**Cheat sheet Aplikovaná matematika**

(Robert Mařík, 25. února 2023)

### Determinanty

Determinant 2×2 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Determinant 3×3

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - afh + bfg - bdi + cdh - ceg$$

---

**Vektory**, $\vec a = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec b = (b_1, b_2, b_3)$,

Skalární součin vektorů $\vec a \cdot \vec b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Vektorový součin vektorů

$$\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Délka vektoru $|\vec a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

---

### Vzorce pro derivování

(1) $(c)' = 0$

(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$

(3) $(e^x)' = e^x$

(4) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

(5) $(\sin x)' = \cos x$

(6) $(\cos x)' = -\sin x$

(7) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

(8) $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

(9) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(10) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(11) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(cu)' = cu'$
3. $(uv)' = u'v + uv'$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
5. $\Big(u(v(x))\Big)' = u'(v(x))v'(x)$

---

### Vzorce pro integrování

(1) $\int dx = x + c$

(2) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

(3) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

(4) $\int e^x\,dx = e^x + c$

(5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

(6) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

(7) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$

(8) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + c$

(9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$

(10) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$

(11) $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$

---

### Parciální derivace

Gradient $\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

Laplaceův operátor $\nabla^2 f = \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} f + \frac{\partial^2}{(\partial y)^2} f + \frac{\partial^2}{(\partial z)^2} f$

Lineární aproximace

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x - x_0, y - y_0)$$

Tečna k vrstevnici $f(x,y) = C$ v bodě $(x_0, y_0)$

$$\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x - x_0, y - y_0) = 0$$

Zákon šíření chyb

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots x_n) \approx \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^2}$$

Schwarzova věta $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$

---

**Vektorová analýza** $\vec F = (P, Q, R) = P\vec i + Q\vec j + R\vec k$

Divergence $\operatorname{div} \vec F = \nabla \cdot \vec F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

Rotace

$$\operatorname{rot} \vec F = \nabla \times \vec F = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec k$$

---

### Slovní vyjádření

*Parciální derivace* vyjadřuje rychlost s jakou se mení funkční hodnoty funkce při změně jedné její proměnné. Též citlivost na změny ve vstupních datech.
*Gradient* vyjadřuje směr a rychlost maximálního růstu sklalární veličiny.
*Divergence* vektorového toku vyjadřuje intenzitu zesílení tohoto toku.
*Rotace* vektorového toku vyjadřuje, zda tělesa unášená tokem mají tendenci rotovat okolo vlastní osy. Souvisí zejména s možností zavést pro dané pole sklalární potenciál.
Všechny uvedené veličiny jsou lokální a vztahují se k danému bodu v daném čase. Pokles je záporný růst, zeslabení toku je záporné zesílení.

---

### Rovnice matematické fyziky

Rovnice kontinuity $\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma - \nabla \cdot \vec j$

Konstituční vztah $\vec j = -D\nabla u$

Difuzní rovnice $\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \nabla(D\nabla u)$

Rovnice vedení tepla $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla T)$

---

### Difuzní rovnice v kartézských souřadnicích

Budeme uvažovat diagonální difuzní koeficient. Například homogenní materiál, nebo otrotropní materiál ve kterém volíme osy v souladu s materiálovými vlastnostmi.

Obecný tvar difuzní rovnice v kartézských souřadnicích je

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_z \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Ve *stacionárním případě* (sledujeme stav po dosažení rovnováhy) položíme navíc $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

Pro *bezzdrojový případ* (stavová veličina nemůže vznikat ani zanikat) položíme navíc $\sigma = 0$.

Studujeme-li materiál současně *homogenní* a s *lineárními materiálovými vlastnostmi* (v všech místech má materiál stejné vlastnosti a ty se nemění při změně stavové veličiny), potom kvaziderivace

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

upravíme a použijeme druhé derivace

$$D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(a pro ostatní proměnné analogicky).

U *izotropního materiálu* (má ve všech směrech stejné vlastnosti) nerozlišujeme materiálové charakteristiky v jednolivých směrech, klademe $D_x = D_y = D_z = D$.

Pro méně dimenzí použijeme pouze odpovídající počet difuzních členů. Jednotlivé předpoklady je možno libovolně kombinovat.

## Křivkový integrál

*Vektorový zápis křivky a její derivace*

$$\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j},\ t \in [a,b], \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \varphi'\vec{i} + \psi'\vec{j},$$

*Křivkový integrál prvního druhu*

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}dt$$

$$\int_C f ds = \int_a^b f\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}dt$$

V integrálu napravo jsou do funkce $f$ za $x$ a $y$ dosazeny funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$. Analogicky pro prostorové křivky.

