

1 Formulazione del modello matematico

Lo scopo principale del seguente elaborato è lo sviluppo di un sistema di controllo in retroazione dell'elevazione di una antenna.

In particolare ci si focalizzerà sullo studio di tale sistema in ambito digitale, quindi attraverso l'utilizzo di segnali discreti, piuttosto che continui, nonché delle opportune tecniche d'analisi e sviluppo per questa tipologia di problema.

Il sistema in esame può essere modellato come una massa rotante attorno ad un asse e soggetta ad attrito viscoso..

Attraverso l'equilibrio delle coppie si ottiene:

$$C_m = J_e \frac{dw}{dt} + f_e w$$

Dove C_m rappresenta la *coppia motrice*, J_e il *momento d'inerzia* dell'antenna, w la *velocità angolare* e f_e il *coefficiente di attrito viscoso*.

A tal proposito vale la relazione:

$$C_m = k_{me} i_a$$

Ovvero la coppia risulta essere proporzionale (attraverso il termine k_{me}) alla corrente di armatura. A tal proposito, quest'ultima può essere espressa come:

$$i_a = \frac{v(t) - k_{me} w}{R_a} = \frac{u(t) - k_{me} w}{R_a}$$

Sostituendo questo valore nella precedente ed eguagliando le coppie, si ha:

$$J_e \frac{dw}{dt} + f_e w = k_{me} \frac{u(t) - k_{me} w}{R_a}$$

Scegliendo $x_1(t) = w(t)$, $x_2(t) = \theta(t)$, come variabili di stato, si ottiene quindi il seguente sistema in termini di Variabili di Stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\left(\frac{f_e}{J_e} + \frac{k_{me}^2}{R_a J_e}\right) x_2(t) + \frac{k_{me}}{R_a J_e} u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

A tal proposito è bene far notare come il motore presenti come ingresso la tensione d'armatura $u(t)$ e fornisca in uscita la posizione angolare $\theta(t)$. Per quanto riguarda la tensione in ingresso, essa è fornita attraverso un convertitore di potenza posto antecedentemente al motore stesso. Tale convertitore presenta in ingresso una tensione $v(t)$, fornendo in uscita la tensione $u(t)$ secondo la seguente relazione:

$$v(t) = \tau \dot{u}(t) + u(t)$$

Volendo includere, quindi, anche tale convertitore di potenza nel modello complessivo del nostro sistema VS, possiamo operare la sostituzione $\tau \dot{u}(t) + u(t) = v(t)$ e considerare come terza variabile di stato $x_3 = u(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\left(\frac{f_e}{J_e} + \frac{k_{me}^2}{R_a J_e}\right)x_2(t) + \frac{k_{me}}{R_a J_e}x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -\frac{x_3(t)}{\tau} + \frac{v(t)}{\tau} \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t) \\ y(t) = \underline{C} \underline{x}(t) + \underline{D} \underline{u}(t) \end{cases}$$

Dove:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{f_e}{J_e} + \frac{k_{me}^2}{R_a J_e}\right) & \frac{k_{me}}{R_a J_e} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}; \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix}; \quad \underline{C} = [1 \quad 0 \quad 0]; \quad \underline{D} = 0$$

Per passare al modello Ingresso-Uscita si può partire dalla relazione:

$$y(t) = x_1(t)$$

Derivando

$$\dot{y}(t) = \dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\ddot{y}(t) = \ddot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t)$$

e sostituendo tali valori nella equazione di $\dot{x}_2(t)$ si ottiene:

$$\ddot{y}(t) + \left(\frac{f_e}{J_e} + \frac{k_{me}^2}{R_a J_e}\right)\dot{y}(t) - \frac{k_{me}}{R_a J_e}x_3(t) = 0$$

Ricordando che

$$\dot{x}_3(t) = -\frac{x_3(t)}{\tau} + \frac{v(t)}{\tau}$$

Derivando l'equazione precedente e sostituendo il valore di $\dot{x}_3(t)$

$$\ddot{y}(t) + \left(\frac{f_e}{J_e} + \frac{k_{me}^2}{R_a J_e} \right) \dot{y}(t) + \frac{x_3(t)}{\tau} \frac{k_{me}}{R_a J_e} = \frac{v(t)}{\tau} \frac{k_{me}}{R_a J_e}$$

Dalla si può ricavare il valore di x_3 che sostituito nella precedente ci porta al modello Ingresso-Uscita cercato:

$$\ddot{y}(t) + \left(\frac{f_e}{J_e} + \frac{k_{me}^2}{R_a J_e} + \frac{1}{\tau} \right) \dot{y}(t) + \frac{1}{\tau} \left(\frac{k_{me}^2}{R_a J_e} + \frac{1}{\tau} \right) y(t) = \frac{v(t)}{\tau} \frac{k_{me}}{R_a J_e}$$

Per quanto riguarda i parametri, sono stati scelti i seguenti valori:

$$\begin{array}{ll} J_e = 20 & \left[\frac{Kg}{m^2} \right] \\ f_e = 240 & \left[\frac{N m s}{rad} \right] \\ R_a = 0.30 & [\Omega] \\ k_{me} = 1.20 & \left[\frac{N m}{A} \right] \\ \tau = 0.1 & \end{array}$$

2 Analisi a ciclo aperto

2.1 Tempo continuo

Passiamo, a questo punto, al calcolo della funzione di trasferimento a tempo continuo. Per quanto riguarda il modello espresso in forma di Variabili di Stato, si ha

$$P'(s) = \underline{\underline{C}}([s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}]^{-1}\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{D}})$$

$$P'(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s + \left(\frac{f_e}{J_e} + \frac{k_{me}^2}{R_a J_e} \right) & -\frac{k_{me}}{R_a J_e} \\ 0 & 0 & s + \frac{1}{\tau} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici dei parametri, si ha quindi

$$P'(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s + 12.24 & -2 \\ 0 & 0 & s + 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{2}{s(s+10)(s+12.24)}$$

Che rappresenta la funzione di trasferimento tra il segnale in ingresso al motore $U(s)$ e l'elevazione dell'antenna $\theta(s)$.

A tal proposito è immediato ricavare i poli di tale funzione di trasferimento. Si ha infatti che il polinomio caratteristico di tale sistema presenta radici, rispettivamente in:

$$\begin{cases} p_{s1} = 0 \\ p_{s2} = -12.24 \\ p_{s3} = -10 \end{cases}$$

Il che ci fa concludere come tale funzione di trasferimento risulti essere non BIBO stabile. Infatti è semplice verificare come un comune set-point a gradino basti per rendere la risposta divergente.

