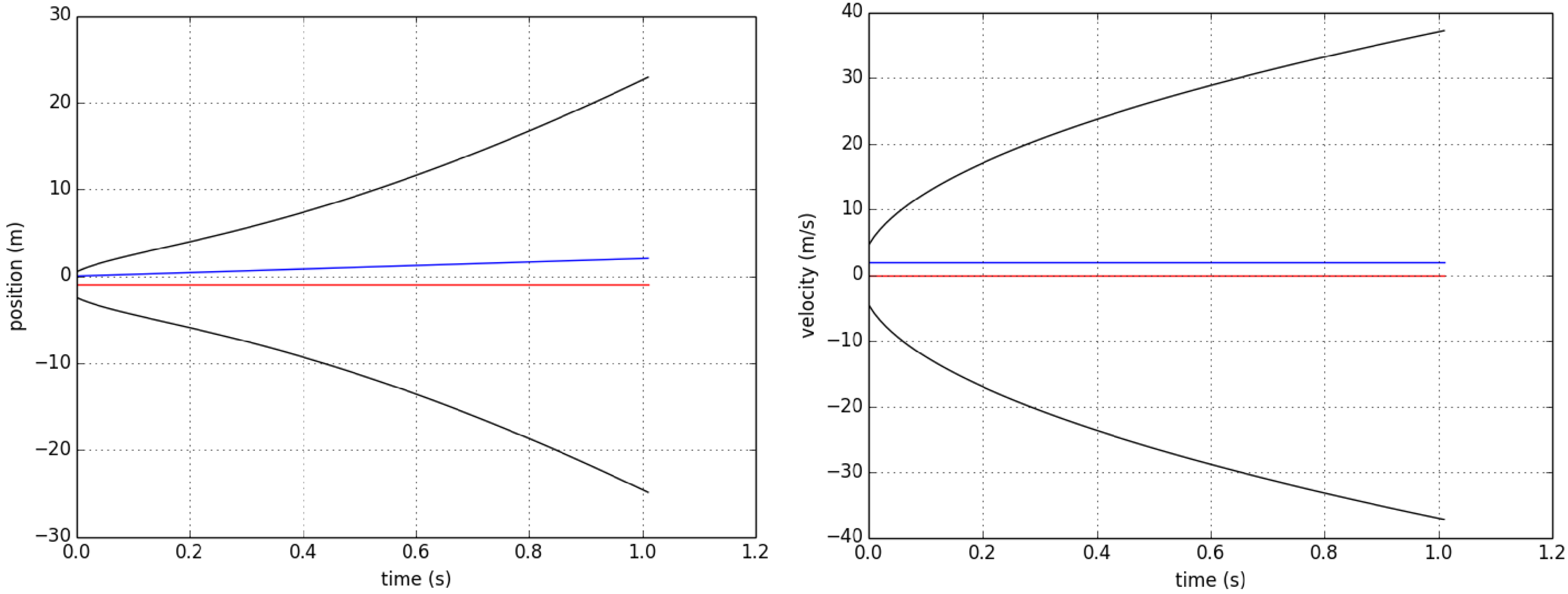


- On cherche à estimer la position et la vitesse du robot à partir d'une mesure de la position
- Exercice 1 : écrire la représentation d'état du système en temps discret
- Exercice 2 : idem pour le cas d'un robot à 1 dimension soumis à une accélération a

Filtre de Kalman : exemple

- CI : x_0 = 0m, v_0 = 2m/s
- Initialisation du filtre : $\hat{x}_0 = \text{-}1\text{m},\ \hat{v}_0 = 0\text{m/s}$
- Pas de mesure :

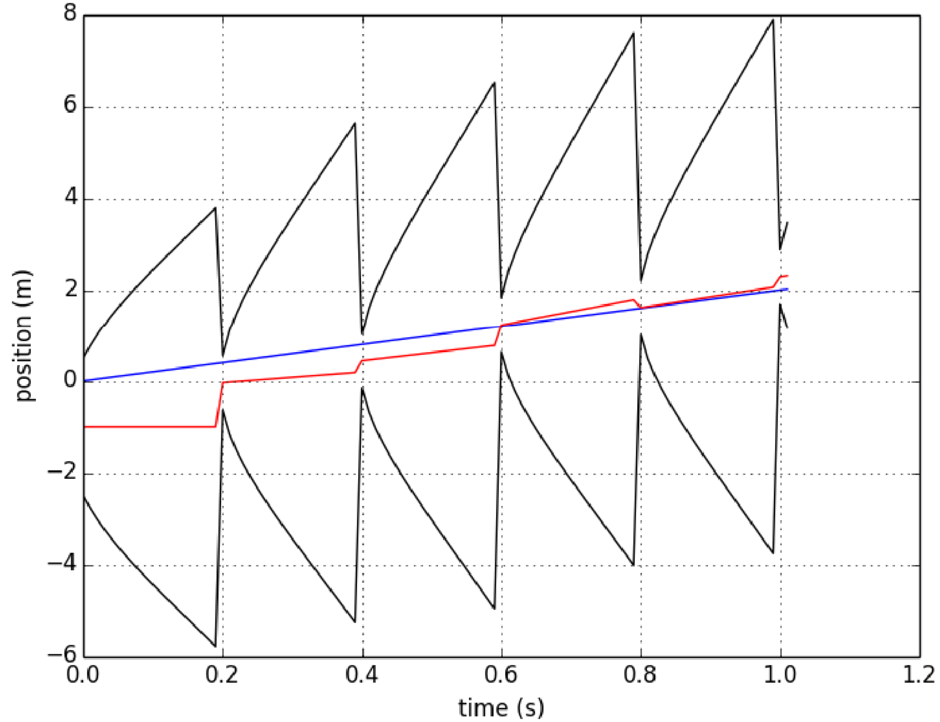
Trajectoire réelle
Trajectoire estimée
Trajectoire estimée +/- 3σ

