Matrices Aléatoires et Apprentissage

Benjamin Gilbert & Kayané Robach

February 2022

1 Exercice 3 chapitre 2

1

Pour $z \in \mathbb{C}^+$, on a $z \in \mathbb{C}$ et $Im(z) > 0$ donc $arg(z) \in (0, \pi)$. On a alors aussi $z - 2 \in \mathbb{C}^+$ et $z + 2 \in \mathbb{C}^+$ donc $arg(z-2) \in (0, \pi)$ et $arg(z+2) \in (0, \pi)$. Ainsi,

$$arg(z^2 - 4) = arg(z-2)(z+2) = arg(z-2) + arg(z+2) \in (0, 2\pi)$$

et donc $z^2 - 4 \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^+$. La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^+ & \to & \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+ \\ z & \mapsto & z^2 - 4 \end{array}$ est analytique sur $\mathbb{C}^+$ car polynomiale. On sait de plus que la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{C}^+ \\ Z & \mapsto & \sqrt{Z} \end{array}$ est analytique sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$, on a donc par composée de fonctions analytiques que $z \mapsto \sqrt{z^2 - 4}$ est analytique de $\mathbb{C}^+$ dans $\mathbb{C}^+$.

2

On a $z = x + iy \in \mathbb{C}^+$, et on se place dans la situation où $Im(z) = y \searrow 0 \iff z \longrightarrow x$. Cela revient à projeter le complexe $z \in \mathbb{C}^+$ dont la partie imaginaire est positive sur l'axe des réels.

- $x \in (2, +\infty)$
  $arg(z^2 - 4) \searrow 0$ et $\sqrt{z^2 - 4} \underset{z \to x}{\longrightarrow} \sqrt{(x-2)(x+2)} = \sqrt{x^2 - 4}$.
  On obtient $Im\, \sqrt{z^2 - 4} \underset{z \to x}{\longrightarrow} 0$.
- $x \in (-\infty, 2)$
  $arg(z^2 - 4) \nearrow 2\pi$ et $\sqrt{z^2 - 4} \underset{z \to x}{\longrightarrow} -\sqrt{(x-2)(x+2)} = -\sqrt{x^2 - 4}$.
  On obtient $Im\, \sqrt{z^2 - 4} \underset{z \to x}{\longrightarrow} 0$.
- $x \in (-2, 2)$
  $\sqrt{z^2 - 4} = \sqrt{(z-2)(z+2)} \underset{z \to x}{\longrightarrow} \sqrt{(x-2)(x+2)} = i\sqrt{(2-x)(x+2)} = i\sqrt{4 - x^2}$. De plus, si $x \pm 2$ on a $\sqrt{z^2 - 4} \underset{z \to x}{\longrightarrow} 0$.

En conclusion, on obtient $Im\, \sqrt{z^2 - 4} \underset{z \to x}{\longrightarrow} \sqrt{(4 - x^2)_+}$.

3

On va montrer que $m(z)$ est la TS de la loi du demi-cercle de paramètre 1 en développant:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} \times \frac{1}{2\pi}\sqrt{(4-\lambda^2)_+}\, d\lambda \\
=&\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} \times \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-\lambda^2}\, \mathbb{1}_{\lambda\in[-2,2]}\, d\lambda \\
=&\int_{-2}^{2} \frac{1}{\lambda - z} \times \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-\lambda^2}\, d\lambda
\end{aligned}$$

Changement de variable : $u = arccos(\frac{\lambda}{2}) \iff \lambda = 2cos(u)$, $d\lambda = \frac{du}{u'} = -\frac{\sqrt{1-cos^2(u)}\, du}{1/2}$

$$\begin{aligned}
=&\int_{\pi}^{0} \frac{1}{2cos(u) - z} \times \frac{2\sqrt{1-cos^2(u)}\sqrt{1-cos^2(u)}}{-1/2\times 2\pi}\, du \\
=&\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{1}{2cos(u) - z} \times (1-cos^2(u))\, du \\
=&\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2cos(u) - z} sin^2(u)\, du \\
=&\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{e^{iu}+e^{-iu} - z}\left(\frac{e^{iu}-e^{-iu}}{2i}\right)^2\, du \\
=&-\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{e^{iu}+e^{-iu} - z}(e^{iu}-e^{-iu})^2\, du
\end{aligned}$$

