Quad Trees

Universitatea ”Transilvania” din Brașov

May 30, 2018

Quadtrees - arbori quad

- Structuri de date ierarhice, au la bază descompunerea recursivă tip *divide et impera* a spațiului.
- Arbori în care fiecare nod intern are 4 descendenți.
- Diferențiați după:
  - Tipul de date pe care îl stochează.
  - Principiul de descompunere.
  - Rezoluția descompunerii.

Arbori quad pentru regiuni

- partiționează spațiunlui 2D sau 3D în regiuni, conform unui anumit criteriu de descompunere.

Arbori quad pentru regiuni

- partiționează spațiunlui 2D sau 3D în regiuni, conform unui anumit criteriu de descompunere.
- utilizează cel mai frecvent partiționare în suprafețe pătrate egale.

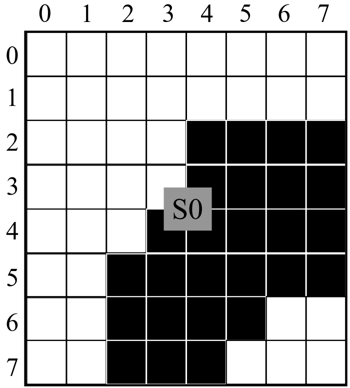
Arbori quad pentru regiuni

- partiţionează spaţiunlui 2D sau 3D în regiuni, conform unui anumit criteriu de descompunere.
- utilizează cel mai frecvent partiţionare în suprafeţe pătrate egale.
- cresc viteza de execuţie a anumitor algoritmi pentru imagini, suprafeţe, structuri geometrice.

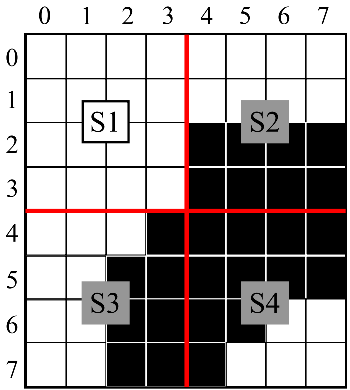
Arbori quad pentru regiuni

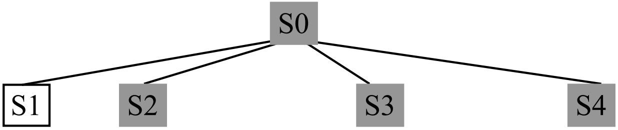
- partiționează spațiunlui 2D sau 3D în regiuni, conform unui anumit criteriu de descompunere.
- utilizează cel mai frecvent partiționare în suprafețe pătrate egale.
- cresc viteza de execuție a anumitor algoritmi pentru imagini, suprafețe, structuri geometrice.
- exemplu de aplicație: - algoritmul *Split and Merge*