In figura sono rappresentati i poli a ciclo aperto del sistema in analisi:

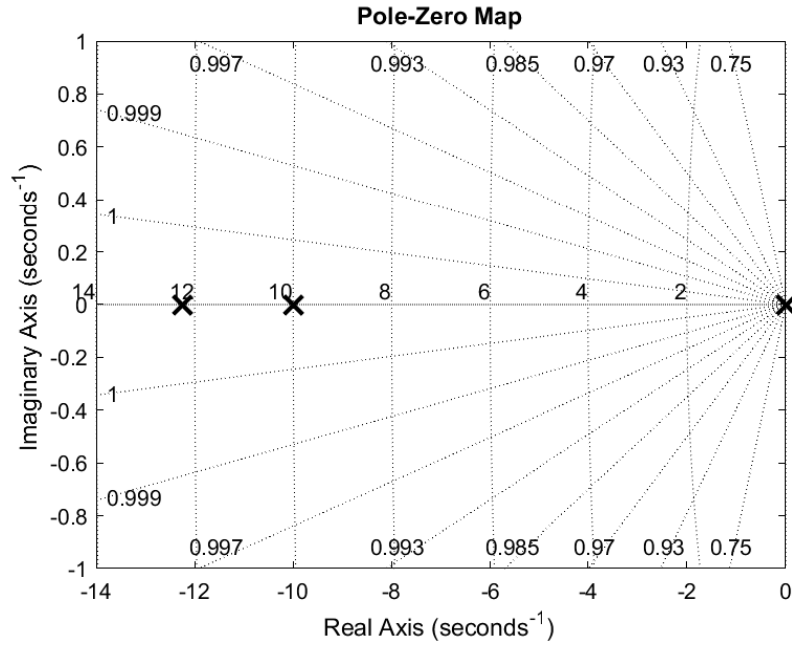


Figura 1:

Mentre in figura2 è rappresentata la risposta al gradino unitario

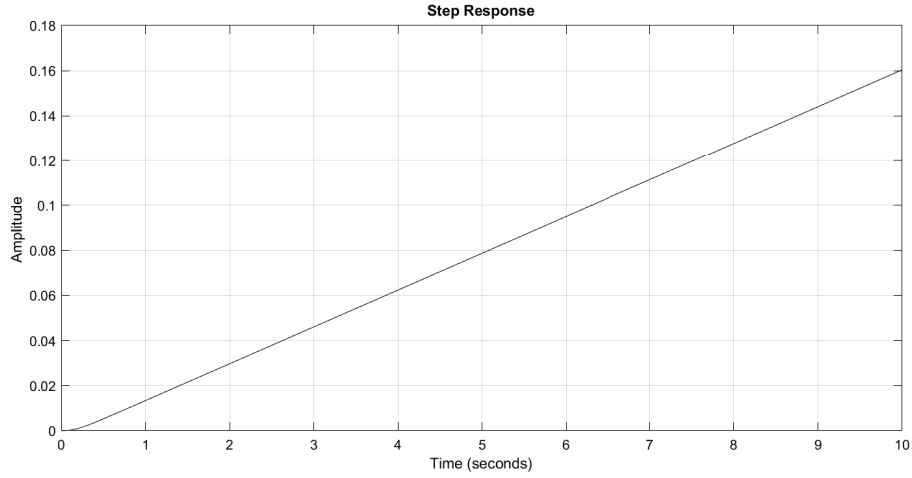


Figura 2: Risposta al gradino unitario del sistema convertitore-motore

Come si vede dalla figura 2 il sistema non è BIBO stabile, poiché la risposta ad almeno un segnale limitato (in questo caso il gradino unitario), diverge.

Si noti che la presenza di un polo nell'origine nel dominio di s corrisponde ad un polo sulla circonferenza di raggio unitario nel dominio z . Infatti vale la seguente relazione di mapping fra piano s e z : $|z| = e^{sT_c} = e^{\sigma T_c + j\omega T_c} = e^{\sigma T_c} e^{j\omega T_c}$ con T_c tempo di campionamento.

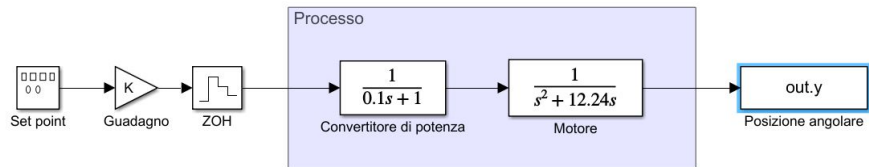


Figura 3: Rappresentazione modello a ciclo aperto

2.2 Tempo discreto

Il passo successivo della nostra analisi risiede nella discretizzazione del processo in esame. A tal proposito è bene notare come, per operare tale passaggio, sia necessario partire dalla funzione di trasferimento a ciclo aperto precedentemente ottenuta.

Si opererà, a tale scopo, l'utilizzo di un organo di tenuta di tipo zero ("Zero Order Hold" o ZOH) con un tempo di campionamento pari a T_c .

Si ricordi tale organo presenta una funzione di trasferimento pari a

$$G_s = \frac{1 - e^{-T_c s}}{s}$$

A tal proposito possiamo definire la nuova funzione di trasferimento del processo come:

$$P^*(s) = (1 - e^{-T_c s}) \frac{P(s)}{s}$$

$$P^*(s) = (1 - e^{-T_c s}) \frac{0.20}{s^2(s + 12.24)}$$

Per passare dal dominio di *Laplace* a quello *Zeta*, si avvale della seguente trasformazione:

$$P(z) = \frac{z}{z-1} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{P^*(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT_c} \right\}$$

$$P(z) = \frac{z}{z-1} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{0.20}{s^2(s + 12.24)} \right] \Big|_{t=kT_c} \right\}$$

Se prendiamo un periodo di campionamento $T_c = 0.1s$ si avrà che la nostra funzione di trasferimento sarà del tipo:

$$P(z) = \frac{1.97 \cdot 10^{-4} z^2 + 4.67 \cdot 10^{-4} z + 6.489 \cdot 10^{-5}}{z^3 - 1.66z^2 + 0.77z - 0.11}$$

La quale presenta tre poli in:

$$\begin{cases} p_{z1} = 1 \\ p_{z2} = 0.3679 \\ p_{z3} = 0.2941 \end{cases}$$

e due zeri in:

$$\begin{cases} z_{z1} = -2.2196 \\ z_{z2} = -0.1482 \end{cases}$$

É immediato notare come il sistema discreto appena presentato sia, così come la controparte continua, semplicemente stabile per via del polo nella circonferenza di raggio unitario.

