# Introducere în Data Science

## Analiza asocierilor: concepte de bază

Lucian Sasu, Ph.D.

Universitatea Transilvania din Brașov, Facultatea de Matematică și Informatică

June 2, 2020

# Outline

# Noțiuni

- În cadrul vânzărilor din magazine se înregistrează conținutul coșurilor de cumpărături achiziționate = tranzacții
- Problemă: pentru un set de tranzacții să se determine regulile care dau predispoziția apariției unui obiect pe baza existenței altor obiecte într-un coș
- Exemplu de tranzacții:

| TID | Obiecte |
|---|---|
| 1 | {pâine, lapte} |
| 2 | {pâine, scutece, bere, ouă} |
| 3 | {lapte, scutece, bere, suc} |
| 4 | {pâine, lapte, scutece, bere} |
| 5 | {pâine, lapte, scutece, suc} |

Table 1: Tranzacții de tip coș de cumpărături

- TID = Transaction ID
- Exemplu de regulă ce se poate extrage: $\{scutece\} \longrightarrow \{bere\}$

# Noțiuni

- Regula sugerează că ar exista o relație de dependență între vânzarea de scutece și cea de bere
- Remarcă: regula dată este direcțională; nu înseamnă neapărat și că $\{bere\} \longrightarrow \{scutece\}$
- Moduri de exploatare a unor astfel de reguli:
  - se scade prețul obiectelor din antecedentul regulii, se crește prețul celor din consecvent
  - se face cross-selling
  - se decide dispunerea pe raft a produselor
  - se face reclamă sau ofertă personalizată, gruparea produselor în cataloage de prezentare
- Alte medii de aplicare: bioinformatică, diagnostic medical, web mining, analiza științifică a datelor

# Noțiuni

Probleme:

- descoperirea de pattern–uri în seturi mari de date este o problemă intensivă computațional
- o parte din relațiile descoperite pot fi pur și simplu rodul întâmplării
- evaluarea regulilor obținute este un pas absolut necesar
- semnul de implicație în acest context înseamnă apariție concomitentă, nu cauzalitate
- de citit: Correlation does not imply causation (Wikipedia)

# Noțiuni, definiții

- Posibil mod de reprezentare a tranzacțiilor:

| TID | Pâine | Lapte | Scutece | Bere | Ouă | suc |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Table 2: Reprezentare binară a datelor tranzacției

- Reprezentarea binară este asimetrică: prezența unui produs este mai importantă decât lipsa lui
- Reprezentare voit simplistă, omițând cantitatea de achiziție

# Noțiuni, definiții

- Mulțime de produse (simplu: mulțime; eng: itemset) — colecție de unul sau mai multe obiecte
- $k$–mulțime (eng: $k$-itemset) — o mulțime compusă din $k$ obiecte (e.g. produse)
- Numărul de suport al unei mulțimi $\sigma(\cdot)$ (eng: support count) — frecvența de apariție a acelei mulțimi
- $\sigma(X) = |\{t_i : X \subseteq t_i, t_i \in T\}|$ unde $T$ este mulțimea tuturor tranzacțiilor, $|U|$ este numărul de elemente ale (cardinalul) mulțimii $U$
- Exemplu: $\sigma(\{lapte, paine, scutece\}) = 2$

# Noțiuni, definiții

- Regulă de asociere (regulă): o expresie de forma $X \longrightarrow Y$ unde $X$, $Y$ sunt mulțimi de produse, $X \cap Y = \emptyset$

## Definiție (Suportul unei reguli)

*Suportul regulii $X \longrightarrow Y$ pentru o mulțime de $N$ tranzacții este fracția de tranzacții care conțin produsele din $X \cup Y$:*

$$s(X \longrightarrow Y) = \frac{\sigma(X \cup Y)}{N} \tag{1}$$

## Definiție (Confidența unei reguli)

*Confidența regulii $X \longrightarrow Y$ este numărul de tranzacții care conțin pe $X$ și $Y$ raportat la cele care conțin doar pe $X$:*

$$c(X \longrightarrow Y) = \frac{\sigma(X \cup Y)}{\sigma(X)} \tag{2}$$

# Noțiuni, definiții

Exemplu: pentru datele din tabelul de mai jos

| TID | Obiecte |
|---|---|
| 1 | {pâine, lapte} |
| 2 | {pâine, scutece, bere, ouă} |
| 3 | {lapte, scutece, bere, suc} |
| 4 | {pâine, lapte, scutece, bere} |
| 5 | {pâine, lapte, scutece, suc} |

- Considerăm regula $\{lapte, scutece\} \longrightarrow \{bere\}$
- Numărul de suport pentru $\{lapte, scutece, bere\}$ este 2; numărul total de tranzacții este 5, deci suportul este 2/5
- Confidența: sunt 3 tranzacții care conțin $\{lapte, scutece\}$, deci confidența este 2/3

# Noțiuni, definiții

- De ce se folosește suportul?
  - o regulă cu suport mic poate însemna o legătură întâmplătoare
  - o regulă cu suport mic s–ar putea să fie neprofitabilă
  - suportul poate elimina regulile neinteresante
- De ce se folosește confidența?
  - măsoară încrederea în rezultatul aplicării unei reguli
  - pentru regula $X \longrightarrow Y$ o confidență mare arată în ce măsură apariția mulțimii $X$ va duce la apariția mulțimii $Y$
  - $c(X \longrightarrow Y)$ poate fi interpretată ca probabilitatea condiționată $P(Y|X)$

# Noțiuni, definiții

## Definiție (Descoperirea relațiilor de asociere)

*Dându–se o mulțime de tranzacții $T$, să se găsească toate regulile cu suport $\geq$ minsup și confidență conf $\geq$ minconf, unde minsup și minconf sunt praguri date.*

Abordare brute-force:

- se generează toate regulile de asociere posibile
- se calculează suportul și confidența fiecărei reguli
- se elimină regulile care nu respectă pragurile *minconf* și *minsup* date
- Complexitate de calcul prohibitivă: numărul de reguli pentru $d$ produse este:

$$R = 3^d - 2^{d+1} + 1$$

(temă pentru acasă)

- Pentru cele 6 produse din tranzacțiile date am avea 602 reguli; pentru $minsup = 20\%$ și $minconf = 50\%$, mai mult de 80% din regulile generate sunt eliminate!

# Pași de lucru

- Observație importantă: suportul regulii $X \longrightarrow Y$ depinde doar de numărul suport al mulțimii $X \cup Y$
- Pentru mulțimea $\{bere, scutece, lapte\}$ se pot genera 6 reguli: $\{bere, scutece\} \longrightarrow \{lapte\}$, $\{bere\} \longrightarrow \{scutece, lapte\}$ etc.; toate acestea au același suport, indiferent de partiționarea în antecedent/consecvent
- Dacă o mulțime nu este frecventă, atunci toate regulile ce se pot construi pe baza ei pot fi eliminate fără a le mai calcula confidența
- Concluzie: se poate decupla calculul suportului și al confidenței
- Pașii de lucru:
  1. generarea mulțimilor frecvente, *i.e.* al celor pentru care suportul este cel puțin *minsup*
  2. generarea regulilor pe baza mulțimilor frecvente

# Outline

# Problema generării mulțimilor frecvente

Generarea mulțimilor frecvente este solicitantă computațional: pentru o mulțime de $k$ produse se pot realiza $2^k - 1$ potențiale mulțimi frecvente (se exclude mulțimea vidă)

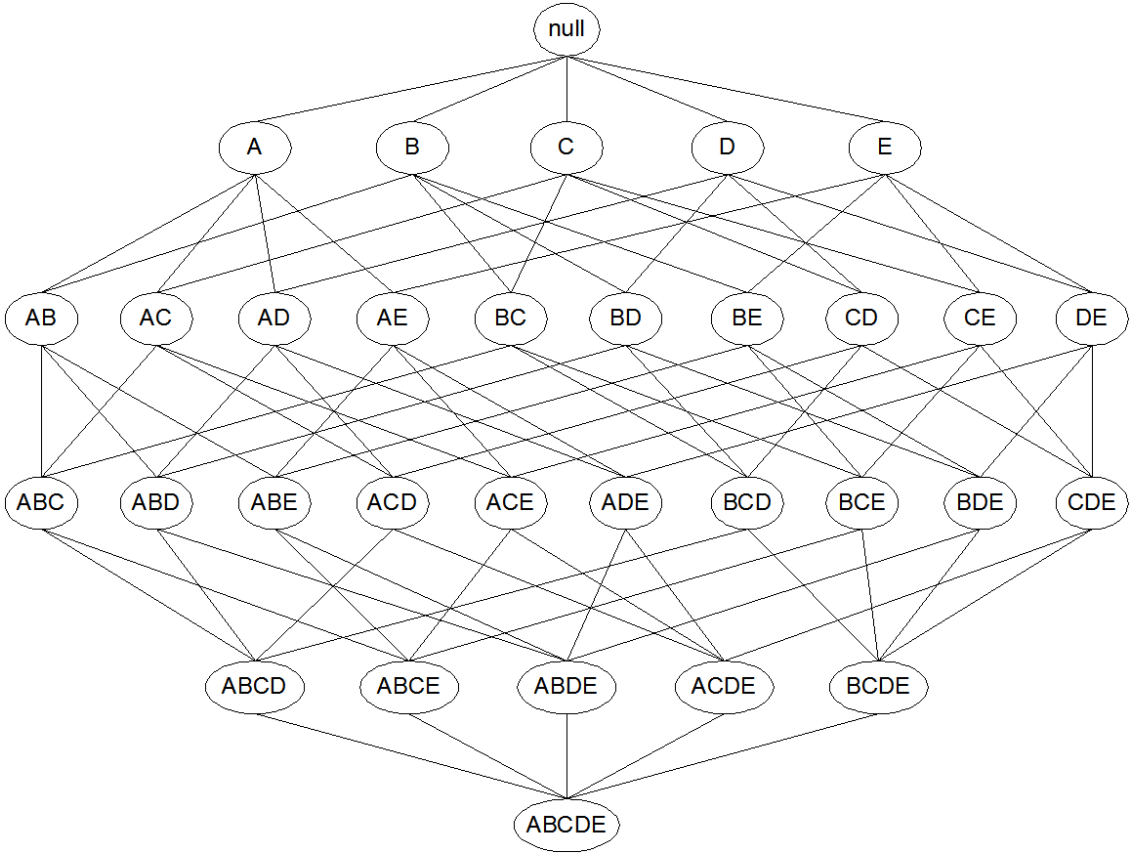



Figure 1: Latice de mulțimi

# Varianta brute-force:

- Fiecare mulțime candidat din latice este considerat ca un candidat de mulțime frecventă
- Se calculează numărul suport al fiecărui candidat prin scanarea bazei de date
- Dacă un candidat e inclus într–o tranzacție se incrementează numărul suport

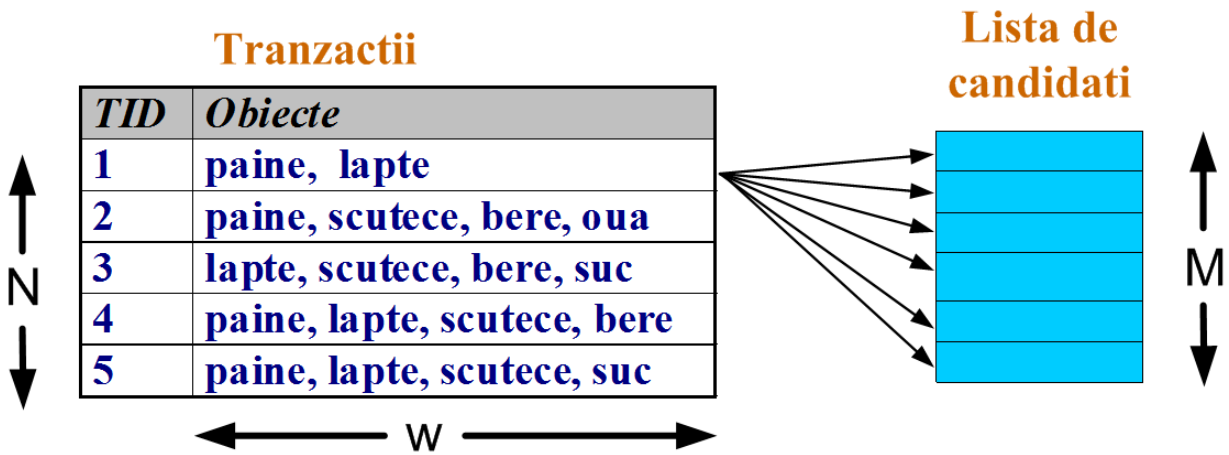



Figure 2: Diferiți parametri ai datelor de intrare

# Complexitate si remedii

- Complexitate: $O(NMw)$ unde: $N$ = numărul de tranzacții, $M = 2^k - 1$ este numărul de mulțimi candidat, $w$ este numărul maxim de obiecte dintr-o tranzacție
- Modalități de reducere a complexității:
  - reducerea numărului de mulțimi candidat $M$ – de exemplu prin principiul *Apriori*
  - reducerea numărului de comparații la confruntarea unei mulțimi cu o tranzacție prin structuri de date eficiente

# Principiul *Apriori*

## Teoremă (Principiul *Apriori*)

*Dacă un set este frecvent, atunci oricare din subseturile sale este de asemenea frecvent.*

Demonstrație: Pentru o tranzacție care conține mulțimea de obiecte $X = \{c, d, e\}$ este evident că ea conține și oricare din submulțimile lui $X$: $\{c, d\}$, $\{c, e\}$ etc. Mai mult, pentru o submulțime a lui $X$ poate exista o tranzacție care să o conțină, dar să nu conțină și pe $X$. Astfel, numărul suport pentru o submulțime a lui $X$ este cel puțin numărul suport al lui $X$.