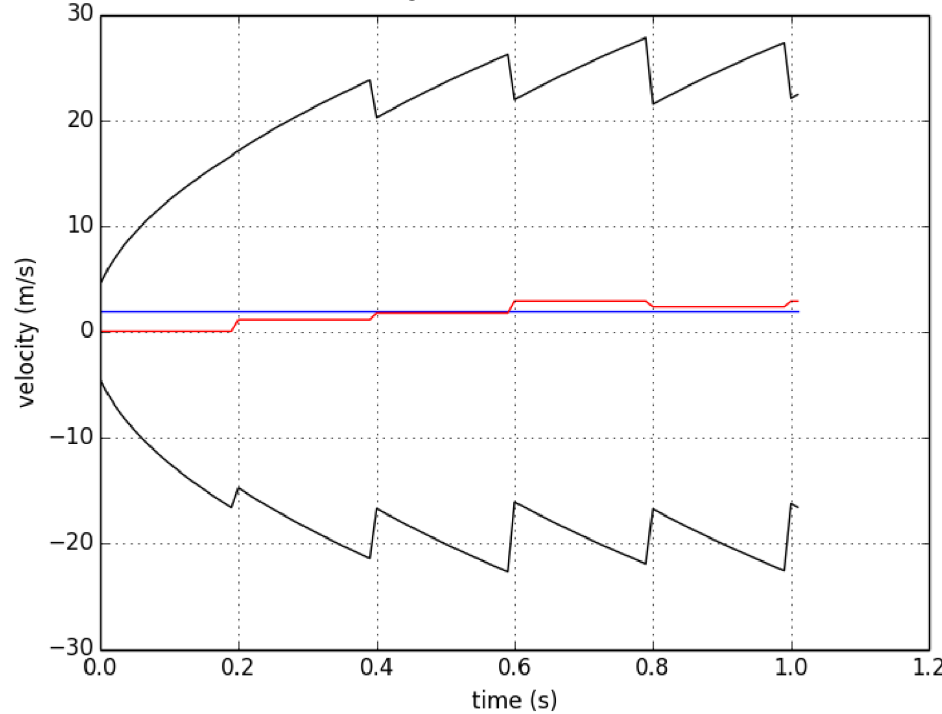


Filtre de Kalman : exemple

- CI : x_0 = 0m, v_0 = 2m/s
- Initialisation du filtre : $\hat{x}_0 = \text{-}1\text{m},\ \hat{v}_0 = 0\text{m/s}$
- Mesure toutes les 0.2 sec

Trajectoire réelle
Trajectoire estimée
Trajectoire estimée +/- 3σ

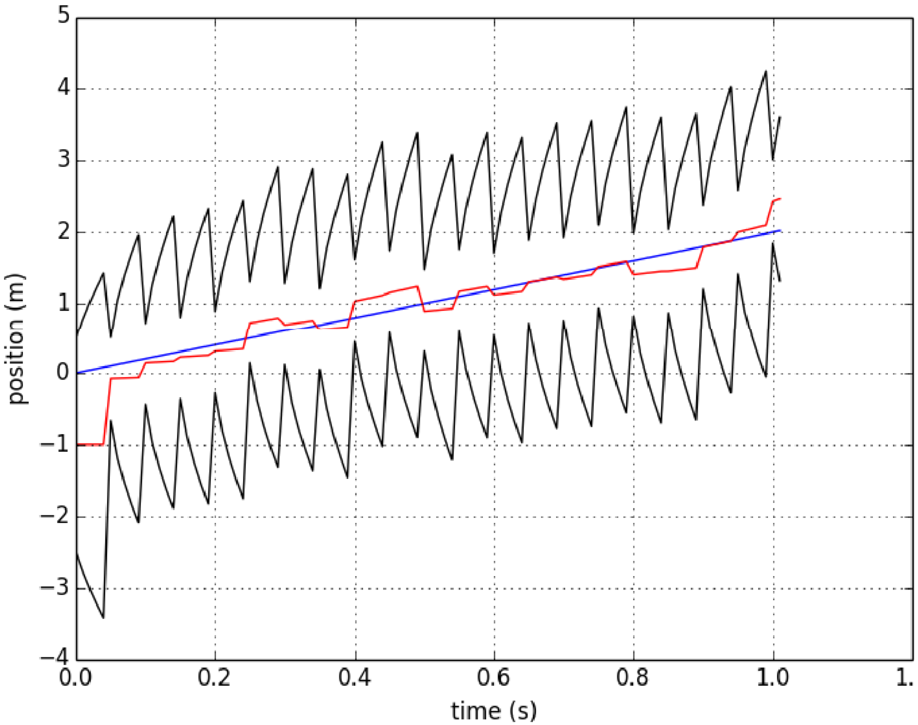


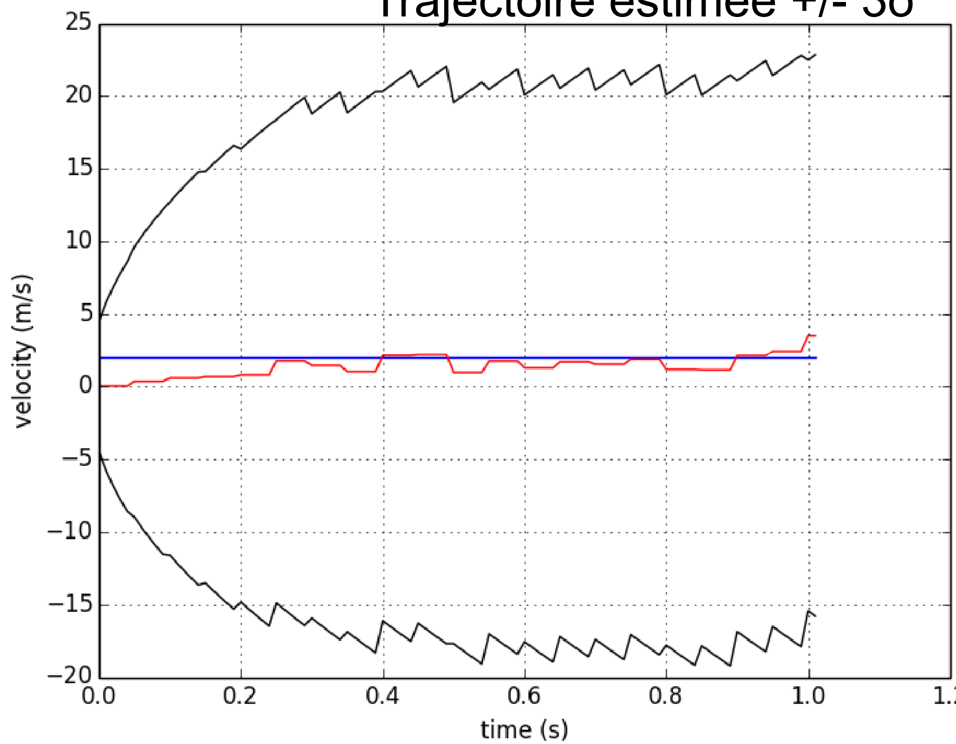


Filtre de Kalman : exemple

- CI : x_0 = 0m, v_0 = 2m/s
- Initialisation du filtre : $\hat{x}_0 =$ -1m, $\hat{v}_0 = 0\text{m/s}$
- Mesure toutes les 0.05 sec