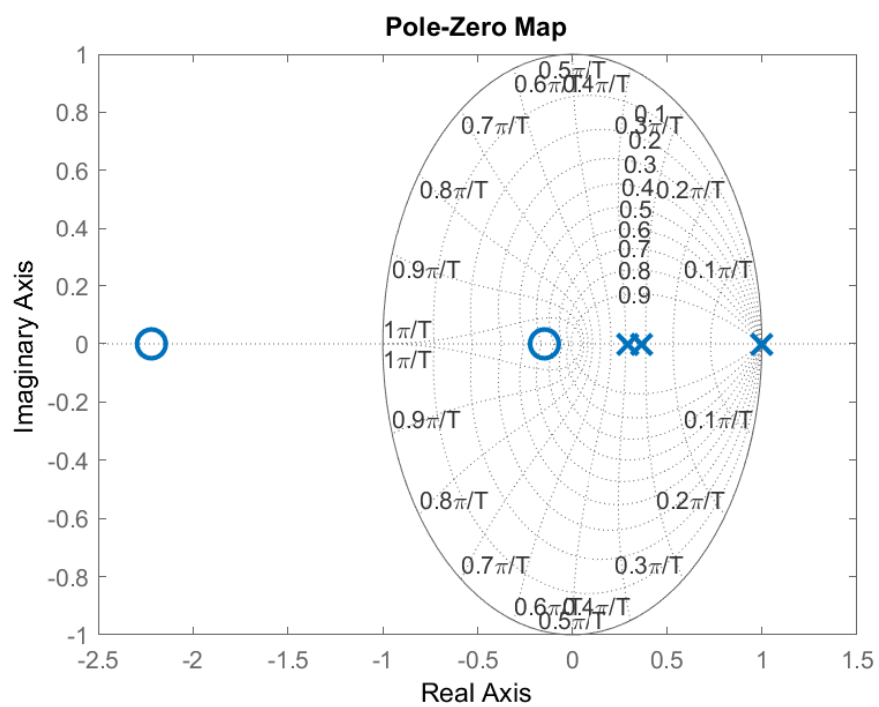


Figura 4: Posizione degli zeri e dei poli per la funzione di trasferimento a ciclo aperto discreta

3 Chiusura dell'anello di retroazione

Per quanto riguarda il sistema a ciclo chiuso, vogliamo che siano rispettate le seguenti specifiche:

- Stabilità a ciclo chiuso
- Tempo di assestamento $T_{a5\%}$ prossimo ad 1s

A tal proposito opereremo due diverse tecniche per la risoluzione del problema: una basata sull'assegnamento dei poli nel sistema VS e l'altra basata sulla discretizzazione di un sistema a tempo continuo.

3.1 Sintesi mediante assegnamento di poli

Partiamo dal nostro sistema in Variabili di Stato e operiamo una discretizzazione dello stesso per poterlo utilizzare nel nostro problema di soddisfacimento delle specifiche.

Nel nostro caso vogliamo progettare un sistema di controllo in retroazione che garantisca una risposta ad un set-point costante ed un tempo di assestamento al 5% pari a circa 1s. Per tale problema si è quindi scelto di utilizzare un periodo di campionamento di 0.1s (pari quindi ad un decimo del tempo di assestamento).

In secondo luogo ricaviamo il modello VS del nostro sistema discreto (si è utilizzata la funzione `ssdata` di MATLAB). Si hanno quindi le seguenti matrici:

$$\underline{\underline{A_d}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0577 & 0.0005 \\ 0 & 0.2941 & 0.0066 \\ 0 & 0 & 0.3679 \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{B_d}} = \begin{bmatrix} 0.0002 \\ 0.0049 \\ 0.6321 \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{C_d}} = [1 \quad 0 \quad 0]; \quad \underline{\underline{D_d}} = 0$$

Dovremmo quindi fare in modo di piazzare i poli a ciclo chiuso nei punti più opportuni per garantire il soddisfacimento delle specifiche, spostandoli possibilmente verso il centro della circonferenza di raggio unitario.

Inoltre bisogna verificare che il nostro problema di assegnamento dei poli sia risolubile, attraverso il calcolo della matrice di controllabilità e del relativo rango. Nel nostro abbiamo che:

$$M_c = \begin{bmatrix} B_d & A_d B_d & A_d^2 B_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0.0008 & 0.0012 \\ 0.0049 & 0.0056 & 0.0032 \\ 0.6321 & 0.2325 & 0.0855 \end{bmatrix}$$

Siccome la matrice di controllabilità presenta rango pieno ($\text{rank}(M_c) = 3$) il problema di assegnamento dei poli è quindi risolubile. A tal proposito, possiamo quindi operare il metodo di assegnamento dei poli, per determinare i guadagni in retroazione da dare alle variabili di stato per e ottenere i poli a ciclo chiuso desiderati.

Per quanto riguarda l'assegnamento dei poli, supponiamo arbitrariamente di volerli assegnare in posizione $p_{z1} = 0.35$, $p_{z2} = 0.45$ e $p_{z3} = 0.65$ in modo da avere un tempo di assestamento al 5% di circa 1s.

Siccome la nostra matrice $\underline{\underline{A_d}}$, tuttavia, non risulta essere in forma compagna controllabile.

A tal proposito, possiamo operare una trasformazione di similitudine per ricondurci in forma compagna controllabile e trovare i guadagni k_1 , k_2 e k_3 per l'ottenimento degli autovalori desiderati a ciclo chiuso.

Questa forma è certamente ottenibile poiché abbiamo visto che la nostra matrice di controllabilità presenta rango pieno.

Otteniamo quindi la nostra matrice di trasformazione \underline{T} , moltiplicando la matrice di controllabilità per $\underline{\Gamma}$ (ottenuta dai coefficienti del polinomio caratteristico a tempo discreto).

