第 28 卷 第 3 期 中国管理科学 Vol. 28, No. 3
2020 年 3 月 Chinese Journal of Management Science Mar., 2020

文章编号:1003－207(2020)03－0132－10
DOI:10.16381/j.cnki.issn1003－207x.2020.03.014

基于多因子 LIBOR 模型的 CMS 数字范围债券定价

吴 平[1],恽钧超[2],董 斌[2]

(1.南京信息工程大学商学院,江苏 南京 210044;2.东南大学经济管理学院,江苏 南京 211189)

摘 要:论文在鞅论和测度变换的基础上,在多因子 LIBOR 市场模型的框架下,通过二阶变差的方法获得了 CMS 利率的近似分布,巧妙的解决了 CMS 利率在 LIBOR 市场模型下不满足对数正态分布的问题。在此基础上,利用 CMS 利率的近似概率分布,求解得出 CMS 范围数字债券的定价,避免了 Monte Carlo 大数据模拟的情况,在对浮动利率产品进行研究的过程中,论文使用了两种不同的方法进行比较,主要是引理法和 Girsanov 法,这为投资者的定价过程提供了选择,有利于投资者获得更好的投资回报。

关键词:LIBOR 市场模型,CMS 利率,CMS 数字范围债券
中图分类号:F224;F832.5 **文献标识码**:A

1 引言

随着我国金融体系的发展,利率衍生产品逐步走进我们的视野。在利率市场化发展的今天,利率衍生产品在金融市场中更加普遍。CMS 利率已成为市场中普遍使用的利率参考指标,它是由 ISDA 定义的互换利率报价。市场参与者利用 CMS 债券赚取利润,市场投资者利用 CMS 债券对冲风险。CMS 作为一种金融工具在金融衍生品市场中起到越来越重要的作用。获得 CMS 数字范围债券定价已成为一个重要问题。以加拿大蒙特利尔银行为例,每天都会发生大量的 CMS 衍生产品交易。CMS 衍生品的定价通常利用数值模拟的方法,这种方法通常效率比较低,运算速度慢。当交易量上升时,已无法满足市场的要求。因而获得 CMS 衍生品的解析解已成为迫切要求。在信息快速变化的大数据时代,拥有准确快速的定价系统是投资获得良好回报的必要保证。怎样获得 CMS 衍生品的解析解,目前国内外许多学者和实际市场参与者对这一理论有着广泛的研究。

Antonov 和 Arneguy[1] 在带有随机波动率的 LIBOR 市场模型下,通过有效的测度变换和二维的 Laplace 变换的方法,求解出一系列的 CMS 价差债券带有复杂伽马函数的解析解。Wu Tingpin 和 Chen Sonnan[2] 在多因子 LIBOR 模型下得出了 CMS 的近似概率分布。完成了三种不同执行价格下 CMS 数字范围价差期权的定价。Belomestny 等[3] 在 LIBOR 市场模型中采用了凸性调整的技术,对 CMS 价差期权的定价进行了讨论。然而,虽然我们已经得到很多 CMS 衍生产品的定价公式,但是大多是对于 CMS 价差债券的,对于 CMS 数字范围债券这一产品的研究还存在深入研究的空间。

Wu 和 Elliott[4] 采用了 Vorst 的方法,通过几何平均代替算术平均,得出了 CMS 利率在多因子 LIBOR 模型下的近似分布。通过修正执行价格,得出了 CMS 数字逐日区间计算债券的定价公式。刘凤琴和金瑜[5] 运用 Monte Carlo 模拟法对 Levy－Libor 模型的局部波动率和瞬时相关系数进行了有效的市场校准。虽然 Levy 方法和 Vorst 方法在对 CMS 数字范围债券定价时可以对 CMS 利率进行估计,但是这两种估计方法的准确性还是有所欠缺,这就导致最后债券的定价并不准确。

本文在多因子 LIBOR 市场模型下,通过二阶变差的方法得出了 CMS 利率的近似的概率分布,解决了对数正态分布的算数平均不是对数正态分布的问题。之后求得 CMS 数字范围债券的定价公式,主要包括固定利率,浮动利率以及后置利率三种情况,避免了过去在定价过程中使用 Monte Carlo 大数据模拟的情况,最后对模型进行了检验。在对浮动利率债券进行定价时,引入了引理法和 Gir-

收稿日期:2017－10－13; 修订日期:2018－03－22
通讯作者简介:恽钧超(1992－),男(汉族),江苏常州人,东南大学经济管理学院,硕士研究生,研究方向:金融工程,E-mail:1610368350@qq.com.

sanov 法两种方式,完善了投资者的定价方法。

总体来说,本文的创新点在于:(1)在多因子 LIBOR 市场模型下,得出了 CMS 利率服从近似的对数正态分布,避免了利率小于零的情况。(2)实验证明,通过二阶变差的方法获得的 CMS 利率的近似分布,更加逼近实际市场。(3)在 CMS 满足的近似的概率分布下,我们得出了 CMS 数字范围债券定价的解析解。(4)Girsanov 定理的应用,使得解析公式更加简洁。(5)避免使用 Monte Carlo 数值模拟的方法。直接获得 CMS 数字范围债券定价的解析解。论文是对实际经济数据进行模型化数据化的良好体现,也是在决策过程中选择最优结果进行判断的良好诠释。

1　LIBOR 市场模型和 CMS 利率

1.1　不同测度下 LIBOR 市场模型

Brace 等[6]提出了 LIBOR 市场模型,与短期利率模型例如 Hull－White 或 Vasicek 模型相比,LIBOR 市场模型具有广阔的市场发展前景。同时在 LIBOR 市场模型中,LIBOR 利率满足对数正态分布,这就使得远期利率为负数的概率为零。

Brigo 和 Mercurio[7]采用伊藤引理,得出了在不同测度下的 LIBOR 市场模型,虽然获得了不同形式的 LIBOR 市场模型,但是由于方程中的漂移项是随机的,所以方程的解析解很难获得。他们通过用 $L_j(0)$ 代替漂移项中的 $L_j(t)$,从而得出远期 LIBOR 利率服从对数正态分布的。早在 Brace 等[6]提出 LIBOR 市场模型时,就使用这个方法求解 CMS 利率。

给定一个概率空间 $(\Omega, F, Q, \{F_t\}_{t\in[0,T]}$, $W(t) = (W_1(t), W_2(t), W_3(t), \cdots, W_n(t))$ 表示 n 维几何布朗运。

$B(t, t_{m(t)})$;瞬时 LIBOR 测度的计价单位

Q;瞬时鞅测度

Q^N 远期鞅测度

T_i 固定交割时间

$\delta_i \delta_i = T_{i+1} - T_i$

$\sigma_i(t) L(t; T_i, T_{i+1})$ 的波动率

$P_i(t, T_i)$;在时刻 T_i 支付 1 的零息债券在 t 时刻的价格

$m(t)$;下一个重置日期的指标 $t < t_{m(t)}$

$L(t; T_i, T_{i+1})$;表示在 $t \leqslant T_i$ 时刻 $[T_i, T_{i+1}]$ 时间段内的远期 LIBOR 利率

$\rho_{i,j}(t)$;表示 $L(t; T_i, T_{i+1})$ 和 $L(t; T_j, T_{j+1})$ 之间的相关系数

$N(x)$;正态累计分布函数

在定价利率衍生品时,相对于瞬时测度或终端测度,有时在某一特定的概率测度下计算更加方便。下面给出的 CMS 数字范围债券的统一定价公式。

$$\begin{aligned} & i < k, t \leqslant T_i: \frac{dL_k(t)}{L_k(t)} \\ &= \sigma_k(t) \left(\sum_{j=i+1}^{k} \frac{\delta_j \sigma_j(t) L_j(0) \rho_{k,j}(t)}{1+\delta_j L_j(0)} dt + dW_k(t) \right) \\ & i = k, t \leqslant T_{i-1}: \frac{dL_k(t)}{L_k(t)} = \sigma_k(t) dW_k(t) \\ & i > k, t \leqslant T_{k-1}: \frac{dL_k(t)}{L_k(t)} \\ &= \sigma_k(t) \left(-\sum_{j=k+1}^{i} \frac{\delta_j \sigma_j(t) L_j(0) \rho_{k,j}(t)}{1+\delta_j L_j(0)} dt + dW_k(t) \right) \end{aligned} \tag{1}$$