Arbori quad pentru regiuni - Exemplu

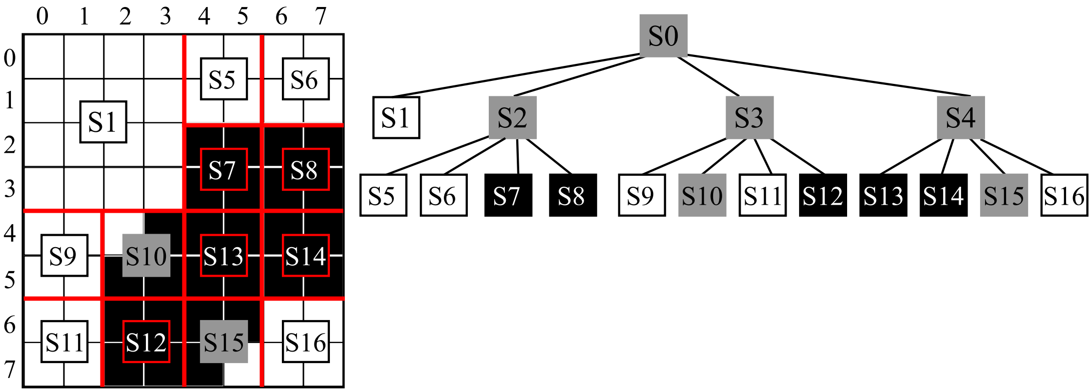


Arbori quad pentru regiuni - Exemplu

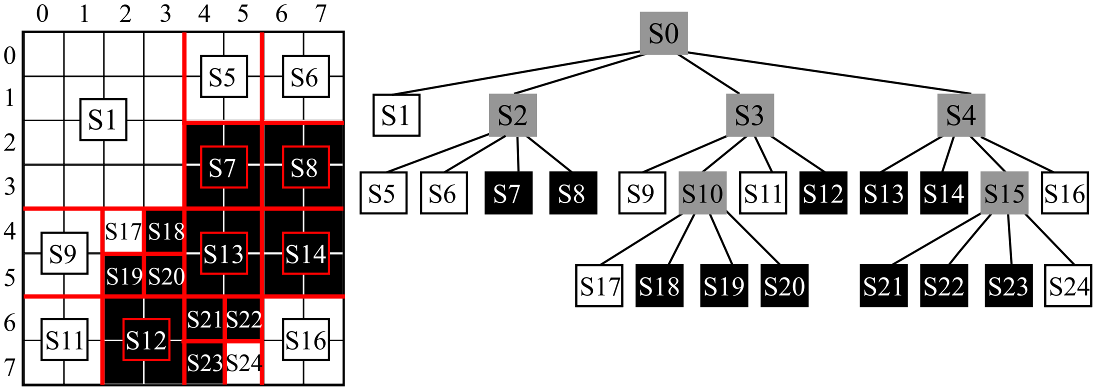




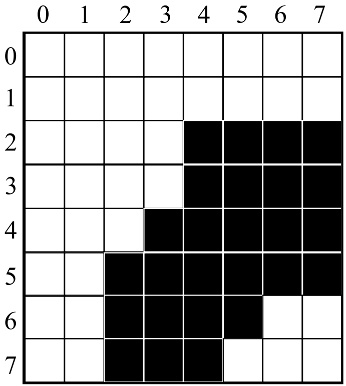
Arbori quad pentru regiuni - Exemplu

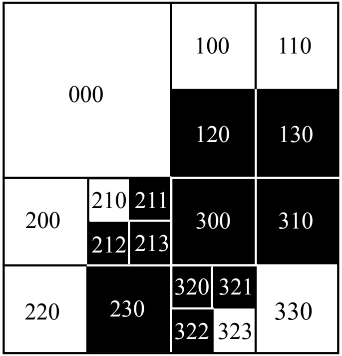


Arbori quad pentru regiuni - Exemplu

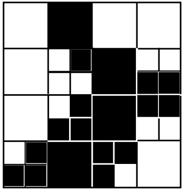


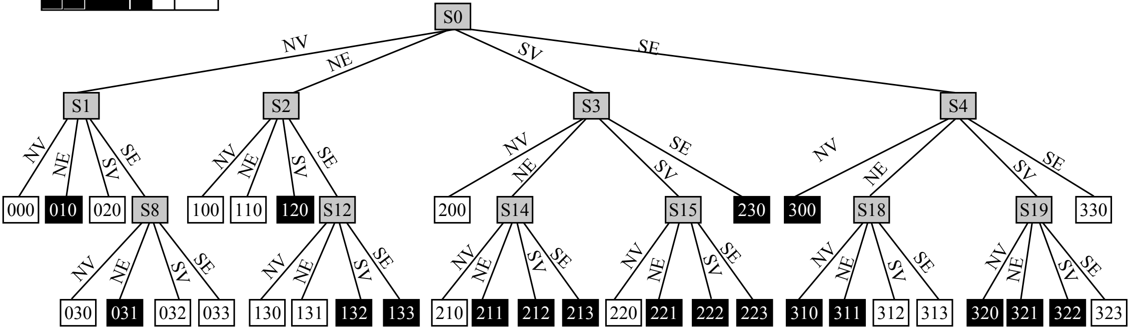
Arbori quad pentru regiuni - Exemplu





Arbori quad pentru regiuni - Exemplu

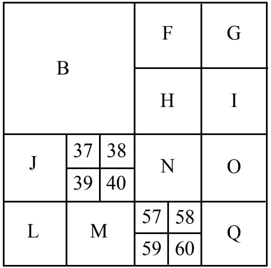




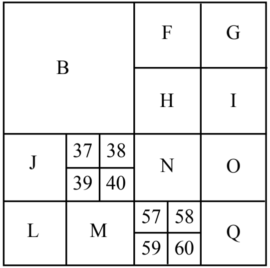
Adiacență - Vecini

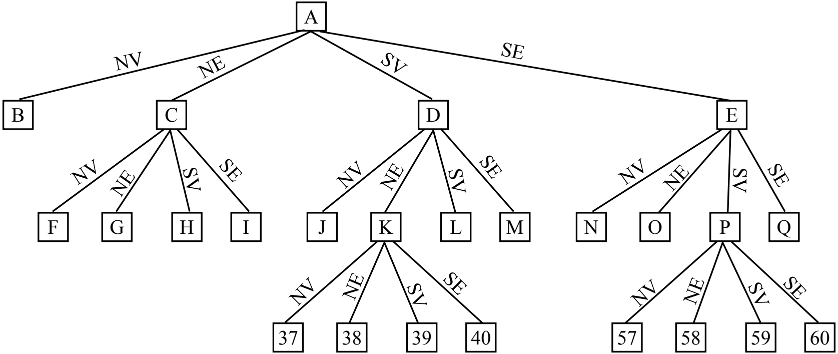
- Nod din arbore $\Leftrightarrow$ regiune/bloc din imagine.
- Fiecare bloc are
  - 4 laturi: N (nord), S (sud), E (est), V (vest).
  - 4 vârfuri: NV, NE, SV, SE
- Două blocuri P și Q disjuncte sunt adiacente după direcția $D \in \{N, S, E, V, NV, NE, SV, SE\}$, dacă
  - P are o parte din latura de pe direcția D comună cu Q
  - Vârful din direcția D al blocului P este adiacent cu vârful opus al blocului Q
- P și Q vecine $\Leftrightarrow$ P și Q adiacente.

Vecini - Exemplu



Vecini - Exemplu



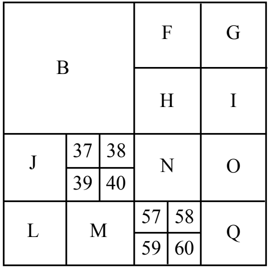


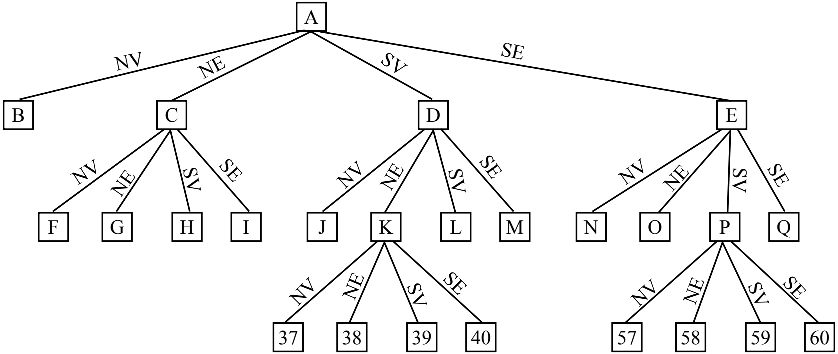
Determinarea vecinilor

(1) Determinarea vecinilor adiacenți cu întreaga latură a unui anumit bloc

(2) Determinarea vecinilor adiacenți cu un segment din latura unui anumit bloc

Vecini - Exemplu



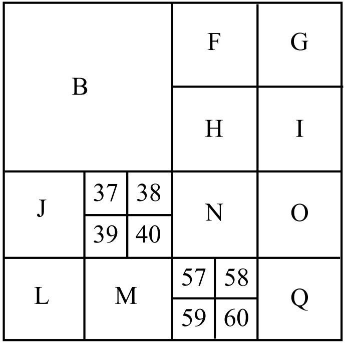


Algoritmi pentru determinarea vecinilor

Notații

- G = "greater then or equal", C = "corner", S = "side", N = "neighbor"
- GSN(P,D) = cel mai mic bloc adiacent cu latura din direcția D a blocului P cu latura mai mare sau egală cu latura lui P.
- GCN(P,C) = cel mai mic bloc adiacent cu P și aflat de partea opusă a colțului C al blocului P cu latura mai mare sau egală cu latura lui P.

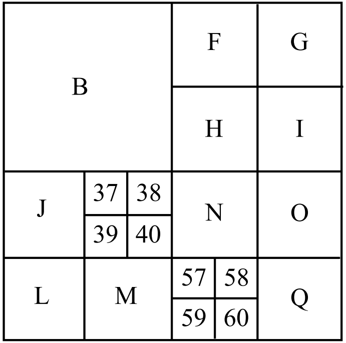
Algoritmi pentru determinarea vecinilor



Observații:

- GSN și GCN nu definesc relații 1 - 1.

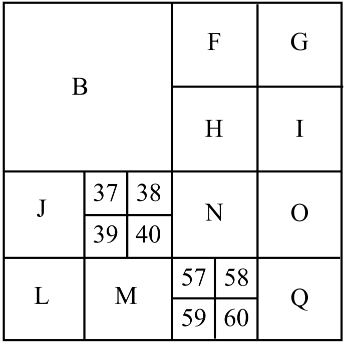
Algoritmi pentru determinarea vecinilor



Observații:

- GSN și GCN nu definesc relații 1 - 1.
- GSN și GCN nu sunt simetrice.

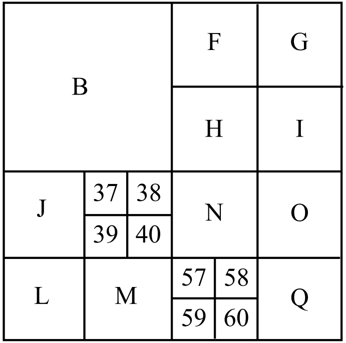
Algoritmi pentru determinarea vecinilor



Observații:

- GSN și GCN nu definesc relații 1 - 1.
- GSN și GCN nu sunt simetrice.
- Un bloc care nu se află pe marginea imaginii are minim 5 vecini.

Algoritmi pentru determinarea vecinilor



Observații:

- GSN și GCN nu definesc relații 1 - 1.
- GSN și GCN nu sunt simetrice.
- Un bloc care nu se află pe marginea imaginii are minim 5 vecini.
- Un nod are maxim 8 vecini.