Si ha quindi:

$$\underline{T} = \underline{M_c} \cdot \underline{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0005 & 0.0002 \\ -0.0023 & -0.0026 & 0.0049 \\ 0.1859 & -0.8180 & 0.6321 \end{bmatrix}$$

Possiamo quindi procedere applicando le seguenti trasformazioni:

$$\underline{A_t} = \underline{T}^{-1} \cdot \underline{A_d} \cdot \underline{T}; \quad \underline{B_t} = \underline{T}^{-1} \cdot \underline{B_d}; \quad \underline{C_t} = \underline{C_d} \cdot \underline{T}; \quad \underline{D_t} = 0$$

Dalle quali si ottengono le matrici:

$$\underline{A_t} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ 0.1082 & -0.7701 & 1.6619 \end{bmatrix}; \quad \underline{B_t} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix};$$

$$\underline{C_t} = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0005 & 0.0002 \\ -0.0023 & -0.0026 & 0.0049 \\ 0.1859 & -0.8180 & 0.6321 \end{bmatrix}; \quad \underline{D_t} = 0$$

La matrice $\underline{A_t}$ risulta adesso essere in forma compagna controllabile, quindi possiamo ricavare agevolmente il polinomio caratteristico a ciclo chiuso come:

$$P_{car}(\underline{A_t} - \underline{B_t}K_t) = z^3 + (a_2 + k_{t2})z^2 + (a_1 + k_{t1})z + (a_0 + k_{t0})$$

$$= z^3 + (-1.6619 + k_{t2})z^2 + (0.7701 + k_{t1})z + (-0.1082 + k_{t0})$$

Con k_{t2} , k_{t1} e k_{t0} da determinare eguagliando il polinomio caratteristico ottenuto con quello desiderato.

A tal proposito abbiamo che tale polinomio è pari a:

$$P_{car}^{des} = z^3 1.45z^2 - 0.6775z - 0.1024$$

Da cui otteniamo i guadagni desiderati imponendo

$$\begin{cases} (a_0 + k_{t0}) = \gamma_0 \\ (a_1 + k_{t1}) = \gamma_1 \\ (a_2 + k_{t2}) = \gamma_2 \end{cases}$$

Dove γ_2 , γ_1 e γ_0 rappresentano i coefficienti del polinomio desiderato

$$\begin{cases} k_{t0} = \gamma_0 - a_0 = 1.45 - 1.6619 = -0,2119 \\ k_{t1} = \gamma_1 - a_1 = -(0.6775 + 0.7701) = -1,4476 \\ k_{t2} = \gamma_2 - a_2 = -(0.1024 + 0.1082) = -0,2106 \end{cases}$$

Per ottenere il vettore dei guadagni desiderato, si opera la trasformazione di similitudine inversa:

$$\underline{k} = \underline{k}_t \cdot \underline{T}^{-1} = [171.6021 \quad 15.1769 \quad 0.1630]$$

Il seguente è il vettore \underline{k} dei guadagni da applicare in retroazione allo stato per ottenere la risposta voluta.¹

Tuttavia, prima di dichiarare concluso il problema, abbiamo ancora un'altra considerazione da fare. Se ora raffigurassimo la risposta al gradino, noteremo che questa, pur soddisfacendo la specifica sul tempo di assestamento, che questa non converge al set-point desiderato. Questo è dovuto al fatto che il guadagno della funzione di trasferimento fra set-point ed uscita risulta essere non unitario.

Dobbiamo quindi compensare tale guadagno attenuando o amplificando il segnale di l'ingresso. Nel nostro caso si trova agevolmente come il valore di tale guadagno (in bassa frequenza) sia pari a $5 \cdot 10^{-3}$, quindi dobbiamo compensare amplificando l'ingresso con un ulteriore guadagno pari a circa $k_r = 170$.

Si ha quindi la seguente risposta al gradino complessiva:

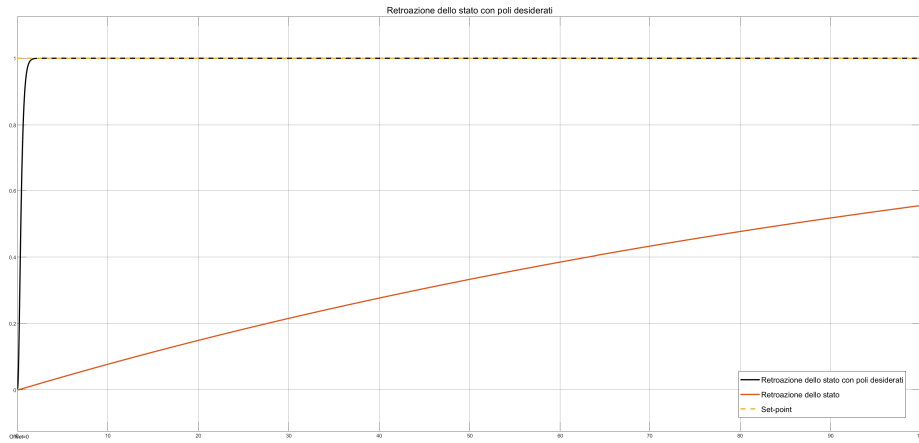


Figura 5: Confronto fra il tempo di assestamento al 5% ottenuto (nero), set-point(giallo) e a retroazione unitaria(arancione)

È possibile verificare come il sistema abbia chiaramente soddisfatto la specifica sul tempo di assestamento richiesta. In figura6 è, inoltre possibile notare, come i poli a ciclo chiuso risultino essere correttamente posizionati nel piano complesso come desiderato.

¹È possibile verificare come si otterrebbero gli stessi risultati utilizzando gli stessi poli a ciclo chiuso nella funzione `place` di MATLAB