Trajectoire réelle
Trajectoire estimée
Trajectoire estimée +/- 3σ

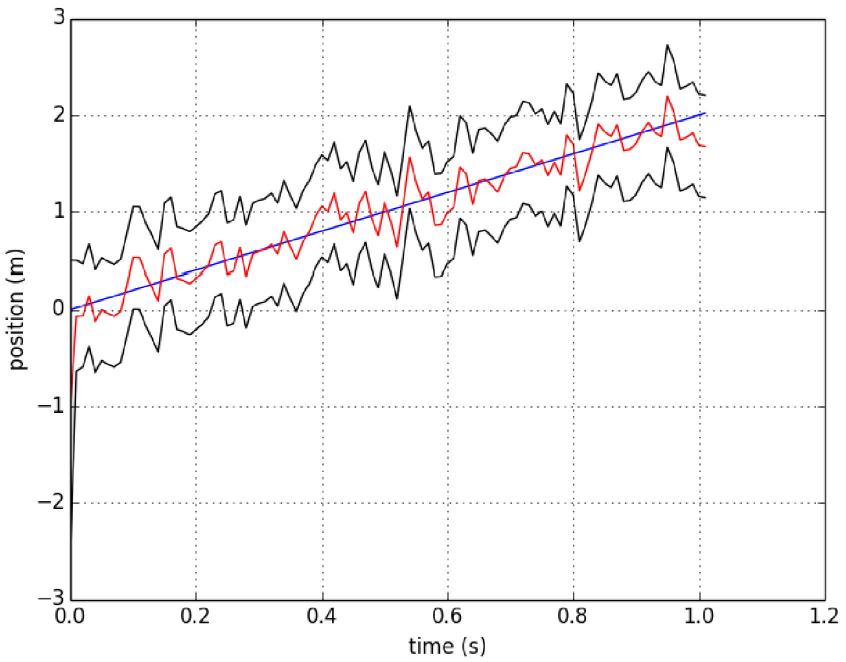


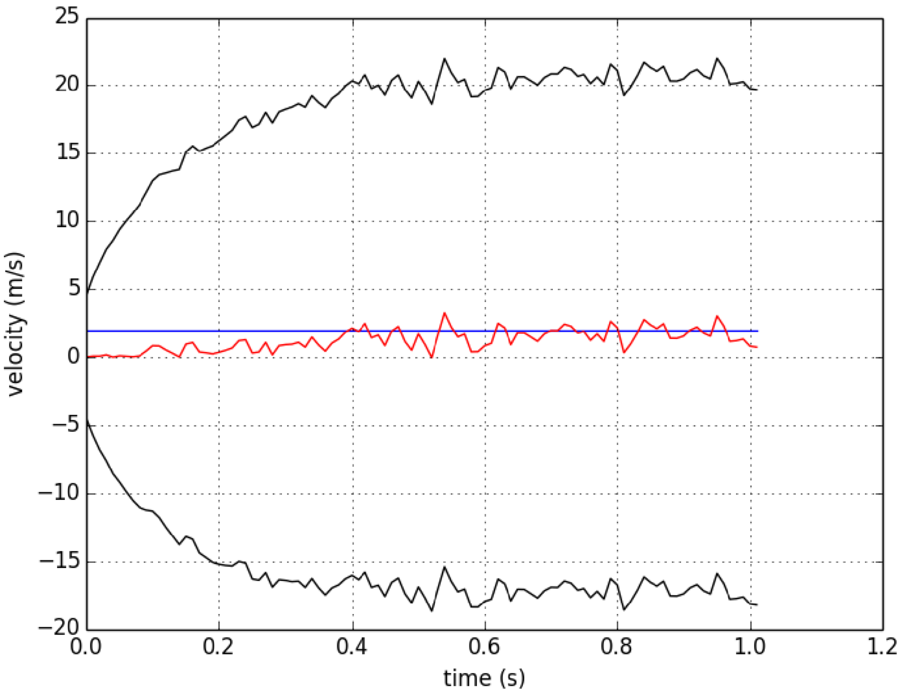


Filtre de Kalman : exemple

- CI : x_0 = 0m, v_0 = 2m/s
- Initialisation du filtre : $\hat{x}_0 = \text{-}1\text{m},\ \hat{v}_0 = 0\text{m/s}$
- Mesure toutes les 0.01 sec (=Te)

Trajectoire réelle
Trajectoire estimée
Trajectoire estimée +/- 3σ





Filtre de Kalman : exemple

- Retour sur l'exemple :
  - Dynamique linéaire
  - Mesure linéaire

- Mais dans certains cas (pourtant simples) : non linéarités
  - Ex : mesure de distance
  - Ex : dynamique d'un robot mobile (sin, cos, *)
  - Etc…

=> Filtre de Kalman Etendu

Filtre de Kalman Etendu (EKF)

- Equation d'état :

$$X_{k+1} = f(X_k, U_k) + w_k \qquad w_k \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$$

- Equation de mesure :

$$Y_k = h(X_k) + v_k \qquad v_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$$

- Objectif du filtre : fournir une estimée $\hat{X}_k$ de l'état X_k et sa matrice de covariance P_k associée

- Entrée du filtre : $\hat{X}_0$ et P_0

Filtre de Kalman Etendu (EKF)

- Etapes de prédiction (« *prediction* »)

$$\hat{X}_{k+1|k} = f(\hat{X}_{k|k}, U_k)$$

$$P_{k+1|k} = F_k^x P_{k|k} (F_k^x)^T + Q_k$$

$$[F_k^x]_{i,j} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{(\hat{X}_{k|k}, U_k)}$$

- Etape de correction (« *update* »)
  (si mesure est disponible)

$$\hat{X}_{k+1|k+1} = \hat{X}_{k+1|k} + K_{k+1}(Y_{k+1} - h(\hat{X}_{k+1|k}))$$

$$P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} - K_{k+1} H_{k+1}^x P_{k+1|k}$$

$$[H_k^x]_{i,j} = \left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right]_{(\hat{X}_{k+1|k})}$$

Innovation : $(Y_{k+1} - C_{k+1}\hat{X}_{k+1|k})$

Covariance de l'innovation : $S_{k+1} = H_{k+1}^x P_{k+1|k} (H_{k+1}^x)^T + R_{k+1}$

