

# Cheat sheet Matematika

(Robert Mařík, 14. června 2021)

## Funkce

- Zobrazení mající na vstupu a výstupu reálná čísla
- Podle toho, zda zachovávají uspořádání vzorů i pro obrazy dělíme na rostoucí, klesající a ostatní (bez monotonie).
- Podle toho, zda a jakým způsobem jsou symetrické dělíme na sudé, liché a ostatní (bez parity).
- Nejjednoduššími funkcemi jsou přímá úměrnost (násobení konstantou,  $y = kx$ ) a napřímá úměrnost (násobení převrácené hodnoty konstantou,  $y = \frac{k}{x} = k \frac{1}{x}$ ).
- Je-li  $y = f(x)$ , říkáme, že  $y$  závisí na  $x$ . Veličina  $y$  je závislá veličina, veličina  $x$  je nezávislá veličina.

## Spojitosť, limita

- Spojité funkce mají relativně malé změny funkčních hodnot při relativně malých změnách vstupních dat. Např. nejsou skoky.
- Limita umožňuje doplnit funkční hodnotu funkce tak, aby se stala spojitou (odstranitelná nespojitost).

## Derivace

Dává do souvislosti změny závislé a nezávislé veličiny. Změna se někdy interpretuje jako růst.

$$\frac{df}{dx} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Rychlost s jakou se mění  $f$  při změnách  $x$ .
- Změna  $f$  vyvolaná jednotkovou změnou  $x$ .
- Pro  $f(t)$  je  $\frac{df}{dt}$  rychlost růstu veličiny  $f$  (v čase).

## Aplikace derivace

- Rovnice pro růst rychlostí úměrnou funkční hodnotě je

$$\frac{dx}{dt} = kx.$$

Rovnice pro růst rychlostí úměrnou vzdálenosti od stacionárního stavu je

$$\frac{dx}{dt} = k(M - x).$$

Řešením těchto modelů je možné získat časový průběh hledané funkce.

- Lineární aproximace funkce  $f$  v okolí bodu  $x_0$  je

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx}(x - x_0).$$

- Okamžitá rychlost. Derivace vystupuje všude tam, kde nestačí průměrná rychlost, ale požadujeme rychlost okamžitou. Je proto v matematické formulaci naprosto většiny fyzikálních zákonů, pokud se nechceme specializovat pouze na děje probíhající konstantními rychlostmi (jako ve středškolské fyzice).
- Rovnice vedení tepla (pro parciální derivace) – obsahuje časové i prostorové derivace, protože teplo se šíří v prostoru a teplota v daném místě se při vedení tepla mění s časem.
- Řešení rovnice  $f(x) = 0$  je možno provést iteracemi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

kde  $f'(x_n) = \frac{df(x_n)}{dx}$  je derivace v bodě  $x_n$  a iterační proces začne v nepříliš špatném počátečním odhadu řešení  $x_0$  (Newtonova metoda). Každý jeden krok metody zdvojnásobí počet desetinných míst při přibližném řešení rovnice.

## Konečné difference

Slouží k numerickému aproximování derivace. Slouží také k odhadu derivace funkce dané tabulkou.

$$\text{Dopředná difference: } \frac{df}{dx} = f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$\text{Centrální difference: } \frac{df}{dx} = f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$\text{Druhá difference: } \frac{d^2f}{dx^2} = f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$$

## Vzorce pro derivování

(1) $(c)' = 0$	(10) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$	(11) $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$
(3) $(e^x)' = e^x$	
(4) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	
(5) $(\sin x)' = \cos x$	1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
(6) $(\cos x)' = -\sin x$	2. $(cu)' = cu'$
(7) $(\tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	3. $(uv)' = u'v + uv'$
(8) $(\cotg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
(9) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	5. $(u(v(x)))' = u'(v(x))v'(x)$

## Integrál

**Neurčitý integrál** Opak derivace. Z rychlosti změny určíme časový průběh měnící se veličiny. Je dána až na aditivní konstantu související s výchozím stavem. Píšeme

$$\int f(x) dx = F(b) - F(a),$$

kde  $F(x)$  je funkce splňující  $\frac{dF}{dx} = f(x)$ .

## Vzorce pro integrování

(1) $\int dx = x + c$	(7) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tg x + c$
(2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	(8) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cotg x + c$
(3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln  x  + c$	(9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
(4) $\int e^x dx = e^x + c$	(10) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c$
(5) $\int \sin x dx = -\cos x + c$	(11) $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left  \frac{1+x}{1-x} \right  + c$
(6) $\int \cos x dx = \sin x + c$	

**Určitý Newtonův integrál** Opak derivace, z rychlosti změny a z časového intervalu určíme změnu veličiny na daném intervalu. Narozdíl od neurčitého interálu je určitý integrál dán jednoznačně a není nutná informace o počátečním stavu. Počítáme vztahem

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

kde  $F(x)$  je funkce splňující  $\frac{dF}{dx} = f(x)$ .

**Určitý Riemmannův integrál** Počítá se stejně jako Newtonův. Součet nekonečné mnoha malých příspěvků k aditivní veličině. V praxi náhrada za nemožnost použít násobení v případě nekonstantních parametrů. Například dráha pohybu je rychlost násobená časem v případě pohybu konstantní rychlostí. V případě pohybu nekonstantní rychlostí je dráha místo součinu integrál rychlosti jako funkce času.

Determinanty

Determinant 2×2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Determinant 3×3

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - afh + bfg - bdi + cdh - ceg$$

**Vektory**,  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ,

Skalární součin vektorů  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Vektorový součin vektorů

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Délka vektoru  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$