

Seminar 2: Dinamica punctului material si a sistemelor de puncta materiale. Teoreme si legi de conservare

I. Întrebări cu răspunsuri multiple

1. O barcă de masă m întâmpină din partea apei o forță de rezistență proporțională cu pătratul vitezei, cu constanta de proporționalitate k .

După cât timp viteza inițială v_0 se micșorează de n ori?

$$a) \quad t = \frac{mn}{kv_0}; \quad b) \quad t = \frac{m(n-1)}{kv_0}; \quad c) \quad t = \frac{mk}{v_0(n-1)}; \quad d) \quad t = \frac{m}{kv_0(n-1)};$$

$$e) \quad t = \frac{mn}{kv(n-1)}; \quad f) \text{ nici un răspuns nu este corect.}$$

$$R : F = -kv^2 = m \, dv/dt; \quad dv/v^2 = -\frac{k}{m} \cdot dt$$

$$\int_{v_0}^{\frac{v_0}{n}} \frac{m}{v^2} dv = -\int_0^t k dt; \quad m \left(\frac{n}{v_0} - \frac{1}{v_0} \right) = kt$$

$$t = \frac{m(n-1)}{kv_0}$$

2. Care din următoarele propoziții ce implică lucrul mecanic sunt adevărate?

- a) Lucrul mecanic este o mărime vectorială și se măsoară în N;
- b) Lucrul mecanic este o mărime scalară și se măsoară în J;
- c) Lucrul mecanic al forței gravitaționale care acționează asupra unui corp aflat în ridicare este negativ;
- d) Lucrul mecanic al unei forțe care ridică vertical un corp este pozitiv;
- e) Dacă un corp se mișcă pe o traiectorie circulară, lucrul mecanic al forței centripete este nul;
- f) Atunci când un corp alunecă pe o suprafață orizontală fixă, lucrul mecanic al forței de frecare care se exercită asupra corpului este pozitiv.

3. Teorema momentului cinetic se poate scrie:

$$a) \quad d\vec{J} = d(\vec{r} \times \vec{p}); \quad b) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{J}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\vec{r} \times \vec{p})}{\Delta t};$$

$$c) \quad d\vec{J}/dt = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}; \quad d) \quad \vec{M} = d\vec{J}/dt;$$

$$e) \text{ dacă } \vec{M} = \vec{C} \text{ (} \vec{C} \text{ - o constantă vectorială), atunci } \vec{J} = 0; \quad f) \quad \frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}.$$

Probleme rezolvate pri metoda explicativa¹

1. Un corp de masă $m=2$ kg este plasat pe suprafața Pământului. Asupra sa acționează pe verticală în sus o forță $F=100$ N. Știind că $g=10$ m/s², să se calculeze:

- accelearația și viteza corpului după parcurgerea distanței de 10 m;
- energia cinetică și energia potențială a corpului după parcurgerea acestei distanțe;
- variația energiei cinetice, potențiale și totale pe această distanță;
- precizați forțele care acționează și natura lor, apoi calculați lucrul mecanic efectuat de fiecare;
- verificați teoremele variației energiei cinetice, energiei potențiale și totale pentru acest caz.

Rezolvare:

a) $F-G=ma$; $v^2=2ad$; $a=40$ m/s²; $v=20\sqrt{2}$ m/s;

b) $E_c = \frac{mv^2}{2}$; $E_p = mgh$

$E_c=800$ J; $E_p=200$ J;

c) $\Delta E_c=800$ J; $\Delta E_p=200$ J; $\Delta E_t=1000$ J; d) F -neconservativă (tracțiune); G -conservativă; $F-G$ – rezultanta; $L_F=1000$ J; $L_G= - 200$ J; $L_{F-G}=800$ J; e) $L_{F-G}= \Delta E_c$; $L_G= -\Delta U$; $L_F= \Delta E_t$.

2. Vectorul de poziție al unui corp cu masa de 2 kg este:

$$\vec{r} = (3t^2 - 6t)\vec{i} - 4t^3\vec{j} + (3t + 2)\vec{k} \text{ (m)}.$$

Să se găsească:

- forța care acționează asupra corpului;
- momentului forței, $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}(t)$, față de originea axelor;
- impulsul și momentul cinetic, $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}(t)$, față de originea axelor;
- să se verifice teorema de variație a impulsului: $d\vec{p}/dt = \vec{F}$
- să se verifice teorema de variație a momentului cinetic, $d\vec{J}/dt = \vec{M}$;

Rezolvare:

$$1) \vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}; \vec{v} = \dot{\vec{r}} = (6t - 6)\vec{i} - 12t^2\vec{j} + 3\vec{k}; \quad \ddot{\vec{r}} = 6\vec{i} - 24t\vec{j}; \quad \vec{F} = 12\vec{i} - (48t)\vec{j}$$

$$2) \vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 48t(3t + 2)\vec{i} + 12(3t + 2)\vec{j} + 48t^2(-2t + 6)\vec{k};$$

$$3) \vec{p} = m\vec{v}; \quad \vec{p} = (12t - 12)\vec{i} + (-24t^2)\vec{j} + 6\vec{k}; \quad \vec{J} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$4) d\vec{p} / dt = 12\vec{i} - (48t)\vec{j} = \vec{F}.$$

5) Diferențiind în raport cu timpul rezultatul obținut la 3), se obține pentru \vec{M} aceeași expresie cu cea obținută la punctul 2).

