Toulouse School of Economics
Université Toulouse III Paul Sabatier

Architecture et Optimisation

Kayané Robach

Magistère d'Economiste Statisticien

Sommaire

Introduction

Le but de ce projet est de construire et résoudre un problème d'optimisation appliqué à l'architecture.

Comment construire une structure agréable à vivre en utilisant un recuit simulé ?

Le recuit simulé

Dans un espace E fini on construit $H : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

But du recuit simulé : Trouver le minimum d'une fonction complexe H à tâtons.

L'algorithme de recuit simulé est un algorithme stochastique s'appuyant sur l'algorithme de Hastings Metropolis et la mesure de Gibbs.

Le principe de cet algorithme est de construire une loi de probabilité μ_T qui se concentre sur des points de E où H est proche de argmin H $= \{x \in E, H(x) = \underset{x \in E}{min} H(x) = \underline{H}\}$ puis d'utiliser l'algorithme de Metropolis permettant de construire un chaine de Markov de loi invariante μ_T qui va tendre quand T $\longrightarrow$ 0 vers une dirac en argmin H.

Le problème du petit lotissement

Sur un terrain, nous construisons des maisons et nous voulons qu'il y ait le moins de vis à vis possible dans notre lotissement.

But : Minimiser le vis à vis ie: maximiser la distance globale entre maisons.

H sera donc : l'opposé de la norme du vecteur des distances entre maisons.

Avec 3 maisons par exemple nous définissons H telle que :

$$H(lotissement) =$$

$$-||(d(maison_1, maison_2), d(maison_2, maison_3), d(maison_2, maison_3))||$$

Fonctionnement de l'algorithme

L'algorithme de Hastings-Metropolis construit une suite par itérations.

Chaque terme vise à rapprocher la suite du minimum de la fonction objectif.

Un nouveau terme est choisi par une matrice P dite de sélection (P étant construite en fonction du problème).

Avec une probabilité ρ ce terme est accepté dans la construction de la suite.

Globalement, on nomme Q la probabilité de procéder à la transition d'un état à un autre dans la construction de la suite. (Q dépend de P et de ρ).

Fonctionnement de l'algorithme

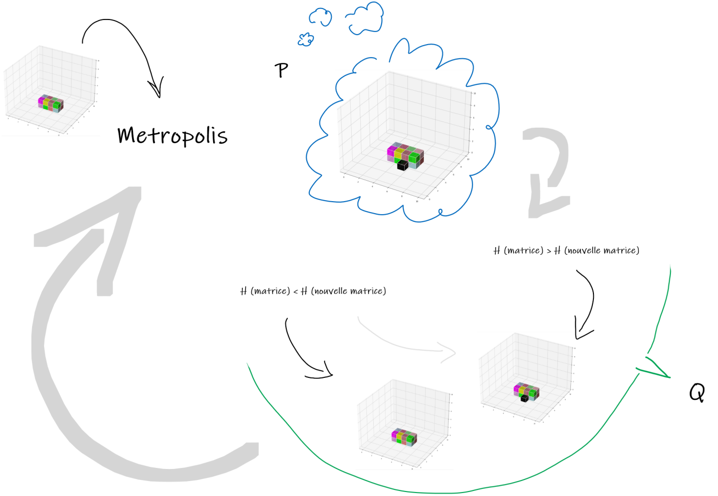

Figure 1: Décomposition de l'algorithme de Metropolis.

Fonctionnement de l'algorithme

- On donne une matrice initiale à l'algorithme (représentant ici notre terrain avec quelques maisons).
- On choisi une maison en fonction d'une certaine probabilité.
- Avec une certaine probabilité on déplace cette maison.

Concrètement :

- Nous avons une matrice avec des emplacements occupés et des emplacements libres.
- Nous choisissons une maison à déplacer.
- Nous cherchons les emplacements voisins* de cette maison qui sont libres et nous sélectionnons un de ces espaces non occupés.
-

$$\begin{cases} \text{si } H \searrow & \text{nous déplaçons la maison} \\ \text{sinon} & \text{nous déplaçons la maison de temps en temps} \end{cases}$$

Si H ne diminue pas : nous souhaitons quand même explorer de temps en temps les alentours.
Cela nous permettrait de sortir d'un minima local si nous nous retrouvions coincés.

Le problème du petit lotissement

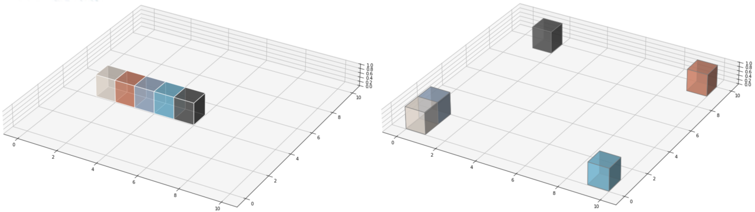

Figure 2: Evolution du petit lotissement avec 5 maisons.

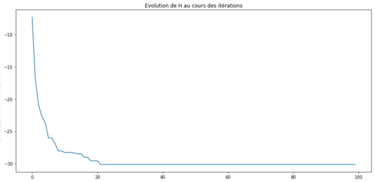

Figure 3: Evolution de H au cours des itérations.

