Cheatsheet Matematika

(Robert Mařík, 11. srpna 2021)

Funkce

- Funkce jsou zobrazení mající na vstupu a výstupu reálná čísla. Používají se k vyjádření vzájemných relací zkoumaných veličin.
- Podle toho, zda zachovávají uspořádání vzorů i pro obrazy dělíme na rostoucí, klesající a ostatní (bez monotonie).
- Podle toho, zda a jakým způsobem jsou symetrické dělíme na sudé, liché a ostatní (bez parity).
- Nejjednoduššími funkcemi jsou přímá úměrnost (násobení konstantou, $y = kx$) a nepřímá úměrnost (násobení převrácené hodnoty konstantou, $y = \frac{k}{x} = k\frac{1}{x}$).
- Je-li $y = f(x)$, říkáme, že y závisí na x. Veličina y je závislá veličina, veličina x je nezávislá veličina.

Spojitost a limita (velmi zjednodušeně)

- Spojité funkce mají relativně malé změny funkčních hodnot při relativně malých změnách vstupních dat. Např. nejsou skoky.
- Limita umožňuje doplnit funkční hodnotu funkce tak, aby se stala spojitou (odstranitelná nespojitost).

Derivace

Dává do souvislosti změny závislé a nezávislé veličiny.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} := \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

- Rychlost s jakou se mění f při změnách x.
- Změna f vyvolaná jednotkovou změnou x.
- Pro $f(t)$ je $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ rychlost růstu veličiny f (v čase).
- Jednotka derivace veličiny f podle x je stejná jako jednotka podílu těchto veličin.

Konečné diference

Konečné diference slouží k numerickému aproximování derivace. Slouží také k odhadu derivace funkce dané tabulkou.

Dopředná diference: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Centrální diference: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

Druhá diference: $\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2} = f''(x) \approx \frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2}$

Aplikace derivace

- Rovnice pro růst rychlostí úměrnou funkční hodnotě je
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx.$$
Rovnice pro růst rychlostí úměrnou vzdálenosti od stacionárního stavu je
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(M-x).$$
Řešením těchto modelů je možné získat časový průběh hledané funkce.
- Lineární aproximace funkce f v okolí bodu x_0 je
$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}(x-x_0).$$
- Okamžitá rychlost. Derivace vystupuje všude tam, kde nestačí průměrná rychlost, ale požadujeme rychlost okamžitou. Je proto v matematické formulace naprosté většiny fyzikálních zákonů, pokud se nechceme specializovat pouze na děje probíhající konstantními rychlostmi (jako ve středoškolské fyzice).
- Rovnice vedení tepla (pro parciální derivace) – obsahuje časové i prostorové derivace, protože teplo se šíří v prostoru a teplota v daném místě se při vedení tepla mění s časem.
- Řešení rovnice $f(x) = 0$ je možno provést iteracemi
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$
kde $f'(x_n) = \frac{\mathrm{d}f(x_n)}{\mathrm{d}x}$ je derivace v bodě x_n a iterační proces začne v nepříliš špatném počátečním odhadu řešení x_0 (Newtonova metoda). Každý jeden krok metody zdvojnásobí počet desetinných míst při přibližném řešení rovnice.

Vzorce pro derivování

(1) $(c)' = 0$

(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$

(3) $(e^x)' = e^x$

(4) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

(5) $(\sin x)' = \cos x$

(6) $(\cos x)' = -\sin x$

(7) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

(8) $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

(9) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(10) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(11) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(cu)' = cu'$
3. $(uv)' = u'v + uv'$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$
5. $\Big(u(v(x))\Big)' = u'(v(x))v'(x)$

Neurčitý integrál

Neurčitý integrál je opak derivace, kdy z rychlosti změny určíme časový průběh měnící se veličiny. Je dána až na aditivní konstantu související s výchozím stavem. Píšeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x),$$

kde $F(x)$ je funkce splňující $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$.

Vzorce pro integrování

(1) $\int \mathrm{d}x = x + c$

(2) $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

(3) $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$

(4) $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c$

(5) $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$

(6) $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$

(7) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c$

(8) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c$

(9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + c$

(10) $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c$

(11) $\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$

Určitý Newtonův integrál

Newtonův integrál je opak derivace, kdy z rychlosti změny a z časového intervalu určíme změnu veličiny na daném intervalu. Na rozdíl od neurčitého integrálu je určitý integrál dán jednoznačně a není nutná informace o počátečním stavu. Počítáme vztahem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

kde $F(x)$ je funkce splňující $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$.

Určitý Riemannův integrál

Riemannův integrál umožňuje vypočítat součet nekonečné mnoha malých příspěvků k aditivní veličině. V praxi náhrada za nemožnost použít násobení v případě nekonstantních parametrů. Například dráha pohybu je rychlost násobená časem v případě pohybu konstantní rychlostí. V případě pohybu nekonstantní rychlostí je dráha místo součinu integrál rychlosti jako funkce času.

Riemannův integrál se počítá stejně jako Newtonův.

Autonomní DR 1. řádu

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y)$$

Konstantních řešení je tolik, kolik je nulových bodů funkce $f(y)$.

Stabilní konstantní řešení jsou v bodech, kde je funkce f klesající.

Netabilní konstantní řešení jsou v bodech, kde je funkce f rostoucí.

Determinanty

Determinant 2×2 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Determinant 3×3

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - afh + bfg - bdi + cdh - ceg$$

Vektory, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$,

Skalární součin vektorů $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Vektorový součin vektorů

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Délka vektoru $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$