*Křivkový integrál druhého druhu*

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}\ , \qquad \vec{F}\cdot d\vec{r} = P\varphi' dt + Q\psi' dt$$

$$\int_C \vec{F}d\vec{r} = \int_C Pdx + Qdy = \int_a^b (P\varphi' + Q\psi')dt$$

V integrálu napravo jsou do složek $P$ a $Q$ funkce $\vec{F}$ za $x$ a $y$ dosazeny funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$. Analogicky pro prostorové křivky.

*Greenova věta*

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{F}d\vec{r} = \underbrace{\oint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y}_{\text{Cirkulace } \vec{F} \text{ po hranici } \partial\Omega} = \iint_\Omega \overbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}^{[\mathrm{rot}(P\vec{i}+Q\vec{j})]_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\underbrace{\oint_{\partial\Omega} -Q\mathrm{d}x + P\mathrm{d}y}_{\text{Tok } \vec{F} \text{ přes hranici } \partial\Omega} = \iint_\Omega \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)}_{\mathrm{div}(P\vec{i}+Q\vec{j})} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

## Nezávislost integrálu na integrační cestě

$C\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j},\ t \in [a,b]$

Následující výroky jsou ekvivalentní.

(i) Integrál $\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$ nezávisí v $\Omega$ na integrační cestě.

(ii) $\oint_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = 0$ po libovolné uzavřené křivce $C$ v $\Omega$.

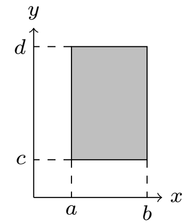
(iii) $\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0$

(iv) Existuje funkce $\varphi$ s vlastností $\nabla\varphi = \vec{F}$.

Jsou-li tyto podmínky splněny, platí $\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \varphi(\vec{r}(b)) - \varphi(\vec{r}(a))$.

## Dvojný integrál $\iint_M f(x,y)\,dx\,dy$ resp. $\iint_M f(x,y)\,dA$

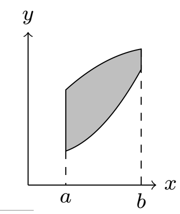
(1) Integrál přes obdélník $R = [a,b]\times[c,d]$




$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\iint_R f(x)g(y)\,dx\,dy = \int_a^b f(x)\,dx\int_c^d g(y)\,dy$$

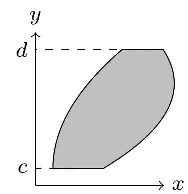
(2) Oblast mezi funkcemi proměnné $x$




$M_1$ $a \le x \le b$, $\varphi(x) \le y \le \psi(x)$

$$\iint_{M_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

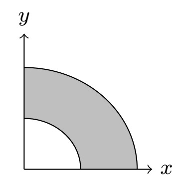
(3) Oblast mezi funkcemi proměnné $y$




$M_2$ $a \le y \le b$, $\varphi(y) \le x \le \psi(y)$

$$\iint_{M_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

(4) Oblast mezi kruhy nebo kruhovými výseky




$M_3$ $r_1 \le r \le r_2$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$

$$\iint_{M_3} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2} f(r,\varphi)r\,d\varphi\,dr$$

## Separovatelné ODR

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} y(x) = y_i, \text{ kde } g(y_i) = 0 \\ \displaystyle\int \frac{1}{g(y)}dy = C + \int f(x)dx \end{cases}$$

## Lineární operátory

(1) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$ a $L[Cy] = CL[y]$

(2) $L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2]$

## Lineární DR 1. řádu s konstantními koeficienty

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + ay = b, \quad a,b \in \mathbb{R}$$

Konstantní (stacionární) řešení: $y(t) = \dfrac{b}{a}$

Obecné řešení:

$$y = Ce^{-at} + \frac{b}{a}$$

Obecné řešení konverguje ke stacionárnímu pokud $a > 0$.

## Autonomní DR 1. řádu

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y)$$

Konstantních řešení je tolik, kolik je nulových bodů funkce $f(y)$.

Stabilní konstantní řešení jsou v bodech, kde je funkce $f$ klesající.

Netabilní konstantní řešení jsou v bodech, kde je funkce $f$ rostoucí.

## Lineární autonomní systémy $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX$

Má-li matice $A$ vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě $\lambda$, má soustava řešení

$$X(t) = ve^{\lambda t},$$

kde $v$ je příslušný vlastní vektor. Toto řešení konverguje k počátku pro $\lambda < 0$ a roste neohraničeně pro $\lambda > 0$.