Gain de Kalman : $K_{k+1} = P_{k+1|k} (H_{k+1}^x)^T S_{k+1}^{-1}$

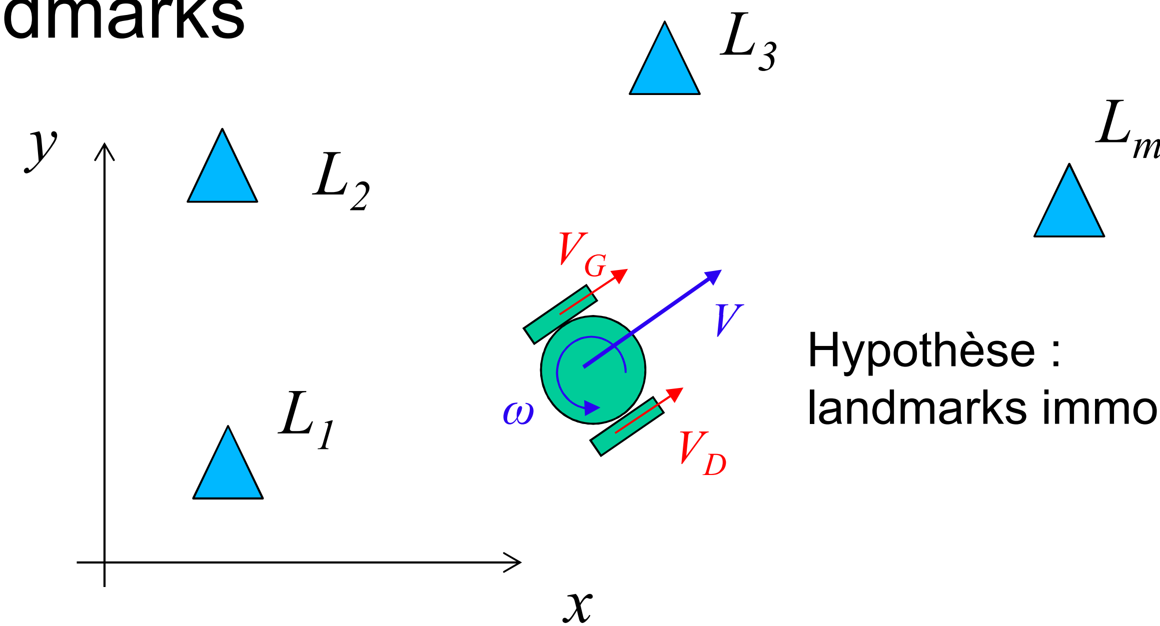
Estimation

- Introduction à la problématique
- Odométrie
- Représentation des incertitudes
- Fusion de mesures
- Filtre de Kalman
- Introduction au SLAM

Introduction au SLAM

- *Simultaneous Localization and Mapping*
  - Utiliser les éléments cartographiés pour mieux localiser le robot
  - Utiliser la localisation du robot pour améliorer la cartographie

- Exemples : Landmarks



Hypothèse :
landmarks immobiles

- Objectif : estimer l'état du robot et les positions des landmarks

Formulation du problème

- Vecteur d'état à estimer : $x_k = \begin{bmatrix} x_k^r \\ \hline x_k^L \end{bmatrix}$

$x_k^r = [x_k \; y_k \; \theta_k]^T$

$x_k^L = \left[(x_k^{L_1})^T \; \dots \; (x_k^{L_m})^T \right]^T$

Position $[x \; y]^T$ landmark m

- Modèle robot : $x_{k+1}^r = f(x_k^r, u_k) + w_k$

- Modèle landmarks : $x_{k+1}^L = x_k^L$ Hyp. : landmarks immobiles

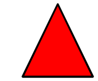
- Modèle complet :

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{k+1}^r \\ \hline x_{k+1}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_k^r, u_k) \\ \hline x_k^L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_k \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

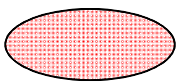
Données à k = 0

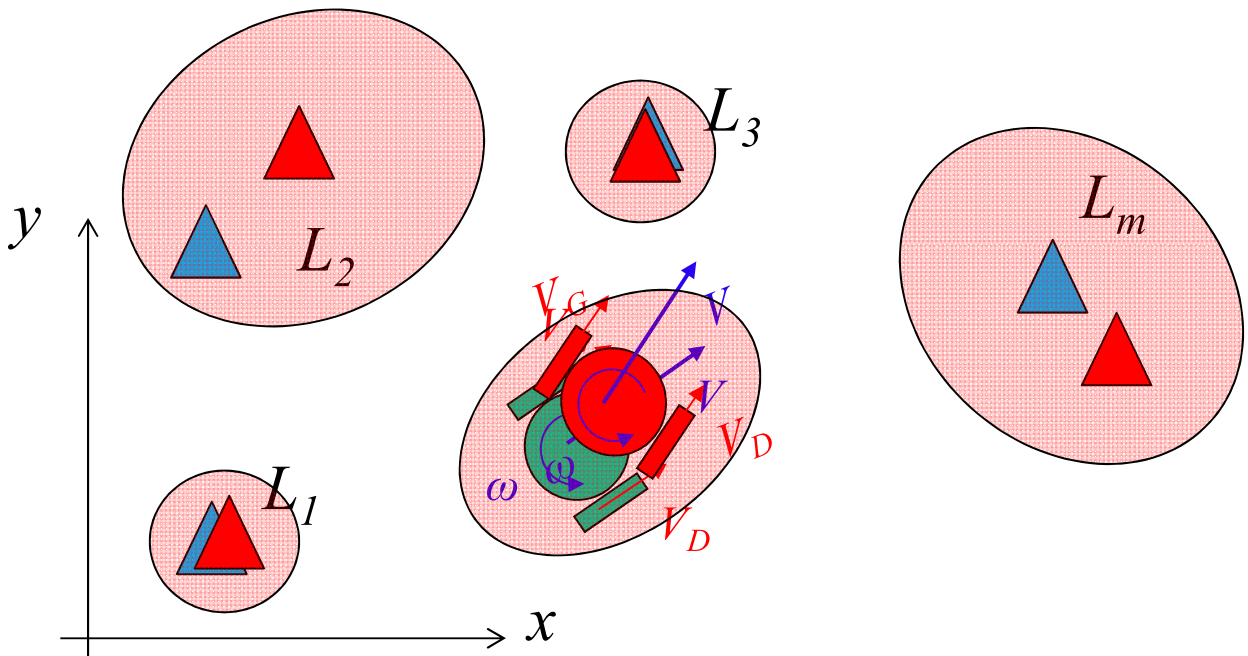
$$\hat{x}_0 = \left[\begin{array}{c} \hat{x}_0^r \\ \hline \hat{x}_0^L \end{array}\right]$$

Position et orientation a priori du robot

Positions a priori des landmarks 

$$P_0 = \left[\begin{array}{c|c} P_0^r & 0 \\ \hline 0 & P_0^L \end{array}\right] \qquad P_0^L = \begin{bmatrix} P_0^{L_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & P_0^{L_m} \end{bmatrix}$$