其中远期波动率 $\sigma_i(t)$ 由多因子即期波动率转化而来,包含了多因子的形式。

在本文中,我们使用终端测度来推倒我们的公式。

1.2　CMS 利率研究

CMS 利率是固定期限交换利率,它是由 ISDA 所定义的互换利率。在通常情况下,CMS 利率和 LIBOR 利率是不能同时满足对数正态分布的,因为对数正态分布的加权和不是对数正态分布。本文通过二阶变差的方法获得了 CMS 利率的近似的对数正态分布,为获得 CMS 利率衍生品的定价公式铲除了困难。根据掉期利率定价公式以及 LIBOR 利率公式,我们可以得到:

$$\begin{aligned} & \beta = \alpha + n \\ & S_{\alpha,\beta}(t, T_\alpha) = \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} w_i(t) L(t, T_i) \\ & w_i(t) = \frac{P(t, T_{i+1})}{\sum_{k=\alpha}^{\beta-1} P(t, T_{k+1})} \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $S_{\alpha,\alpha+n}(t, T_\alpha)$ 表示有 n 个阶段,重置日期为 $T_\alpha, T_{\alpha+1}, \cdots T_{\alpha+n-1}$ 支付日期为 $T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2}, \cdots T_{\alpha+n}$ 的远期 CMS 掉期利率。$W_i(t)$ 表示远期利率的平均加权参数。$P(t, T_k)$ 表示在时间 T_k 时的 1 美元在 t 的价值。

Brigo 和 Mercurio[7]通过实验分析得出如下结论,$w_i(t)$ 的变化是相当微小的随着时间 t 的变化,相比较于 $L(t, T_i)$,所以可以把 $w_i(t)$ 近似为常数,此时得到 CMS 利率的近似公式如下,这里取 $w_i(0)$。

$$S_{\alpha,\beta}(t,T_\alpha) \simeq \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} w_i(0) L_i(t,T_i) \tag{3}$$

由于 LIBOR 利率服从对数正态分布,因而 CMS 利率不服从对数正态分布。CMS 利率的精确分布很难获得。Brace 等[8]提出使用 LIBOR 市场模型作为中心模型,在此建议下,我们通过近似的方法找到 CMS 利率的近似分布,它的近似分布是对数正态分布。

1.3 二阶变差方法

Wu 和 Elliott[9]首次使用二阶变差的方法,对一篮子债券进行定价。由于 CMS 利率是 LIBOR 利率的加权和,在数学结构上与一篮子债券十分相似。我们采用二阶变差的方法,获得了 CMS 利率的近似分布。这种方法对 CMS 一系列的衍生品的定价有很好的通用性和适用性。

过去在进行这类问题的定价过程中,经常会使用 Levy[10]方法和 Vorst[11]方法。与 Levy 方法和 Vorst 方法相比,通过二阶变差方法求得的 CMS 数字范围债券的价格处于通过 Levy 方法和 Vorst 方法求得的 CMS 数字范围债券价格之间。事实上,Vorst 方法对该类产品的定价是二阶变差方法求得的价格的下界,Levy 方法是上界。在波动率趋于平稳的一些特殊情况下,这三种方法获得的结果是一致的。详细讨论可参见参考文献[9]。从实证分析可知,通过二阶变差获得的 CMS 利率概率分布,更加接近于 Monte Carlo 的模拟结果。它更好的刻画了 CMS 利率趋势。这就使得 CMS 债券价格更加接近于实际市场。在这里远期利率采用了 LIBOR 市场模型,因而 CMS 利率小于零的概率是零,更加符合现实情况。

近似推导如下。已知

$$\frac{dL_k(t)}{L_k(t)} = \sigma_k(t)\left(-\sum_{j=k+1}^{i} \frac{\delta_j \sigma_j(t) L_j(0) \rho_{k,j}(t)}{1+\delta_j L_j(0)} dt + dW_k(t)\right)$$

利用伊藤引理,我们得到

$$L_k(T) = L_k(0) \exp\left(\int_0^T \sigma_k(t)\left(-\sum_{j=k+1}^{i} \frac{\delta_j \sigma_j(t) L_j(0) \rho_{k,j}(t)}{1+\delta_j L_j(0)} - \frac{1}{2}\sigma_k(t)\right) dt + dW_k(t)\right)$$

它的均值:

$$E(L_k(T)) = L_k(0) \exp\left(\int_0^T \left(-\sum_{j=k+1}^{\beta} \sigma_k(t) \frac{\delta_j \sigma_j(t) L_j(0) \rho_{k,j}(t)}{1+\delta_j L_j(0)}\right) dt\right) \tag{4}$$

令 $\hat{S}_{\alpha,\beta}(t,T_\alpha)$ 近似表达 $S_{\alpha,\beta}(t,T_\alpha)$,我们假定 $\ln\hat{S}_{\alpha,\beta}(t,T_\alpha) \sim N(m,V^2)$ 我们利用二阶变差的方法求得方差。

$$V^2 = \left\langle \ln\hat{S}_{\alpha,\beta}(T), \ln\hat{S}_{\alpha,\beta}(T) \right\rangle \tag{5}$$

我们引入一条引理如下:

假设 R 是一个半鞅,那么二次协方差过程 $X,Y \in R$ 通过 $\langle X,Y\rangle$ 定义。对 LnX 采用伊藤引理,我们得到

$$\langle \ln X, \ln Y\rangle = \left\langle \int \frac{dX}{X}, \int \frac{dY}{Y} \right\rangle = \int \frac{d\langle X,Y\rangle}{XY} \tag{6}$$

通过上述引理,可以得到

$$\begin{aligned} V^2 &= \left\langle \ln\hat{S}_{\alpha,\beta}(T), \ln\hat{S}_{\alpha,\beta}(T) \right\rangle \\ &= \left\langle \int \frac{d\hat{S}_{\alpha,\beta}(T)}{\hat{S}_{\alpha,\beta}(T)}, \int \frac{d\hat{S}_{\alpha,\beta}(T)}{\hat{S}_{\alpha,\beta}(T)} \right\rangle \\ &\approx \sum_{i,j=\alpha}^{\beta-1} \frac{w_i(0) w_j(0) L_i(0) L_j(0)}{S_{\alpha,\beta}^2(0)} \left\langle \ln\hat{L}_i(T), \ln\hat{L}_j(T) \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=\alpha}^{\beta-1} \frac{w_i(0) w_j(0) L_i(0) L_j(0)}{S_{\alpha,\beta}^2(0)} \int_0^T \sigma_i(t)\sigma_j(t)\rho_{i,j} dt \end{aligned} \tag{7}$$