3. Dacă se aplică un câmp electric cu intensitatea \vec{E} , electronii liberi din metal sunt antrenați sub acțiunea forței electrice $\vec{F}_e = q\vec{E}$ într-o mișcare dirijată. În cursul mișcării, electronii întâmpină la înaintare o forță de rezistență proporțională cu viteza lor, $\vec{F}_r = -r\vec{v}$. Să se obțină dependența de timp a vitezei electronilor

$$\vec{F}_{el} + \vec{F}_r = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

din care, după înlocuirea forțelor cu expresiile lor și proiectarea tuturor vectorilor pe direcția de mișcare, se obține, succesiv:

$$qE - rv = m \frac{dv}{dt}$$

$$dt = \frac{mdv}{qE - rv}$$

$$\int dt = \int \frac{mdv}{qE - rv}$$

$$t = -\frac{m}{r} \ln(qE - rv) + C$$

în care constanta de integrare C se determină impunând condiția inițială: la $t=0$, viteza electronului este $v=0$; rezultă :

$$0 = -\frac{m}{r} \ln qE + C ; C = \frac{m}{r} \ln qE$$

astfel că se obține

$$t = -\frac{m}{r} \ln \frac{qE}{qE - rv}$$

din care rezultă legea căutată:

(legea vitezei).

$$v = \frac{qE}{r} \left(1 - e^{-\frac{rt}{m}} \right).$$

4. Un corp cu masa de 1 kg se află sub acțiunea forței: $\vec{F} = 7\vec{i} - 6\vec{j}$.

Să se calculeze:

- 1) lucrul mecanic efectuat de forță când particula se deplasează de la originea sistemului de coordonate în punctul cu $\vec{r} = -3\vec{i} + 4\vec{j} + 16\vec{k}$ (m).
- 2) puterea medie, dacă deplasarea particulei se face în 0,6 s;
- 3) energia cinetică a particulei în originea sistemului de coordonate și în punctul $P(-3; 4; 16)$;
- 4) variația energiei potențiale între cele două puncte menționate.

Rezolvare:

$$1) \quad L = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{-3} 7 dx + \int_0^4 (-6) dy = -45 J;$$

$$2) \quad P_m = \frac{|L|}{t} = 75 \text{ W};$$

$$3) \quad E_{C0} = \frac{mv_0^2}{2};$$

Ecuatiile cinematice ale mișcării sunt:

$$x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad y = v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}, \quad z = v_{0z}t + \frac{a_z t^2}{2};$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \quad v_y = v_{0y} + a_y t, \quad v_z = v_{0z} + a_z t;$$

$$a_x = \frac{F_x}{m}, \quad a_y = \frac{F_y}{m}, \quad a_z = \frac{F_z}{m} = 0.$$

Folosind valorile pentru coordonatele punctului P, obținem: $v_{0x} = -7,1 \text{ m/s}$, $v_{0y} = 8,46 \text{ m/s}$,

$$v_{0z} = 26,66 \text{ m/s de unde } v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2 \cong 832,74 \text{ m}^2/\text{s}^2;$$

$$E_{C0} = \frac{mv_0^2}{2} \cong 416,37 \text{ J}.$$

$$v_x = -2,9 \text{ m/s}, \quad v_y = 4,86 \text{ m/s}, \quad v_z = 26,66 \text{ m/s};$$

$$E_{CP} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \cong 371,39 \text{ J}.$$

4) Deoarece lucrul mecanic nu depinde de drum, $\Delta U = -L = 45 \text{ J}$.

Tema

Intrebări cu răspunsuri multiple

1. Vectorul de poziție al unui mobil este $\vec{r} = 4 \cos 2t \cdot \vec{i} + 2 \sin 2t \cdot \vec{j}$.

Pentru momentul la care $2t = \pi/3$, unghiul α dintre vectorul viteză și axa Ox este dat de expresia:

- a) $\cos \alpha = 0,96$; b) $\sin \alpha = 0,27$; c) 2π ,
d) $\sin \alpha = 0,86$; e) $\cos \alpha = 0,5$; f) $\tan \alpha = 0,28$.