Changement de variable : $x = e^{iu}$, $du = \frac{dx}{x'} = \frac{dx}{ix}$ on remarque que $e^{i0} = e^{2i\pi} = 1$ on a donc la formule d'une integrale de surface sur laquelle $|x| = 1$

$$\begin{aligned}
=&-\frac{1}{4\pi}\oint_{|x|=1} \frac{1}{x+1/x-z}(x-1/x)^2\,\frac{dx}{ix} \\
=&-\frac{1}{4i\pi}\oint_{|x|=1} \frac{(x-1/x)^2}{x(x+1/x-z)}\, dx \\
=&-\frac{1}{4i\pi}\oint_{|x|=1} \frac{x^2+1/x^2-2}{x^2+1-zx}\, dx \\
=&-\frac{1}{4i\pi}\oint_{|x|=1} \frac{x^4+1-2x^2}{x^2(x^2+1-zx)}\, dx
\end{aligned}$$

On devrait ensuite pouvoir trouver 2 résidus z et $-\sqrt{z^2-4}$ dans le contour defini par $|x| = 1$ tels que :

$$
\begin{aligned}
&\oint_{|x|=1} \frac{x^4+1-2x^2}{x^2(x^2+1-zx)}\,dx \\
&= 2i\pi\left(z-\sqrt{z^2-4}\right)
\end{aligned}
$$

(en appliquant le théorème des résidus).
On aurait alors :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4i\pi}\oint_{|x|=1} \frac{x^4+1-2x^2}{x^2(x^2+1-zx)}\,dx \\
&= -\frac{1}{4i\pi}\times 2i\pi\left(z-\sqrt{z^2-4}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\times\left(z-\sqrt{z^2-4}\right) \\
&= \frac{-z+\sqrt{z^2-4}}{2} \\
&= m(z)
\end{aligned}
$$

(Nous n'arrivons pas à le montrer rigoureusement.)
Sinon, on applique simplement le théorème d'Herglotz.

- La fonction $m : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ est analytique sur $\mathbb{C}^+$ par composée de fonctions analytiques.
- $\forall z \in \mathbb{C}^+$, il faut montrer que $m(z)$ est la solution de l'équation $X^2 + zX + 1 = 0$ ayant une partie imaginaire positive. (Nous n'y arrivons pas).
- Il faut trouver M tel que $|m(z)| \leq \frac{M}{Im(z)}$:

$$
\begin{aligned}
|m(z)| &= \frac{1}{2}\left|-z+\sqrt{z^2-4}\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left(|z|+|\sqrt{z^2-4}|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(|z|+\sqrt{|z^2-4|}\right) \\
&= \frac{|z|}{2}\left(1+\sqrt{\left|1-\frac{4}{z^2}\right|}\right) \\
&= \frac{|z|}{2}\left(1+\sqrt{\left|1-\frac{2}{z}\right|}\sqrt{\left|1+\frac{2}{z}\right|}\right) \\
&\leq \frac{|z|}{2}\left(1+1+\frac{2}{|z|}\right) \\
&= |z|+1
\end{aligned}
$$

On obtient dans ce cas, que m est la TS d'une mesure positive μ sur $\mathbb{R}$ de masse totale M.

4

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}^+$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} Im\, m(z) &= \frac{1}{\pi} Im \left(\frac{-z + \sqrt{z^2 - 4}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} Im \left(-z + \sqrt{z^2 - 4} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} [\, Im \left(\sqrt{z^2 - 4} \right) - Im(z) \,] \\
&\underset{y \searrow 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi} [\, \sqrt{(4 - x^2)_+} - 0 \,]
\end{aligned}$$

D'ou $\underset{y \searrow 0}{lim}\ \frac{1}{\pi} Im\, m(x + iy) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(4 - x^2)_+}$.

