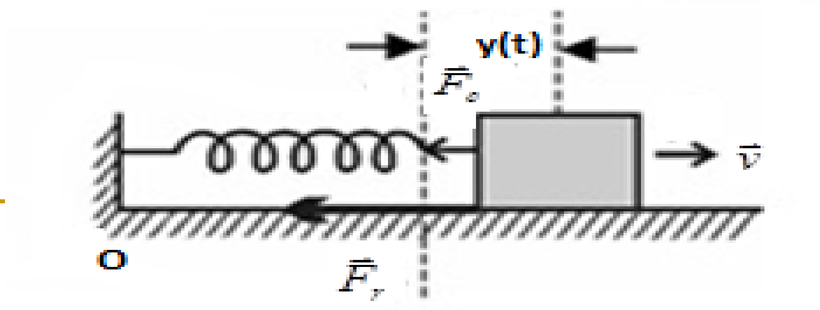
Oscilații amortizate

Dacă asupra unui corp (oscilator) de masă *m* acţionează, în afară de forţa elastică, o forţă de rezistenţă (de frecare), proporţională şi de semn contrar cu viteza:

$$F_r = -b\frac{dy}{dt} \qquad b = \text{const}$$

$$[b]_{SI} = kgs^{-1}$$



,

Principiul al doilea al mecanicii clasice se scrie:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - b\frac{dy}{dt}$$

Ecuaţia diferenţială a mişcării: $$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\beta\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0$$

$$\beta = \frac{b}{2m} \qquad [\beta]_{SI} = s^{-1}$$

coeficient de amortizare

Oscilații amortizate

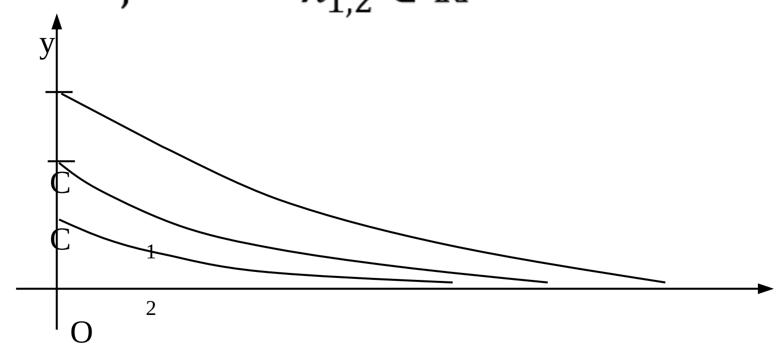
Se construieşte ecuaţia caracteristică (polinom al cărui grad este egal cu ordinul de derivare):

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Cazul I: Dacă frecarea este mare : $\beta > \omega_0$

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$$



Mișcarea este **neperiodică,** elongația tinde la zero când timpul tinde la infinit.

Cazul II: Dacă $\beta = \omega_0$ **Miscare *<u>aperiodica</u>* critica***:* $y(t) = (C_1 + C_2\, t)e^{-\beta t}$

Oscilaţii amortizate

iii) Dacă frecarea este mică ($\beta < \omega_0$)

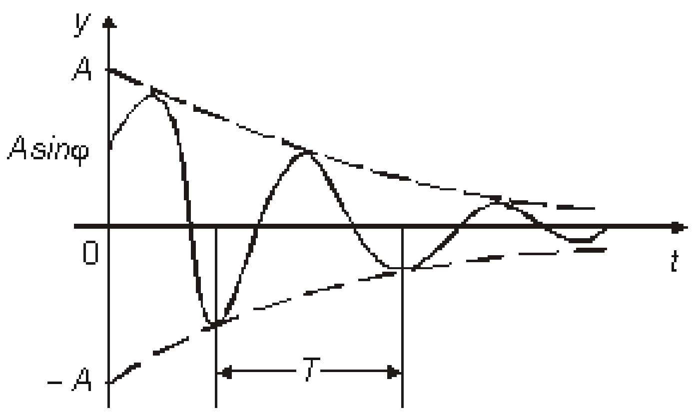
Soluţia ec. este: $y = Ae^{-\beta \cdot t}\sin(\omega \cdot t + \varphi)$

Oscilaţiile pe care le va executa corpul se numesc *oscilaţii amortizate*. deoarece amplitudinea acestora scade exponenţial în timp, după legea:

$$A(t) = Ae^{-\beta \cdot t}$$

Oscilatorul, datorită frecării cu mediul, îşi micşorează în mod continuu energia, cedând-o mediului.