Determinarea vecinilor adiacenți pe orizontală / verticală

- **Problematică**: determinare REZ = GSN(NOD,D)

Determinarea vecinilor adiacenți pe orizontală / verticală

- **Problematică**: determinare REZ = GSN(NOD,D)
- **Idee generală**:

Determinarea vecinilor adiacenți pe orizontală / verticală

- **Problematică**: determinare REZ = GSN(NOD,D)
- **Idee generală**:
  1. se urcă de la nodul *NOD* către primul strămoș *S* comun cu *REZ*;

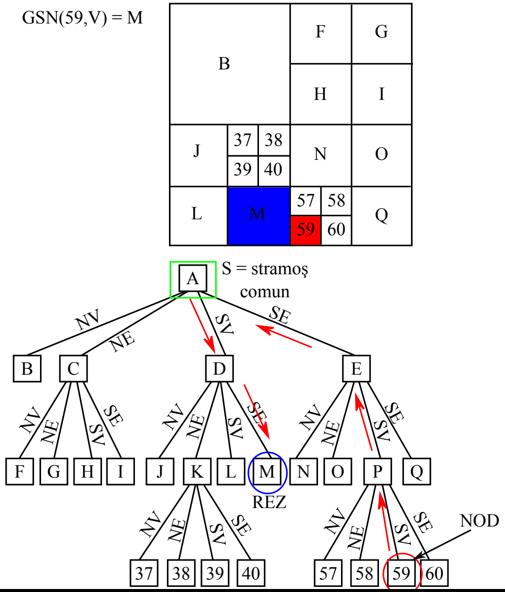
Determinarea vecinilor adiacenți pe orizontală / verticală

- **Problematică**: determinare REZ = GSN(NOD,D)
- **Idee generală**:
  1. se urcă de la nodul *NOD* către primul strămoș *S* comun cu *REZ*;
  2. se coboară de la *S* către *REZ* pe ramuri simetrice față de direcția D ale ramurilor de urcare.

Determinarea vecinilor adiacenți pe orizontală / verticală

- **Problematică**: determinare REZ = GSN(NOD,D)
- **Idee generală**:
  1. se urcă de la nodul *NOD* către primul strămoș *S* comun cu *REZ*;
  2. se coboară de la *S* către *REZ* pe ramuri simetrice față de direcția D ale ramurilor de urcare.
- **Observație**: Strămoșul comun se obține urcând de la nodul curent către părinte pe o ramură ce nu conține direcția de căutare!

Algoritmi pentru determinarea vecinilor



Observații:

- Dacă direcția D = E, $\Rightarrow$ *NOD* pe ramuri SV sau NV față relativ la S.
- Dacă direcția D = V, $\Rightarrow$ *NOD* pe ramuri SE sau NE față relativ la S.
- Dacă direcția D = S, $\Rightarrow$ *NOD* pe ramuri NE sau NV față relativ la S.
- Dacă direcția D = N, $\Rightarrow$ *NOD* pe ramuri SE sau SV față relativ la S.

Algoritmul GSN

```
GSN (P, D)
    //urcarea spre stramosul comun
    nod=P
    parinte = nod→p
    Stiva=∅
    cat timp parinte≠ NULL si ramura spre parinte contine D
            pune pe Stiva simetricul fata de D al acestei ramurii
            nod = parinte
            parinte=nod→p
    sfarsit cat timp
    daca parinte=NULL atunci
            RETURN NULL
    sfarsit daca
    pune pe Stiva simetricul fata de D a ramurii de la nod la parinte
    nod = parinte
```

Algoritmul GSN

```
// coborare catre vecinul cautat
cat timp Stiva≠ ∅
    directie← Stiva
    daca nod≠ frunza atunci
        nod=nod→directie
    altfel
        Stiva=∅
    sfarsit daca
sfarsit cat timp
RETURN nod
```

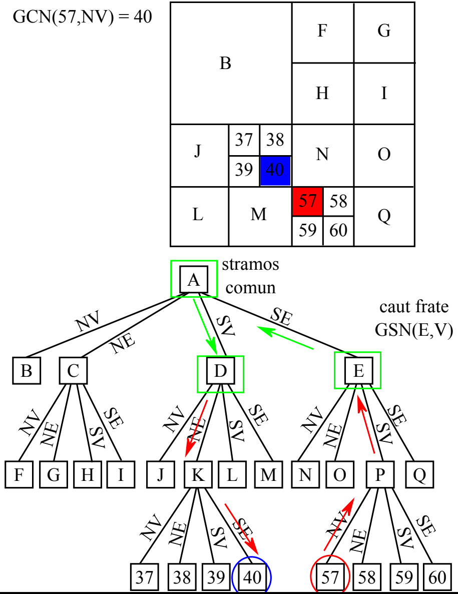
Determinarea vecinilor adiacenți pe diagonală - algoritmul GCN

Notație: $GCN(NOD, D_1 D_2)$ - direcția de adiacenț $D_1 D_2$, unde $D_1 \in \{N, S\}$ și $D_2 \in \{E, V\}$.

Idee generală: se caută un strămoș al lui *NOD* vecin orizontal / vertical cu un strămoș al nodului căutat.

Algoritmul GCN

GCN(57,NV) = 40



Algoritm general

- Urcă de la nodul curent Z la părintele Y, până când $Y \rightarrow D_3 D_4 = Z$ și $D_1 D_2 \neq D_3 D_4$.
- Dacă $D_1 \neq D_3$ și $D_2 \neq D_4$ atunci Y este strămoș comun $\Rightarrow$ coboară din Y pe arce complementare cu cele pe care s-a urcat.
- altfel
  - dacă $D_1 \neq D_3$ atunci caută vecinul $X = GSN(Y, D_2)$.
  - altfel dacă $D_2 \neq D_4$ atunci caută vecinul $X = GSN(Y, D_1)$.
- Coboară din X pe arce complementare cu cele pe care s-a ajuns la Y.

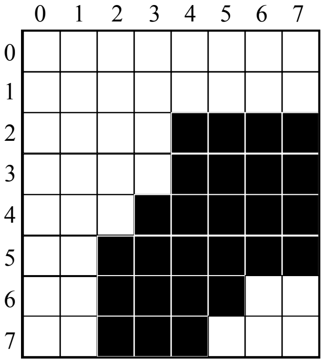
Arce complementare - (NV, SE) (NE, SV).

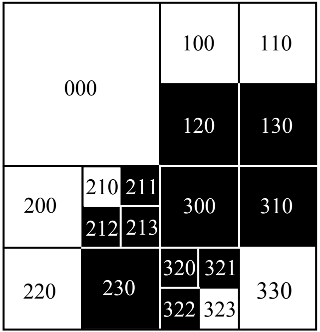
Implementare - Arbori quad liniari

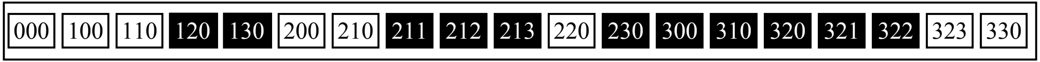
Problematică: - numărul mare de noduri interne în cazul imaginilor reale.

Soluție: - arbori quad liniari = listă a frunzelor arborelui quad clasic în ordinea parcurgerii de la stânga la dreapta.