式中 $\sigma(t)$ 是远期利率波动率。通过正态分布的均值方差性质,我们有:

$$E[\hat{S}_{\alpha,\beta}(T)] = e^{m+\frac{1}{2}v^2}$$

$$\begin{aligned} m &= \ln E[\hat{S}_{\alpha,\beta}(T)] - \frac{1}{2}V^2 \\ &= \ln E\left[\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} w_i(0) L_i(t,T)\right] - \frac{1}{2}V^2 \\ &= \ln \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} w_i(0) L_i(0) \exp\left(\int_0^{T_\alpha} \left(-\sum_{j=i+1}^{\beta} \sigma_i(t) \frac{\delta_j \sigma_j(t) L_j(0) \rho_{i,j}(t)}{1+\delta_j L_j(0)}\right) dt\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}V^2 \end{aligned} \tag{8}$$

$W_i(t)$ 和 $W_j(t)$ 的相关系数表示为 $\rho_{i,j}$

通过上述推导,我们获得了掉期互换利率的近似概率分布,这个分布是对数正态分布,这在后面获得 CMS 数字范围债券定价的解析解非常重要。

2 CMS 数字范围债券定价

范围债券是指参考利率在给定范围内时获得约定收益的债券。这里参考利率可以是 CMS 利率,LIBOR 利率,或者 CMS 价差利率等等。本文主要研究参考利率为 CMS 利率的情况。

2.1 约定收益为固定利率情况

假定参考利率是 CMS 利率,当 $S_{\alpha,\beta}$ 在利率上界 $R_{\max,\alpha}$ 和下界 $R_{\min,\alpha}$ 之间时,获得固定收益为 R_{fix} 的债券(当 $S_{\alpha,\beta}$ 大于 $R_{\max,\alpha}$ 或小于 $R_{\min,\alpha}$,则不获得任何收益)。下面我们带入公式

$$\delta_\alpha R_{fix}\begin{cases}1 & R_{\min,\alpha}\leqslant S_{\alpha,\beta}\leqslant R_{\max,\alpha}\\ 0 & otherwise\end{cases} \tag{9}$$

根据鞅定价方法,CMS 范围数字债券的定价问题可以拆成一系列的简单数字债券的线性加权组合,通过买或卖一系列的简单数字债券表示。

$$\begin{aligned}&E\left[1_{\{R_{\min,\alpha}\leqslant S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\leqslant R_{\max,\alpha}\}}\right]\\ =&E\left[1_{\{S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\leqslant R_{\max,\alpha}\}}\right]-E\left[1_{\{S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\leqslant R_{\min,\alpha}\}}\right]\\ =&E\left[1_{\{\ln\hat{S}_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\leqslant \ln R_{\max,\alpha}\}}\right]-E\left[1_{\{\ln\hat{S}_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\leqslant \ln R_{\min,\alpha}\}}\right]\end{aligned} \tag{10}$$

在计算出简单数字债券的价格后,通过贴现求和,再乘以时间间隔和固定利率。

由于是正态分布,因而我们得到 CMS 数字范围债券支付 n 次利息在时刻零时的价格为:

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{n}P(0,T_\alpha)\delta_\alpha R_{fix}N\left(\frac{\ln R_{\max,\alpha}-m}{V}\right)\\ -&\sum_{\alpha=1}^{n}P(0,T_\alpha)\delta_\alpha R_{fix}N\left(\frac{\ln R_{\min,\alpha}-m}{V}\right)\end{aligned} \tag{11}$$

这个结果与 BLACK 定价公式非常相似,在 CMS 利率服从对数正态分布的假定下,本文所得的公式非常简洁。

2.2 约定收益为浮动利率情况

浮动利率债券是市场上更加常见的交易产品,与固定利率情况相比,它的求解过程更加复杂。我们通过两种不同的方法获得了这一问题的解析解。其本质都是应用 Girsanov 定理,它们各有优势,互相印证。虽然这两种方法在本质上是一致的,但是不同的思考角度,决定了推导的复杂度和难易度,甚至直接影响到最终的结果是否能够得到适合的解析表达式。

2.2.1 引理法

通常来说,相对于约定收益率为固定利率的情况,约定收益率为浮动利率债券的定价问题复杂在其浮动利率与参考利率是相关的。引理法简单明了,直接从数学的角度出发,解决了相关的随机变量的概率分布求解问题,但缺少现代金融理论的思想,这就使得一些特殊的产品很难用这种方法求得解析解。

通过引理[12]在这里我们有:

$$X\sim N(u_x,\sigma_x^2),\ Y\sim N(u_y,\sigma_y^2)$$

$$\begin{aligned}&E[\exp(X)I_{Y>K}]\\ =&\exp\left(\frac{1}{2}\sigma_x^2\right)N\left(\frac{-K+u_y+\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_y}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&E[\exp(X)I_{Y<K}]\\ =&\exp\left(u_x+\frac{1}{2}\sigma_x^2\right)N\left(\frac{K-u_y-\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_y}\right)\end{aligned} \tag{12}$$

式中 Exp(X)表示 LIBOR 利率取对数之后求指数函数,X 代表 logL,Y 是参考利率,K 是参考利率的界限。

$$\delta_\alpha L(T_\alpha;T_\alpha,T_{\alpha+1})\begin{cases}1 & R_{\min,\alpha}\leqslant S_{\alpha,\beta}\leqslant R_{\max,\alpha}\\ 0 & otherwise\end{cases} \tag{13}$$

在这里约定收益为浮动利率,从均值中这一项不能简单的提取出来。这一项我们仍然化为一系列简单数字债券的线性组合,同时对下标函数两边取对数:

$$\begin{aligned}&E\left[L(T_\alpha;T_\alpha,T_{\alpha+1})1_{\{R_{\min,\alpha}\leqslant S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\leqslant R_{\max,\alpha}\}}\right]\\ =&E\left[L(T_\alpha;T_\alpha,T_{\alpha+1})1_{\{\ln\hat{S}_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\leqslant \ln R_{\max,\alpha}\}}\right]\\ -&E\left[L(T_\alpha;T_\alpha,T_{\alpha+1})1_{\{\ln\hat{S}_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\leqslant \ln R_{\min,\alpha}\}}\right]\end{aligned} \tag{14}$$

运用引理,此时 Y 为 $\ln\hat{S}_{\alpha,\beta}(T_\alpha)$,服从正态分布,X 为 $L(T_\alpha;T_\alpha,T_{\alpha+1})$,K 为上下限取对数值。运用引理,我们可以得到支付 m 次利息的 CMS 数字范围债券,在零时刻的价格为:

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{m}P(0,T_\alpha)\delta_\alpha\exp\left(u_{L_\alpha(\mathrm{T}_\alpha)}+\frac{1}{2}\sigma^2_{L_\alpha(\mathrm{T}_\alpha)}\right)\\ &N\{\ln R_{\max,\alpha}-u_{S_{\alpha,\beta}(\mathrm{T}_\alpha,\mathrm{T}_\alpha)}-\mathrm{cov}(\ln L_\alpha(\mathrm{T}_\alpha),\ln S_{\alpha,\beta}(\mathrm{T}_\alpha,\\ &\mathrm{T}_\alpha))\}/\sigma_{S_{\alpha,\beta}(\mathrm{T}_\alpha,\mathrm{T}_\alpha)}\\ -&\sum_{\alpha=1}^{m}P(0,\mathrm{T}_\alpha)\delta_\alpha\exp\left(u_{L_\alpha(\mathrm{T}_\alpha)}+\frac{1}{2}\sigma^2_{L_\alpha(\mathrm{T}_\alpha)}\right)\\ &N\{\ln R_{\min,\alpha}-u_{S_{\alpha,\beta}(\mathrm{T}_\alpha,\mathrm{T}_\alpha)}-\mathrm{cov}(\ln L_\alpha(\mathrm{T}_\alpha),\ln S_{\alpha,\beta}(\mathrm{T}_\alpha,\\ &\mathrm{T}_\alpha))\}/\sigma_{S_{\alpha,\beta}(\mathrm{T}_\alpha,\mathrm{T}_\alpha)}\\ &u_{L_\alpha}(\mathrm{T}_\alpha)=E[\ln L_\alpha(T_\alpha)];\\ &\sigma^2_{L_\alpha(\mathrm{T}_\alpha)}=Var[\ln L_\alpha(T_\alpha)];\\ &u_{S_{\alpha,\beta}(\mathrm{T}_\alpha,\mathrm{T}_\alpha)}=E[\ln S_{\alpha,\beta}(\mathrm{T}_\alpha,\mathrm{T}_\alpha)];\\ &\sigma^2_{S_{\alpha,\beta}(\mathrm{T}_\alpha,\mathrm{T}_\alpha)}=Var[\ln S_{\alpha,\beta}(\mathrm{T}_\alpha,\mathrm{T}_\alpha)];\\ &\mathrm{cov}(\ln L_\alpha(\mathrm{T}_\alpha),\ln S_{\alpha,\beta}(\mathrm{T}_\alpha,\mathrm{T}_\alpha))\\ =&\langle\ln L_\alpha(\mathrm{T}_\alpha,\mathrm{T}_\alpha,\mathrm{T}_{\alpha+1}),\ln S_{\alpha,\beta}(\mathrm{T}_\alpha;\mathrm{T}_\alpha,\mathrm{T}_\beta)\rangle\end{aligned} \tag{15}$$

从这里我们可以发现,远期 LIBOR 利率和 CMS 利率的相关性,已经被考虑在我们的模型中。这一点与约定收益为固定利率是不同的,因为在 LIBOR 市场模型的框架结构下,CMS 利率是 LIBOR 利率的加权和,因而两者必然存在相关性,所以在计算数字范围债券定价时,与固定收益的情况是不同的。在下面的章节中,我们对公式中所涉及到的方差,协方差和均值进行具体的推导。

我们直接对远期 LIBOR 利率,使用伊藤引理获得。

$$L_\alpha(T_\alpha)=L_\alpha(0)$$

$$\exp\Big(\int_0^{T_\alpha}\sigma_\alpha(t)(-\sum_{j=\alpha+1}^{\beta}\frac{\delta_j\sigma_j(t)L_j(0)\rho_{\alpha,j}(t)}{1+\delta_jL_j(0)}$$

$$-\frac{1}{2}\sigma_\alpha(t))dt+dW_\alpha(t)\Big) \tag{16}$$

通个对等式两边取对数，我们有：

$$\ln L_\alpha(T_\alpha)=\ln L_\alpha(0)$$

$$+\int_0^{T_\alpha}(\sigma_\alpha(t)(-\sum_{j=\alpha+1}^{\beta}\frac{\delta_j\sigma_j(t)L_j(0)\rho_{\alpha,j}(t)}{1+\delta_jL_j(0)}$$

$$-\frac{1}{2}\sigma_\alpha(t))dt)+\int_0^{T_\alpha}\sigma_\alpha(t)dW_\alpha(t)$$

可见这是一个广义的布朗运动，对这个式子两边求期望和方差，我们有：

$$E[\ln L_\alpha(T_\alpha)]=\ln L_\alpha(0)$$

$$+(\int_0^{T_\alpha}(\sigma_\alpha(t)(-\sum_{j=\alpha+1}^{\beta}\frac{\delta_j\sigma_j(t)L_j(0)\rho_{\alpha,j}(t)}{1+\delta_jL_j(0)}$$

$$-\frac{1}{2}\sigma_\alpha(t))dt))$$

$$Var[\ln L_\alpha(T_\alpha)]=\int_0^{T_\alpha}\sigma_\alpha^2(t)dt \tag{17}$$

由于 CMS 利率近似为对数正态分布，对两边求期望和方差。我们有：

$$E[\ln S_{\alpha,\beta}(T_\alpha,T_\alpha)]\approx E[\ln\hat{S}_{\alpha,\beta}(T_\alpha,T_\alpha)]=m$$

$$Var[\ln S_{\alpha,\beta}(T_\alpha,T_\alpha)]\approx Var[\ln\hat{S}_{\alpha,\beta}(T_\alpha,T_\alpha)]=V^2 \tag{18}$$

通过下述引理，

$$\langle\ln X,\ln Y\rangle=\left\langle\int\frac{dX}{X},\int\frac{dY}{Y}\right\rangle=\int\frac{d\langle X,Y\rangle}{XY} \tag{19}$$

我们获得协方差如下：

$$\mathrm{cov}(\ln L_\alpha(T_\alpha),\ln S_{\alpha,\beta}(T_\alpha,T_\alpha))=\langle\ln L_\alpha(T_\alpha,T_\alpha,T_{\alpha+1}),\ln S_{\alpha,\beta}(T_\alpha;T_\alpha,T_\beta)\rangle$$

$$=\left\langle\int\frac{dL_\alpha(T_\alpha)}{L_\alpha(T_\alpha)},\int\frac{d\hat{S}_{\alpha,\beta}(T_\alpha)}{\hat{S}_{\alpha,\beta}(T_\alpha)}\right\rangle$$

$$\approx\sum_{j=\alpha}^{\beta-1}\frac{w_j(0)L_j(0)}{S_{\alpha,\beta}(0)}\langle\ln L_j(T_\alpha),\ln L_\alpha(T_\alpha)\rangle$$

$$=\sum_{j=\alpha}^{\beta-1}\frac{w_j(0)L_j(0)}{S_{\alpha,\beta}(0)}\int_0^{T_\alpha}\sigma_\alpha(t)\sigma_j(t)\rho_{\alpha,j}dt \tag{20}$$

在最终结果里，所有的模型参数都可以通过市场观测数据估计。我们获得了问题的解析解，避免了 Monte Carlo 模拟的方法。在得到的最终结果里，约定收益为浮动利率的情况与约定利率为固定利率的基本一致，唯一的区别是约定收益是随机的，是由远期 LIBOR 利率迭代产生。在编程上，对于约定收益为固定利率的程序，只要稍加修改就可移植到约定利率为浮动利率的情形，提高了编程效率，缩短了运算时间。对于约定收益是浮动的利率，还可以采用 Girsanov 定理的方法，求得解析解。

2.2.2 Girsanov 定理法

利用 Girsanov 定理方法求解约定收益是浮动利率债券的基本方法，它使用的是现代金融学思想，相比于引理法，适用范围广，过程相对复杂。基本思路就是通过测度变换改变漂移项。对于一些与 CMS 利率相关的衍生产品，在实际应用中，通过 Girsanov 变换，更加简洁，也更加适合，通过下文的推导也可以看出。

