

Funkce

- Funkce jsou zobrazení mající na vstupu a výstupu reálná čísla. Používají se k vyjádření vzájemných relací zkoumaných veličin.
- Podle toho, zda zachovávají uspořádání vzorů i pro obrazy dělíme na rostoucí, klesající a ostatní (bez monotonie).
- Podle toho, zda a jakým způsobem jsou symetrické dělíme na sudé, liché a ostatní (bez parity).
- Nejjednoduššími funkcemi jsou přímá úměrnost (násobení konstantou, $y = kx$) a nepřímá úměrnost (násobení převrácené hodnoty konstantou, $y = \frac{k}{x} = k\frac{1}{x}$).
- Je-li $y = f(x)$, říkáme, že y závisí na x . Veličina y je závislá veličina, veličina x je nezávislá veličina.

Spojitosť a limita (velmi zjednodušeně)

- Spojitě funkce mají relativně malé změny funkčních hodnot při relativně malých změnách vstupních dat. Např. nejsou skoky.
- Limita umožňuje doplnit funkční hodnotu funkce tak, aby se stala spojitou (odstranitelná nespojitost).

Derivace

Dává do souvislosti změny závislé a nezávislé veličiny.

$$\frac{df}{dx} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Rychlost s jakou se mění f při změnách x .
- Změna f vyvolaná jednotkovou změnou x .
- Pro $f(t)$ je $\frac{df}{dt}$ rychlost růstu veličiny f (v čase).
- Jednotka derivace veličiny f podle x je stejná jako jednotka podílu těchto veličin.

Konečné difference

Konečné difference slouží k numerickému aproximování derivace. Slouží také k odhadu derivace funkce dané tabulkou.

Dopředná difference: $\frac{df}{dx} = f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Centrální difference: $\frac{df}{dx} = f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

Druhá difference: $\frac{d^2f}{dx^2} = f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$

Aplikace derivace

- Rovnice pro růst rychlostí úměrnou funkční hodnotě je

$$\frac{dx}{dt} = kx.$$

Rovnice pro růst rychlostí úměrnou vzdálenosti od stacionárního stavu je

$$\frac{dx}{dt} = k(M - x).$$

Řešením těchto modelů je možné získat časový průběh hledané funkce.

- Lineární aproximace funkce f v okolí bodu x_0 je

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx}(x - x_0).$$

- Okamžitá rychlost. Derivace vystupuje všude tam, kde nestačí průměrná rychlost, ale požadujeme rychlost okamžitou. Je proto v matematické formulaci naprosto většiny fyzikálních zákonů, pokud se nechceme specializovat pouze na děje probíhající konstantními rychlostmi (jako ve středškolské fyzice).
- Rovnice vedení tepla (pro partiální derivace) – obsahuje časové i prostorové derivace, protože teplo se šíří v prostoru a teplota v daném místě se při vedení tepla mění s časem.
- Řešení rovnice $f(x) = 0$ je možno provést iterací

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

kde $f'(x_n) = \frac{df(x_n)}{dx}$ je derivace v bodě x_n a iterační proces začne v nepříliš špatném počátečním odhadu řešení x_0 (Newtonova metoda). Každý jeden krok metody zdvojnásobí počet desetinných míst při přibližném řešení rovnice.

Vzorce pro derivování

(1) $(c)' = 0$	(10) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$	(11) $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$
(3) $(e^x)' = e^x$	
(4) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	
(5) $(\sin x)' = \cos x$	
(6) $(\cos x)' = -\sin x$	
(7) $(\tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	
(8) $(\cotg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	
(9) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
	1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
	2. $(cu)' = cu'$
	3. $(uv)' = u'v + uv'$
	4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
	5. $\left(u(v(x))\right)' = u'(v(x))v'(x)$

Neurčitý integrál

Neurčitý integrál je opak derivace, kdy z rychlosti změny určíme časový průběh měnící se veličiny. Je dána až na aditivní konstantu související s výchozím stavem. Píšeme

$$\int f(x) dx = F(x),$$

kde $F(x)$ je funkce splňující $\frac{dF}{dx} = f(x)$.