Arbori quad liniari - Exemplu



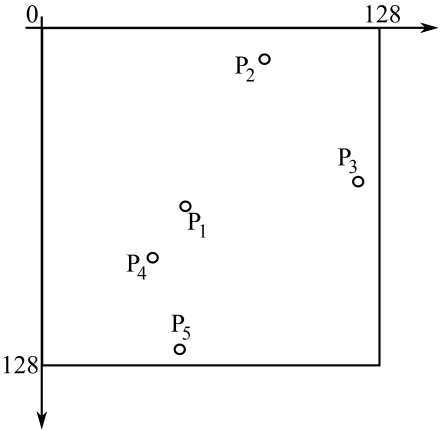




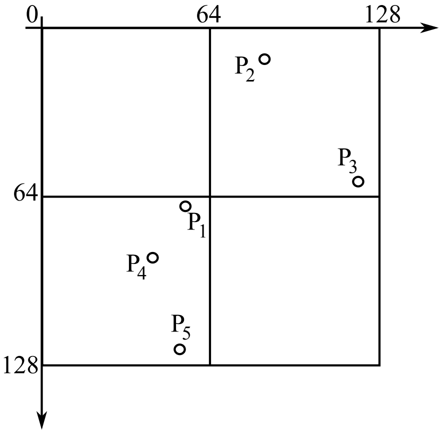
Point Region Quadtrees

- **Descriere**: împart o suprafață pătrată pe baza unui set de puncte plasate pe această suprafață.
- **Idee generală**: Fie suprafața definită prin domeniul $R = [0, dim] \times [0, dim]$ și n puncte $P_i = (x_i, y_i), P_i \in R, i = \overline{1, n}$
  Suprafața se împarte în patru suprafețe egale în mod recursiv, până când fiecare frunză conține cel mult unul dintre punctele P_i.

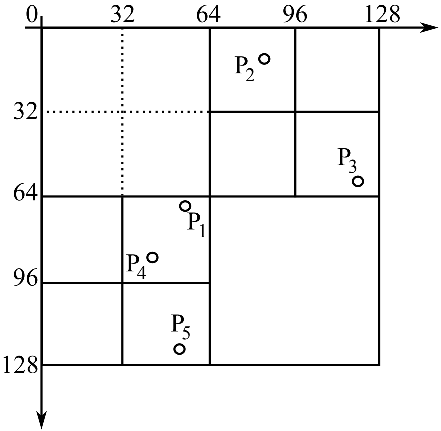
Point Region Quadtrees - Exemplu



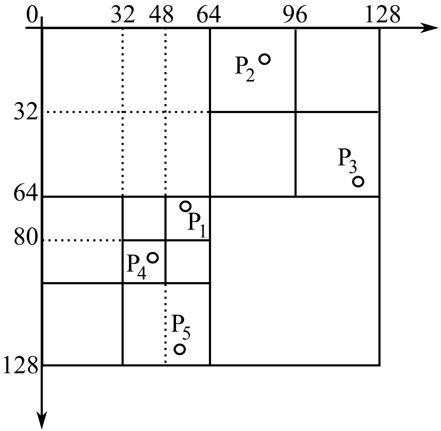
Point Region Quadtrees - Exemplu



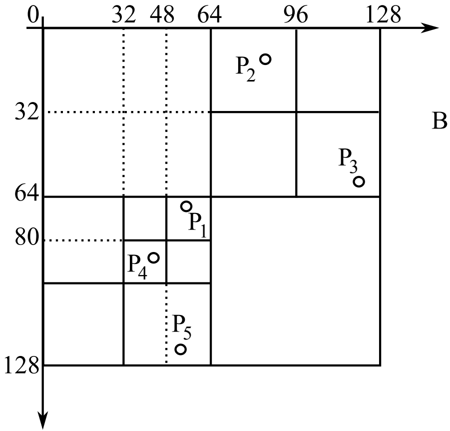
Point Region Quadtrees - Exemplu

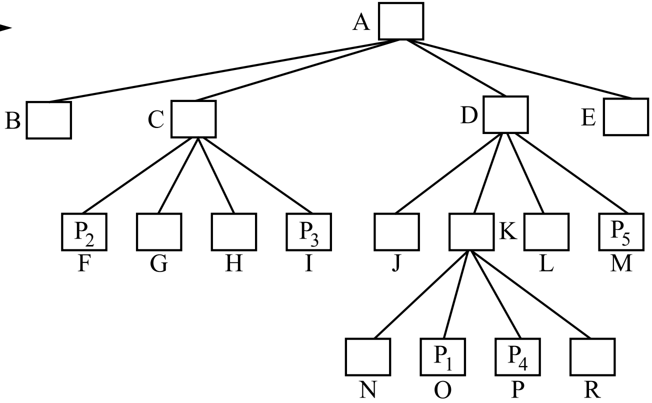


Point Region Quadtrees - Exemplu



Point Region Quadtrees - Exemplu





Point Region Quadtrees

Operații:

- PR_SEARCH(T,P)
- PR_INSERT(T,P)
- PR_CONSTRUCT(PList,dim)
- PR_DELETE(T,P)

Câmpurile unui nod Z:

- $Z.info$ - punctul conținut de nod sau NULL
- $Z.TL$ - perechea de coordonate corespunzătoare colțului top-left al regiuni reprezentate de Z
- $Z.BR$ - perechea de coordonate corespunzătoare colțului bottom-right al regiuni din Z
- $Z.NV$, $Z.NE$, $Z.SV$, $Z.SE$ - legăturile către cei patru fii.

Point Region Quadtrees - PR_SEARCH

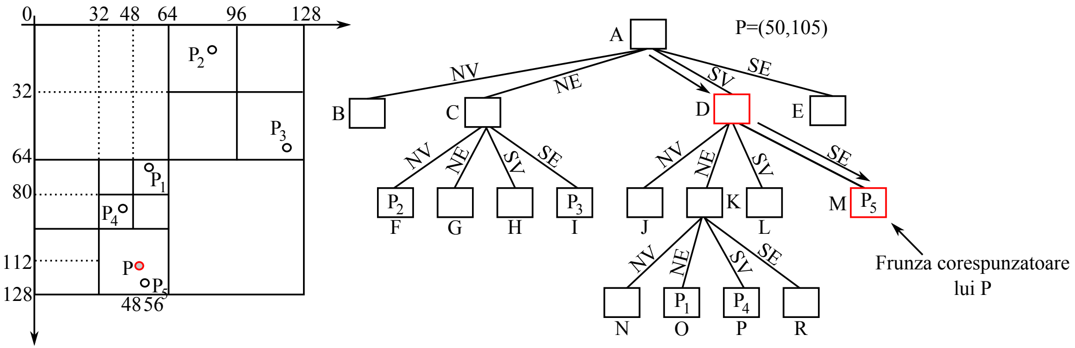
```
PR_ SEARCH(Z,P)
    daca P.x<0 sau P.x>Z.BR.x sau P.y<0 sau P.y>Z.BR.y atunci
         RETURN NULL
    sfarsit daca
    cat timp Z nu e frunza
         xm=(Z.TL.x+Z.BR.x)/2 si ym = (Z.TL.y+Z.BR.y)/2
         daca P.x ≤ xm si P.y ≤ ym atunci Z=Z.NV
         altfel daca P.x>xm si P.y > ym atunci
                  Z=Z.SE
              altfel daca P.x ≤ xm
                     Z=Z.SV
                  altfel Z=Z.NE
                  sfarsit daca
              sfarsit daca
         sfarsit daca
    sfarsit cat timp
    RETURN Z
```

Point Region Quadtrees - PR_INSERT

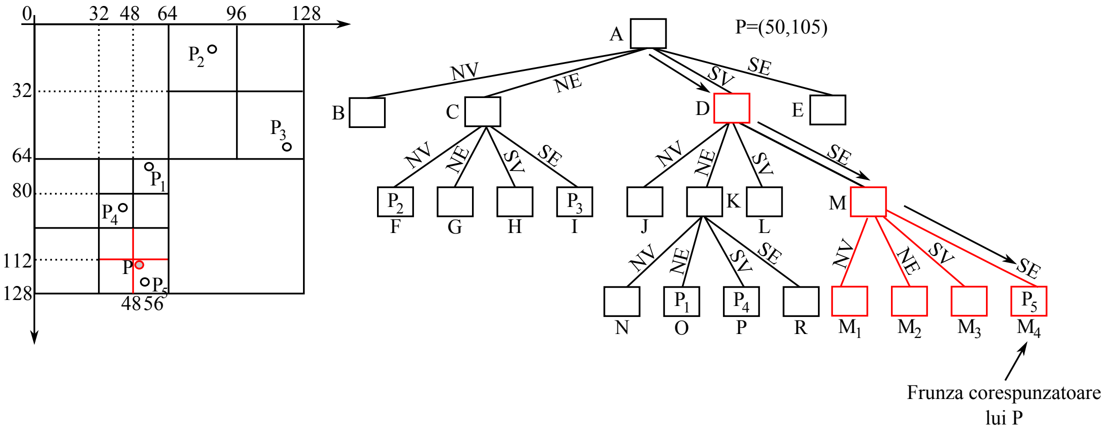
Etape:

- Se caută frunza Z corespunzătoare punctului P
- Dacă Z nu conține nici un punct atunci se inserează P
- Altfel se sparge Z în patru frunze noi, se plasează punctul din Z în frunza corespunzătoare și se reia algoritmul de la Z

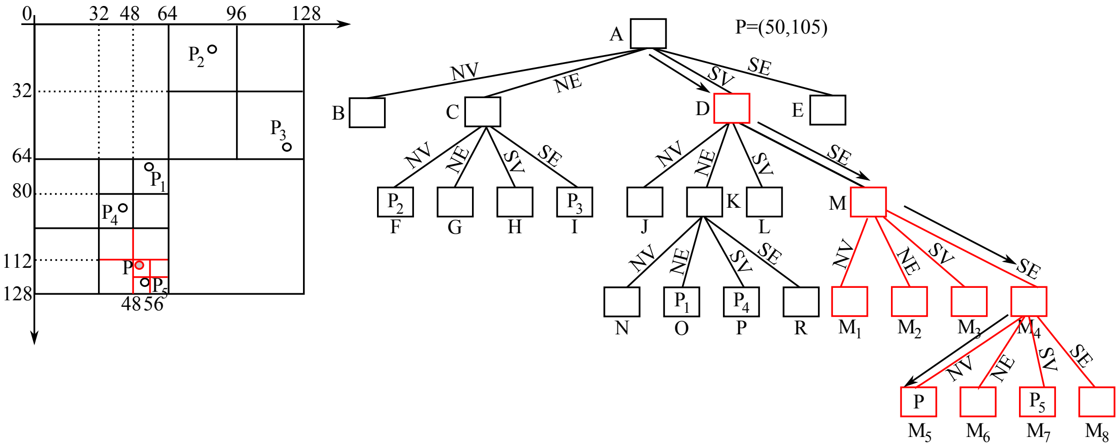
Point Region Quadtrees - PR_INSERT - Exemplu



Point Region Quadtrees - PR_INSERT - Exemplu



Point Region Quadtrees - PR_INSERT - Exemplu



Point Region Quadtrees - PR_INSERT

```
PR_ INSERT(T,P, dim)
    daca P.x<0 sau P.x>dim.x sau P.y<0 sau P.y>dim atunci
        RETURN NULL
    sfarsit daca
    daca T.rad=NULL atunci
        aloca T.rad
        T.rad.info = P
        T.rad.TL=(0,0)
        T.rad.BR=(dim,dim)
        T.rad.SV=T.rad.SE=T.rad.NV=T.rad.NE=NULL
        RETURN
    sfarsit daca
```

Point Region Quadtrees - PR_INSERT

```
  Z=T.rad
  repeta
        Z=PR_SEARCH(Z,P)
        daca Z.info=NULL atunci
             Z.info=P
        altfel
             sparge Z in 4 noduri Z1,Z2,Z3,Z4
             plaseaza Z.info in nodul corespunzator
             Z.NV=Z1, Z.NE=Z2, Z.SV=Z3, Z.SE=Z4
             Z.info = NULL
        sfarsit daca
  pana cand Z = frunza
RETURN
```

Point Region Quadtrees - PR_DELETE

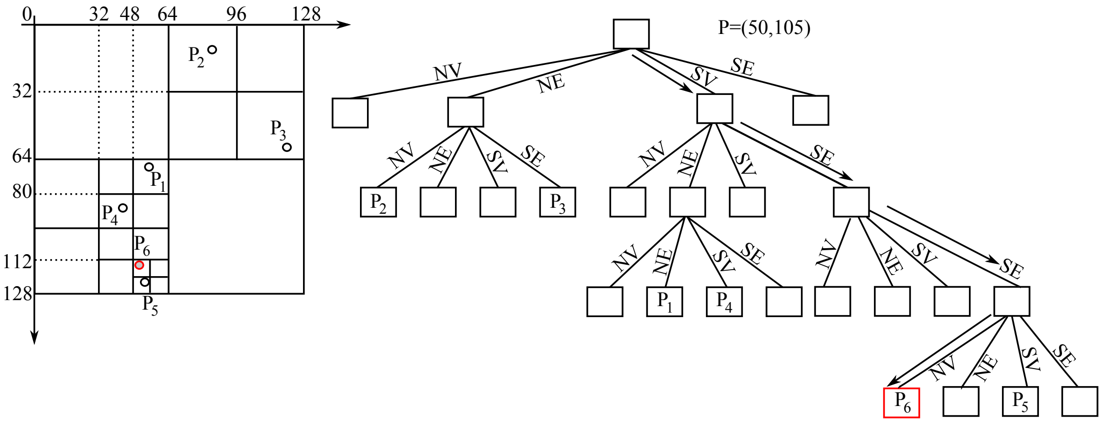
Etape:

- Se caută frunza Z corespunzătoare punctului P
- Dacă Z nu conține P nu există P în arbore
- Altfel se șterge P din Z și se verifică dacă se pot contopi noduri vecine cu Z

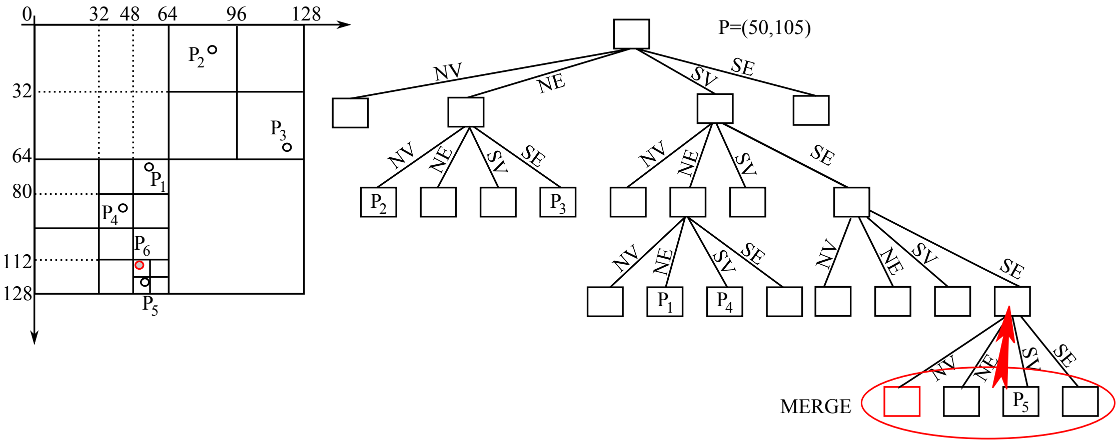
Point Region Quadtrees - PR_DELETE

```
PR_ DELETE(T,P)
    Z=PR_SEARCH(T,P)
    daca Z.info = P atunci
         Z.info = NULL
         Y=Z.p
         ok = true
         cat timp Z≠NULL si ok=TRUE
                  Info = IS_MERGEABLE(Y)
                  daca Info = NULL atunci ok=false
                  altfel
                       Y.info=Info
                       Y.NV=Y.NE=Y.SV=Y.SE=NULL
                       Z=Y, Y=Y.p
                  sfarsit daca
         sfarsit cat timp
    altfel scrie("nu exista P")
    sfarsit daca
RETURN
```