 Incertitudes associées



Utilisation du filtre de Kalman

- Prédiction :

$$\hat{x}_{k+1|k} = \left[\begin{array}{c} \hat{x}^r_{k+1|k} \\ \hline \hat{x}^L_{k+1|k} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} f(\hat{x}^r_{k|k}, u_k) \\ \hline \hat{x}^L_{k|k} \end{array}\right]$$

$$P_{k+1|k} = \left[\begin{array}{c|c} P^r_{k+1|k} & 0 \\ \hline 0 & P^L_{k+1|k} \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} P^r_{k+1|k} = F^x_k P^r_{k|k} (F^x_k)^T + Q_k \\ P^L_{k+1|k} = P^L_{k|k} \end{array}$$

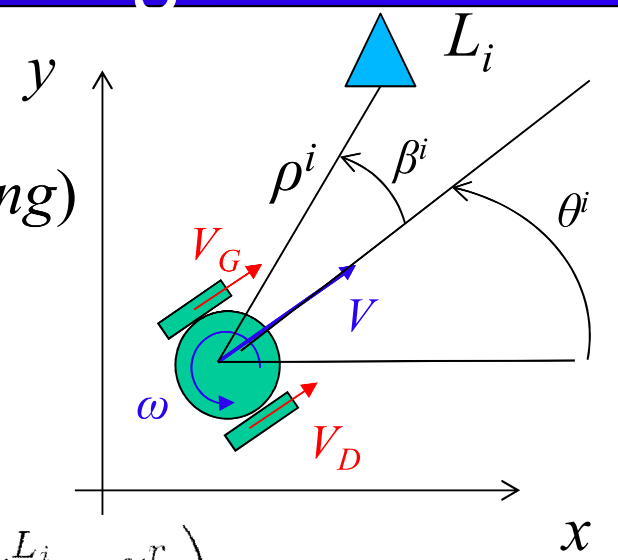
- Correction :

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \left[\begin{array}{c} \hat{x}^r_{k+1|k+1} \\ \hline \hat{x}^L_{k+1|k+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \hat{x}^r_{k+1|k} \\ \hline \hat{x}^L_{k+1|k} \end{array}\right] + K_{k+1}(Y_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1|k}))$$

L'étape de correction peut se faire de manière itérative, mesure par mesure

Exemple de mesures, matching

- Mesures fournies par un scanner laser :
  - distance ρ^i (*range*) et angle β^i (*bearing*)



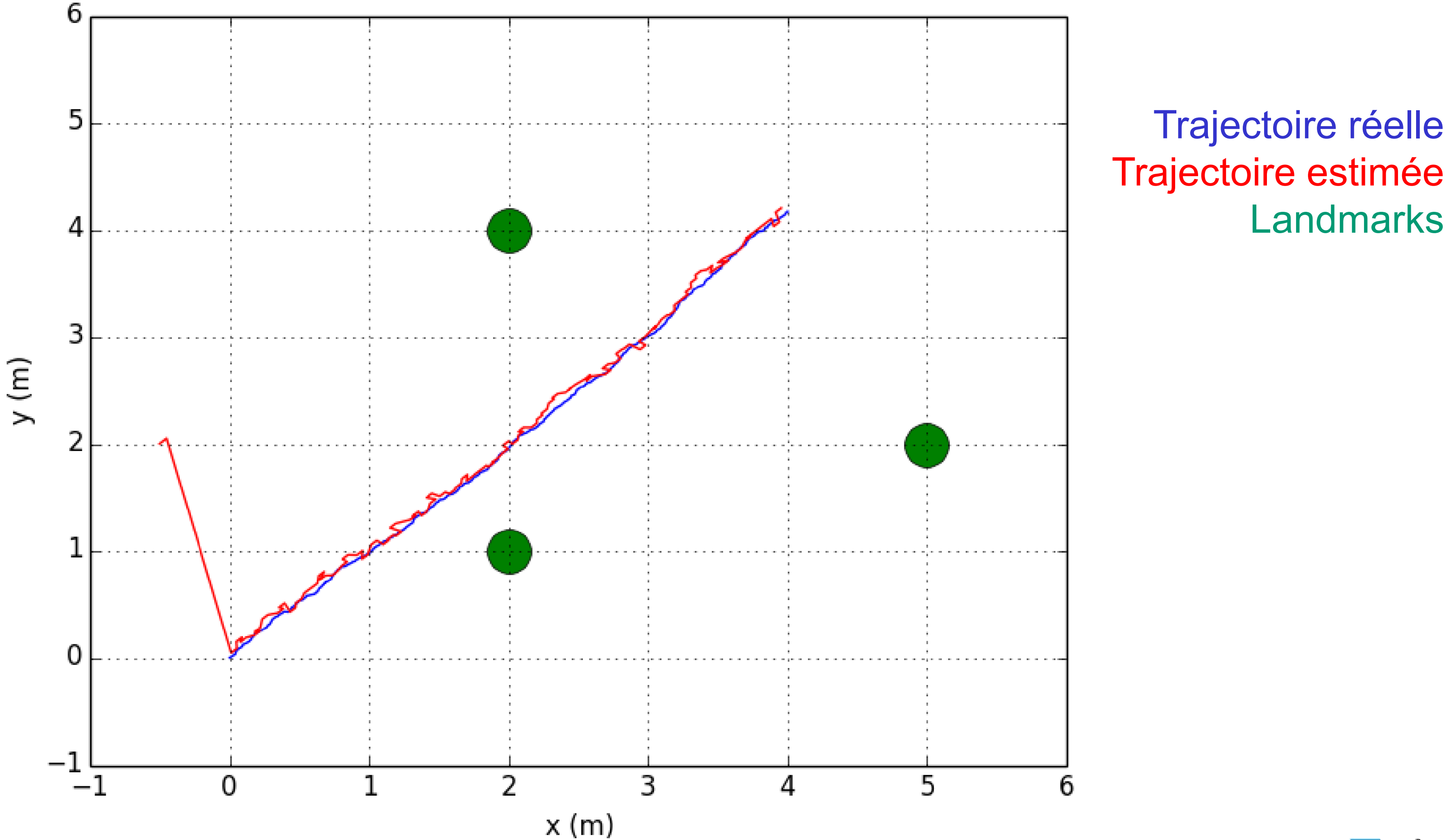
$$Y_k = \begin{bmatrix} \rho_k^i \\ \beta_k^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_k^\rho \\ w_k^\beta \end{bmatrix}$$

$$\rho_k^i = \sqrt{(x_k^r - x_k^{L_i})^2 + (y_k^r - y_k^{L_i})^2} \qquad \beta_k^i = \arctan\left(\frac{y_k^{L_i} - y_k^r}{x_k^{L_i} - x_k^r}\right) - \theta_k$$

- « Matching » : faire correspondre les mesures obtenues avec les mesures prédites
  - Quelle mesure correspond à quel landmark ?
  - Existe test statistique sur la covariance de l'innovation pour faire les associations