- teorema afirmă că:

$$\forall X, Y : (X \subseteq Y) \Rightarrow s(X) \geq s(Y)$$

adică o proprietate de anti-monotonie a suportului

# Eliminarea mulțimilor infrecvente

- Contrapoziția teoremei este utilă pentru a face eliminarea mulțimilor care nu pot fi frecvente: *Dacă un set nu este frecvent, atunci oricare superset al lui nu poate să fie frecvent.*

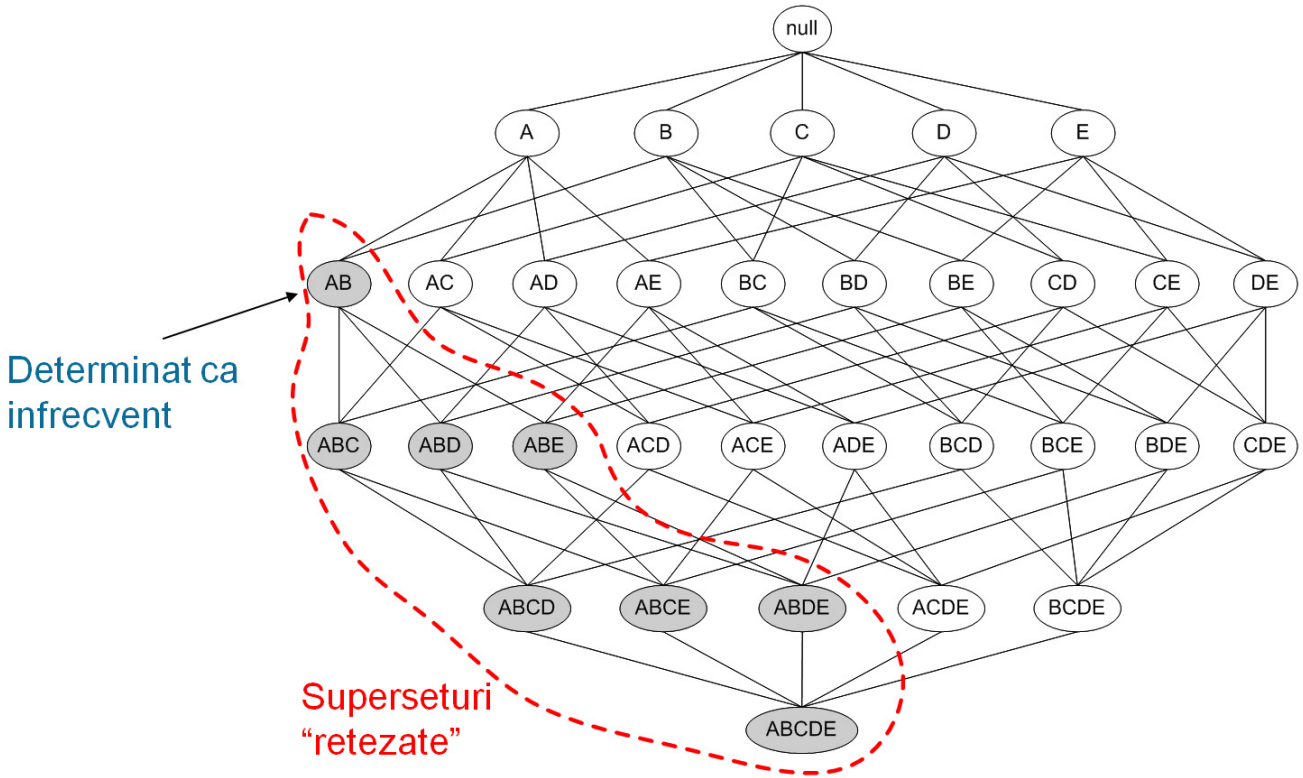



Figure 3: Retezarea mulțimilor infrecvente

# Strategie

- Se pornește cu 1-mulțimi formate din câte un obiect
- 1-mulțimile nefrecvente se elimină
- Se generează 2-mulțimi combinând 1-mulțimi frecvente
- Pentru 2-mulțimile generate se calculează suportul; cele nefrecvente se elimină
- Se continuă procedeul pentru 3-mulțimi etc.
- Pe baza principiului *Apriori*, pentru generarea $k$-mulțimilor frecvente candidat se iau în considerare doar $(k-1)$-mulțimile frecvente

# Exemplu de aplicare

| Obiect | Numar |
|---|---|
| paine | 4 |
| suc | 2 |
| lapte | 4 |
| bere | 3 |
| scutece | 4 |
| oua | 1 |

1-multimi

| Multime | Numar |
|---|---|
| {paine,lapte} | 3 |
| {paine,bere} | 2 |
| {paine,scutece} | 3 |
| {lapte,bere} | 2 |
| {lapte,scutece} | 3 |
| {bere, scutece } | 3 |

2-multimi

(Nu este nevoie sa se genereze candidati cu oua sau suc)

Valoarea suport minim ceruta: 3

3-multimi

| Multime | Numar |
|---|---|
| {paine,lapte,scutece} | 3 |

Daca se considera fiecare subset (brute force): ${}^6C_1 + {}^6C_2 + {}^6C_3 = 41$

Folosind principiul *Apriori*:
6 + 6 + 1 = 13,
reducere de 68%

Figure 4: Generarea mulțimilor frecvente folosind principiul *Apriori*

# Schița algoritmului *Apriori*

- $k = 1$
- Se generează 1-mulțimi frecvente
- Repetă până când nu se mai pot identifica mulțimi frecvente:
  - se generează $(k+1)$-mulțimi candidat folosind $k$-mulțimile frecvente de la pasul anterior
  - se șterg $(k+1)$-mulțimile candidat care conțin $k$-mulțimi infrecvente (cu suportul sub prag)
  - se contorizează suportul fiecărei $(k+1)-$mulțimi prin parcurgerea tranzacțiilor
  - se șterg $(k+1)$-mulțimile candidat care nu sunt frecvente

# Pseudocodul pentru algoritmul *Apriori*

1: $k = 1$.
2: $F_k = \{ i \mid i \in I \wedge \sigma(\{i\}) \geq N \times minsup \}$. {Find all frequent 1-itemsets}
3: **repeat**
4: $k = k + 1$.
5: $C_k = \text{apriori-gen}(F_{k-1})$. {Generate candidate itemsets}
6: **for** each transaction $t \in T$ **do**
7: $C_t = \text{subset}(C_k, t)$. {Identify all candidates that belong to $t$}
8: **for** each candidate itemset $c \in C_t$ **do**
9: $\sigma(c) = \sigma(c) + 1$. {Increment support count}
10: **end for**
11: **end for**
12: $F_k = \{ c \mid c \in C_k \wedge \sigma(c) \geq N \times minsup \}$. {Extract the frequent $k$-itemsets}
13: **until** $F_k = \emptyset$
14: Result $= \bigcup F_k$.

# Probleme ce trebuie rezolvate eficient pentru *Apriori*

- Generarea mulțimilor candidat și retezarea
  1. generarea de $k$-mulțimi folosind $(k-1)$-mulțimi frecvente
  2. eliminarea candidaților care nu au suportul peste pragul impus
- Calculul numărului suportul al unei mulțimi

# Generarea mulțimilor candidat (var 1)

- Generarea mulțimilor candidat:
  - orice algoritm trebuie să evite generarea de prea multe mulțimi candidat
  - trebuie să asigure generarea unei familii complete de mulțimi candidat
  - trebuie să evite generarea aceleiași mulțimi candidat de mai multe ori ($\{a, b, c\}$ poate proveni din $\{a, b\} \cup \{c\}$ sau din $\{a\} \cup \{b, c\}$ etc.)
- Sunt mai mulți algoritmi în această direcție
- Metoda forței brute:
  - Se consideră fiecare posibilitate de a obține o $k$-mulțime
  - Se elimină candidații cu suport prea mic
  - Generarea e simplă, calculul suportului pentru fiecare candidat este costisitor
  - Complexitatea metodei: $O(d \cdot 2^{d-1})$

# Generarea mulțimilor candidat (var 2)

- Metoda $F_{k-1} \times F_1$:
  - se pleacă de la fiecare $(k-1)$-mulțime frecventă și se extinde cu obiecte (1-mulțimi) frecvente
  - procedeul e complet
  - se poate ajunge la generarea multiplă a aceleiași $k$-mulțimi
  - evitare: fiecare mulțime este menținută sortată lexicografic: $\{a, b, c\}$ și nu $\{b, a, c\}$ sau altfel
  - extinderea unei mulțimi $F_{k-1} = \{ob_1, ob_2, \ldots, ob_{k-1}\}$ se face numai cu mulțimi $F_1 = \{x\}$ unde $ob_{k-1} < x$
  - complexitate: $O(\sum_k k|F_{k-1}||F_1|)$
  - încă se pot genera prea multe $k$-mulțimi candidat

# Generarea mulțimilor candidat (var 3)

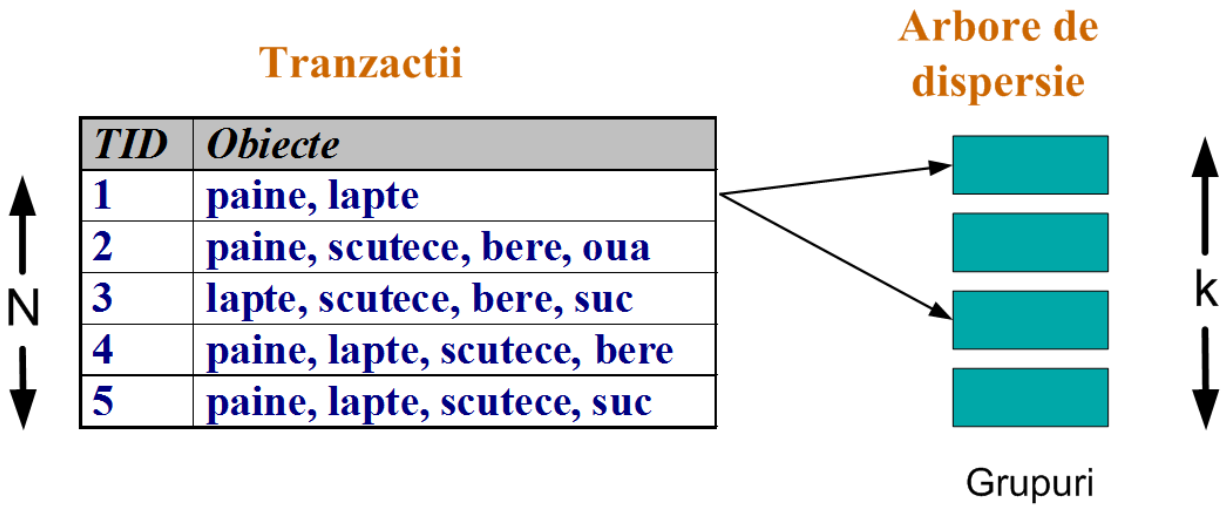
- Metoda $F_{k-1} \times F_{k-1}$:
  - se reunesc două $(k-1)$-mulțimi doar dacă primele $k-2$ elemente din ele sunt identice (se presupune ordinea lexicografică):
  - mai clar: dacă $A = \{a_1, a_2, \ldots a_{k-1}\}$ și $B = \{b_1, b_2, \ldots b_{k-1}\}$ sunt două $(k-1)$-mulțimi, atunci ele se reunesc doar dacă:

$$a_i = b_i,\ \forall i = 1, \ldots, k-2,\ a_{k-1} \neq b_{k-1}$$

- este varianta propusă în articolul ce introduce algoritmul Apriori

# Reducerea numărului de comparații

- Varianta brute force: se scanează toată baza de date pentru a determina valoarea suport a fiecărei mulțimi candidat
  - Posibil, dar neeficient
- Pentru a reduce numărul de comparații stocăm candidații într–un arbore de dispersie (hash tree)
- Rezultat: în loc de a compara fiecare tranzacție cu fiecare mulțime candidat, se compară fiecare tranzacție cu grupuri de candidați din arbore; se vor actualiza doar valorile suport pentru mulțimi candidat din grupurile găsite



# Crearea arborelui de dispersie, exemplu

- Considerăm funcția de dispersie $h(p) = p \mod 3$
- Impunem restricția ca într–un nod frunză să nu avem mai mult de 3 mulțimi reprezentate; dacă este cazul, un nod va fi fragmentat în noduri copil
- Presupunem că avem mulțimile candidat: $\{1,4,5\}$, $\{1,2,4\}$, $\{4,5,7\}$, $\{1,2,5\}$, $\{4,5,8\}$, $\{1,5,9\}$, $\{1,3,6\}$, $\{2,3,4\}$, $\{5,6,7\}$, $\{3,4,5\}$, $\{3,5,6\}$, $\{3,5,7\}$, $\{6,8,9\}$, $\{3,6,7\}$, $\{3,6,8\}$
- Reprezentarea în arbore de dispersie:

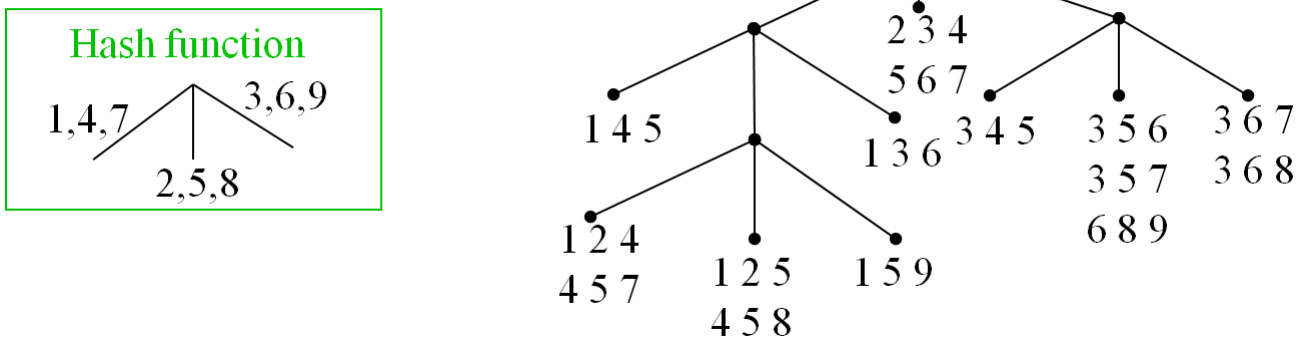
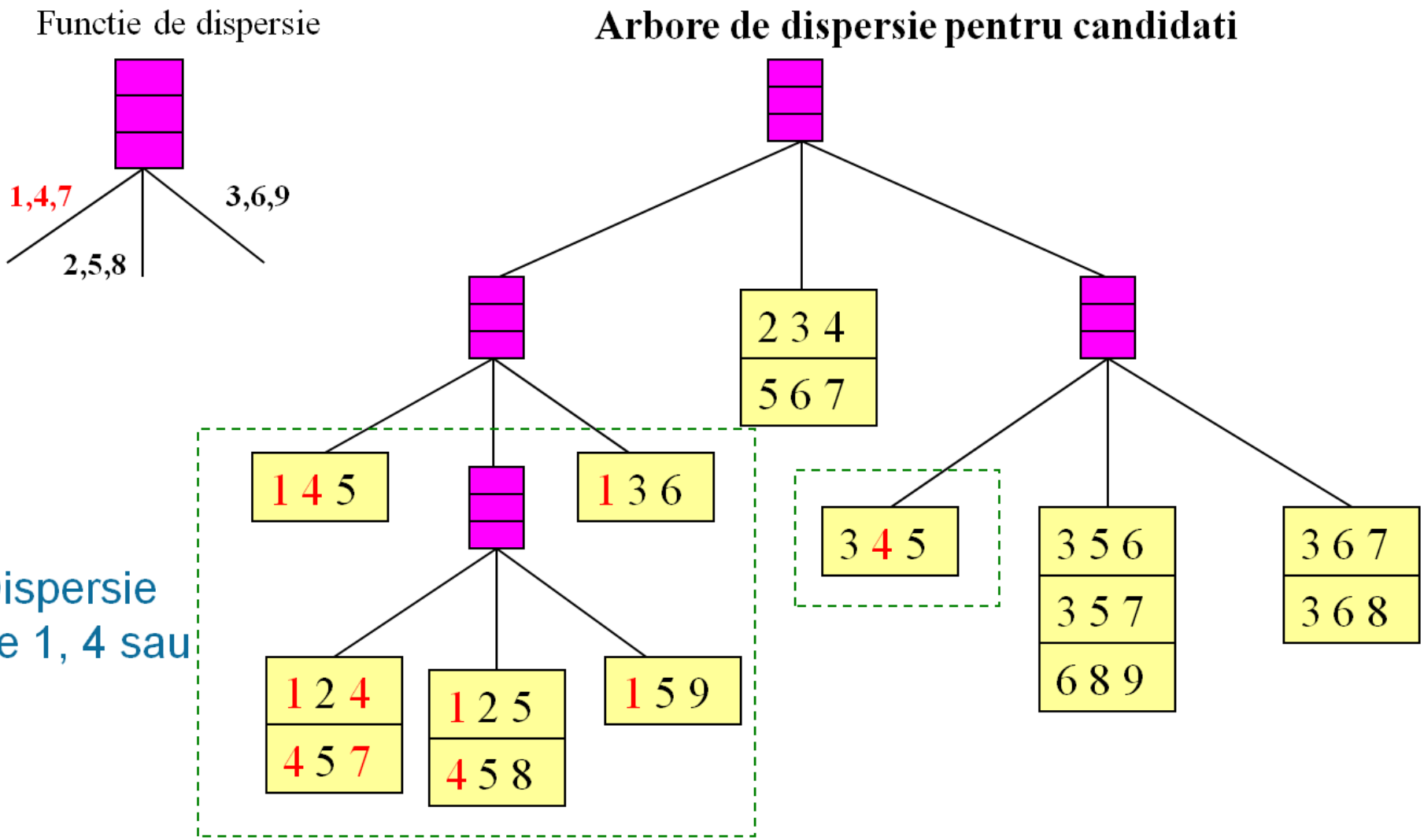
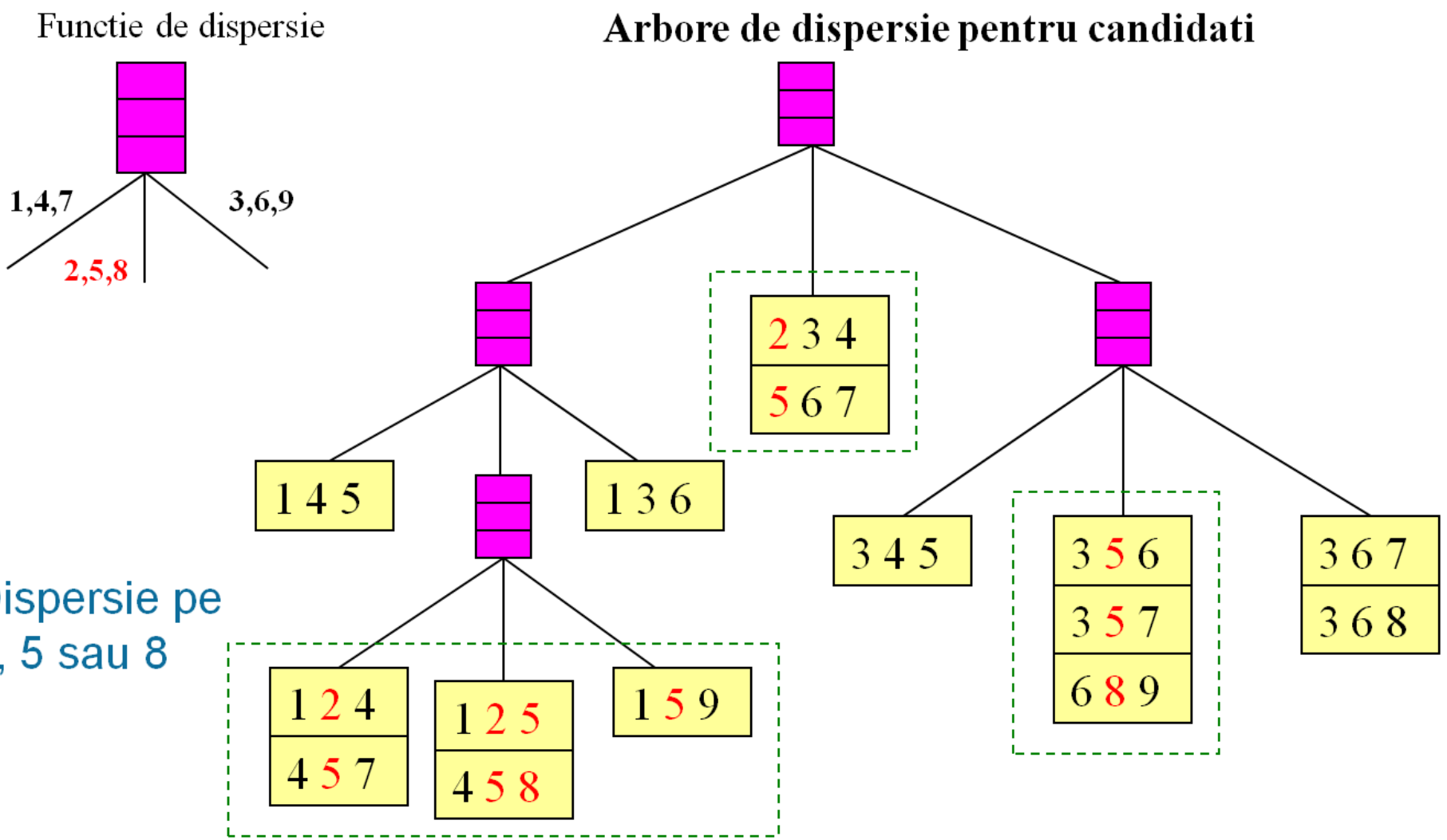



Figure 6: Arbore de dispersie pentru familia de mulțimi candidat

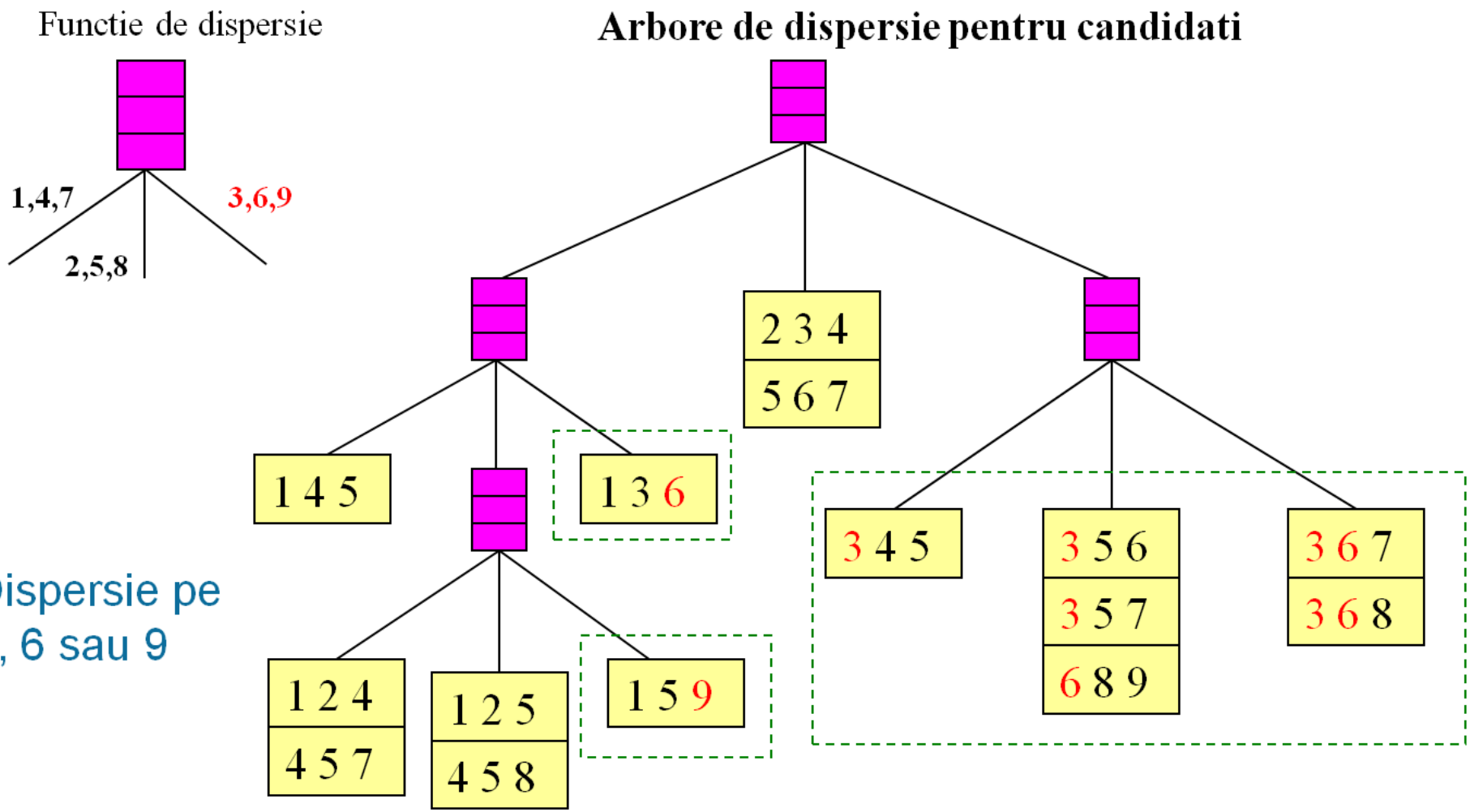
# Reprezentarea mulțimilor candidați în arbore de dispersie