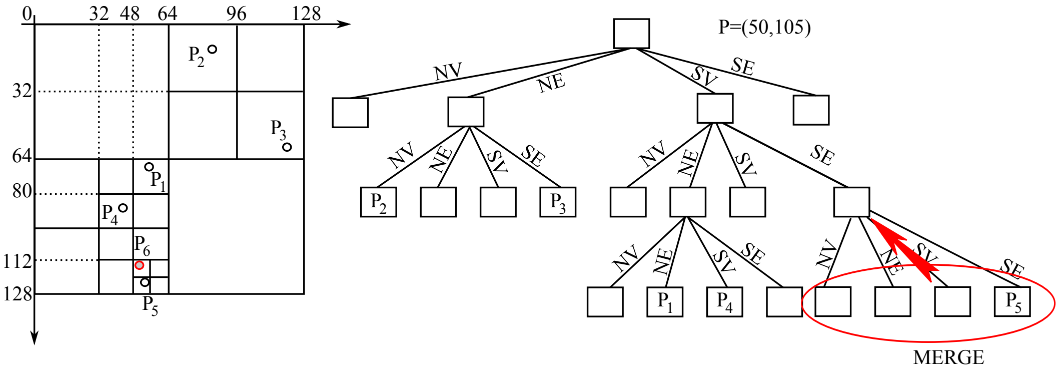
Point Region Quadtrees - PR_DELETE - Exemplu



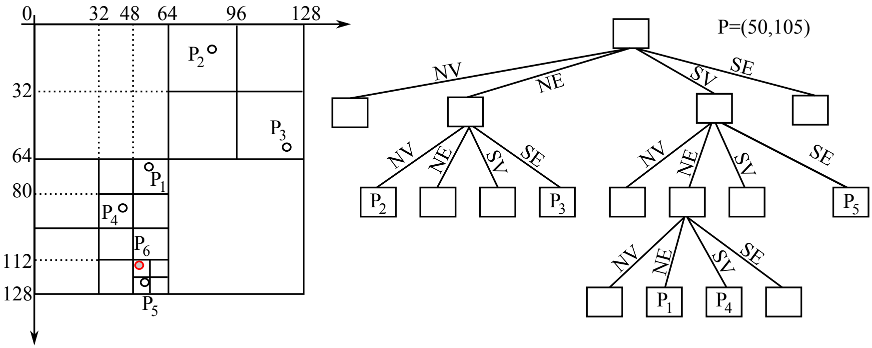
Point Region Quadtrees - PR_DELETE - Exemplu



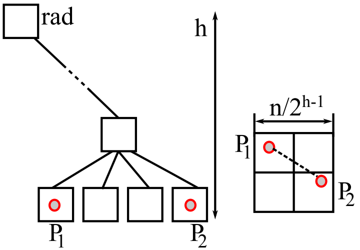
Point Region Quadtrees - PR_DELETE - Exemplu



Point Region Quadtrees - PR_DELETE - Exemplu



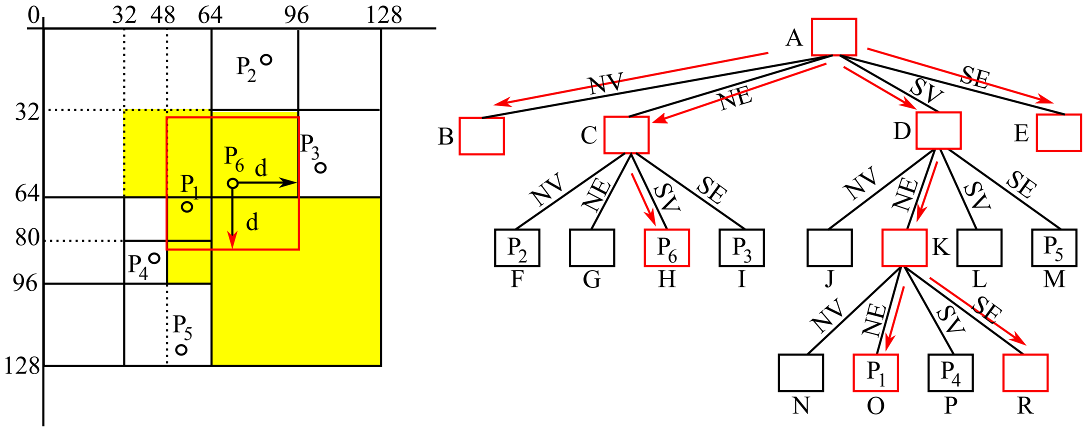
Point Region Quadtrees - Înălțime



d - distanța minimă între două puncte din blocul original
n - dimensiunea laturii blocului original

$$h \leq \log_2 \left(\sqrt{2} n / d \right) + 1$$

Aplicație - Căutarea celor mai apropiate puncte de un punct dat



Rezumat

- Quadtrees - introducere
- Quadtrees pentru regiuni
  - Descompunerea recursivă a unei regiuni în 4 regiuni pătrate egale, până la obținerea de suprafețe egale și construcția quadtree-ului asociat
  - Vecini
  - Algoritmul GSN pentru găsirea vecinilor pe orizontală - vericală
  - Algoritmul GCN pentru găsirea vecinilor diagonali
  - Construirea codului pentru frunze și quadtree liniari

Rezumat

- PR-trees
  - Descriere - partiționare a spațiului în funcție de o mulțime de puncte din spațiu
  - Exemplu de partiționare a spațiului în funcție de o mulțime de puncte
  - Operații: Căutare, inserție, construcție, ștergere
  - Înălțimea unui PR-tree

kd-trees

kd-trees - arbori binari pentru stocarea și manipularea de date k-dimensionale

- fiecare nod împarte spațiul k-dimensional dimensional printr-un hiperplan perpendicular pe direcția uneia dintre axele de coordonate.
- punctele aflate de-o parte a hiperplanului din nodul x vor fi plasate în descendentul stâng iar celelate în descendentul drept al lui x.
- direcția după care se alege hiperplanul depinde de adâncimea nodului curent.

kd-trees

kd-trees - separarea datelor prin hiperplane.

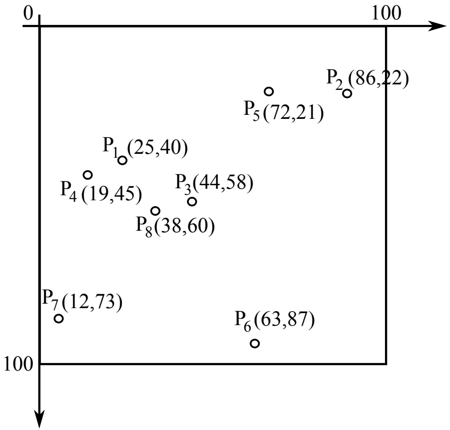
Se consideră setul depuncte $M = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ cu $P_i = (x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \ldots, x_k^{(i)})$.