Girsanov 变换，主要是指对于一个给定的随机过程，在不同的测度下，漂移项会改变，波动率是不合改变的。新过程的律关于原过程是绝对连续的[12]。

设 $Y(t)\in R^n$ 服从的伊藤过程如下：

$$dY(t)=\beta(t,w)dt+\theta(t,w)dB() \tag{21}$$

假定存在过程 $u(t,w)$ 和 $\alpha(t,w)$，这里 $B(t)\in R^m$，$\beta(t,w)\in R^n$，$\theta(t,w)\in R^{n*m}$，我们有：

$$\theta(t,w)u(t,w)=\beta(t,w)-\alpha(t,w) \tag{22}$$

$$M_t=\exp(-\int_0^t u(t,w)dB_s-\frac{1}{2}\int_0^t u^2(s,w)ds) \tag{23}$$

$dQ(w)=M_T(w)dP(w)$ 在 $F_T^{(m)}$ 上

Q 是 $F_T^{(m)}$ 上的一个概率测度，M_t 是一个鞅（关于 $F_t^{(n)}$ 和 P）。因而：

$\hat{B}(t):=\int_0^t u(s,w)ds+B(t)$，依据 $\hat{B}(t)$，过程 $Y(t)$ 有随机积分表示

$$dY(t)=\alpha(t,w)dt+\theta(t,w)d\hat{B}(t) \tag{24}$$

在定理中，可见通过测度变换，漂移项发生了改变，波动率这一项是不变的。

通过公式(14)CMS 范围数字债券的定价问题可以表示为一系列的简单数字债券的线性加权组合

$$E[L(T_\alpha;T_\alpha,T_{\alpha+1})1_{\{\ln\hat{S}_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\leqslant\ln R_{\max,\alpha}\}}]$$

基于 LIBOR 市场模型，我们得到

$$L_\alpha(T_\alpha)=L_\alpha(0)$$

$$\exp\Big(\int_0^{T_\alpha}\sigma_\alpha(t)(-\sum_{j=\alpha+1}^{\beta}\frac{\delta_j\sigma_j(t)L_j(0)\rho_{\alpha,j}(t)}{1+\delta_jL_j(0)}$$

$$-\frac{1}{2}\sigma_\alpha(t))dt+dW_\alpha(t)\Big)$$

在这里，我们有：

$$L_\alpha(0)\exp\Big(\int_0^{T_\alpha}\sigma_\alpha(t)(-\sum_{j=\alpha+1}^{\beta}\frac{\delta_j\sigma_j(t)L_j(0)\rho_{\alpha,j}(t)}{1+\delta_jL_j(0)}\Big)$$

$$E^{Q^\beta}(\exp[-\int_0^{T_\alpha}\frac{1}{2}\sigma_\alpha^2(t)dt$$

$$+\int_0^{T_\alpha}\sigma_\alpha(t)dW_\alpha(t)]1_{\{\ln\hat{S}_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\leqslant\ln R_{\max,\alpha}\}})$$

令

$$\eta(T_\alpha;T_\alpha,T_{\alpha+1})$$

$$=\int_0^{T_\alpha}\sigma_\alpha(t)(-\sum_{j=\alpha+1}^{\beta}\frac{\delta_j\sigma_j(t)L_j(0)\rho_{\alpha,j}(t)}{1+\delta_jL_j(0)})$$

同时使用

$$\frac{dR^\beta}{dQ^\beta}=\exp[-\int_0^{T_\alpha}\frac{1}{2}\sigma_\alpha^2(t)dt+\int_0^{T_\alpha}\sigma_\alpha(t)dW_\alpha(t)]$$

通过测度变换，

原式简化为：

$$L_\alpha(0)\exp(\eta(T_\alpha;T_\alpha,T_{\alpha+1}))$$

$$E^{Q_\beta}\left(\frac{dR^\beta}{dQ^\beta}1_{\{\ln\hat{S}_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\leqslant\ln R_{\max,\alpha}\}}\right)$$

采用 Girsanov 和 Radon－Nikodym 定理，可以得到：

$$L_\alpha(0)\exp(\eta(T_\alpha;T_\alpha,T_{\alpha+1}))$$

$$E^{Q^\beta}\left(\frac{dR^\beta}{dQ^\beta}1_{\{\ln\hat{S}_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\leqslant\ln R_{\max,\alpha}\}}\right)$$

$$=L_\alpha(0)\exp(\eta(T_\alpha;T_\alpha,T_{\alpha+1}))$$

$$E^{R^\beta}(1_{\{\ln\hat{S}_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\leqslant\ln R_{\max,\alpha}\}})$$

$$=L_\alpha(0)\exp(\eta(T_\alpha;T_\alpha,T_{\alpha+1}))$$

$$R^\beta(\ln\hat{S}_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\leqslant\ln R_{\max,\alpha})\tag{25}$$

在这里，R^β 表示新的概率测度

在 Girsanov 定理中的

$$u(t,w)=-\sigma_\alpha(t)$$

通过测度变换，约定收益利率为浮动利率的计算公式类似于上面约定收益利率为固定利率的计算公式，然而由于变换了测度空间，在原模型中的漂移项需要进行修正。

在新测度下，LIBOR 市场模型发生了改变。

$$L_\alpha(T_\alpha)=L_\alpha(0)$$

$$\exp\left(\int_0^{T_\alpha}\sigma_\alpha(t)(-\sum_{j=\alpha+1}^{\beta}\frac{\delta_j\sigma_j(t)L_j(0)\rho_{\alpha,j}(t)}{1+\delta_jL_j(0)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sigma_\alpha(t))dt+d\hat{W}_\alpha(t)\right)$$

由于 LIBOR 市场模型的漂移项发生了改变，因而 CMS 利率也随之改变，在新的模型下，CMS 的方差和期望重新计算如下：

$\hat{S}_{\alpha,\beta}(T_\alpha)$ 为 $\tilde{S}_{\alpha,\beta}(T_\alpha)$ 满足 $\ln\tilde{S}_{\alpha,\beta}(T_\alpha)\sim N(\tilde{m},\hat{V}^2)$

它的方差是：

$$\hat{V}^2=\langle\ln\tilde{S}_{\alpha,\beta}(T),\ln\tilde{S}_{\alpha,\beta}(T)\rangle$$

$$\left\langle\int\frac{d\tilde{S}_{\alpha,\beta}(T)}{\tilde{S}_{\alpha,\beta}(T)},\int\frac{d\tilde{S}_{\alpha,\beta}(T)}{\tilde{S}_{\alpha,\beta}(T)}\right\rangle$$

$$\approx\sum_{i,j=\alpha}^{\beta-1}\frac{w_i(0)w_j(0)\tilde{L}_i(0)\tilde{L}_j(0)}{\tilde{S}_{\alpha,\beta}^2(0)}\langle\ln\tilde{L}_i(T),\ln\tilde{L}_j(T)\rangle$$

$$=\sum_{i,j=\alpha}^{\beta-1}\frac{w_i(0)w_j(0)\tilde{L}_i(0)\tilde{L}_j(0)}{\tilde{S}_{\alpha,\beta}^2(0)}\int_0^T\sigma_i(t)\sigma_j(t)\rho_{i,j}dt\tag{26}$$

它的均值是：

$$\tilde{m}=\ln E[\tilde{S}_{\alpha,\beta}(T)]-\frac{1}{2}\hat{V}^2$$

$$=\ln E[\sum_{i=\alpha}^{\beta-1}w_i(0)\tilde{L}_i(t,T)]-\frac{1}{2}\hat{V}^2$$

$$=\ln\sum_{i=\alpha}^{\beta-1}w_i(0)\tilde{L}_i(0)\exp(\int_0^T(-\sum_{j=i+1}^{\beta}\sigma_i(t)$$

$$\frac{\delta_j\sigma_j(t)L_j(0)\rho_{i,j}(t)}{1+\delta_jL_j(0)}+\sigma^2{}_i(t))dt)-\frac{1}{2}\hat{V}^2\tag{27}$$