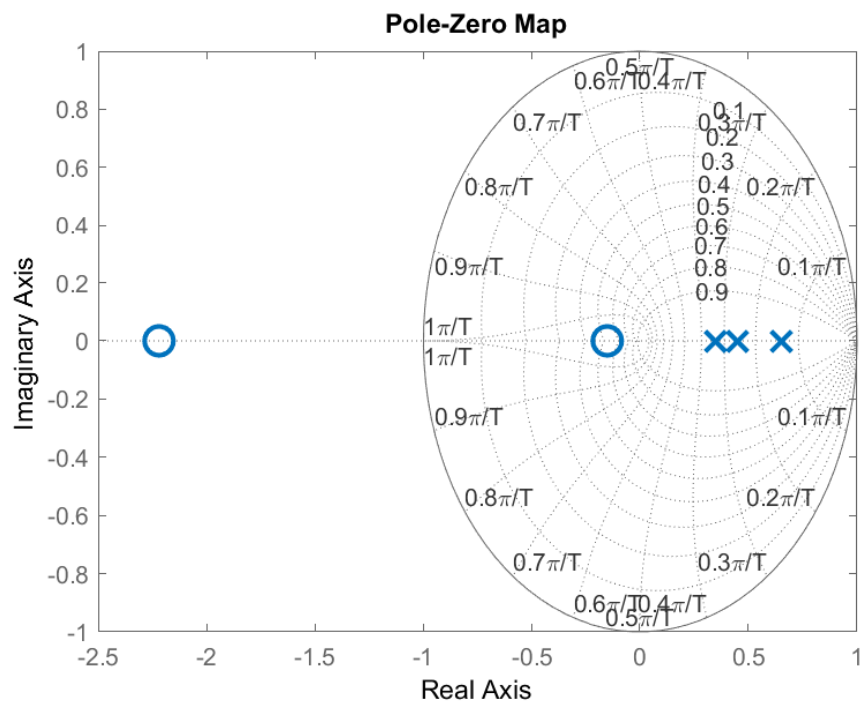


Figura 6: Poli a ciclo chiuso ottenuti

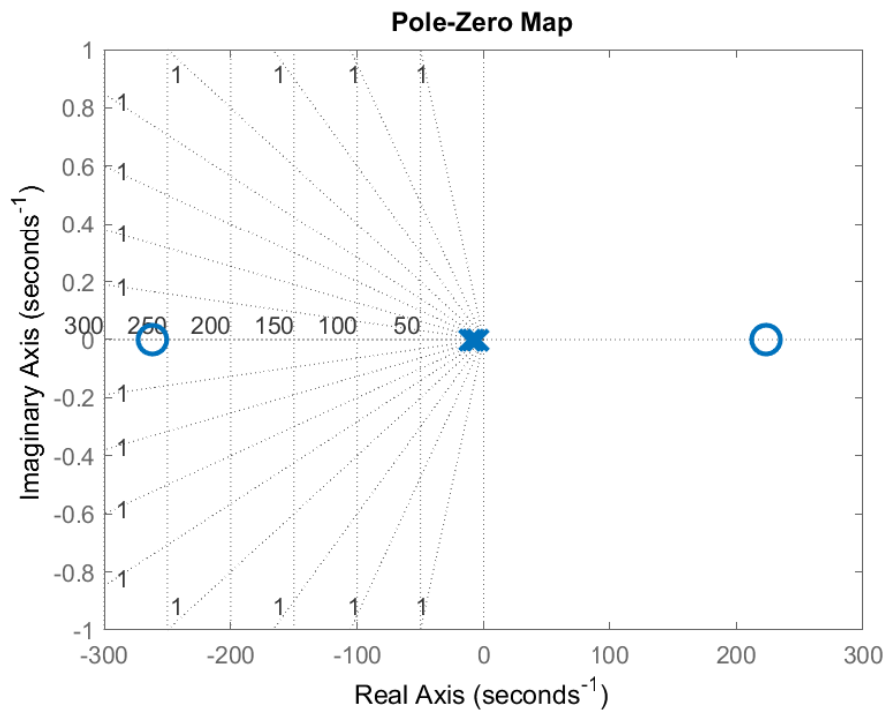


Figura 7: Poli a ciclo chiuso equivalenti (sistema continuo)

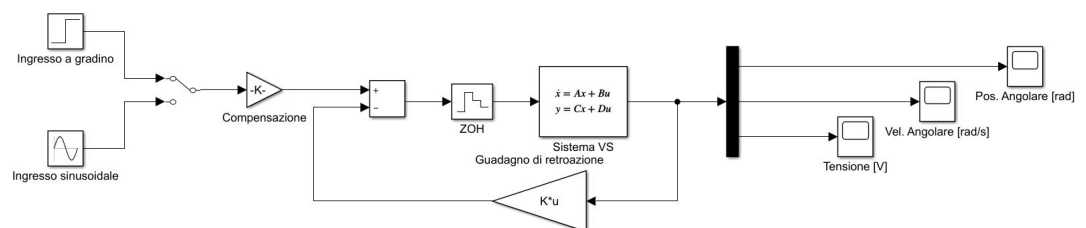


Figura 8: Sistema equivalente per l'assegnamento dei poli

Un ultimo appunto prima di passare al secondo metodo di sintesi. Abbiamo appena visto come varia l'uscita (nel nostro caso la posizione angolare) in relazione ad un set-point costante. Tuttavia ci chiediamo come sarebbe risulterebbe la risposta del sistema nel caso di un set-point sinusoidale.

Il risultato è visibile in figura 9.



Figura 9: Risposta dovuta ad un set-point sinusoidale

Come si può notare, rispetto al sistema con retroazione dello stato unitaria, l'uscita e il set point presentano la stessa ampiezza. Tuttavia, allo stesso tempo, le fasi delle due sinusoidi risultano leggermente diverse e porta l'uscita ad essere leggermente in ritardo rispetto al riferimento.

Tale sfasamento è dovuto principalmente alla presenza dell'organo di tenuta di ordine zero (ZOH), il quale contribuisce con un termine di fase pari a circa $-\frac{\omega T_c}{2}$. Per minimizzare tale ritardo, possiamo quindi agire o riducendo la pulsazione di attraverso ω oppure utilizzando un organo di tenuta con un tempo di campionamento inferiore.

Nel caso si scegliesse la seconda strada, al diminuire di T_c si avrà una progressiva diminuzione di tale ritardo, come visibile in figura 10.

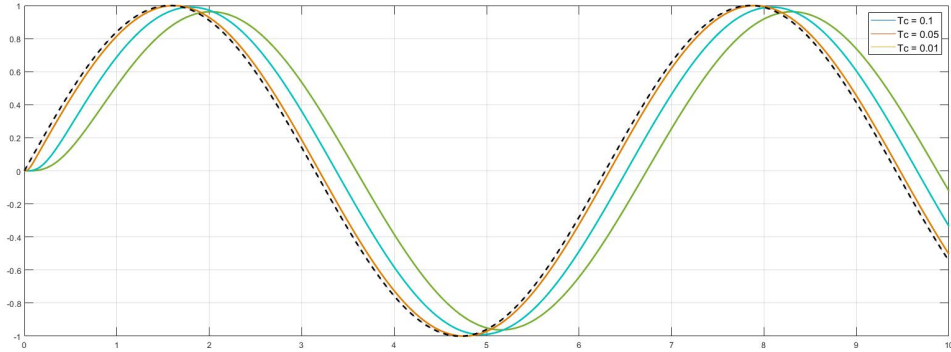


Figura 10: Risposta dovuta ad un set-point sinusoidale al variare del periodo di campionamento