Un petit problème ?

H prend en compte la distance moyenne des maisons aux autres.

Dans la position finale l'algorithme n'a pas d'intérêt à bouger le 5ème cube car cette distance moyenne restera inchangée.

Solution : H devient la somme des inverses des distances entre maisons.

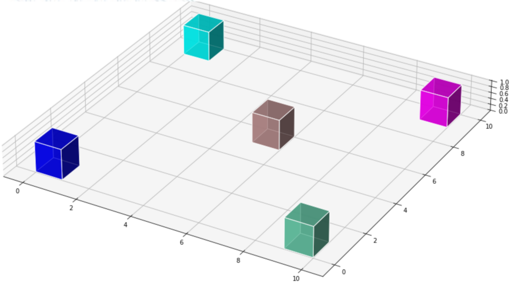

Figure 4: Lotissement final avec 5 maisons.

La magie d'Hastings-Metropolis appliquée à notre problème

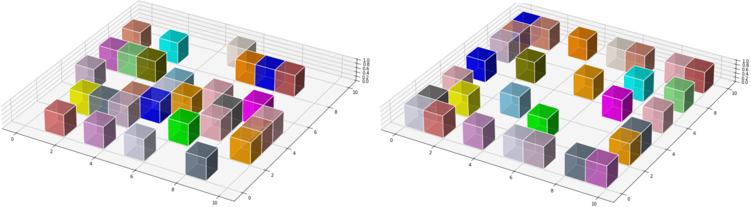

Figure 5: Evolution du petit lotissement avec 1/3 du terrain occupé.

Problème du HAV, Habitation Agréable à Vivre

Transposons le problème en 3D.

Nous avons de nouvelles contraintes :

1. Le moins de vis à vis possible.
2. 1 seule structure.
3. Le moins de surfaces en contact entre les cubes.
4. Un champ visuel traversant maximal.

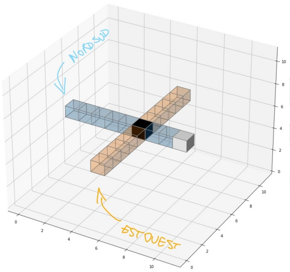

Figure 6: Définition du champ visuel.

Ainsi H est la somme de :

1. La moyenne des surfaces en contact des cubes.
2. L'inverse de la moyenne des champs visuels des cubes.

Le fait d'avoir une seule structure rentre en compte dans la construction de P.

Premiers essais

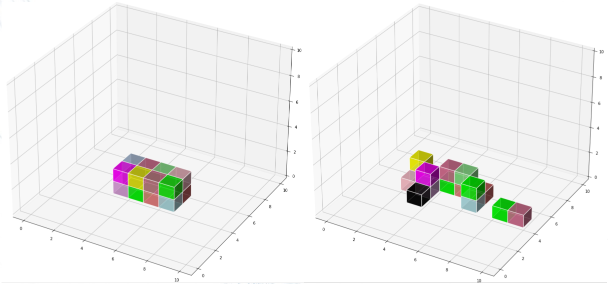

Figure 7: Lancement de l'algorithme en 3D.

Le cube déplacé sépare la structure mais il ne peut jamais palier à ce problème sans revenir à sa place.

Solutions : changer la norme ? changer la position initiale ? changer le nombres de cubes ?

Nouveaux essais

On utilise désormais la norme 2 partout.

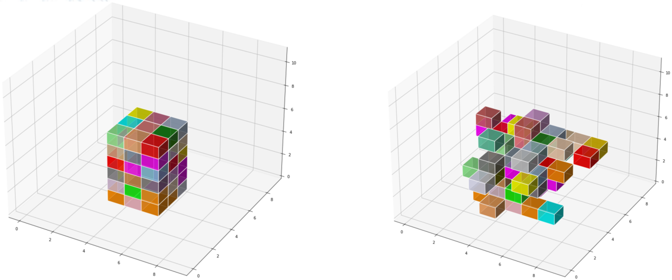

Figure 8: Production en 3D avec la norme euclidienne et plus de cubes

L'algorithme ne va pas au bout car trop de groupes de cubes se forment...

Résultats finaux

Nous allons tenter d'utiliser la norme 2 uniquement pour identifier le nombre de groupes de cubes (des cubes en diagonale sont donc considérés comme étant en lien).

Nous gardons la norme 1 pour le reste, c'est à dire la localisation des voisins des cubes, les surfaces en contact, l'identification des places libres autour...

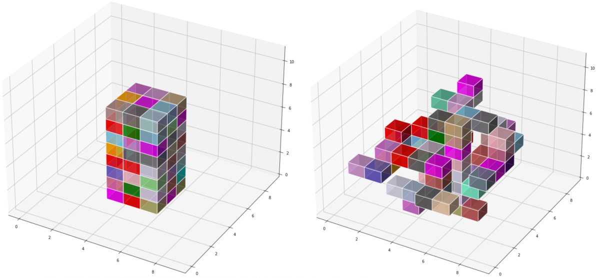

Figure 9: Production en 3D après 3h20.

- Notes du cours de Probabilités numériques, Vincent Lemaire, Sorbonne Université
- https://stackoverflow.com/
- https://www.geeksforgeeks.org/