# Reprezentarea mulțimilor candidați în arbore de dispersie

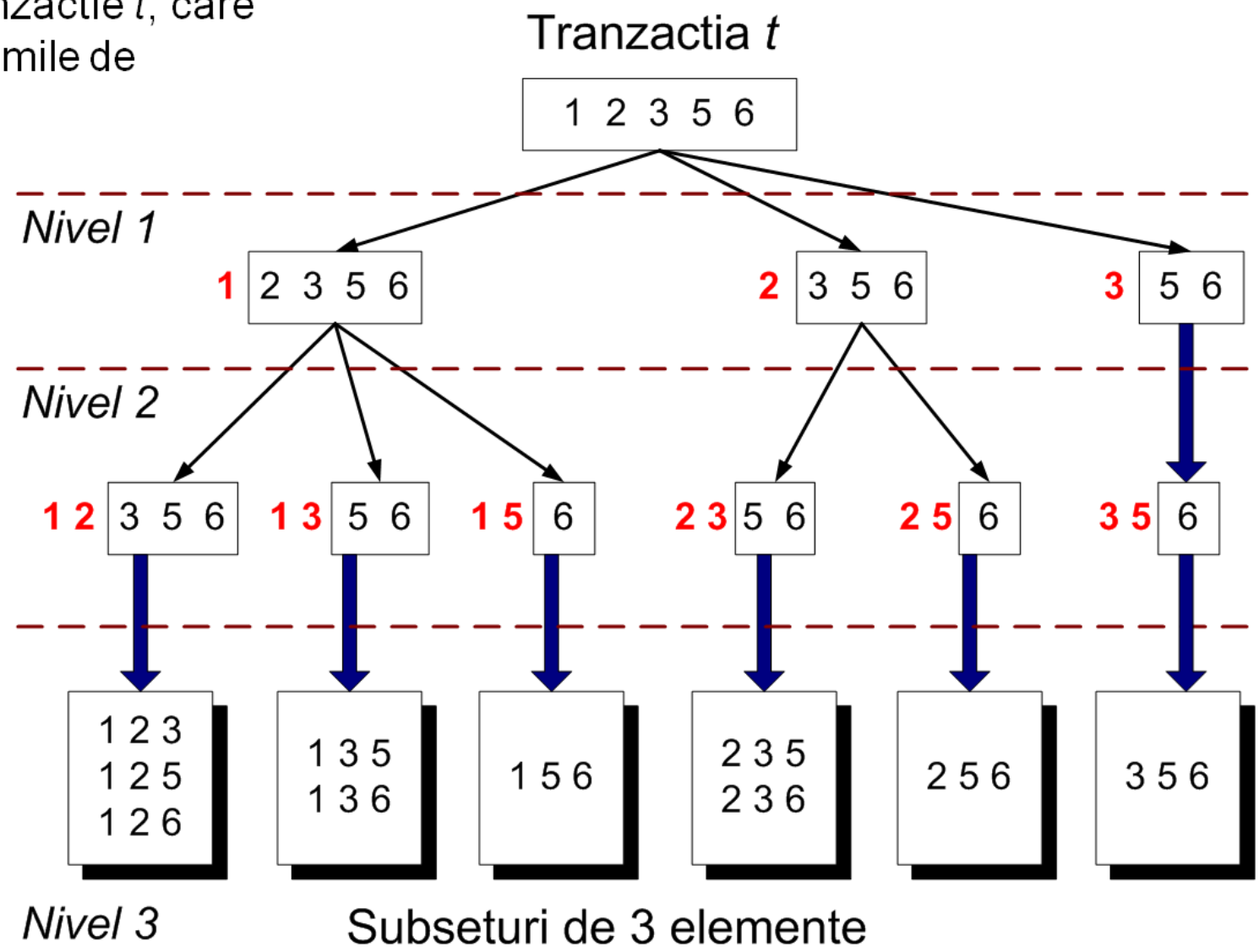


# Reprezentarea mulțimilor candidați în arbore de dispersie



# Generarea 3-submulțimilor unei tranzacții

Data fiind o tranzactie $t$, care sunt toate multimile de cardinal 3?



# Căutarea potrivirilor între tranzacții și mulțimi candidat

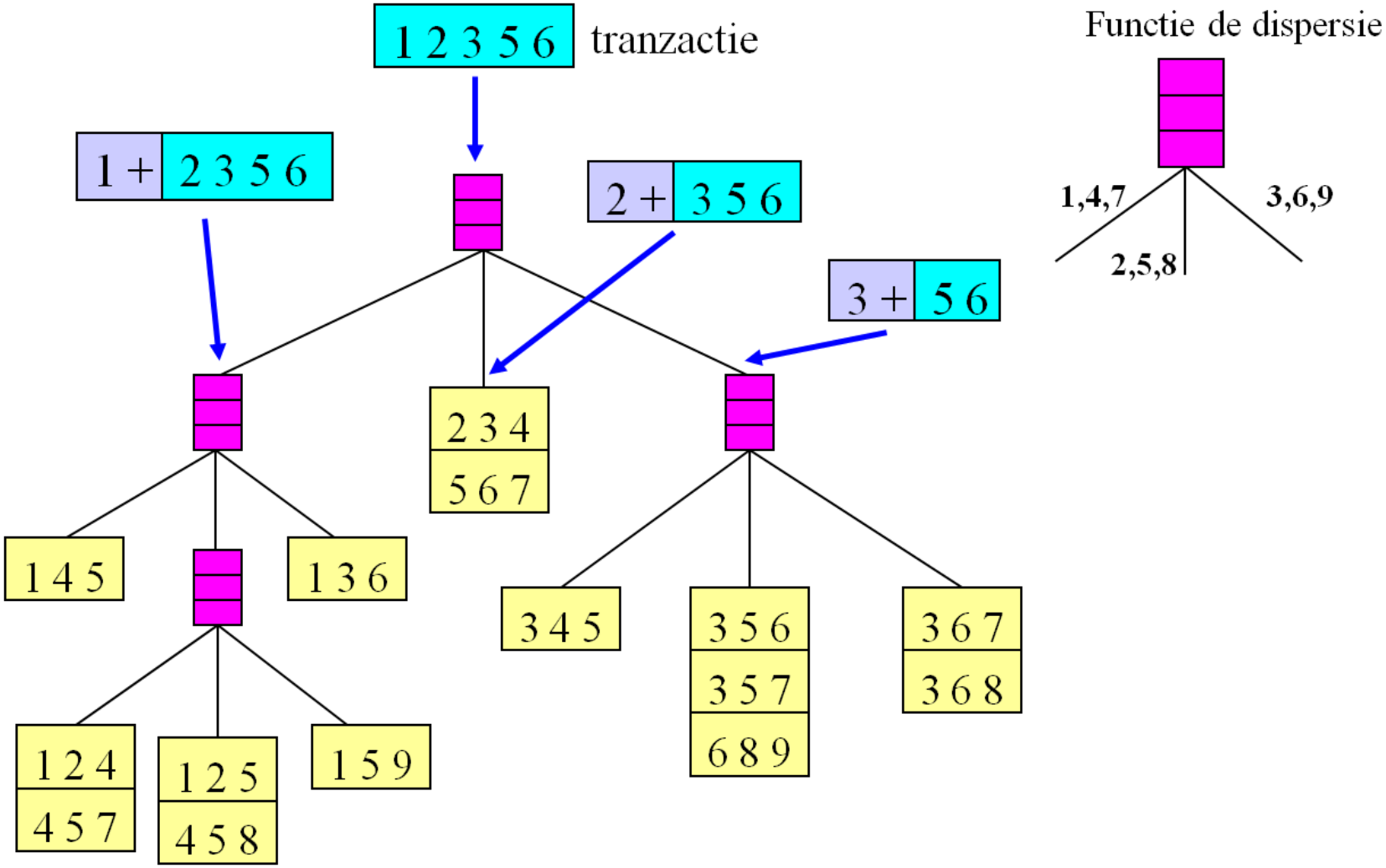



Figure 7: Se ia in considerare primul obiect al unei posibile 3-multimi ce se regaseste in tranzactie

# Căutarea potrivirilor între tranzacții și mulțimi candidat

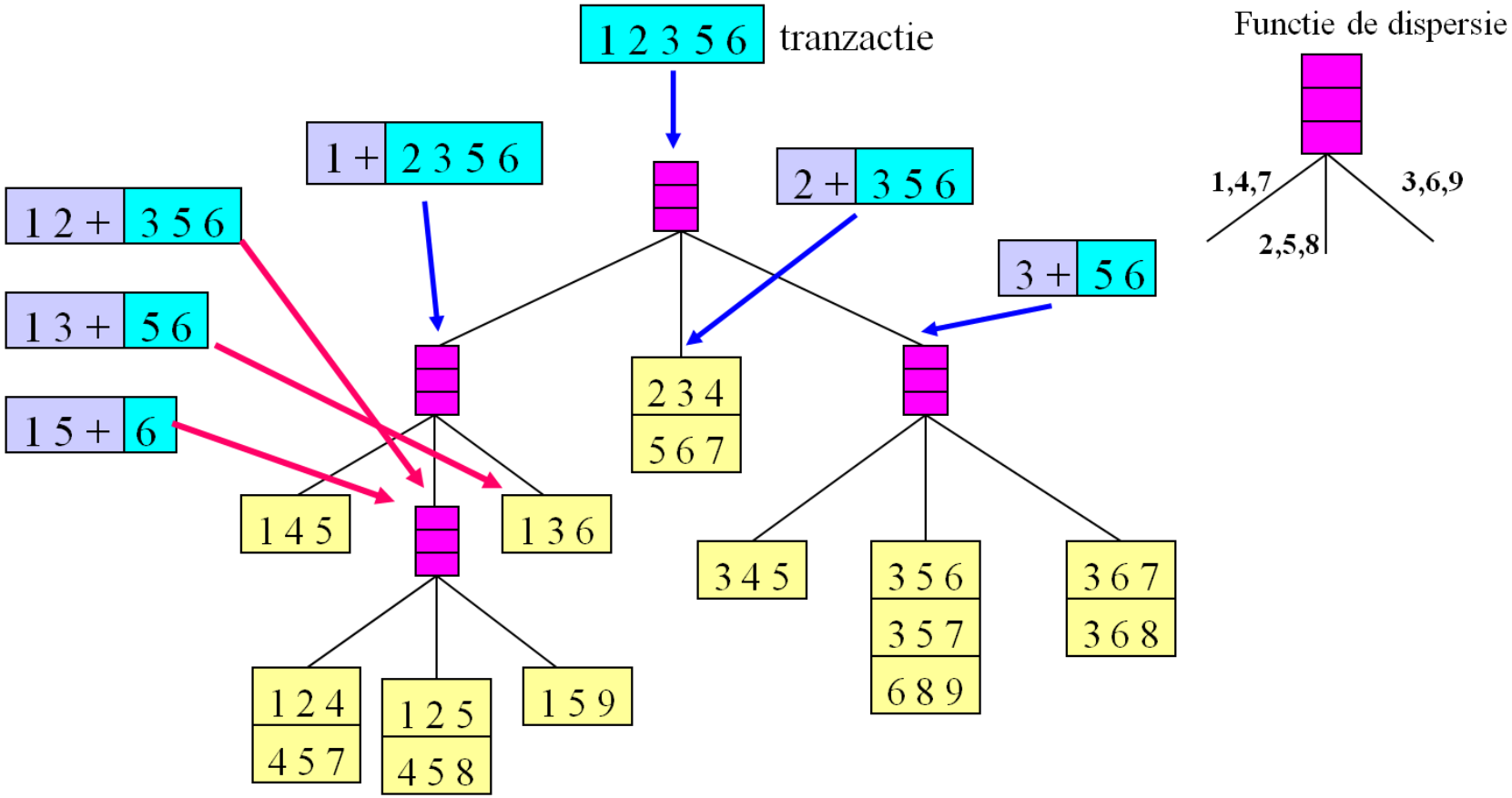



Figure 8: Se ia in considerare al doilea obiect al unei posibile 3-multimi ce se regaseste in tranzactie

# Căutarea potrivirilor între tranzacții și mulțimi candidat

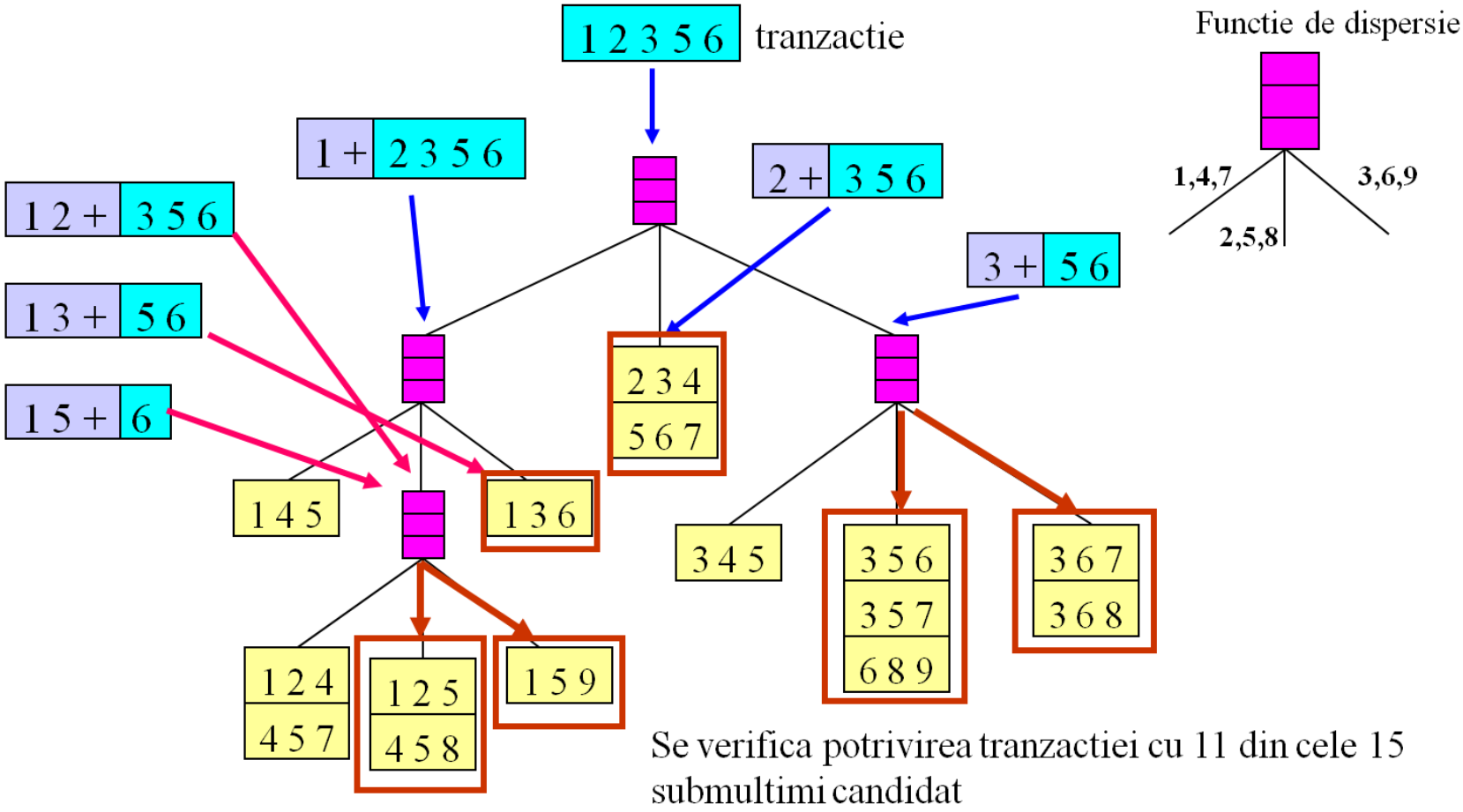



Figure 9: Se ia in considerare al treilea obiect al unei posibile 3-multimi ce se regaseste in tranzactie

# Complexitatea computațională a generării de mulțimi frecvente

Factorii care influențează complexitatea generării:

- Alegerea valorii de *minsup*
  - micșorarea lui *minsup* duce la mai multe mulțimi declarate ca frecvente
- Numărul de obiecte din setul de date
  - poate duce la mărirea cardinalului maxim de mulțime frecventă
  - dacă numărul de mulțimi frecvente crește și el atunci cresc atât efortul computațional cât și costul I/O
- Dimensiunea bazei de date
  - fiecare tranzacție se compară cu mulțimile candidat; număr mare de tranzacții $\Rightarrow$ timp crescut pentru eliminarea mulțimilor candidat nefrecvente

# Complexitatea computațională a generării de mulțimi frecvente

- Generarea 1-mulțimilor frecvente: $O(Nw)$
- Generarea mulțimilor candidat:

$$\sum_{k=2}^{w}(k-2)|C_k| < \text{costul unific. a } 2\ k-1\text{-mulţimi } < \sum_{k=2}^{w}(k-2)|F_{k-1}|^2$$

- Eliminarea de mulțimi candidat infrecvente:

$$O\left(\sum_{k=2}^{w} k(k-2)|C_k|\right)$$

- Calcularea suportului

$$O\left(N\sum_{k} C_w^k \alpha_k\right)$$

unde $\alpha_k$ este costul actualizării unei $k$-mulțimi din arborele de dispersie.