Má-li $A$ celkem $n$ různých vlastních hodnot, dostaneme takto $n$ nezávislých řešení, ze kterých díky linearitě složíme řešení obecné.

Je-li vlastní hodnota $\lambda$ komplexní, je i příslušný vlastní vektor $v$ komplexní a řešeními jsou reálná a imaginární část $X(t) = ve^{\lambda t}$, přičemž

$$\Re(e^{(\alpha+i\beta)t}) = e^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad \text{a} \quad \Im(e^{(\alpha+i\beta)t}) = e^{\alpha t}\sin(\beta t).$$

Řešení v tomto případě oscilují a mezi konvergencí a divergencí rozhoduje znaménko $\Re(\lambda) = \alpha$.

Pro $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je $\lambda$ řešením rovnice $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$.

**Linearizace nelineárního autonomního systému**

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(X)$$

$X = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $F(X) = (F_1(X), \ldots, F_n(X))^T$

Nechť $X_0$ je bod takový, že $F(X_0) = 0$. Buď $J(X_0) = \left(\frac{\partial F_i(X_0)}{\partial x_j}\right)$ Jacobiho matice funkce $F$ v bodě $X_0$. Je-li $|J(X_0)| \neq 0$, mají autonomní systémy

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(X) \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = J(X_0)X$$

v bodě $X_0$ stejný typ stacionárního bodu, pokud jsou vlastní hodnoty mimo hraniční a patologické případy (vlastní hodnoty nejsou násobné, nejsou nulové a komplexní vlastní hodnoty nemají nulové reálné části).

---

**Lineární DR 2. řádu s konstantními koeficienty**

*(a) homogenní rovnice* $y'' + py' + qy = 0$

Obecné řešení je

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

kde $y_i$ jsou libovolná lineárně nezávislá řešení.

Charakteristická rovnice $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

(1) Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ dva různé reálné kořeny charakteristické rovnice, lze položit

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

(2) Je-li $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice, lze položit

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \qquad y_2 = xe^{\lambda_1 x}.$$

(3) Jsou-li $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R}$ dva komplexně sdružené kořeny charakteristické rovnice, lze položit

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x), \qquad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

*(b) nehomogenní rovnice* $y'' + py' + qy = f(x)$

Obecné řešení je

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p,$$

kde $y_1$ a $y_2$ jsou nezávislá řešení asociované homogenní rovnice a $y_p$ jedno řešení nehomogenní rovnice. Je-li $f$ polynom a $q \neq 0$, je jedno z partikulárních řešení polynom stejného stupně.

---

**Parametrizace běžných křivek**

(1) Úsečka z $[a_1, a_2]$ do $[b_1, b_2]$

$$x = a_1 + t(b_1 - a_1)$$
$$y = a_2 + t(b_2 - a_2),\ t \in [0,1]$$

(2) Kružnice se středem v počátku a poloměrem $r$

$$x = r\cos(t)$$
$$y = r\sin(t),\ t \in [0, 2\pi]$$

(3) Část grafu funkce $y = f(x)$ nad intervalem $[a,b]$

$$x = t$$
$$y = f(t),\ t \in [a,b]$$

---

**Separace proměnných v PDR** (Pro jednoduchost uvažujme rovnici v 1D s Dirichletovou úlohou a homogenními okrajovými podmínkami.)

*A) Rovnice vedení tepla, bez zdrojů.*

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} u(x,t) = F(x)G(t) \\ F'' + \lambda^2 F = 0 \\ F(0) = F(1) = 0 \\ G' + \lambda^2 G = 0 \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{bmatrix}$$

Okrajová úloha pro funkci $F$ má nekonečně mnoho netriviálních řešení $F_n = \sin(\lambda_n x)$ pro vlastní čísla $\lambda_n = n\pi$. Pro každé takové $\lambda_n$ určíme $G_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t}$. Jedno řešení zadané PDR je

$$u_n(x,t) = \sin(n\pi x)e^{-n^2\pi^2 t},$$

ale také libovolná lineární kombinace těchto funkcí. Koeficienty $c_n$ lineární kombinace určíme tak, aby platilo $u(x,0) = \varphi(x)$.

*B) Vlnová rovnice.*

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi_1(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_2(x) \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} u(x,t) = F(x)G(t) \\ F'' + \lambda^2 F = 0 \\ F(0) = F(1) = 0 \\ G'' + \lambda^2 G = 0 \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{bmatrix}$$

Podobně jako u rovnice vedení tepla, ale máme dvě počáteční podmínky a diferenciální rovnici druhého řádu pro časovou složku.