5

$m = ST(\mu)$ donc nous avons : $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}^+$, $Im(x + iy) \leq \frac{M}{|m(z)|}$ où $\frac{M}{|m(z)|}$ est intégrable. De plus, $\forall\, a,\ b \in \mathbb{R}$ points de continuité de μ :

$$\begin{aligned}
\mu([a, b]) &= \underset{y \searrow 0}{lim}\ \frac{1}{\pi}\ Im \int_a^b m(x + iy) dx \\
&= \underset{y \searrow 0}{lim} \int_a^b \frac{1}{\pi}\ Im\, m(x + iy) dx
\end{aligned}$$

par convergence dominée on a :

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \underset{y \searrow 0}{lim}\ \frac{1}{\pi}\ Im\, m(x + iy) dx \\
&= \int_a^b \frac{1}{2\pi} \sqrt{(4 - x^2)_+} dx
\end{aligned}$$

On obtient ainsi le résultat, $\mu(dx) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(4 - x^2)_+} dx$.

2 Exercice 4 chapitre 2

1

Comme X et X_δ sont des transformées de Stieltjes, $X + X_\delta$ en est une et, $-\frac{1}{z + X + X_\delta}$ est une transformée de Stieltjes de probabilité sur $\mathbb{R}$ (en utilisant la proposition 23 du cours). Son module est ainsi borné par $Im(z)^{-1}$.

2

On a $X^2 + zX + 1 = 0$ et $X_\delta^2 + zX_\delta + 1 = \delta$. En soustrayant les 2 équations il vient :

$$\begin{aligned} X^2 - X_\delta^2 + z(X - X_\delta) &= -\delta \\ \iff (X - X_\delta)(X + X_\delta) + z(X - X_\delta) &= -\delta \\ \iff (X - X_\delta)(X + X_\delta + z) &= -\delta \\ \iff \frac{X - X_\delta}{f(z)} &= \delta \\ \iff X - X_\delta &= f(z)\,\delta \\ \implies |X - X_\delta| &\leq Im(z)^{-1}\,|\delta| \end{aligned}$$

On en conclue que $X - X_\delta = \mathcal{O}_z(|\delta|)$

3 Exercice 1 examen 2021

1

$$f_Y(x) = g(x)\mathbb{1}_{[\alpha,\beta]}(x)$$

(a)

$V = \sigma Y$
Pour Φ continue bornée sur $\mathbb{R}$ on utilise le théorème de transfert:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi(V)] &= \int \Phi(v) f_V dv \\ \mathbb{E}[\Phi(\sigma Y)] &= \int \Phi(\sigma y) f_y dy \\ &= \int \Phi(\sigma y) g(y) \mathbb{1}_{[\alpha,\beta]}(y) dy \\ &= \int \Phi(v) g(\frac{v}{\sigma}) \mathbb{1}_{[\sigma\alpha,\sigma\beta]}(v) dv \end{aligned}$$

Ainsi V admet la densité $f_V(x) = g(\frac{x}{\sigma})\mathbb{1}_{[\sigma\alpha,\sigma\beta]}(x)$

(b)

$W = Y + a$
Pour Φ continue bornée sur $\mathbb{R}$ on utilise le théorème de transfert:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Phi(W)] &= \int \Phi(w) f_W dw \\
\mathbb{E}[\Phi(Y+a)] &= \int \Phi(y+a) f_y dy \\
&= \int \Phi(y+a) g(y) \mathbb{1}_{[\alpha,\beta]}(y) dy \\
&= \int \Phi(w) g(w-a) \mathbb{1}_{[\alpha+a,\beta+a]}(w) dv
\end{aligned}
$$

Ainsi V admet la densité $f_W(x) = g(w-a)\mathbb{1}_{[\alpha+a,\beta+a]}(w)$

2

A hermitienne, $a \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$

(a)

Etant donné la décomposition spectrale de

$$A = U\Lambda U^\star = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k u_k^\star$$

on a

$$\sigma A = \sigma U\Lambda U^\star = \sum_{k=1}^{n} (\sigma\lambda_k) u_k u_k^\star$$

Ainsi, σA est aussi hermitienne et on obtient donc que $Sp(\sigma A) = \{\sigma\lambda_k\}_k = \sigma Sp(A)$.