在新的测度变换下，改变的是漂移项，波动率是不变的。即 $V^2=\hat{V}^2$，这为求解提供了方便。

从最后公式，我们得到支付 m 次利息的 CMS 数字范围债券在零时刻的价格为：

$$\sum_{\alpha=1}^{m}P(0,T_\alpha)\delta_\alpha L_\alpha(0)\exp(\eta(0;T_\alpha,T_{\alpha+1}))$$

$$N\left(\frac{\ln R_{\max,\alpha}-\tilde{m}}{V}\right)-\sum_{\alpha=1}^{m}P(0,T_\alpha)\delta_\alpha L_\alpha(0)\exp(\eta(0;$$

$$T_\alpha,T_{\alpha+1}))N\left(\frac{\ln R_{\min,\alpha}-\tilde{m}}{V}\right)\tag{28}$$

可以看出模型的变化，导致均值发生了变化。

2.3　约定收益为浮动后置利率情况

与约定收益为浮动 LIBOR 利率数字范围债券相比，它的区别是在一个支付日所付的浮动 LIBOR 利率是这个支付日所观测到的利率本身。

即在时间 $[T_\alpha,T_{\alpha+1}]$ 支付的利率为 $L(T_{\alpha+1};T_{\alpha+1},T_{\alpha+2})$。通过 LIBOR 市场模型，我们可以求得下一期的远期利率。

在时刻 t 观测到的 $[\alpha,\alpha+1]$ 区间的 LIBOR 远期利率为 $L_\alpha(t)$，在此时计算下一期的 LIBOR 远期利率则为 $L_{\alpha+1}(t)$ 即区间 $[\alpha+1,\alpha+2]$ 的 LIBOR 远期利率，根据 LIBOR 模型

$$\frac{dL_{\alpha+1}(t)}{L_{\alpha+1}(t)}$$

$$=\sigma_{\alpha+1}(t)(-\sum_{j=\alpha+2}^{\beta}\frac{\delta_j\sigma_j(t)L_j(0)\rho_{\alpha+1,j}(t)}{1+\delta_jL_j(0)}dt+dW_{\alpha+1}(t))\tag{29}$$

求积分解出 LIBOR 利率[13]

$$L_{\alpha+1}(\mathrm{T}_{\alpha+1}) = L_{\alpha+1}(0)$$
$$\exp\left(\int_0^{T_{\alpha+1}} \sigma_{\alpha+1}(\mathrm{t})(-\sum_{j=\alpha+2}^{\beta} \frac{\delta_j \sigma_j(t) L_j(0) \rho_{\alpha+1,j}(t)}{1+\delta_j L_j(0)}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\sigma_{\alpha+1}(\mathrm{t}))dt + dW_{\alpha+1}(t)\right)$$
$$= L_{\alpha+1}(0)\exp(\int_0^{T_\alpha} \sigma_{\alpha+1}(\mathrm{t})$$
$$(-\sum_{j=\alpha+2}^{\beta} \frac{\delta_j \sigma_j(t) L_j(0) \rho_{\alpha+1,j}(t)}{1+\delta_j L_j(0)}$$
$$-\frac{1}{2}\sigma_{\alpha+1}(\mathrm{t}))dt + dW_{\alpha+1}(t))$$
$$\times \exp(\int_{T_\alpha}^{T_{\alpha+1}} \sigma_{\alpha+1}(\mathrm{t})(-\sum_{j=\alpha+2}^{\beta} \frac{\delta_j \sigma_j(t) L_j(0) \rho_{\alpha+1,j}(t)}{1+\delta_j L_j(0)} -$$
$$\frac{1}{2}\sigma_{\alpha+1}(\mathrm{t}))dt + dW_{\alpha+1}(t)) \tag{30}$$

在这里我们做一个变换，为了使得公式可以符合要求，取出求幂项从 $\mathrm{T_a}$ 到 $\mathrm{T_{a+1}}$ 的积分，也就是提取出一个从 $\mathrm{T_{a+1}}$ 到 $\mathrm{T_{a+2}}$ 的远期 LIBOR 利率，在 $\mathrm{T_a}$ 时刻观察到的。通过化简后，我们发现后置互换利率的情况，可以通过前一期表示，之间只需要乘以一个参数。

$$L(\mathrm{T}_{\alpha+1}; T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2}) = L(\mathrm{T}_\alpha; T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2})$$
$$\exp(\int_{T_\alpha}^{T_{\alpha+1}} \sigma_{\alpha+1}(\mathrm{t})(-\sum_{j=\alpha+2}^{\beta} \frac{\delta_j \sigma_j(t) L_j(0) \rho_{\alpha+1,j}}{1+\delta_j L_j(0)}$$
$$-\frac{1}{2}\sigma_{\alpha+1}(\mathrm{t}))dt + dW_{\alpha+1}(\mathrm{t})) \tag{31}$$

所以化简后的结果带入到原公式中得到

$$E[L(\mathrm{T}_{\alpha+1}; T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2}) 1_{\{R_{\min,\alpha} \leqslant S_{\alpha,\beta}(\mathrm{T}_\alpha) \leqslant R_{\max,\alpha}\}}]$$
$$= E[L(\mathrm{T}_\alpha; T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2}) 1_{\{R_{\min,\alpha} \leqslant S_{\alpha,\beta}(\mathrm{T}_\alpha) \leqslant R_{\max,\alpha}\}}]$$
$$\exp(\int_{T_\alpha}^{T_{\alpha+1}} \sigma_{\alpha+1}(\mathrm{t})(-\sum_{j=\alpha+2}^{\beta} \frac{\delta_j \sigma_j(t) L_j(0) \rho_{\alpha+1,j}}{1+\delta_j L_j(0)} dt)) \tag{32}$$

对于约定收益为浮动利率的债券，通过 Girsanov 定理来进行直接定价比较方便，通过测度变换，获得需要的公式。与上一节前置互换 利率的情况类似，只是在公式化简之后乘上一个参数。

$$E[L(\mathrm{T}_{\alpha+1}; T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2}) 1_{\{R_{\min,\alpha} \leqslant S_{\alpha,\beta}(\mathrm{T}_\alpha) \leqslant R_{\max,\alpha}\}}]$$
$$= E[L(\mathrm{T}_\alpha; T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2}) 1_{\{R_{\min,\alpha} \leqslant S_{\alpha,\beta}(\mathrm{T}_\alpha) \leqslant R_{\max,\alpha}\}}]$$
$$\exp(\int_{T_\alpha}^{T_{\alpha+1}} \sigma_{\alpha+1}(\mathrm{t})(-\sum_{j=\alpha+2}^{\beta} \frac{\delta_j \sigma_j(t) L_j(0) \rho_{\alpha+1,j}}{1+\delta_j L_j(0)} dt)) \tag{33}$$

我们采用同样的方法构造新的鞅：

$$L_{\alpha+1}(\mathrm{T}_\alpha) = L_{\alpha+1}(0)$$
$$\exp\left(\int_0^{T_\alpha} \sigma_{\alpha+1}(\mathrm{t})(-\sum_{j=\alpha+2}^{\beta} \frac{\delta_j \sigma_j(t) L_j(0) \rho_{\alpha,j}(t)}{1+\delta_j L_j(0)}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\sigma_{\alpha+1}(\mathrm{t}))dt + dW_{\alpha+1}(t)\right)$$
$$\eta(\mathrm{T}_\alpha; T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2})$$
$$= \int_0^{T_\alpha} \sigma_{\alpha+1}(\mathrm{t})(-\sum_{j=\alpha+2}^{\beta} \frac{\delta_j \sigma_j(t) L_j(0) \rho_{\alpha+1,j}(t)}{1+\delta_j L_j(0)}) \tag{34}$$