Atunci:

- În rădăcină se plasează punctul P_1;
- Se separarea spațiul după prima componentă: toate punctele P_i din M cu $x_0^{(i)} < x_0^{(1)}$ se plasează în subarborele stâng al rădăcinii și punctele cu $x_0^{(i)} > x_0^{(1)}$ se plasează în subarborele drept;
- Inserția punctelor în arbore se face ca la arborele binar de căutare, dar comparația punctelor din noduri la adâncimea j se face pe baza componentei $j\%k$, adică: dacă nodul curent cu care compar $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_k)$ se află pe nivelul j atunci punctul $P_i = (x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \ldots, x_k^{(i)})$ va fi inserat la stânga lui X, dacă $x_{j\%k}^{(i)} < y_{j\%k}$ și la dreapta altfel.

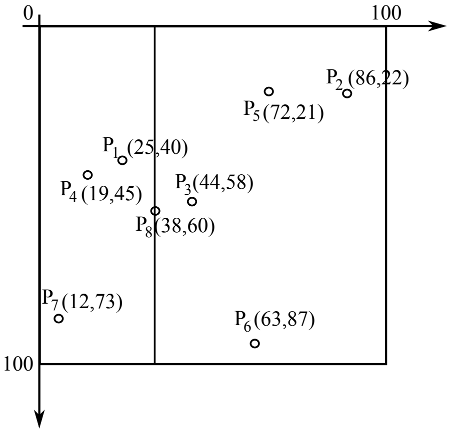
kd-trees - Exemplu

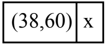
Se consideră mulțimea
$A = \{(25, 40), (86, 22), (44, 58), (19, 45), (72, 21), (63, 87), (12, 73), (38, 60)\}$



kd-trees - Exemplu

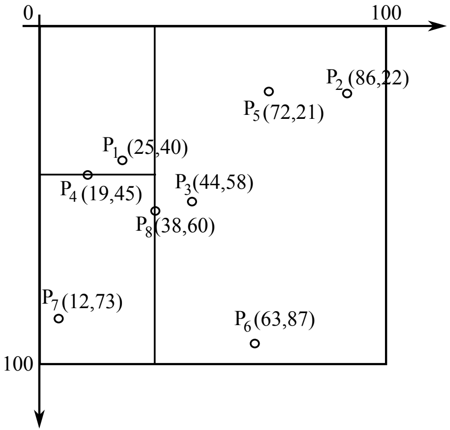
Se consideră mulțimea
$A = \{(25, 40), (86, 22), (44, 58), (19, 45), (72, 21), (63, 87), (12, 73), (38, 60)\}$

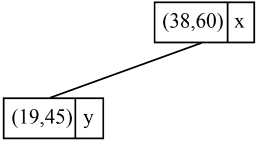




kd-trees - Exemplu

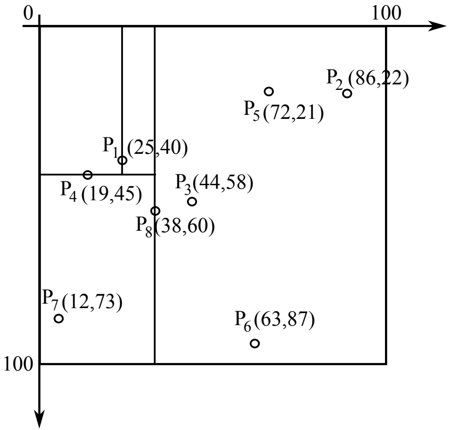
Se consideră mulțimea
$A = \{(25, 40), (86, 22), (44, 58), (19, 45), (72, 21), (63, 87), (12, 73), (38, 60)\}$

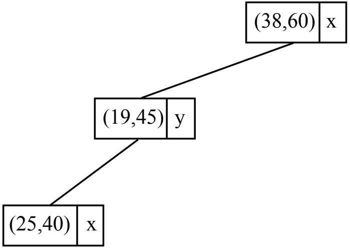




kd-trees - Exemplu

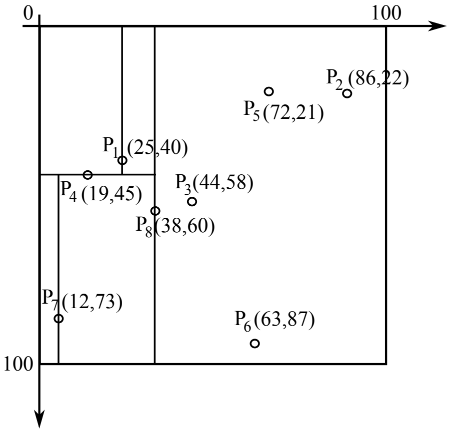
Se consideră mulțimea
$A = \{(25, 40), (86, 22), (44, 58), (19, 45), (72, 21), (63, 87), (12, 73), (38, 60)\}$

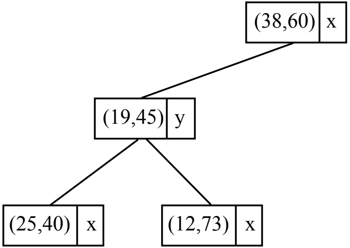




kd-trees - Exemplu

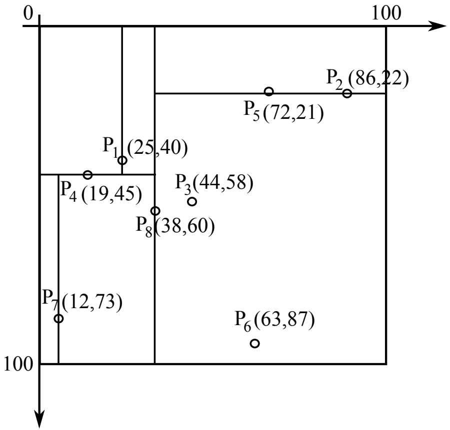
Se consideră mulțimea
$A = \{(25,40),(86,22),(44,58),(19,45),(72,21),(63,87),(12,73),(38,60)\}$

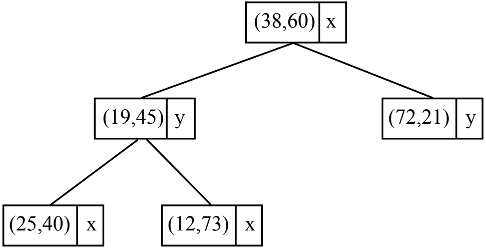




kd-trees - Exemplu

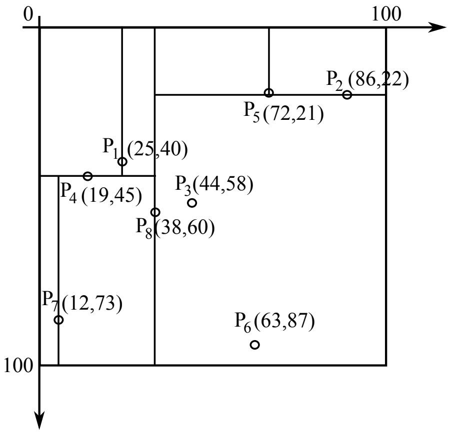
Se consideră mulțimea
$A = \{(25,40),(86,22),(44,58),(19,45),(72,21),(63,87),(12,73),(38,60)\}$