# Outline

# Generarea regulilor

- Enunț: dându–se o mulțime frecventă $L$, să se găsească toate submulțimile nevide $f \subset L$ astfel încât regula $f \longrightarrow L - f$ să aibă confidența minimă cerută
- Pentru mulțimea frecventă $\{A, B, C, D\}$ regulile candidat ce se pot obține sunt: $ABC \longrightarrow D$, $ABD \longrightarrow C$, $ACD \longrightarrow B$, $BCD \longrightarrow A, A \longrightarrow BCD, B \longrightarrow ACD, C \longrightarrow ABD$, $D \longrightarrow ABC, AB \longrightarrow CD, AC \longrightarrow BD$, $AD \longrightarrow BC$, $BC \longrightarrow AD, BD \longrightarrow AC$, $CD \longrightarrow AB$
- Pentru $k = |L|$ sunt $2^k - 2$ reguli care se pot genera (ignorăm regulile cu antecedent sau consecvent nul)

# Generarea regulilor

- Nu avem nicio proprietate de tip (anti)monotonie pentru confidența regulilor
  - Pentru o regulă $X \longrightarrow Y$ și $\tilde{X} \subset X$, $\tilde{Y} \subset Y$ nu avem nicio relație permanent valabilă între $c(X \longrightarrow Y)$ și $c(\tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y})$
- Dar avem o teoremă ¨‿

**Teoremă**

*Dacă o regulă $X \longrightarrow Y - X$ nu satisface condiția de confidență minimă $c(X \longrightarrow Y - X) \geq minconf$ atunci nicio regulă $X' \longrightarrow Y - X'$ cu $X' \subset X$ nu va avea nici ea confidența minimă.*

Demonstrație: pentru regulile $X' \longrightarrow Y - X'$ și $X \longrightarrow Y - X$ confidențele sunt $s_1 = \sigma(Y)/\sigma(X')$ respectiv $s_2 = \sigma(Y)/\sigma(X)$. Pentru $X' \subset X$ avem că $\sigma(X') \geq \sigma(X)$. Ca atare, $s_1 \leq s_2$ și deci prima regulă nu poate avea o confidență mai mare decât a doua.

# Generarea regulilor: strategie de retezare

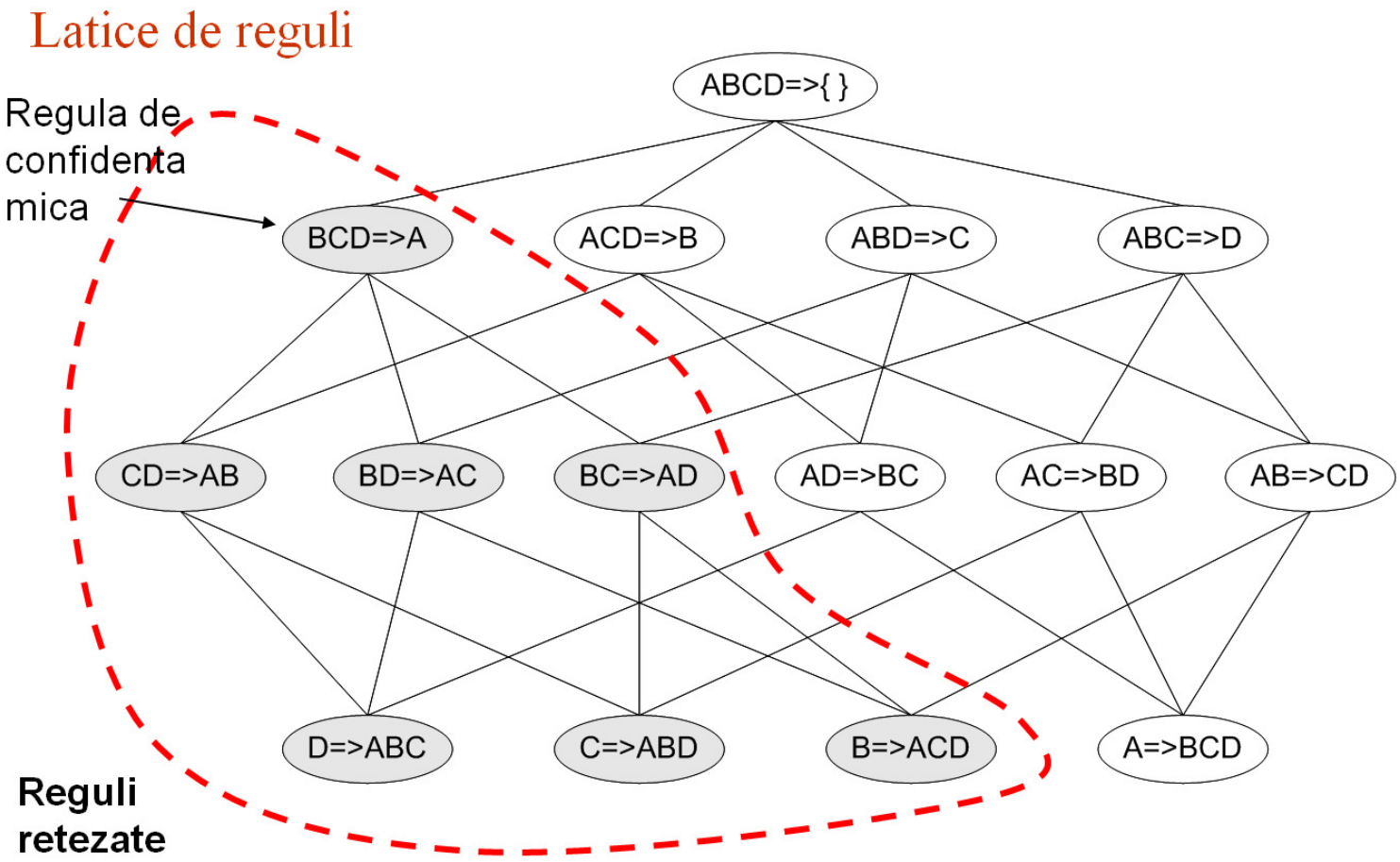



Figure 10: Retezarea regulilor aplicand teorema 2

# Retezarea regulilor în algoritmul *Apriori*

- Se generează toate regulile care au doar un element în antecedent
- Se combină reguli care au ceva comun în sufix: de exemplu, din $\{a, c, d\} \longrightarrow \{b\}$ și $\{a, b, d\} \longrightarrow \{c\}$ se generează $\{a, d\} \longrightarrow \{b, c\}$
- Se fac eliminările de reguli conform teoremei 2

# Generarea regulilor în algoritmul *Apriori*

**Algorithm 6.2** Rule generation of the *Apriori* algorithm.

1: **for** each frequent $k$-itemset $f_k$, $k \geq 2$ **do**
2: $H_1 = \{i \mid i \in f_k\}$ {1-item consequents of the rule.}
3: **call** `ap-genrules`$(f_k, H_1.)$
4: **end for**

**Algorithm 6.3** Procedure `ap-genrules`$(f_k, H_m)$.

1: $k = |f_k|$ {size of frequent itemset.}
2: $m = |H_m|$ {size of rule consequent.}
3: **if** $k > m + 1$ **then**
4: $H_{m+1} =$ apriori-gen$(H_m)$.
5: **for** each $h_{m+1} \in H_{m+1}$ **do**
6: $conf = \sigma(f_k)/\sigma(f_k - h_{m+1})$.
7: **if** $conf \geq minconf$ **then**
8: **output** the rule $(f_k - h_{m+1}) \longrightarrow h_{m+1}$.
9: **else**
10: **delete** $h_{m+1}$ from $H_{m+1}$.
11: **end if**
12: **end for**
13: **call** ap-genrules$(f_k, H_{m+1}.)$
14: **end if**

# Outline

# Reprezentarea compactă a mulțimilor frecvente

- Numărul de mulțimi frecvente poate să fie prohibitiv
- Se poate identifica o familie reprezentativă de mulțimi frecvente din care se pot obține toate celelalte mulțimi frecvente
- Variante: mulțimi frecvente maximale și mulțimi frecvente închise

# Mulțimi frecvente maximale

## Definiție

*O mulțime frecventă maximală este o mulțime frecventă pentru care toate superseturile imediate sunt infrecvente.*

(superset imediat al lui $X$ este mulțime $X \cup \{y\}$, $y \notin X$)

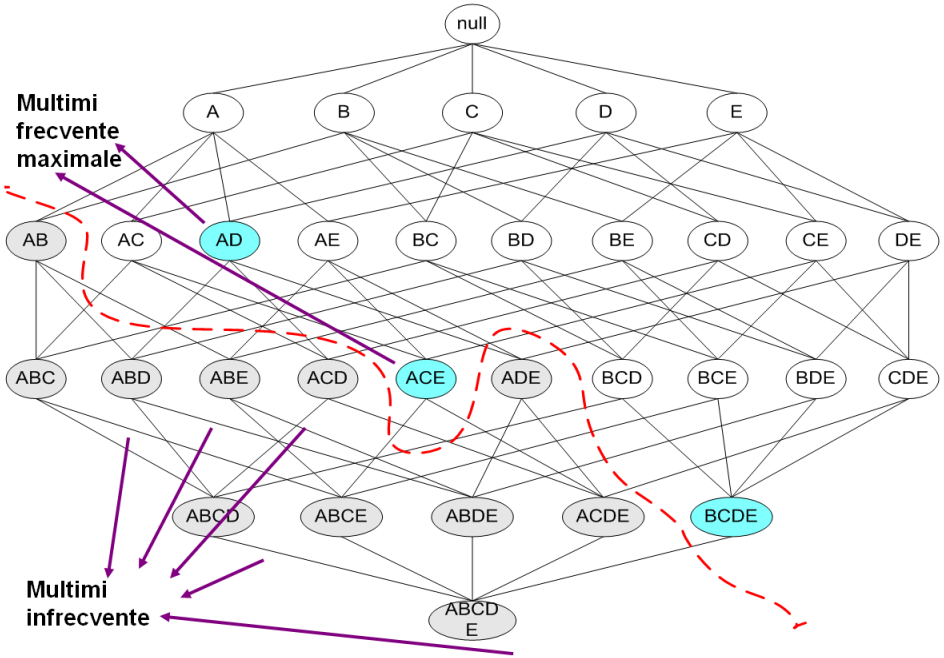



Figure 11: Familia de mulțimi frecvente maximale este reprezentată cu verde

# Utilitatea mulțimilor frecvente maximale

- Toate mulțimile frecvente sunt generate de mulțimile frecvente maximale
- Ex: mulțimile frecvente din figura anterioară sunt într-una din situațiile:
  1. mulțimi care încep cu litera $a$ și conțin $c$, $d$ sau $e$
  2. mulțimi care încep cu $b$, $c$, $d$ sau $e$.
- Există algoritmi care pot exploata eficient mulțimile frecvente maximale, fără a genera toate submulțimile
- Problemă: mulțimile frecvente maximale nu dau o modalitate de calcul al suportului submulțimilor frecvente pe care le generează