3.2 Sintesi per discretizzazione

Nella sintesi per discretizzazione, ci si avvarrà delle normali tecniche di sintesi sviluppate in tempo continuo, per poi adattarle ad un sistema di controllo di tipo discreto. É bene notare come tale procedura sia, in realtà, un'approssimazione di un sistema controllo continuo tramite i ben noti metodi di:

- Discretizzazione in avanti
- Discretizzazione all'indietro
- Tustin (o dei trapezi)

Indipendentemente dalla scelta del metodo utilizzato, si dovrà operare con una funzione di trasferimento del processo modificata attraverso l'aggiunta di un polo con costante di tempo pari a $\tau = \frac{T_c}{2}$. Si avrà quindi come nuova funzione di trasferimento del processo, la seguente:

$$P_m(s) = \frac{1}{\frac{T_c}{2}s + 1} P(s)$$

Il punto critico del nostro progetto, come nel caso precedente, risulta essere l'elevato tempo di risposta e di assestamento del sistema in questione.

Nel nostro caso, siccome vogliamo un tempo di assestamento al 5% pari a circa 1s, dovremo utilizzare un tempo di campionamento di 0.1s.

Quindi il nostro polinomio modificato, sarà del tipo

$$P_m(s) = \frac{2}{s(s + 20)(s + 10)(s + 12.24)} \quad (1)$$

Il luogo delle radici è rappresentato in figura 11.

Vogliamo fare in modo che i poli siano alla sinistra del punto $\sigma = -3$. Tale cosa non è possibile attraverso l'utilizzo di un semplice regolatore proporzionale

Si è quindi scelto di utilizzare un regolatore del tipo:

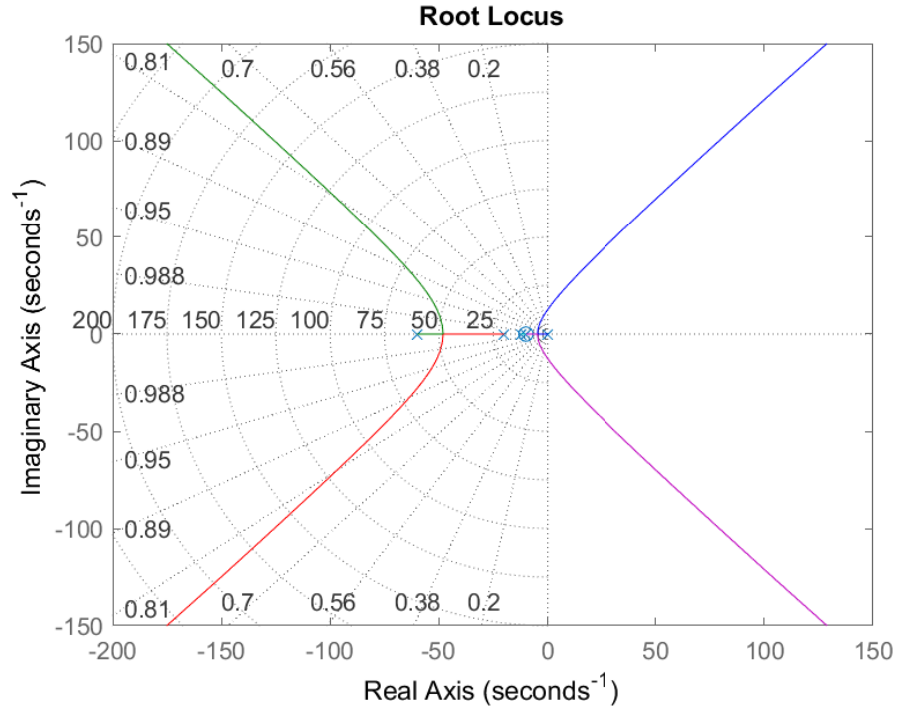


Figura 11: Luogo delle radici equivalente (controllore modificato)

$$C = k_c \frac{s + 10}{s + 80}$$

Con $k_c = 8k_c$ guadagno del controllore. Si noti che il coefficiente 8 è stato scelto per compensare il guadagno in bassa frequenza dovuti alla coppia zero-polo scelta, evidenziando quindi il guadagno desiderato per il controllore.

Che opera una cancellazione sul polo in posizione -10, attraverso uno zero nella stessa posizione. Si è aggiunto pure un polo in alta frequenza per rendere il nostro controllore causale e, quindi, realizzabile.

Il passo successivo del nostro lavoro verte quindi sulla discretizzazione di tale controllore, affinché questo possa essere messo in cascata ad un organo di tenuta di tipo zero e al nostro processo continuo.

In seguito esporremo nello specifico i diversi metodi di discretizzazione utilizzati

3.2.1 Metodo alle differenze in avanti

Per quanto riguarda questo metodo, si ha la discretizzazione del controllore attraverso la sostituzione di variabile $s = \frac{1}{T_c}(z - 1)$

Il nostro nuovo controllore sarà quindi:

$$C_{zA} = k' \frac{10z}{10z + 90}$$

Se andiamo a simulare la risposta al gradino, noteremo che questa risulta essere gravemente instabile. Come ci si aspettava, attraverso tale metodo è possibile ottenere regolatori instabili, a partire da regolatori continui stabili.

Nel nostro caso, infatti, si ha la presenza di un polo in ,estremamente lontano dalla circonferenza di raggio unitario, che rende il nostro sistema instabile. La risposta al gradino è visibile in 12

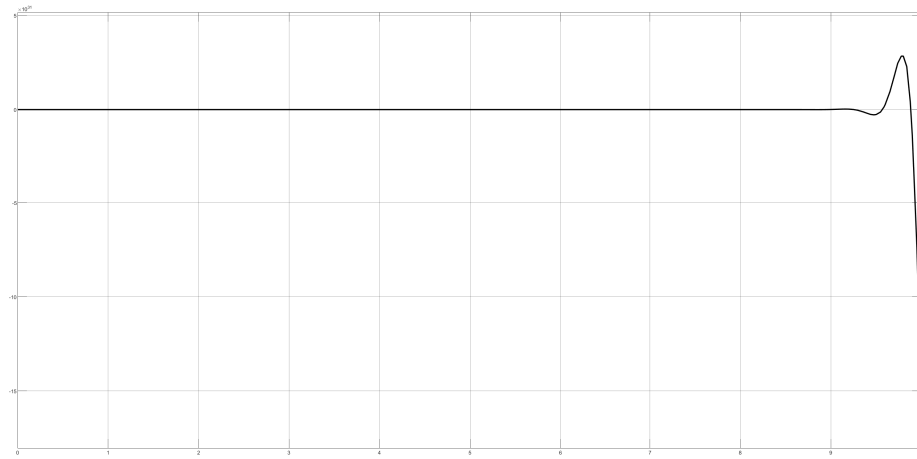


Figura 12: Risposta al gradino, metodo alle differenze in avanti

3.2.2 Metodo alle differenze all'indietro

Un altro metodo per ottenere un regolatore equivalente discreto, a partire da uno continuo, risulta essere quello delle *"differenze all'indietro"*. In questo caso, a differenza del precedente, si otterranno sempre regolatori stabili durante il processo di discretizzazione (ovviamente ciò è vero se e solo se il regolatore di partenza è anch'esso stabile).