(b)

Pour X non nul,

$$(A + aI_n)X = AX + aI_nX = \Lambda X + aI_nX = (\Lambda + aI_n)X$$

On reconnait donc que

$$Sp(A + aI_n) = \{\lambda_k + a\}_k$$

3

(a)

On applique le théorème de Wigner à la matrice aléatoire σX de taille $(n \times n)$, dont les entrées sont toutes centrées et de variance 1. $V = \sigma\frac{X}{\sqrt{n}}$ est hermitienne et a pour valeurs propres $\{\sigma\lambda_k\}_{1\leq k\leq n}$, où les λ_k désignent les valeurs propres de la matrice X. Nous savons que la mesure spectrale associee a $\frac{X}{\sqrt{n}}$ tend vers la loi du demi-cercle de parametre 1. On obtient donc par théorème que la mesure spectrale associée à V : $L_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \delta_{\sigma\lambda_k}$ converge étroitement vers la loi du demi cercle de parametre σ. En effet, pour toute fonction f continue bornée sur $\mathbb{R}$,

$$\int f(u)L_n(du) = \int f(u)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \delta_{\sigma\lambda_k}(du) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\sigma\lambda_k)$$

$$\longrightarrow \int_{-2}^{2} f(\sigma\lambda)\frac{\sqrt{(4-\sigma^2\lambda^2)_+}}{2\pi}d(\sigma\lambda) = \int_{-2\sigma}^{2\sigma} f(\lambda)\frac{\sqrt{(4\sigma^2-\lambda^2)_+}}{2\pi\sigma}d\lambda$$

(b)

Puisque de plus, les entrées de la matrice ont leur quatrième moment fini nous savons que presque surement

$$vp_{max}(V) \longrightarrow 2\sigma$$

(c)

De même, presque surement

$$vp_{min}(V) \longrightarrow -2\sigma$$

4

On applique maintenant le théorème de Wigner en considérant la matrice aléatoire $W = \frac{\sigma X}{\sqrt{n}} + aI_n$ de taille $(n \times n)$, dont toutes les entrées ont pour variance 1, les entrées diagonales ont pour espérance a et toutes les entrées hors diagonales sont centrées. W est hermitienne et a pour valeurs propres $\{\sigma\lambda_k + a\}_{1\leq k\leq n}$, où les λ_k désignent les valeurs propres de la matrice X. On remarque que le seul changement par rapport a precedemment vient du fait que les entrées diagonales sont non centrées donc le spectre est translaté. On peut appliquer le théorème de Wigner pour obtenir que pour toute fonction f continue bornée sur $\mathbb{R}$,

$$\int f(u)L_n(du) = \int f(u)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \delta_{\sigma\lambda_k+a}(du) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\sigma\lambda_k + a)$$

$$\longrightarrow \int_{-2\sigma}^{2\sigma} f(u-a)\frac{\sqrt{(4\sigma^2-(u-a))_+}}{2\pi\sigma}d(u-a) = \int_{-2\sigma+a}^{2\sigma+a} f(\lambda)\frac{\sqrt{(4\sigma^2-\lambda^2)_+}}{2\pi\sigma}d\lambda$$

On a alors, $vp_{min}(V) \longrightarrow -2\sigma + a$ et $vp_{max}(V) \longrightarrow 2\sigma + a$.

5

...

6

On notera c_2 la limite de $\frac{n_2}{n}$.
Par Wigner, la mesure spectrale associée à $\frac{X^{(1)}}{\sqrt{n_1}}$ tend presque surement vers la loi du demi-cercle de paramètre 1. De même pour le comportement asymptotique de la mesure spectrale associée à $\frac{X^{(2)}}{\sqrt{n_2}}$.