2. Un corp cade liber de la înălțimea $h_0 = 30 \text{ m}$ față de sol.

Atunci, despre expresia $\frac{1}{2} v^2(t) + g \cdot h(t)$, ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$) se poate afirma:

- a) variază liniar cu t ;
b) este o constantă a mișcării și are valoarea, $C = 294,30 \text{ m}^2/\text{s}^2$;

- c) este o constantă universală;
- d) este o mărime adimensională;
- e) este o mărime conservativă;
- f) afirmația (b) este corectă.

3 Se știe că o mărime asociată unei axe de rotație (viteza unghiulară $\vec{\omega}$, momentul cinetic \vec{J} , momentul forței \vec{M}) poate fi reprezentată printr-un vector de-a lungul axei.

Ținând cont de acest lucru, care din următoarele propoziții (relații) poate fi considerată o argumentare a afirmației făcute anterior?

- a) $\vec{M} = I \frac{d\omega}{dt}$, unde I este momentul de inerție al corpului rigid în raport cu axa;
- b) $E_c = I \frac{\omega^2}{2}$, cu E_c energia cinetică a corpului rigid care se rotește în jurul axei;
- c) $J = I \cdot \omega$;
- d) $P = M \cdot \omega / 2$, cu P puterea dezvoltată de o forță ce rotește corpul;
- e) vectorul $\vec{\omega}$ se modifică pentru imaginea într-o oglindă plană a unui corp aflat în rotație;
- f) $\vec{M} = d\vec{L}/dt$.

4. Un om a cărui masă este de 80 kg, se află într-un ascensor.

Forța $F = 1024$ N reprezintă forța pe care o exercită podeaua asupra lui atunci când:

- a) ascensorul urcă cu viteză constantă;
- b) ascensorul coboară cu viteză constantă;
- c) ascensorul urcă cu o accelerație de 3 m/s^2 ;
- d) ascensorul coboară cu o accelerație de 3 m/s^2 ;
- e) ascensorul coboară cu o accelerație de 2 m/s^2 ;
- f) cablul se rupe și cabina cade liber.

5. Două corpuri care se găsesc la aceeași înălțime $h = 5$ m față de Pământ și la distanța $x = 8$ m unul față de celălalt, sunt lansate, simultan, unul spre altul cu viteze orizontale egale cu 10 m/s .

Dacă $g = 10 \text{ m/s}^2$, atunci:

- a) timpul scurs de la lansare până în momentul ciocnirii este $0,4$ s;
- b) înălțimea la care se ciocnesc corpurile este $2,8$ m;
- c) timpul scurs de la lansare până în momentul ciocnirii este $0,8$ s;
- d) înălțimea la care se ciocnesc corpurile este $4,2$ m;
- e) timpul scurs de la lansare până în momentul ciocnirii este $0,2$ s;
- f) înălțimea la care se ciocnesc corpurile este $4,8$ m.

Probleme propuse

1. Un corp cu masa $m = 0,5$ kg, se mișcă în planul orizontal xOy astfel încât vectorul său de poziție este :

$$\vec{r} = 2 \cos \omega t \cdot \vec{i} + 2 \sin \omega t \cdot \vec{j} \quad (\text{m}), \text{ cu } \omega > 0; \text{ constantă.}$$

Se cere:

- 1) să se precizeze pe ce traiectorie se va deplasa particula;
- 2) să se determine viteza particulei la un moment oarecare t ;
- 3) să se arate că forța care acționează asupra particulei este tot timpul orientată către originea sistemului de coordonate;

- 4) să se calculeze accelerația tangențială și accelerația normală într-un punct oarecare de pe traiectorie;
- 5) să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forța care acționează asupra particulei în decurs de o perioadă;

2. Bara MN de lungime $l = MN = 4$ m se rotește în jurul capătului M în planul orizontal xOy cu viteză unghiulară $\omega = 16$ rad/s. Densitatea liniară a barei este dependentă de distanța x măsurată față de capătul M conform relației $\rho = 3 + 4x + 5x^2$. Calculați energia cinetică a barei.

3. Legea mișcării pentru un corp cu masa $m = 0,4$ kg care se mișcă în planul orizontal este: $\vec{r} = 5\cos 3t \cdot \vec{i} + 3\sin 3t \cdot \vec{j}$ (m). Să se calculeze energia cinetică a corpului în punctele de intersecție ale traiectoriei cu axele Ox și Oy .

4. Un corp cu masa de 2 kg este supus unei forțe care variază proporțional cu timpul $\vec{F} = \vec{b}t$, unde \vec{b} este un vector constant, $|\vec{b}| = 6$ N/s. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forță în timp de 10 s, dacă corpul are o viteză inițială de 6 m/s.

Referințe bibliografice:

- I. LUMINOSU, NICOLINA POP, V. CHIRITOIU, M. COSTACHE , *Fizica - Teorie, Probleme, Teste*, Editura Politehnica, Timișoara, 2010.