Pulsaţia oscilaţiilor amortizate: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$



• ***decrementul logaritmic al amortizării:***

$$\Delta = ln\frac{y(t)}{y(t+T)} = ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

• ***perioada oscilaţiilor amortizării:***

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2}} > T_0$$

•***timpul de relaxare:*** $\tau = \frac{1}{2\beta}$

Oscilații forțate (întreținute)

Pentru a compensa pierderile de energie datorită amortizării oscilaţiilor, asupra oscilatorului trebuie acţionat cu o forţă perturbatoare exterioară periodică, forţă care determină oscilatorul să execute un nou tip de oscilaţii numite *oscilaţii forţate*.

$$F = F_0 \sin \omega_p t$$

Ecuaţia diferenţială a mişcării: $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\beta \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \sin \omega_p t$

Soluţia ec. este: $y = \underbrace{Ae^{-\beta \cdot t} \sin(\omega \cdot t + \varphi)}_{\text{regim tranzitoriu}} + \underbrace{A_p \sin(\omega_p t + \varphi_p)}_{\text{regim staţionar de oscilaţii forţate}}$

regim tranzitoriu *regim staţionar de oscilaţii forţate*

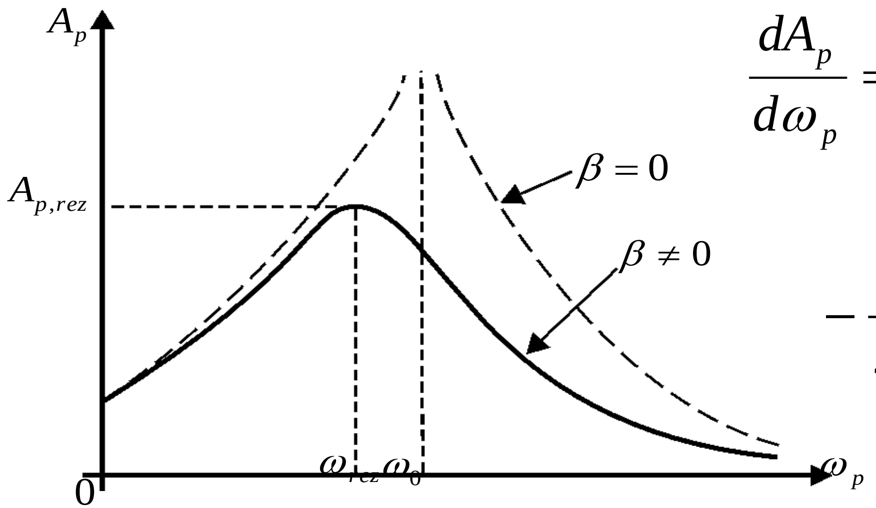
Ecuaţia *oscilaţiilor întreţinute* sau a *oscilaţiilor forţate* :

$$y = A_p \sin(\omega_p t + \varphi_p) \quad ; \quad A_p = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + 4\beta^2 \omega_p^2}} \quad ; \quad \phi_p = arctg\left(-\frac{2\beta\omega_p}{\omega_0^2 - \omega_p^2}\right)$$

$$\omega_p = \omega_{rez} = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$$

Oscilaţii forţate.Rezonanţa

Dacă pulsaţia forţei exterioare ω_p se apropie de valoarea pulsaţiei proprii ω_0 a oscilatorului, atunci amplitudinea oscilaţiilor forţate creşte foarte mult. Acest fenomen poartă numele de ***fenomen de rezonanţă***, iar oscilaţia cu amplitudine maximă a oscilatorului se numeşte *oscilaţie de rezonanţă*.



Curba de rezonanţă

$$\frac{dA_p}{d\omega_p} = 0$$

$$-\frac{F_0}{2m}\frac{1\left[\left(2\left(\omega_0^2 - \omega_p^2\right)\left(-2\omega_p\right) + 8\beta^2\omega_p\right)\right]}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega_p^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_p^2\right]^{3/2}} = 0$$

Oscilații forțate.Rezonanța

$$2\omega_p(\omega_0^2 - \omega_p^2) - 4\beta^2\omega_p = 0 \quad |: 2\omega_p$$

$$\omega_0^2 - \omega_p^2 - 2\beta^2 = 0$$

$$\omega_p^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$$

$$\boxed{\omega_p = \omega_{rez} = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}}$$

$$A_{p\,rez} = \frac{F_0}{m\sqrt{[\omega_0^2 - (\omega_0^2 - 2\beta^2)]^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}}$$

$$A_{p\,rez} = \frac{F_0}{m\sqrt{4\beta^4 + 4\beta^2\omega_0^2 - 8\beta^4}}$$

$$\boxed{A_{p,rez} = \frac{F_0}{2\beta m\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}}$$