# Mulțimi frecvente închise

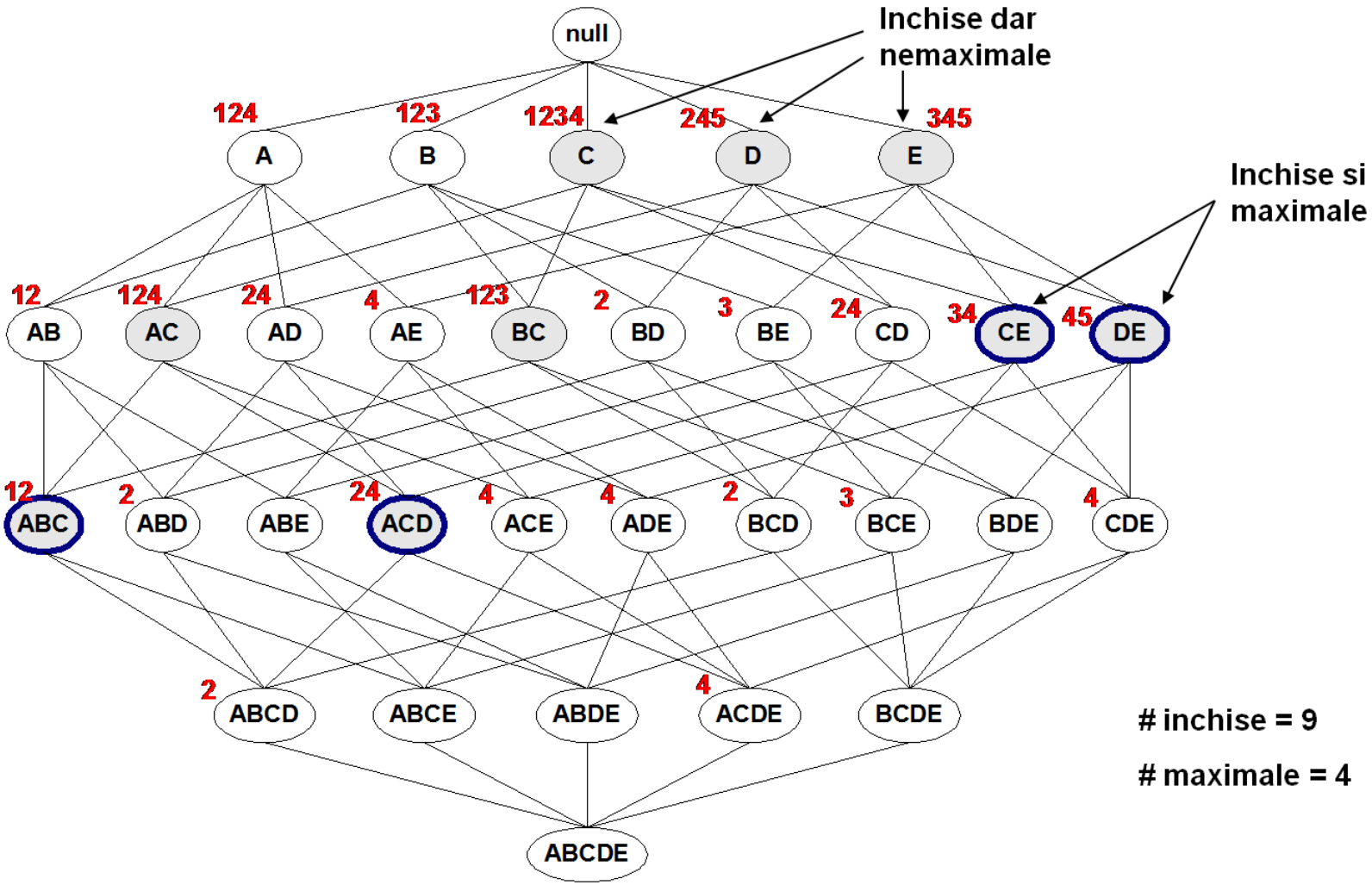
**Definiție (Mulțimi închise)**

*O mulțime $X$ este închisă dacă niciunul din superseturile imediate ale sale nu are același suport ca ea.*

**Definiție (Mulțimi frecvente închise)**

*O mulțime $X$ este frecventă închisă dacă este închisă și frecventă.*

# Mulțimi frecvente maximale vs. frecvente închise



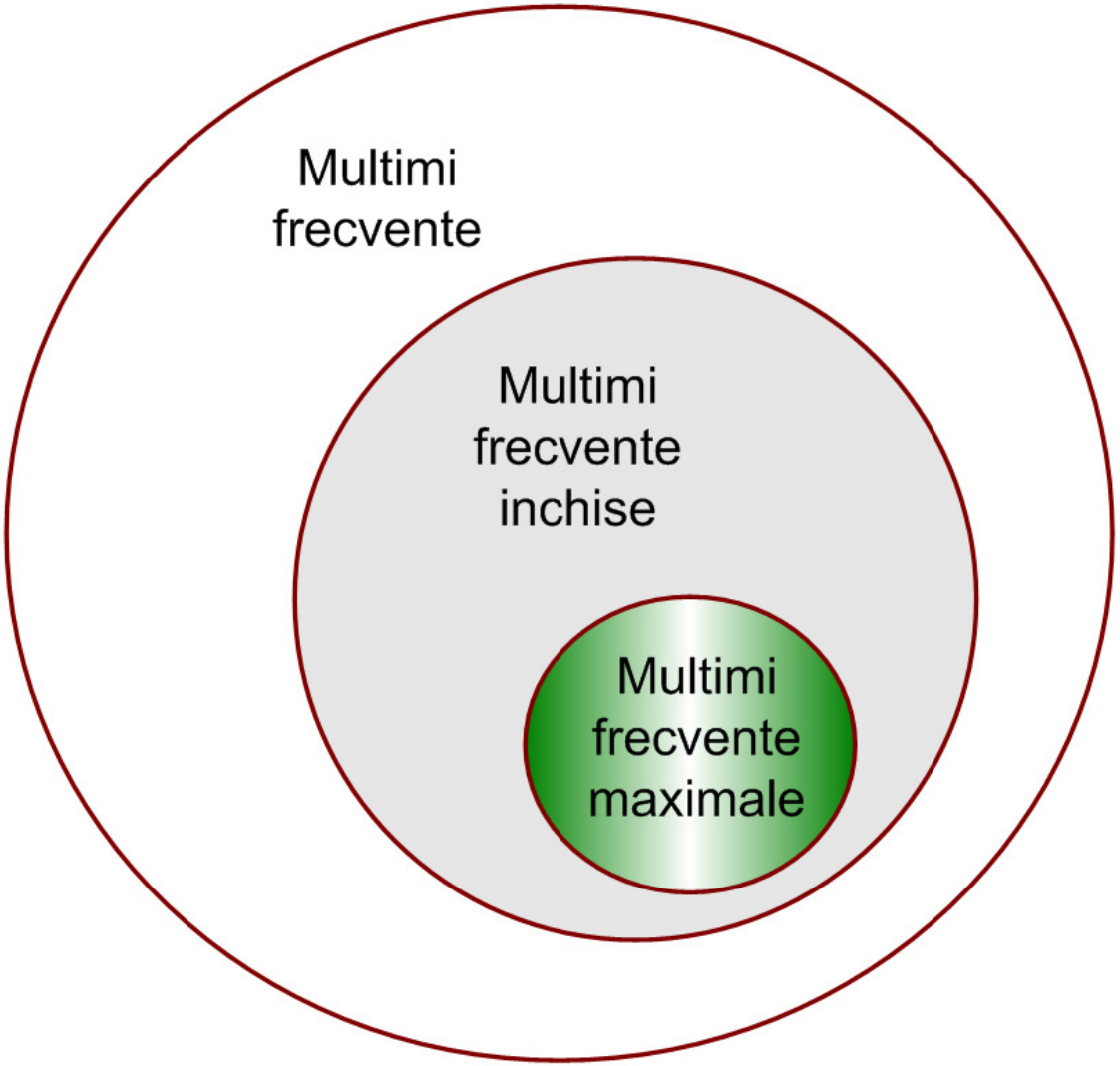
# Utilitatea mulțimilor frecvente închise

Set de tranzacții:

| TID | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | B7 | B8 | B9 | B10 | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 | C8 | C9 | C10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

- 3 grupuri: $\{A1, \ldots, A5\}$, $\{B1, \ldots, B5\}$, $\{C1, \ldots, C5\}$
- Pentru $minsup = 20\%$ avem număr total de mulțimi frecvente $= 93$
- Dar există doar 3 mulțimi frecvente închise: $\{A1, \ldots, A5\}$, $\{B1, \ldots, B5\}$, $\{C1, \ldots, C5\}$

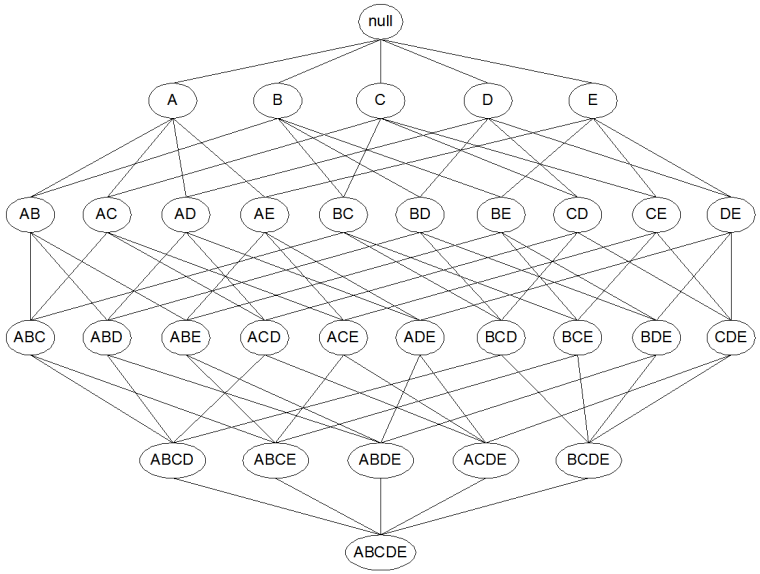
# Relația între diferite tipuri de mulțimi



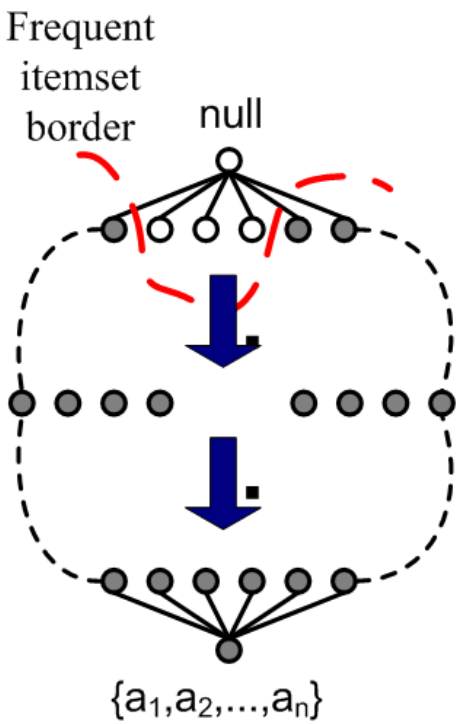
# Outline

# Metode alternative pentru generarea de mulțimi frecvente

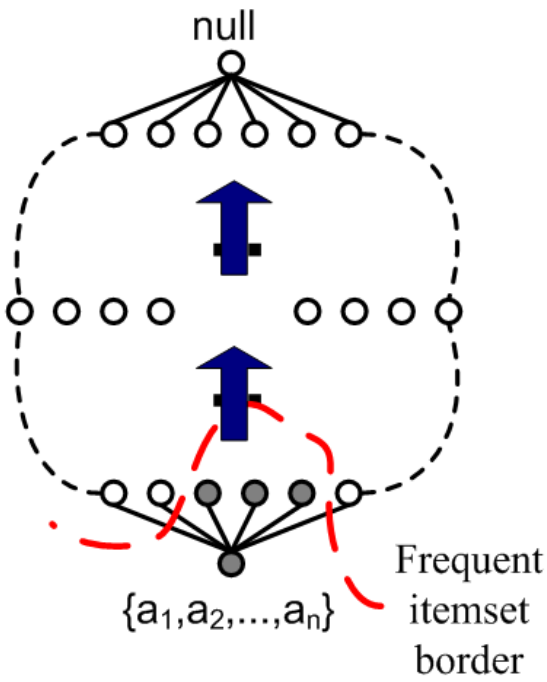
- *Apriori* este unul din primii algoritmi eficienți care evită explozia combinatorială a generării seturilor frecvente
- Principiul de bază: retezarea conform teoremei de la pagina 40
- Deficiență: numărul mare de operații de I/O
- Deficiență: pentru seturile de tranzacții dense performanța scade mult
- Metode alternative: "de la general la specific", "de la specific la general", căutare bidirecțională
- Ideea de bază: determinarea mulțimilor frecvente este o problemă de căutare în graful laticii mulțimilor



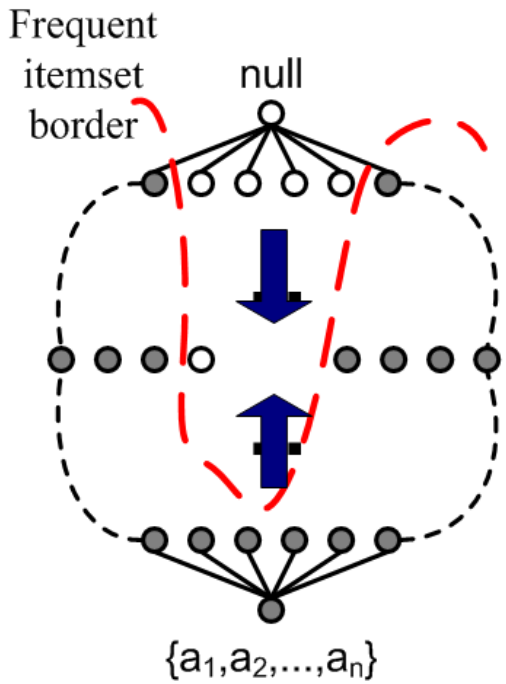
# Metode alternative pentru generarea de mulțimi frecvente




(a) "De la general la specific"




(b) "De la specific la general"