In questo caso si opera la sostituzione di variabile $s = \frac{1}{T_c} \frac{z-1}{z}$, ottenendo il seguente regolatore:

$$C_{zI} = k' \frac{20z^2 - 10z}{110z^2 - 10z}$$

La risposta al gradino, mostrata in figura 13, mostra in questo caso l'andamento desiderato: stabile e con un tempo di assestamento prossimo a quello desiderato.

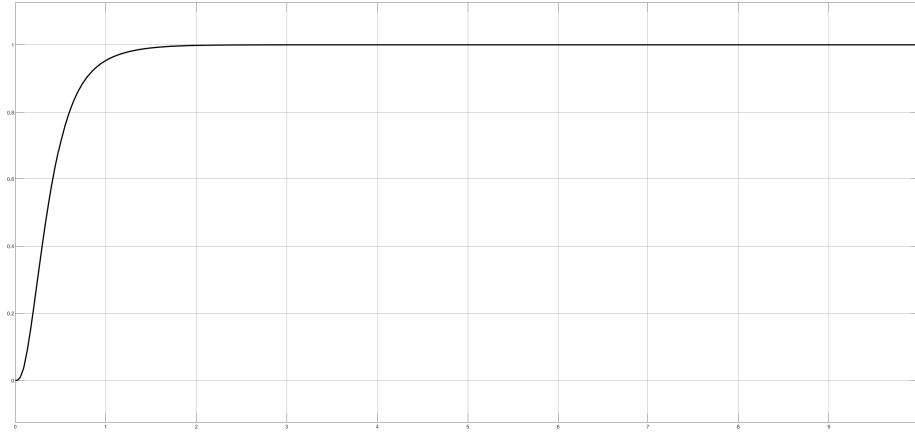


Figura 13: Risposta al gradino, metodo alle differenze all'indietro

3.2.3 Metodo di Tustin

L'ultimo metodo che andremo a vedere è quello di Tustin (denominato anche *"dei trapezi"*). Tale metodo, molto spesso, risulta essere preferibile ai precedenti per via della maggiore fedeltà alla risposta nei confronti del sistema continuo.

In esso si opera la sostituzione di variabile $s = \frac{2}{T_c} \frac{z-1}{z+1}$. Avremo quindi un controllore del tipo:

$$C_{zT} = k' \frac{2.25z - 0.75}{z + 0.5}$$

La cui risposta è rappresentata in figura, dove si è fatto anche un confronto col metodo all'indietro. È possibile vedere come in questo caso, entrambi i metodi diano una risposta pressoché identica con un ingresso a gradino.

Si può vedere (figura 14) come, sia per il metodo di Tustin, si sia riusciti a soddisfare la specifica sul tempo di assestamento al 5% richiesta.

Come ultimo test, infine, si è provato il sistema in esame con un ingresso diverso: ovvero una sinusoide.

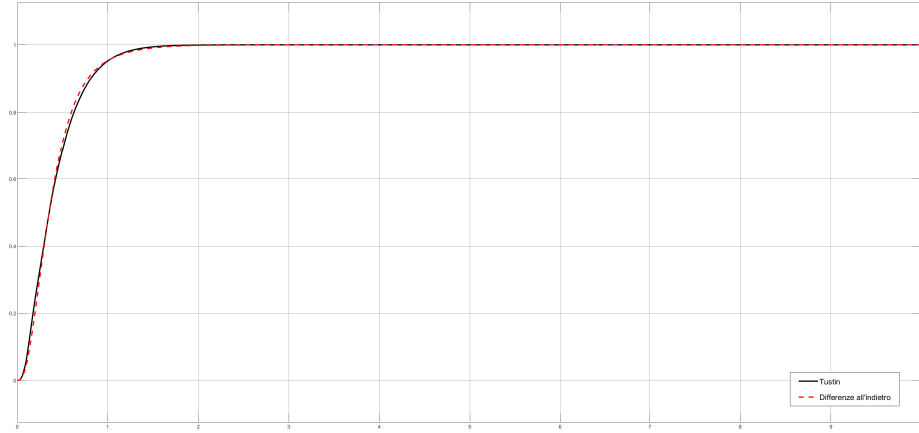


Figura 14: Risposta al gradino, metodo di Tustin

I risultati sono espressi in figura 15, sia per il metodo di Tustin che per quello delle differenze all'indietro (si è tralasciato, per via della non convergenza, quello delle differenze in avanti).

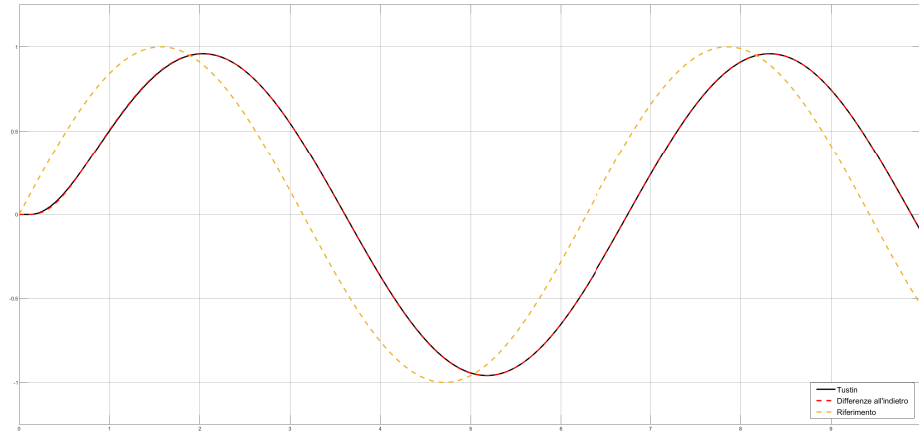


Figura 15: Risposta ad un set-point sinusoidale

Come si può notare, vi è un lieve ritardo di fase fra il riferimento e la risposta, in questo caso lo sfasamento non è dovuto principalmente al convertitore ZOH (il quale da comunque il suo contributo), ma è dovuto alla scelta del controllore stesso che non opera una correzione in tal senso.