Caracteristici energetice ale oscilațiilor forțate

- *Puterea instantanee absorbită* de oscilator:

$$P_{abs}(t) = \frac{dL_{abs}}{dt} = F_p \frac{dy_p}{dt} = F_0 \omega_p A_p \sin \omega_p t \cdot \cos\left(\omega_p t + \varphi_p\right)$$

Puterea absorbită medie:

$$\left\langle P_{abs} \right\rangle = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} P_{abs}(t) dt = m\beta\omega_p^2 A_p^2 = \beta \frac{F_0^2}{m} \frac{\omega_p^2}{\left(\omega_0^2 - \omega_p^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_p^2}$$

Puterea instantanee disipată sub formă de căldură:

$$P_{dis}(t) = \frac{dL_{dis}}{dt} = -F_r \frac{dy_p}{dt} = 2m\beta\left(\frac{dy_p}{dt}\right)^2$$

Puterea disipată medie:

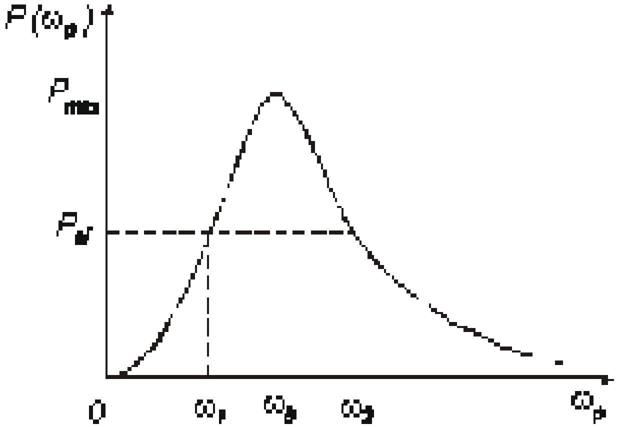
$$\left\langle P_{dis} \right\rangle = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} P_{dis}(t) dt = m\beta\omega_p^2 A_p^2$$

Caracteristici energetice ale oscilațiilor forțate

- *Puterile medii pe o perioadă sunt egale între ele şi proporţionale cu pătratul amplitudinii:*

$$\langle P_{abs} \rangle = \langle P_{dis} \rangle \equiv P(\omega_p) = m\beta\omega_p^2 A_p^2 = \beta \frac{F_0^2}{m} \frac{\omega_p^2}{\left(\omega_0^2 - \omega_p^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_p^2}$$

Oscilatorul absoarbe de la forţa exterioară exact atâta putere cât disipă mediului ambiant. Astfel se explică de ce amplitudinea oscilaţiilor forţate rămâne constantă.



Curba de rezonanţă a puterilor

Caracteristici energetice ale oscilațiilor forțate

- *Puterea maximă:*

$$\frac{dP}{d\omega_p} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad P_{\max} = P(\omega_0) = m\beta\omega_0^2 A_{p,\max}^2 = \frac{1}{4}\frac{F_0^2}{m\beta}$$

Puterea efectivă:

$$P_{ef} = m\beta\omega_p^2 A_{p,ef}^2 = m\beta\omega_p^2\left(\frac{A_{p,\max}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{P_{\max}}{2}$$

Factorul de calitate:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{rez}} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \omega_0\tau$$

τ -timpul de relaxare, timpul după care energia oscilatorului amortizat scade de *e* ori .

Bibilografie selectivă

- [1] Duşan POPOV, Ioan DAMIAN, *Elemente de Fizică generală*, Editura Politehnica, Timişoara, 2001.
- [2] Minerva CRISTEA, Duşan POPOV, Floricica BARVINSCHI, Ioan DAMIAN, Ioan LUMINOSU, Ioan ZAHARIE, *Fizică – Elemente fundamentale*, Editura Politehnica, Timişoara, 2006.
- [3] I. Luminosu, *Fizica – elemente fundamentale*, Editura Politehnica, 2002.
- [4] O. Aczel, *Mecanică fizică. Oscilaţii şi unde,* Ed. Universităţii Timişoara, 1975.
- [5] A. Hristev , *Mecanică şi acustică*, Ed. Did. şi Pedag., Bucureşti, 1982
- [6] H. Kittel, *Cursul de fizică Berkeley*, Vol. I, II, Ed. Did. şi Pedag., Bucureşti, 1982.
- [8] E. Luca, Gh. Zet şi alţii – *Fizică generală*, Ed. Did. şi Pedag., Bucureşti, 1981.
- [9] T. Creţu – *Fizică generală*, Vol. I şi Vol.II, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1984 şi 1986.