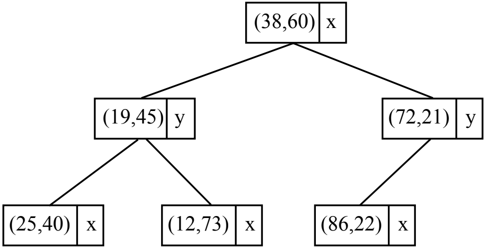




kd-trees - Exemplu

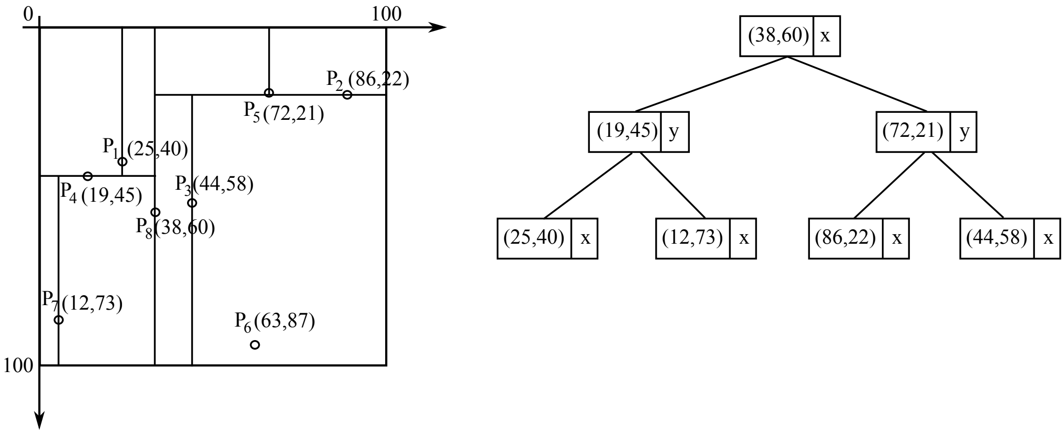
Se consideră mulțimea
$A = \{(25,40),(86,22),(44,58),(19,45),(72,21),(63,87),(12,73),(38,60)\}$





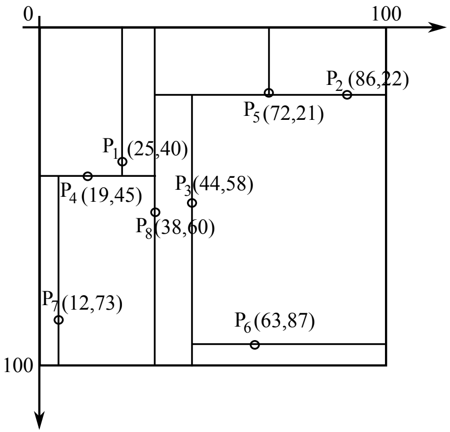
kd-trees - Exemplu

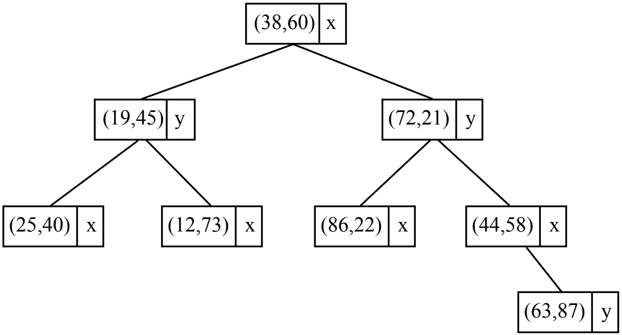
Se consideră mulțimea
$A = \{(25, 40), (86, 22), (44, 58), (19, 45), (72, 21), (63, 87), (12, 73), (38, 60)\}$



kd-trees - Exemplu

Se consideră mulţimea
$A = \{(25,40),(86,22),(44,58),(19,45),(72,21),(63,87),(12,73),(38,60)\}$





kd-trees

Observații: - la construcția unui kd-tree dintr-o mulțime de puncte M

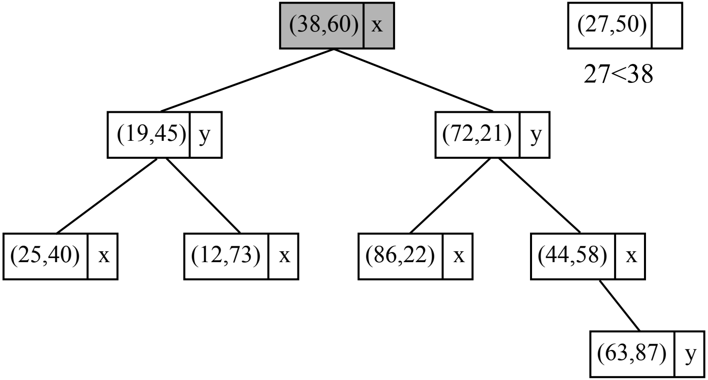
- la fiecare moment se selectează un punct din M față de care se realizează descompunerea în hiperplane
- se poate alege la fiecare moment primul punct din mulțime care nu a fost încă introdus $\Rightarrow$ arbore dezechilibrat
- Recomandabil: la fiecare moment se alege punctul cu valoarea mediană a componentei corespunzătoare iterației curente $\Rightarrow$ arbore echilibrat

kd-trees - BUILD_KD_TREE

```
BUILD_ KD_TREE(A,j)
   daca A=∅ atunci
        RETURN NULL
   P = mediana(A,j)
   A1=stanga(A,P,j)
   A2=dreapta(A,P,j)
   Z.info=P
   Z.plan=j
   Z.st=BUILD_KD_TREE(A1,(j+1) MOD k)
   Z.dr=BUILD_KD_TREE(A2,(j+1) MOD k)
   sfarsit daca
RETURN Z
```

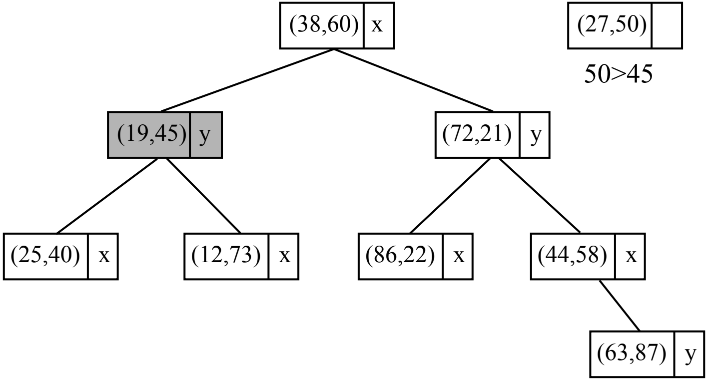
kd-trees - Inserția

Inserția - la fel ca la arborii binari de căutare, doar că la fiecare nivel se ține cont de componenta potrivită pentru comparare.



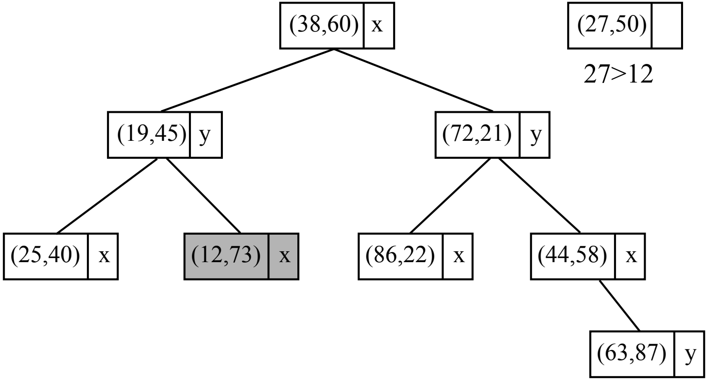
kd-trees - Inserția

Inserția - la fel ca la arborii binari de căutare, doar că la fiecare nivel se ține cont de componenta potrivită pentru comparare.



kd-trees - Inserția

Inserția - la fel ca la arborii binari de căutare, doar că la fiecare nivel se ține cont de componenta potrivită pentru comparare.



kd-trees - Inserția

Inserția - la fel ca la arborii binari de căutare, doar că la fiecare nivel se ține cont de componenta potrivită pentru comparare.