On a donc d'apres la question 3 : $L_{\frac{X^{(1)}}{\sqrt{n}}} = L_{\frac{X^{(1)}}{\sqrt{n_1}}\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n}}} \longrightarrow \mathbb{P}_{sc,\sqrt{\frac{n_1}{n}}}(d\lambda)$ et $L_{\frac{X^{(2)}}{\sqrt{n}}} = \longrightarrow \mathbb{P}_{sc,\sqrt{\frac{n_2}{n}}}(d\lambda)$.
En découle la convergence étroite suivante :

$$L_{\frac{X}{\sqrt{n}}} = c_1 L_{\frac{X^{(1)}}{\sqrt{n}}} + c_2 L_{\frac{X^{(2)}}{\sqrt{n}}} \longrightarrow c_1 \mathbb{P}_{sc,\sqrt{c_1}}(d\lambda) + c_2 \mathbb{P}_{sc,\sqrt{c_2}}(d\lambda)$$

7

Ce qui importe c'est le fait que les valeurs diagonales de notre matrice soient réelles, de même espérance et de même variance. Ensuite les valeurs hors diagonales peuvent être complexes et d'une variance différente puisqu'elle n'intervient pas dans la limite. L'hypothèse d'independance n'est donc pas importante ici. Par exemple on peut prendre $X^{(1)} = X^{(2)}$.

8

$c = c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, d'après la question 6 on a donc la convergence étroite suivante :

$$L_{\frac{X}{\sqrt{n}}} = cL_{\frac{X^{(1)}}{\sqrt{n}}} + cL_{\frac{X^{(2)}}{\sqrt{n}}} \longrightarrow c\mathbb{P}_{sc,\sqrt{c}}(d\lambda) + c\mathbb{P}_{sc,\sqrt{c}}(d\lambda)$$

On remarque que cette limite vaut $2\,c\,\mathbb{P}_{sc,\sqrt{c}}(d\lambda) = \mathbb{P}_{sc,\frac{1}{\sqrt{2}}}(d\lambda)$

9

En utilisant tout ce qui a été fait précédemment, on trouve que L_Y converge étroitement vers

$$c_1\,\mathbb{P}_{sc,\sqrt{c_1}}\,\mathbb{1}_{[-2\sqrt{c_1}+a,2\sqrt{c_1}+a]}\,(d\lambda) \;\; + \;\; c_2\,\mathbb{P}_{sc,\sqrt{c_2}}\,\mathbb{1}_{[-2\sqrt{c_2}+b,2\sqrt{c_2}+b]}\,(d\lambda)$$

10

Le support admet 2 composantes connexes si $[-2\sqrt{c_1}+a, 2\sqrt{c_1}+a]$ et $[-2\sqrt{c_2}+b, 2\sqrt{c_2}+b]$ sont 2 intervalles distincts de $\mathbb{R}$. Autrement dit il faut, soit $2\sqrt{c_1}+a < -2\sqrt{c_2}+b$, soit $2\sqrt{c_2}+b < -2\sqrt{c_1}+a$.
On note que $c_2 = 1 - c_1$. La condition portant sur a, b et c_1 est donc la suivante :
$\sqrt{c_1} + \frac{a}{2} < \frac{b}{2} - \sqrt{1-c_1}$ ou $\sqrt{1-c_1} + \frac{b}{2} < \frac{a}{2} - \sqrt{c_1}$.

11

Puisque $a < b$, on se place dans le cadre suivant : $[-2\sqrt{c_1}+a, 2\sqrt{c_1}+a] \;<\; [-2\sqrt{c_2}+b, 2\sqrt{c_2}+b]$.
Notons que les moments d'ordre 4 sont bien définis. Chacune des valeurs propres "d'intérêt" tend vers la borne du support de la mesure spectrale qui lui correspond.

a

$\lambda_1(Y) = \lambda_{max}(Y) \longrightarrow 2\sqrt{1-c_1} + b$

b

Nous avons l'impression qu'il est plus intéressant de regarder les valeurs propres n_1 et $n_1 + 1$ donc $\lambda_{n_1}(Y) \longrightarrow 2\sqrt{c_1} + a$

b

$\lambda_{n_1+1}(Y) \longrightarrow -2\sqrt{1-c_1}+b$

d

$\lambda_n(Y) = \lambda_{min}(Y) \longrightarrow -2\sqrt{c_1}+a$