此时 $u(\mathrm{t},\mathrm{w}) = -\sigma_{\alpha+1}(\mathrm{t})$

变换新的空间和模型参数，漂移项改变方差项不变。

此时有

$$L_{\alpha+1}(\mathrm{T}_\alpha) = L_{\alpha+1}(0)$$
$$\exp\left(\int_0^{T_\alpha} \sigma_{\alpha+1}(\mathrm{t})(-\sum_{j=\alpha+2}^{\beta} \frac{\delta_j \sigma_j(t) L_j(0) \rho_{\alpha+1,j}(t)}{1+\delta_j L_j(0)}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sigma_{\alpha+1}(\mathrm{t}))dt + d\hat{W}_{\alpha+1}(t)\right)\ln\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\mathrm{T}_\alpha) \sim$$
$$N(\widetilde{\mathrm{m}}, \mathrm{V}^2)$$

通过对所得的 CMS 利率求均值，可以得到的类似公式。测度变换只改变漂移项，不改变方差项。

$$[\sum_{\alpha=1}^{m} P(0,\mathrm{T}_\alpha)\delta_\alpha L_{\alpha+1}(0)\exp(\eta(\mathrm{T}_\alpha; T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2}))$$
$$N\left(\frac{\ln R_{\max,\alpha} - \widetilde{m}}{V}\right)$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{m} P(0,\mathrm{T}_\alpha)\delta_\alpha L_{\alpha+1}(0)\exp(\eta(\mathrm{T}_\alpha; T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2}))$$
$$N\left(\frac{\ln R_{\min,\alpha} - \widetilde{m}}{V}\right)]$$
$$\exp(\int_{T_\alpha}^{T_{\alpha+1}} \sigma_{\alpha+1}(\mathrm{t})(-\sum_{j=\alpha+2}^{\beta} \frac{\delta_j \sigma_j(t) L_j(0) \rho_{\alpha+1,j}}{1+\delta_j L_j(0)} dt))$$

由于最后乘的系数一样，所以两种方法间的误差和单纯浮动利率债券的误差是一样的。对于后置互换利率的债券，其解决方法与前置互换利率的债券类似，区别在于后一期的 LIBOR 利率需要用原本的 LIBOR 利率进行表示，LIBOR 市场模型很好的解决了这一问题，简化了原本通过曲率调整得出的公式，方便带入到最后的计算公式中。

3 实证分析

3.1 实证分析

CMS 数字范围债券是场外市场上交易的利率衍生品，它不像股票价格是可以查询的。这就使得对实际产品的模拟变得难以进行。对于公式的检验就只能通过 MonteCarlo 模拟的方式进行。

我们从债券定价的原始公式进行考虑。根据公式(9)

$$\delta_\alpha R_{fix}\begin{cases}1 & R_{\min,\alpha} \leqslant S_{\alpha,\beta} \leqslant R_{\max,\alpha} \\ 0 & otherwise\end{cases}$$

在定价过程中，这一公式是无法直接使用的。这是由于 $S_{\alpha,\beta}$ 只有在发生时刻才能进行观察，我们无法获得 CMS 利率的各期价值。所以

我们通过 Monte Carlo 数据模拟的方式来解决这一问题。理论上,当 CMS 利率在指定数值范围内获得固定收益或浮动收益是 CMS 衍生产品最基本的概念,

本文通过构造一个获得固定收益 CMS 利率产品实例,即在每一期,当 CMS 利率在指定数值范围内获得约定收益为固定利率。

远期 LIBOR 利率的波动率存在一种驼峰情况的估计,这种情况下的波动率是一个关于时间的函数。这个假定被广泛采用。Brigo 和 Mercurio[7] 在他们的书中提出拟合远期波动率的公式,尽管它与实际情况比较接近,拟合程度较高,但这个公式应用起来比较复杂。

$$\sigma_i(\mathrm{t}) = k_i\varphi(\mathrm{T}_{i-1} - t; a, b, c, d)$$
$$= k_i((\mathrm{a}(\mathrm{T}_{i-1} - \mathrm{t}) + \mathrm{d})\mathrm{e}^{-b(\mathrm{T}_{i-1}-t)} + c) \quad (35)$$

3.2　相关系数

LIBOR 市场模型的相关系数对于数字范围债券的定价有着重要的影响。一般可通过历史数据来确定相关系数。陈松男[14] 的文章中认为远期 LIBOR 利率的相关性其实是比较高的,建议通常选取的范围[0.8,1]之间。本文中选取相关系数为 0.8 作为数值计算的参数。

产品名称	CMS 数字范围债券
货币种类	USD
投入本金	1000USD
参考利率	3 个月远期 LIBOR 利率对应的 1 年期掉期利率
总共获息次数	33 次
产品特征	CMS 利率在利率范围 5.5%到 6%时,获得 4%的固定收益,其他情况收益为零。

首先,我们通过 Monte Carlo 的方法模拟 CMS 利率。2006 年一系列 3 个月远期 LIBOR 美元利率作为参考利率。采用同期利率上限单元的隐含波动率作为远期 LIBOR 利率的波动率。

通过公式(2),基于 LIBOR 市场模型,我们可以模拟出当期 CMS 利率。图 1 为仿真结果,仿真次数为 10,000。随着模拟次数的增加去掉极端值以后,我们发现 CMS 利率的变化是合理的。最后结果是 10000 次的平均值。

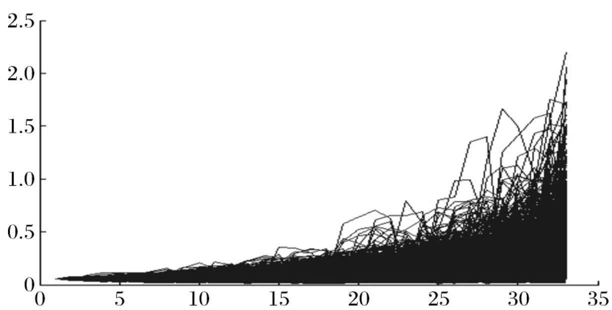

图 1　CMS 利率模拟

将表 1 的数据,直接带入推导的公式。

通过公式(9),当 CMS 利率在指定数值范围内,则收到固定利率,例如,4%,再贴现到零时刻时,结果在下表 2。

表 1　CMS 数字范围债券的价格表(解析解)

M	−3.0045	−2.9172	−2.9167	……	−2.9138
V	0.4332	0.0736	0.1099	……	0.1490
价格	32.1				

表 2　CMS 数字范围债券的价格表(Monte Carlo 模拟)

落入区间次数	11	10	9
CMS 值	0.0591	0.0574	0.0558
零息债券价格	0.8681	0.8791	0.8901
数值范围	CMS 利率在利率范围 5.5%到 6%时,获得 4%的固定收益,其他情况收益为零		
价格	26.37		

表 1 和表 2 显示,和解析解的差异为 5.73 美元,在 10000 次的情况下,有如此良好的拟合度。随着仿真次数的增加,解析解和仿真的差异将会减小,拟合情况将会更好。更多模拟结果参见恽钧超[16]。

4　结语

论文主要目标是完成对 CMS 数字范围债券的定价,避免 Monte Carlo 大数据模拟的情况而求出产品的解析解。主要结论如下:

(1)通过二阶变差法求得 CMS 利率的概率分

布,解决了掉期利率不满足对数正态分布的问题。

(2)完成了对 CMS 数字范围债券的定价。不同于过去通过 Monte Carlo 模拟这种耗时的方法,论文得到了固定利率,浮动利率,后置利率三种产品的闭式解析解。

(3)论文在推导过程中使用引理法和原始 Girsanov 法结合的方式更加简便的对于浮动利率的情况进行了定价。完善了对 CMS 衍生产品的定价手段,方便了后期对于一系列产品的定价。

论文的解析解比过去的方法更加贴近实际情况,与 Monte Carlo 结果差异更小,使得投资者在对 CMS 数字范围债券定价时可以获得更大的收益。同时,在用这一产品进行对冲风险时,也能更好的减小投资者的损失。产品的准确定价对于瞬息万变的资本市场来说无疑是相当重要的,良好的拟合模型是获得良好收益的重要基石。同时,模型除了对 CMS 数字范围债券进行定价外,对于 CMS 价差期权等一系列 CMS 衍生产品都可以进行推广定价。由于 CMS 利率的概率分布的确定加上 Girsanov 定理的合理使用,模型可以推广到对 CMS 取差债券以及 CMS 取差逐日计息债券的定价当中[15]。一方面,模型可以更好的拟合 CMS 利率的分布情况,这对 CMS 衍生产品的定价是十分重要的。另一方面 Girsanov 定理的使用为推导出最终结果铺平了道路,使得我们可以求解出最后的解析公式。

论文为 CMS 数字范围债券的投资者提供了快速准确的投资意见,在理论研究和实际应用上都具有重大意义. 在理论上,相关的研究成果可以推广到其它的类似的金融产品, 例如,欧式篮子期权和亚式期权定价上去。开创了新的方法和思维模式,促进了同类产品的定价投资活动,为后续的定价研究提供了方便。在实际应用上,这个算法给市场的参与者提供了一个新的,省时的,有效的定价方法。给市场的决策者,提供了一个更加有效地管理,对冲,和控制交易风险的工具。促进了利率市场的良性发展,提高了投资者的收益。

参考文献:

[1] Antonov A, Arneguy M. Analytical formulas for pricing CMS products in the LIBOR market model with the stochastic volatility[J]. SSRN Electronic Journal, 2009,(3):1—33.

[2] Wu Tingpin, Chen Sonnan. Valuation of floating range notes in a LIBOR market model[J]. The Journal of Futures Markets, 2008,28(7): 697—710.

[3] Belomestny D, Kolodko A, Schoenmakers J. Pricing CMS spread options in a LIBOR market model[J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2011,13(1):839—865.

[4] Wu P, Elliott R J. Valuation of CMS Digital Range Notes in a Multifactor LIBOR Market Model[J]. International Journal of Financial Engineering, 2016,3(1):1—20.

[5] 刘凤琴,金瑜. LEVY—LIBOR 市场模型的蒙特卡洛模拟参数校准与估计[J]. 中国管理科学,2018,26(1):25—34.

[6] Brace A,Gatarek D,Musiela M. The market model of interest rate dynamics[J]. Mathematical Finance, 1997,7(2):127—155.

[7] Brigo D,Mercurio F. Interest Rate Models Theory and Practice[M]. Berlin: Springer, 2006:559—572.

[8] Brace A, Dun T,Barton G. Towards a central interest rate model[J]. Option Pricing Interest Rates and Risk Management, 2001,(1):278—313.

[9] Wu P, Elliott R J. A simple efficient approximation to price basket stock options with volatility smile [J]. Annals of Finance,2017,13(1):1—29.

[10] Levy E. Pricing European average rate currency options [J]. Journal of International Money and Finance, 1992, 11(5):67—77.

[11] Vorst T. Prices and hedge ratios of average exchange rate options[J]. International Review of Financial Analysis, 1992, 1(3):179—193.

[12] 闫海峰,陈春生. 随机积分的 Girsanov 定理及其在债券定价中的应用[J]. 河南师范大学学报,2003(1):120—127.

[13] Musiela M, Rutkowski M. Continuous—time term structure model forward measure approach,finance and stochastics[J]. 1997,1(4):261—292.

[14] 陈松男. 新奇结构式债券产品案例:分析与创新[M]. 台北:新陆书局,2011:365—389.

[15] John C H. 债券、期货及其他衍生产品 [M]. 北京:机械工业出版社,2012:491—528.

[16] 恽钧超. 基于多因子 LIBOR 模型的远期 CMS 利率研究[D]. 南京:东南大学,2017.

"Pricing of CMS Digital Range Notes" Based on Multi-factor LIBOR Model

WU Ping[1], YUN Jun-chao[2], DONG Bin[2]

(1. School of Business, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China;

2. School of Economics and Management, Southeast University, Nanjing 211189, China)

Abstract: Nowadays, CMS derivatives have become a very important financial tool. It plays an essential role for investors to make profits and hedging risks. The pricing of CMS derivatives will also become more and more important as the demand increases. Due to the increase in usage, the use of the past hundreds of data to simulate the method is more and more cumbersome, and it will also consume a lot of time, is not conducive to the timeliness of the information. Calculating the analytical solution of CMS derivative pricing becomes an important issue.

In the past, pricing for CMS derivatives was mostly calculated using Monte Carlo simulations. Thousands of data have greatly reduced efficiency. Moreover, investors prefer closed－form formulas because they are more convenient to calculate and are more conducive to calculating hedging risk parameters (Delta, Gamma, Vega).

Using the multi－factor LIBOR market model as a framework to price CMS derivative products is a suitable method. It avoids the problem of insufficient one－factor model fitting, avoids the situation of big data simulation, and can solve the problem that CMS interest rates are not satisfied. The problem of normal distribution of numbers greatly simplifies the derivation process. In the later application, the model can be better promoted.

In the first chapter, the analytical formula of the CMS interest rate is derived through derivation, and incorporates the formula into the framework of the multi－factor LIBOR market model. The second chapter derives the analytical solution of the CMS digital range bond. This is also the focus and innovation of the paper. At the same time, in order to test the results, the model was tested in the third chapter.

The approximate formula of CMS interest rate is introduced gradually through the derivation of LIBOR market model, and the second－order variation method is used to obtain the approximate distribution of CMS interest rate and bring it into the subsequent model. The second－order variation method makes the pricing of the CMS interest rate closer to that of Monte Carlo, and the use of the LIBOR market model makes the simulation of the CMS interest rate not negative, making the CMS interest rate distribution more realistic. This provides good income expectations for investors investing or hedging. Solved the problem of effectiveness due to Monte Carlo data simulation. It solves the problem that the arithmetic mean of the lognormal distribution is not a lognormal distribution. At the same time, due to the introduction of the LIBOR market model, the negative swap rate is avoided.

CMS interest rate derivatives are products that are traded in the OTC market and there is no price to look up. Unlike actual stock data, it is traded through the counter, so there are very few actual commodity prices that can be queried, which makes the actual product. The simulation becomes difficult to carry out. The third chapter data inspection is mainly done by comparing with the results of the Monte Carlo simulation.

In practical applications, obtaining the analytical formula of the CMS interest rate is beneficial to the pricing of derivative products. The formula is in many ways similar to the BLACK classic pricing formula. The pricing of European bonds has a very good effect. Similarly, similar derivatives can be priced through the LIBOR market model to facilitate future research. The key is not to consider the big data simulation problem in the pricing process, avoiding a large amount of computing time, and providing investors with greater benefits.

Key words: LIBOR market model; CMS interest rate; CMS digital range notes