Exemple de mise en œuvre

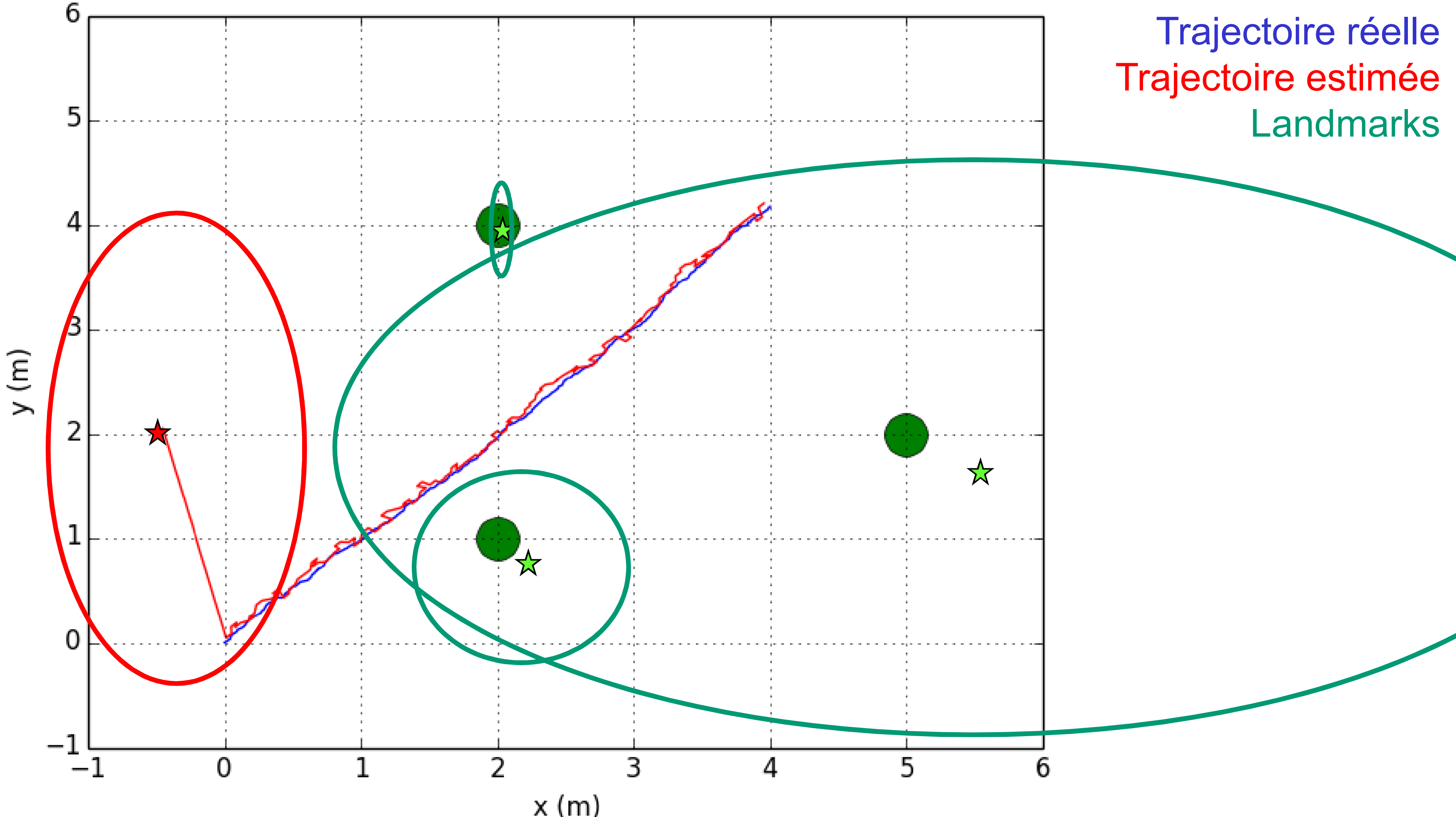
- 3 landmarks, mesure : position relative robot / LM



Exemple de mise en œuvre

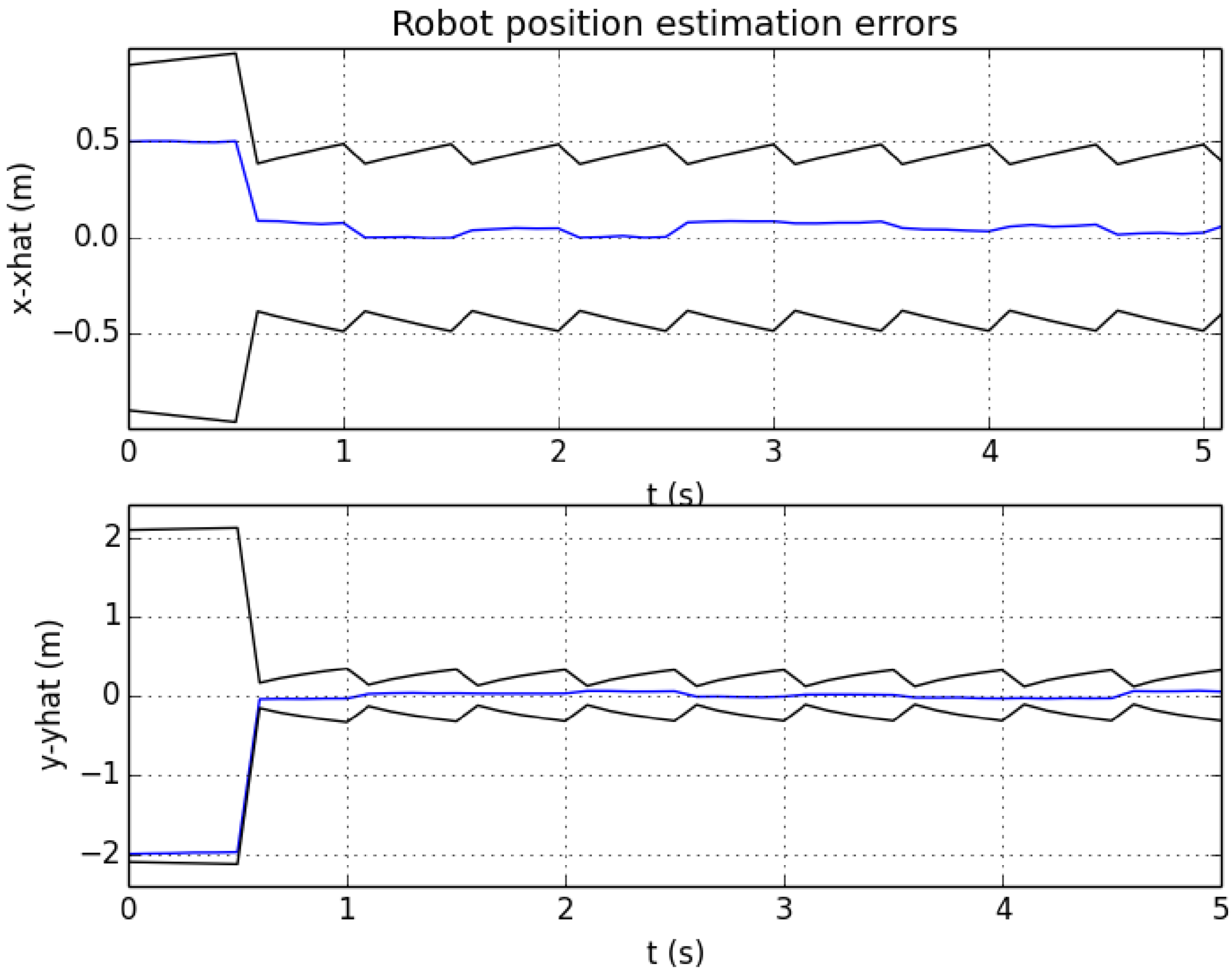
- Entrées du filtre à t=0 ☆ estimée Ellipse d'incertitude à 3σ