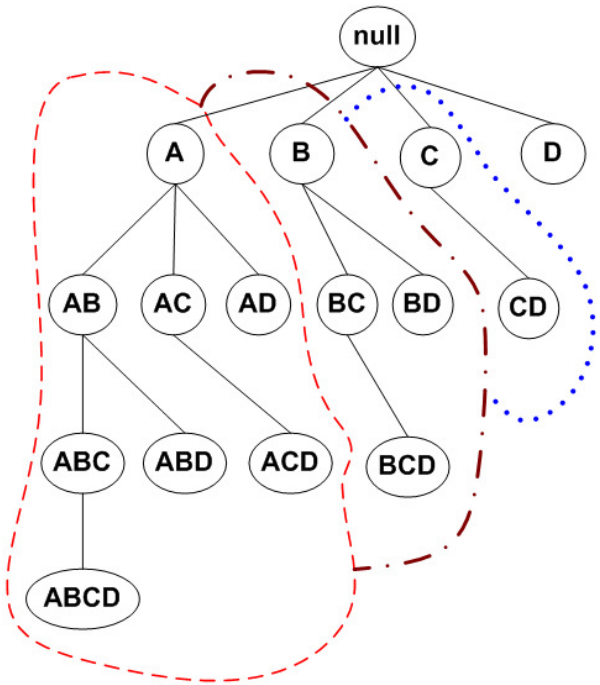

(c) Bidirectional

# Metode alternative pentru generarea de mulțimi frecvente

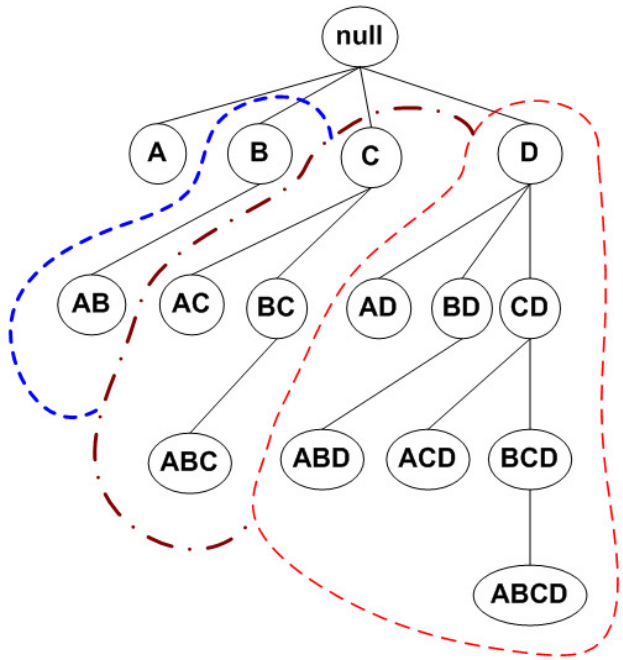
- "De la general la specific": în stilul algoritmului *Apriori*, de la o $(k-1)$-mulțime se ajunge la o $k$-mulțime; strategia e bună dacă lungimea maximă a unei mulțimi frecvente nu este prea mare
- "De la specific la general": se poate adapta principiul *Apriori*
- Căutare bidirecțională: combinație a precedentelor două, necesită mai multă memorie, dar permite determinarea rapidă a zonei de delimitare

# Metode alternative pentru generarea de mulțimi frecvente

- Clase de echivalență: se partiționează mulțimea nodurilor din latice în clase de echivalență; se trece la o altă partiție numai când s–a terminat de explorat partiția curentă
- Exemple de partiționare: arbori de tip prefix/sufix



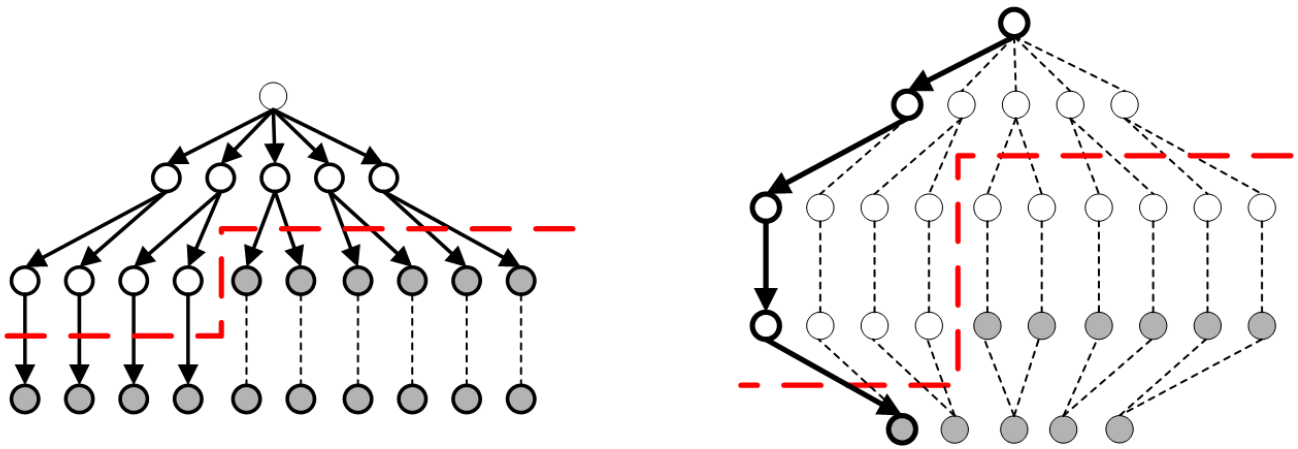

(a) Arbore prefix




(b) Arbore sufix

# Metode alternative pentru generarea de mulțimi frecvente

- Căutarea "mai întâi în lățime": algoritmul *Apriori* funcționează astfel, trecând la $k$-mulțimi numai după ce s–au epuizat toate $(k-1)$-mulțimile
- Căutarea în adâncime este o variantă folosită pentru a determina mulțimile frecvente maximale
- Odată găsită o mulțime maximală, se poate face retezare



(a) Cautare "mai intai in latime"

(b) Cautare "mai intai in adancime"

Figure 12: Parcugeri alternative

# Outline

# Problema evaluării asocierilor

- Algoritmii pot duce la producerea unui număr mare de reguli
- Multe pot fi neinteresante sau redundante
- Exemplu de redundanță: dacă regulile $\{A, B, C\} \longrightarrow \{D\}$ și $\{A, B\} \longrightarrow \{D\}$ au același suport și confidență
- Se pot folosi funcții de măsurare a gradului de interes care să reducă /sorteze regulile
- În cele prezentate până acum, doar suportul și confidența erau considerate

# Schema unui proces de extragere de cunoștințe

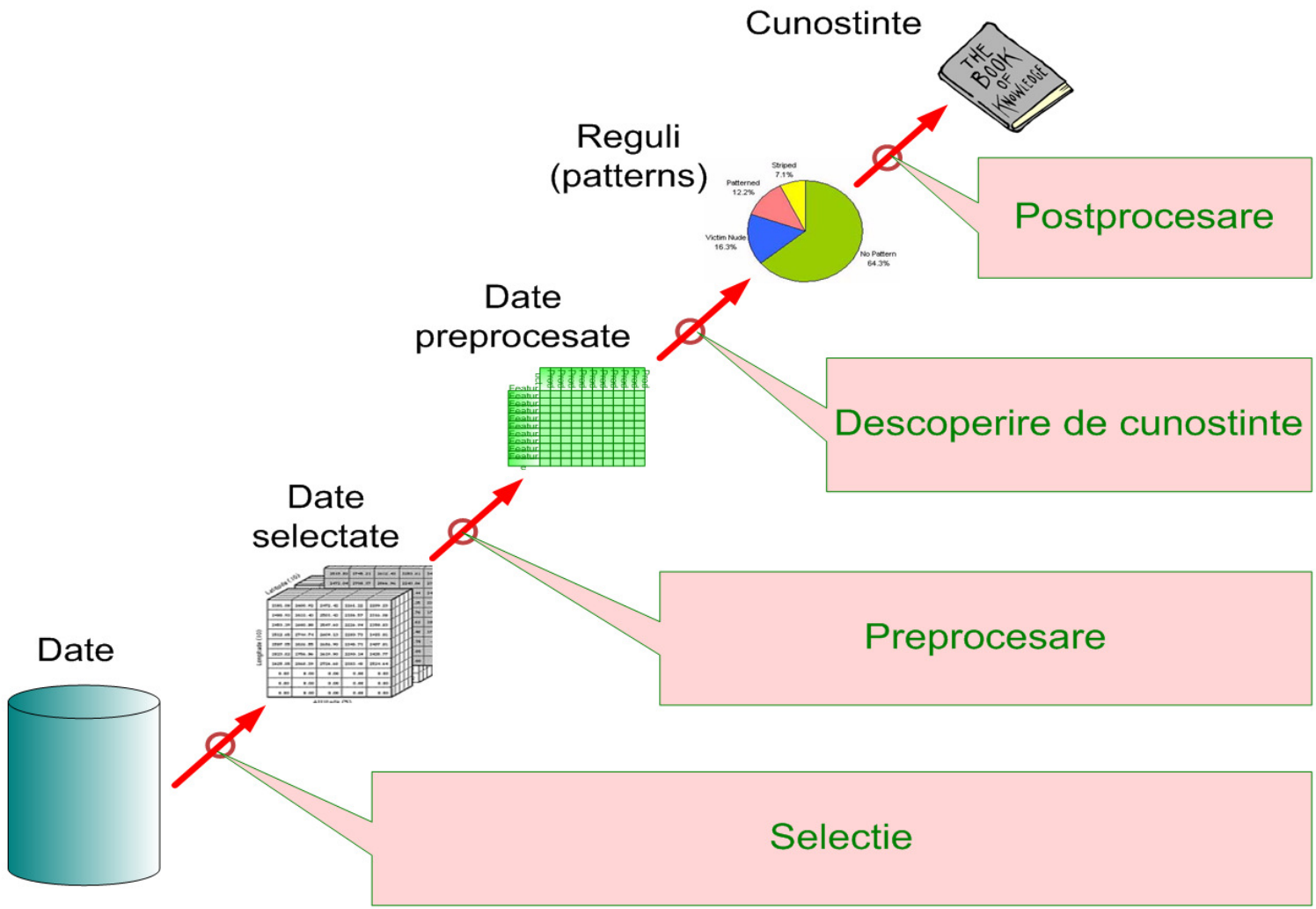



Figure 13: Pașii unui proces de extragere de cunoștințe. Postprocesarea conține evaluarea regulilor

# Moduri de cuantificare al gradului de interes

- Funcții obiective:
  - folosesc statistici derivate din date pentru a determina gradul de interes
  - suport, confidență, corelație
- Funcții subiective:
  - se referă la grad de interes pentru cunoașterea umană
  - exemplu: $\{unt\} \longrightarrow \{paine\}$ este de așteptat și deci neinteresant; dar $\{scutece\} \longrightarrow \{bere\}$ este ceva surprinzător
  - modalități de încorporare a subiectivismului:
    - vizualizare
    - filtrare bazată pe șabloane
    - ierarhie de concepte

# Măsura obiectivă a interesului

- Măsură obiectivă: modalitate dependentă de date
- Necesită intervenție minimă din partea utilizatorului
- Punct de plecare pentru diferite măsuri, pe perechi de variabile binare: tabel de contingență

| | $Y$ | $\overline{Y}$ | Total |
|---|---|---|---|
| $X$ | $f_{11}$ | $f_{10}$ | $f_{1+}$ |
| $\overline{X}$ | $f_{01}$ | $f_{00}$ | $f_{0+}$ |
| Total | $f_{+1}$ | $f_{+0}$ | N |

Table 3: Tabel de contingență pentru regula $X \longrightarrow Y$. O valoare de forma $\overline{(\cdot)}$ reprezintă lipsa obiectului asociat în tranzație. $f_{1+}$ ($f_{+1}$) reprezintă valoarea suport pentru $X$ (respectiv $Y$).

# Limitări ale cuplului suport-confidență

- Considerăm studiul legăturii între cei care beau ceai sau cafea:

| | $Cafea$ | $\overline{Cafea}$ | Total |
|---|---|---|---|
| $Ceai$ | 150 | 50 | 200 |
| $\overline{Ceai}$ | 650 | 150 | 800 |
| Total | 800 | 200 | 1000 |

Table 4: Preferințe de consum.

- Considerăm regula: $\{Ceai\} \longrightarrow \{Cafea\}$: suport 15%, confidență 75%
- Remarcăm însă că procentul celor care beau cafea este de 80%, mai mult decât confidența anterioară
- Deci regula $\{Ceai\} \longrightarrow \{Cafea\}$ dă o indicație greșită față de starea actuală a datelor; știind că o persoană bea ceai, asta va scădea șansa ei ca să bea cafea
- Cauza: măsura de confidență ignoră suportul mulțimii consecvent

# Alte funcții obiective de măsurare a gradului de interes

- factor de ridicare (eng: lift)

$$lift(A \longrightarrow B) = \frac{c(A \longrightarrow B)}{s(B)}$$

- interes:

$$I(A,B) = \frac{s(A,B)}{s(A) \cdot s(B)} : \begin{cases} = 1 & \text{pentru } A \text{ şi } B \text{ independente} \\ > 1 & \text{pentru } A \text{ şi } B \text{ pozitiv corelate} \\ < 1 & \text{pentru } A \text{ şi } B \text{ negativ corelate} \end{cases}$$

- corelația Pearson pentru variabile binare:

$$\phi = \frac{f_{11}f_{00} - f_{01}f_{10}}{\sqrt{f_{1+}f_{+1}f_{0+}f_{+0}}} \in [-1,1]$$