In questo caso, bisognerebbe agire maggiormente sul controllore, piuttosto che sul convertitore ZOH.

A tal proposito abbiamo provato ad aumentare il guadagno del controllore a $k = 500$ portando i poli dominanti più vicini all'origine, in modo da compensare tale discrepanza di fase. Come aspettato la risposta, visibile in figura 16, è migliorata e segue più fedelmente il set point desiderato

Si noti che in questo caso, avendo una risposta più pronta, è stato necessario agire anche sul tempo di campionamento per fare in modo di rispettare il vincolo

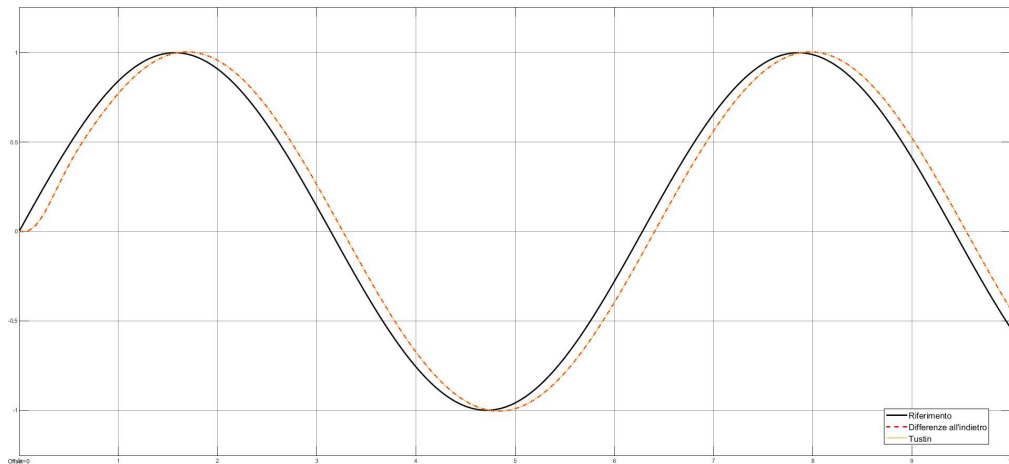


Figura 16: Risposta ottenuta modificando il controllore. Si nota come essa risulti essere più fedele al segnale di set-pont

esposto precedentemente. Si noti che in questo caso, per come detto poc'anzi, la scelta di un tempo di campionamento inferiore non influisca più di tanto sul ritardo di fase. Tale fatto è facilmente verificabile in figura 17 nel quale si è confrontata la risposta ottenuta con lo stesso controllore, ma con due tempi di campionamento diversi (per entrambi si è utilizzato il metodo di Tustin).

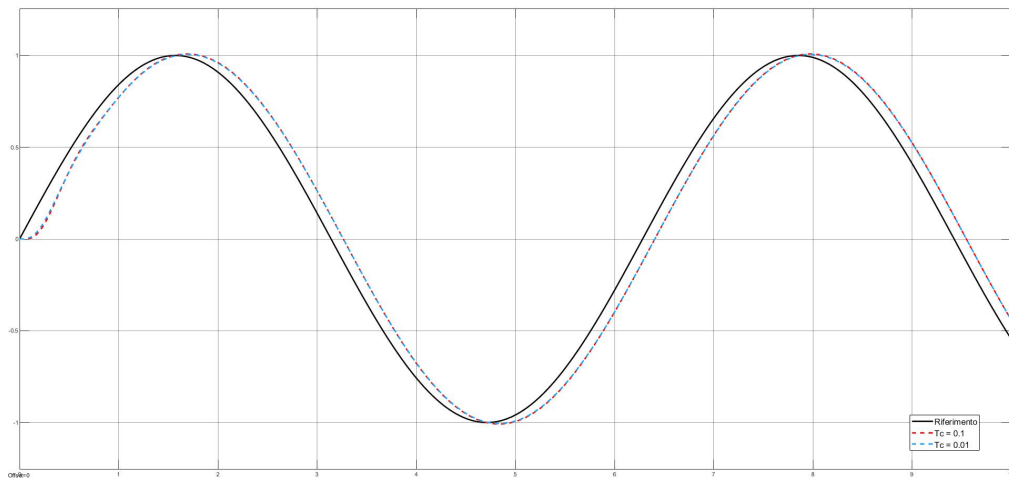


Figura 17: Confronto risposta di figura16 utilizzando tempi di campionamento diversi

3.3 Errore a regime e specifiche statiche

Prima di concludere è bene sottolineare un altro problema inerente ai sistemi di controllo, ovvero l'errore a regime dovuto al tipo di segnale di ingresso o ad eventuali disturbi presenti tra processo e controllore.

Per quanto riguarda la prima fonte di errore, si nota subito come la presenza del polo nell'origine (o nella circonferenza di raggio unitario nel caso del sistema discreto), porti ad una reiezione totale dell'errore a regime dovuto ad un set-point costante².

Ne nostro caso si ha quindi a che fare con un sistema di controllo di tipo 1, il quale riesce ad eliminare completamente errori a regime dovuti a segnali costanti.

Questione diversa è invece quella inerente all'errore dovuto al disturbo. Si può infatti notare come tale polo, essendo proprio del processo e non del controllore, non permette la reiezione totale di un disturbo in catena diretta. In particolare, quindi, tale disturbo dipenderà totalmente dal guadagno del controllore stesso, attraverso la seguente relazione:

$$W_d(0) = k' \frac{A_d}{k_c} \leq A_{des}$$

Con A_d ampiezza del disturbo a A_{des} ampiezza desiderata (in relazione all'ingresso).

Volendo quindi fare in modo di poter reiettare al 99% un disturbo costante di ampiezza pari al del segnale di riferimento, dovremmo avere un guadagno $k_c \geq 100$.

Tale specifica risulta infine, con un guadagno k' pari a 170 (per il set-point a gradino), essere soddisfatta.

²Non possibile con un ingresso a rampa o comunque di ordine superiore