Trajectoire réelle
Trajectoire estimée
Landmarks



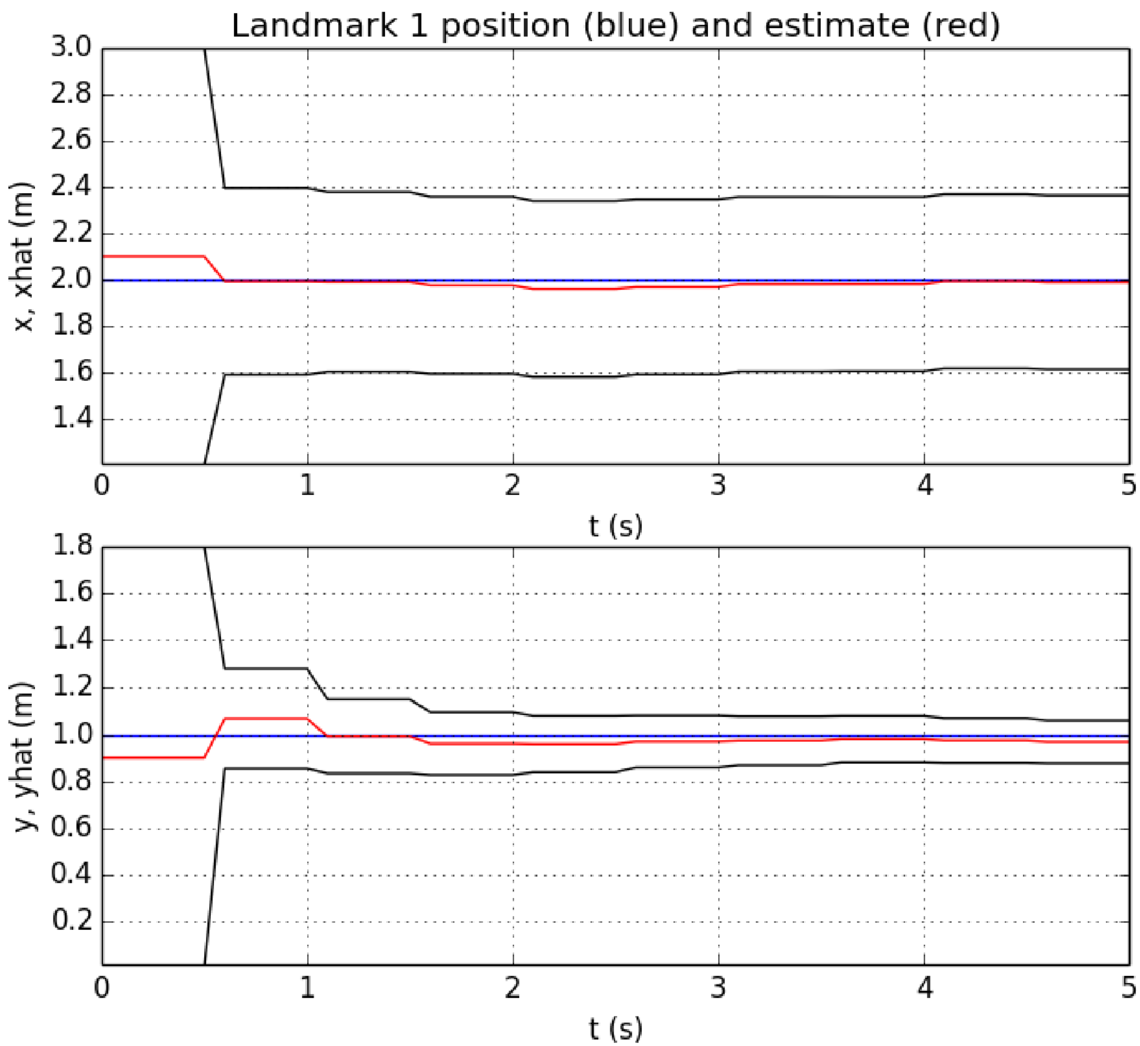
Exemple de mise en œuvre

- Erreurs d'estimation sur la position du robot



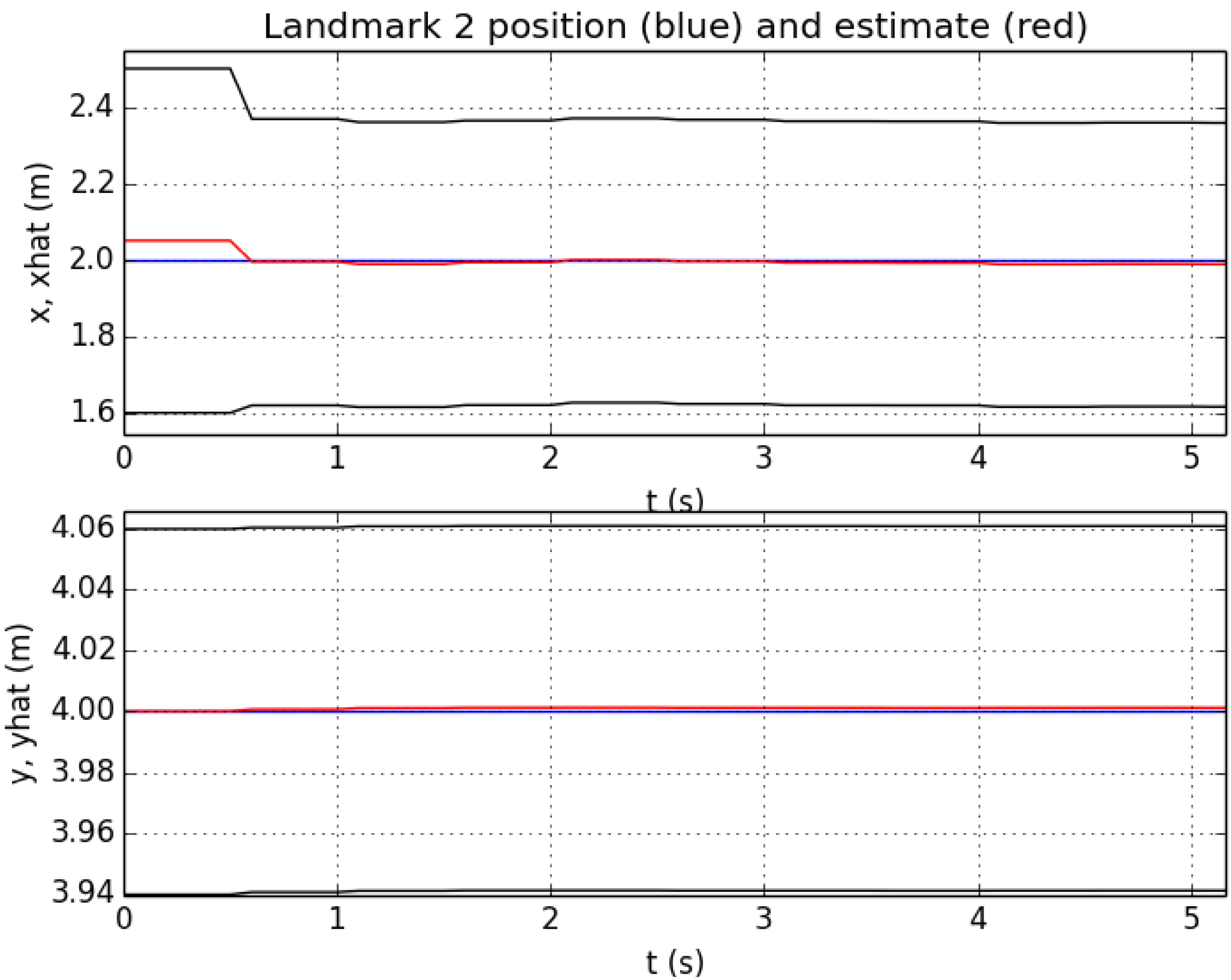
Exemple de mise en œuvre

- Estimation de la position LM1



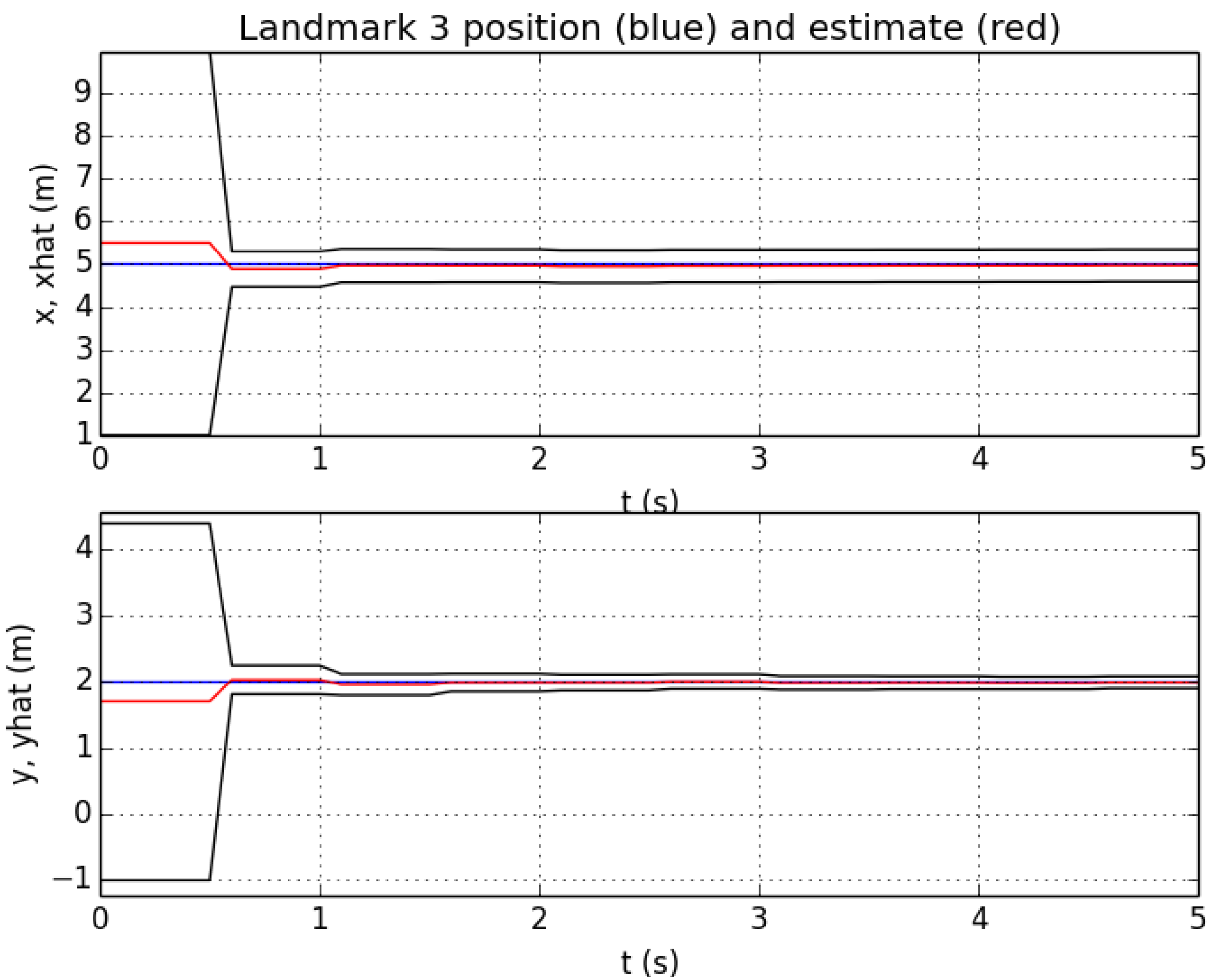
Exemple de mise en œuvre

- Estimation de la position LM2



Exemple de mise en œuvre

- Estimation de la position LM3



Conclusion

Ce qui a été vu :

- localisation par odométrie, les sources d'erreurs
- comment modéliser et propager des incertitudes
- comment fusionner des mesures provenant de différents capteurs
    - fusion statique, filtre de Kalman, filtre de Kalman étendu
- la problématique du SLAM et une première façon de résoudre ce problème à l'aide d'un KF