Vzorce pro integrování

(1) $\int dx = x + c$	(7) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tg x + c$
(2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	(8) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cotg x + c$
(3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	(9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
(4) $\int e^x dx = e^x + c$	(10) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c$
(5) $\int \sin x dx = -\cos x + c$	(11) $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right + c$
(6) $\int \cos x dx = \sin x + c$	

Určitý Newtonův integrál

Newtonův integrál je opak derivace, kdy z rychlosti změny a z časového intervalu určíme změnu veličiny na daném intervalu. Na rozdíl od neurčitého integrálu je určitý integrál dán jednoznačně a není nutná informace o počátečním stavu. Počítáme vztahem

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

kde $F(x)$ je funkce splňující $\frac{dF}{dx} = f(x)$.

Určitý Riemmannův integrál

Riemmannův integrál umožňuje vypočítat součet nekonečné mnoha malých příspěvků k aditivní veličině. V praxi náhrada za nemožnost použít násobení v případě nekonstantních parametrů. Například dráha pohybu je rychlost násobená časem v případě pohybu konstantní rychlostí. V případě pohybu nekonstantní rychlostí je dráha místo součinu integrál rychlosti jako funkce času.

Riemmannův integrál se počítá stejně jako Newtonův.

Autonomní DR 1. řádu

dy/dt = f(y)

Konstantních řešení je tolik, kolik je nulových bodů funkce f(y).

Stabilní konstantní řešení jsou v bodech, kde je funkce f klesající.

Netabilní konstantní řešení jsou v bodech, kde je funkce f rostoucí.

Vektory, a = (a1, a2, a3), b = (b1, b2, b3),

Skalární součin vektorů a · b = a1b1 + a2b2 + a3b3

Vektorový součin vektorů

a x b = | i j k | | a1 a2 a3 | | b1 b2 b3 |

Délka vektoru |a| = sqrt(a1^2 + a2^2 + a3^2)

Matice

Součin matice a sloupcového vektoru je lineární kombinace sloupců matice, kdy koeficienty jsou komponentami vektoru.

(5 2; -3 1) (22; 15) = 22 (5; -3) + 15 (2; 1) = (140; -51)

Determinanty

Determinant 2x2 | a b; c d | = ad - bc

Determinant 3x3

| a b c; d e f; g h i | = aei - afh + bfg - bdi + cdh - ceg

Vlastní čísla a vektory

Vlastní vektory jsou vektory, které se zobrazí do stejného směru, poměr délek je vlastní číslo. Tj. vektor u je vlastním vektorem matice A příslušným vlastnímu číslu λ, pokud platí

Au = λu.

Všechna vlastní čísla najdeme jako kořeny rovnice

|A - λI| = 0.

Symetrická pozitivně definitní matice má tolik reálných vlastních čísel, kolik je její dimenze.

Je-li λ vlastní číslo, je vlastní vektor řešením rovnice

(A - λI)u = 0.

Matice rotace pootočí bod nebo vektor o úhel θ proti směru hodinových ručiček. Inverze je pootočení o -θ.

R(θ) = (cos θ -sin θ; sin θ cos θ)

Zobrazení dané maticí A má v souřadnicích pootočených o θ proti směru hodinových ručiček matici R(-θ)AR(θ).

Rovnice kontiuity

du/dt = σ - ∇ · j

u ... stavová veličina

du/dt ... rychlost růstu stavové veličiny

σ ... vydatnost zdrojů stavové velčiny

j ... tok stavové veličiny

-∇ · j ... úbytek toku stavové veličiny (záporně vzatá divergence toku)

Difuzní rovnice

Rovnice kontinuty doplněná předpokladem, že tok je úměrný záporně vzatému gradientu stavové veličiny.

j = -D∇u

du/dt = σ + ∇ · (D∇u)

Difuzní rovnice v kartézských souřadnicích ve směru vlastních vektorů:

du/dt = σ + ∂/∂x (Dx du/dx) + ∂/∂y (Dy du/dy) + ∂/∂z (Dz du/dz)

Pro izotropní materiál (stejně vlastnosti ve všech směrech) platí Dx = Dy = Dz.

Pro homogenní lineární materiál (stejně vlastnosti ve všech bodech a odezva úměrná podnětu) jsou difuzní konstanty nezávislé na souřadnicích a kvaziderivace je možno nahradit druhými derivacemi:

∂/∂x (Dx du/dx) = Dx d²u/dx² atd.