# Alte funcții obiective de măsurare a gradului de interes

| # | Measure | Formula |
|---|---|---|
| 1 | $\phi$-coefficient | $\frac{P(A,B)-P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(B)(1-P(A))(1-P(B))}}$ |
| 2 | Goodman-Kruskal's ($\lambda$) | $\frac{\sum_j \max_k P(A_j,B_k)+\sum_k \max_j P(A_j,B_k)-\max_j P(A_j)-\max_k P(B_k)}{2-\max_j P(A_j)-\max_k P(B_k)}$ |
| 3 | Odds ratio ($\alpha$) | $\frac{P(A,B)P(\overline{A},\overline{B})}{P(A,\overline{B})P(\overline{A},B)}$ |
| 4 | Yule's $Q$ | $\frac{P(A,B)P(\overline{AB})-P(A,\overline{B})P(\overline{A},B)}{P(A,B)P(\overline{AB})+P(A,\overline{B})P(\overline{A},B)} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ |
| 5 | Yule's $Y$ | $\frac{\sqrt{P(A,B)P(\overline{AB})}-\sqrt{P(A,\overline{B})P(\overline{A},B)}}{\sqrt{P(A,B)P(\overline{AB})}+\sqrt{P(A,\overline{B})P(\overline{A},B)}} = \frac{\sqrt{\alpha}-1}{\sqrt{\alpha}+1}$ |
| 6 | Kappa ($\kappa$) | $\frac{P(A,B)+P(\overline{A},\overline{B})-P(A)P(B)-P(\overline{A})P(\overline{B})}{1-P(A)P(B)-P(\overline{A})P(\overline{B})}$ |
| 7 | Mutual Information ($M$) | $\frac{\sum_i \sum_j P(A_i,B_j)\log\frac{P(A_i,B_j)}{P(A_i)P(B_j)}}{\min(-\sum_i P(A_i)\log P(A_i), -\sum_j P(B_j)\log P(B_j))}$ |
| 8 | J-Measure ($J$) | $\max\left(P(A,B)\log(\frac{P(B\|A)}{P(B)})+P(A\overline{B})\log(\frac{P(\overline{B}\|A)}{P(\overline{B})}),\right.$ $\left.P(A,B)\log(\frac{P(A\|B)}{P(A)})+P(\overline{A}B)\log(\frac{P(\overline{A}\|B)}{P(\overline{A})})\right)$ |
| 9 | Gini index ($G$) | $\max\Big(P(A)[P(B\|A)^2+P(\overline{B}\|A)^2]+P(\overline{A})[P(B\|\overline{A})^2+P(\overline{B}\|\overline{A})^2]$ $-P(B)^2-P(\overline{B})^2,$ $P(B)[P(A\|B)^2+P(\overline{A}\|B)^2]+P(\overline{B})[P(A\|\overline{B})^2+P(\overline{A}\|\overline{B})^2]$ $-P(A)^2-P(\overline{A})^2\Big)$ |
| 10 | Support ($s$) | $P(A,B)$ |
| 11 | Confidence ($c$) | $\max(P(B\|A),P(A\|B))$ |
| 12 | Laplace ($L$) | $\max\left(\frac{NP(A,B)+1}{NP(A)+2},\frac{NP(A,B)+1}{NP(B)+2}\right)$ |
| 13 | Conviction ($V$) | $\max\left(\frac{P(A)P(\overline{B})}{P(A\overline{B})},\frac{P(B)P(\overline{A})}{P(B\overline{A})}\right)$ |
| 14 | Interest ($I$) | $\frac{P(A,B)}{P(A)P(B)}$ |
| 15 | cosine ($IS$) | $\frac{P(A,B)}{\sqrt{P(A)P(B)}}$ |
| 16 | Piatetsky-Shapiro's ($PS$) | $P(A,B)-P(A)P(B)$ |
| 17 | Certainty factor ($F$) | $\max\left(\frac{P(B\|A)-P(B)}{1-P(B)},\frac{P(A\|B)-P(A)}{1-P(A)}\right)$ |
| 18 | Added Value ($AV$) | $\max(P(B\|A)-P(B),P(A\|B)-P(A))$ |
| 19 | Collective strength ($S$) | $\frac{P(A,B)+P(\overline{AB})}{P(A)P(B)+P(\overline{A})P(\overline{B})}\times\frac{1-P(A)P(B)-P(\overline{A})P(\overline{B})}{1-P(A,B)-P(\overline{AB})}$ |
| 20 | Jaccard ($\zeta$) | $\frac{P(A,B)}{P(A)+P(B)-P(A,B)}$ |
| 21 | Klosgen ($K$) | $\sqrt{P(A,B)}\max(P(B\|A)-P(B),P(A\|B)-P(A))$ |

Figure 14: Măsuri propuse

# Sortarea pe baza diferitelor funcții

- Pe baza funcțiilor se pot face ordonări ale regulilor
- Ordinea poate să difere de la o funcție de interes la alta

| Exemplu | $f_{11}$ | $f_{10}$ | $f_{01}$ | $f_{00}$ |
|---|---|---|---|---|
| E1 | **8123** | **83** | **424** | **1370** |
| E2 | 8330 | 2 | 622 | 1046 |
| E3 | **9481** | **94** | **127** | **298** |
| E4 | 3954 | 3080 | 5 | 2961 |
| E5 | **2886** | **1363** | **1320** | **4431** |
| E6 | 1500 | 2000 | 500 | 6000 |
| E7 | **4000** | **2000** | **1000** | **3000** |
| E8 | 4000 | 2000 | 2000 | 2000 |
| E9 | **1720** | **7121** | **5** | **1154** |
| E10 | 61 | 2483 | 4 | 7452 |

Figure 15: 10 exemple de tabele de contingență

| # | $\phi$ | $\lambda$ | $\alpha$ | $Q$ | $Y$ | $\kappa$ | $M$ | $J$ | $G$ | $s$ | $c$ | $L$ | $V$ | $I$ | $IS$ | $PS$ | $F$ | $AV$ | $S$ | $\zeta$ | $K$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 5 | 5 | 4 | 6 | 2 | 2 | 4 | 6 | 1 | 2 | 5 |
| E2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 8 | 3 | 5 | 1 | 8 | 2 | 3 | 6 |
| E3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 8 | 7 | 1 | 4 | 4 | 6 | 10 | 1 | 8 | 6 | 10 | 3 | 1 | 10 |
| E4 | 4 | 7 | 2 | 2 | 2 | 5 | 4 | 1 | 3 | 6 | 2 | 2 | 2 | 4 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| E5 | 5 | 4 | 8 | 8 | 8 | 4 | 7 | 5 | 4 | 7 | 9 | 9 | 9 | 3 | 6 | 3 | 9 | 4 | 5 | 6 | 3 |
| E6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 4 | 6 | 9 | 8 | 8 | 7 | 2 | 8 | 6 | 7 | 2 | 7 | 8 | 2 |
| E7 | 7 | 5 | 9 | 9 | 9 | 6 | 8 | 6 | 5 | 4 | 7 | 7 | 8 | 5 | 5 | 4 | 8 | 5 | 6 | 4 | 4 |
| E8 | 8 | 9 | 10 | 10 | 10 | 8 | 10 | 10 | 8 | 4 | 10 | 10 | 10 | 9 | 7 | 7 | 10 | 9 | 8 | 7 | 9 |
| E9 | 9 | 9 | 5 | 5 | 5 | 9 | 9 | 7 | 9 | 8 | 3 | 3 | 3 | 7 | 9 | 9 | 3 | 7 | 9 | 9 | 8 |
| E10 | 10 | 8 | 6 | 6 | 6 | 10 | 5 | 9 | 10 | 10 | 6 | 6 | 5 | 1 | 10 | 10 | 5 | 1 | 10 | 10 | 7 |

Figure 16: Sortarea pe baza diferitelor reguli

# Proprietăți ale funcțiilor obiective

De văzut din bibliografie:

- Proprietatea de inversiune
- Proprietatea de adăugare nulă
- Proprietatea de scalare

De citit: paradoxul lui Simpson și necesitatea stratificării datelor înaintea extragerii de reguli

# Outline

# Distribuții oblice

- Uneori datele au următoarea formă: foarte multe obiecte cu suport mic, puține cu suport mare
- O atare distribuție este puternic neechilibrată (eng: skewed) și nu poate fi tratată uniform
- Dacă pragul *minsup* este ales prea mic atunci algoritmul *Apriori* (sau oricare altul) poate genera excesiv de multe mulțimi frecvente $\Rightarrow$ consum mare de memorie, posibil relații întâmplătoare
- Dacă *minsup* este prea mare se pot rata niște reguli utile
  - exemplu: bijuterii - se cumpără rar în comparație cu alte produse, dar profitul adus e considerabil
- Pentru setul de date Public Use Microarray Sample census data distribuția datelor este:

| Group | $G_1$ | $G_2$ | $G_3$ |
|---|---|---|---|
| Support | $< 1\%$ | $1\% - 90\%$ | $> 90\%$ |
| Number of Items | 1735 | 358 | 20 |

# Distribuții oblice

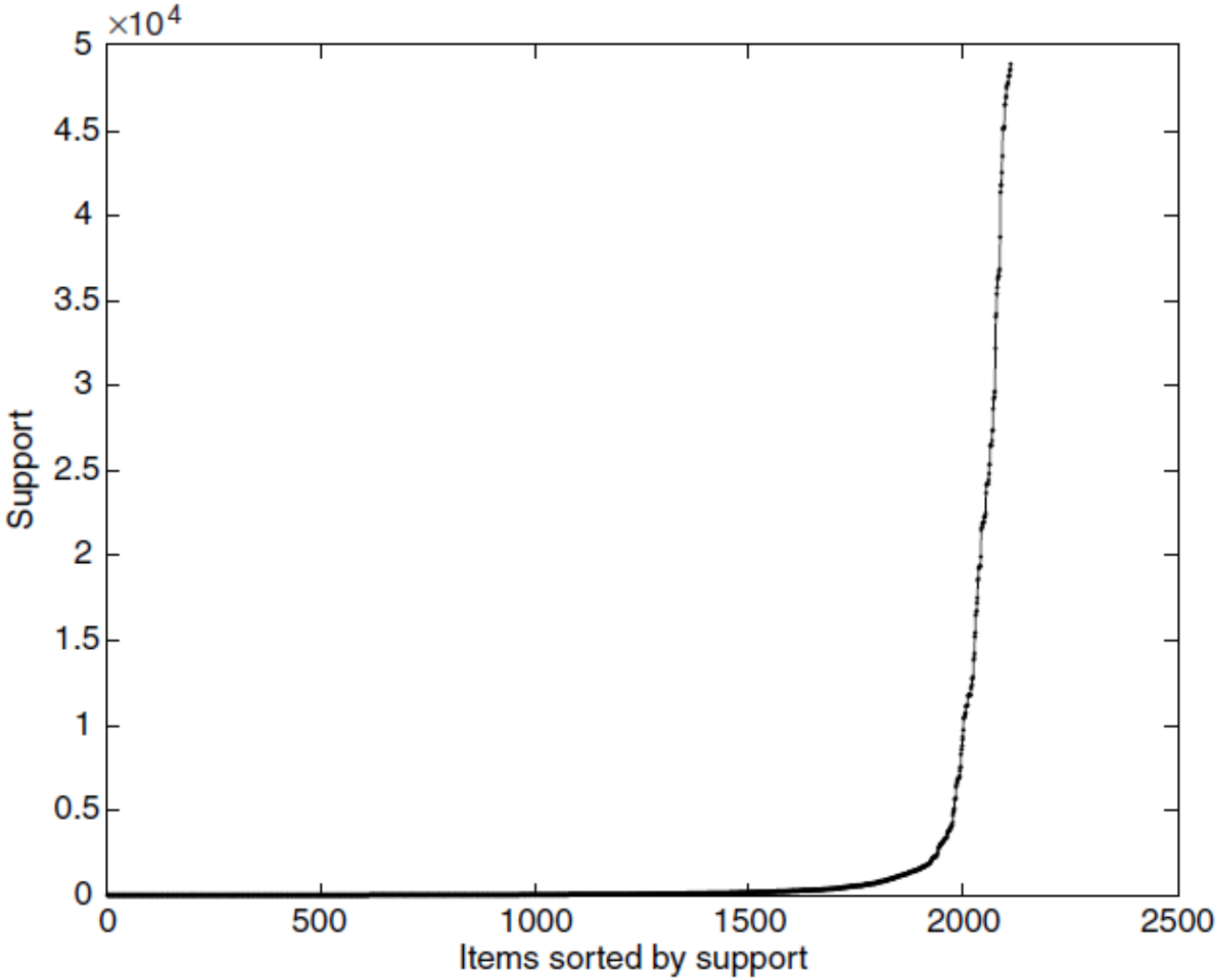



Figure 17: Distribuție oblică pentru setul de date PUMS census data

# Distribuții oblice

- Dacă se lasă valoare *minsup* mică, atunci o mulțime poate să combine obiecte cu suport mare și mic
- Obiectele din mulțime însă pot avea o corelație mică
- Atfel de mulțimi se numesc șabloane cu suport încrucișat (eng: cross-support patterns)
- Pentru *minsup* $= 0.05\%$ avem 18847 perechi frecvente, din care 93% sunt cu obiecte din G1 și G3; corelația maximă este însă 0.029 - prea puțin
- Chiar mărirea pragului *minconf* poate fi inefectivă; consecventul unei reguli poate avea suport mare deci șabloane cu suport înclucișat pot încă să apară

# Distribuții oblice

## Definiție (Șabloane cu suport încrucișat)

*Un șablon cu suport încrucișat este o mulțime* $X = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ *pentru care raportul suporturilor*

$$r(X) = \frac{\min[s(i_1), s(i_2), \ldots, s(i_k)]}{\max[s(i_1), s(i_2), \ldots, s(i_k)]} \tag{3}$$

*este mai mic decât un prag specificat de utilizator* $h_c$.

- Un alt mod de detectare a șabloanelor cu suport încrucișat: se examinează confidența minimă care se poate extrage dintr–o mulțime dată, *i.e.* măsura *h-confidență*:

$$\frac{s\left(i_1, i_2, \ldots, i_k\right)}{\max\left[s(i_1), s(i_2), \ldots, s(i_k)\right]}$$

# Distribuții oblice

- Criteriul de eliminare a unui șablon încrucișat $X$: șablonul se elimină dacă

$$h - confidenta(X) \leq \frac{\min[s(i_1), s(i_2), \ldots, s(i_k)]}{\max[s(i_1), s(i_2), \ldots, s(i_k)]} \leq h_c$$

- Valoarea peste $h_c$ a h-confidenței ne asigură că obiectele din mulțime sunt puternic corelate între ele