Sentential Natural Deduction: Additional Exercises A

Robert Craven

Exercise A.1

Show that the following obtain by giving derivations.

1. $\neg p \vdash p \to q$.

1. $\neg p$	(P1)
2. $\quad \| \; p$	(Ass,CP)
3. $\quad \| \; q$	2,1,(ECQ)
4. $p \to q$	2–3,(CP)

2. $p \vdash \neg\neg p$, **without** using (DN1).

1. p	(P1)
2. $\quad \| \; \neg\neg\neg p$	(Ass,IP)
3. $\quad \| \; \neg p$	2,(DN2)
4. $\quad \| \; p \wedge \neg p$	1,3,(CON)
5. $\neg\neg p$	2–4,(IP)

3. $\vdash p \vee p \to p$. (Notice that there are no premises.)

1. $\quad \| \; p$	(Ass,CP)
2. $\quad \| \; p$	1,(R)
3. $p \to p$	1–2,(CP)
4. $p \vee p \to p$	3,3,(DIS)

4. $\vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$. (Notice that there are no premises.)

1. $\quad \| \; p \to q$	(Ass,CP)
2. $\quad \| \; \| \; \neg q$	(Ass,CP)
3. $\quad \| \; \| \; \neg p$	1,2,(MT)
4. $\quad \| \; \neg q \to \neg p$	2–3,(CP)
5. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	1–4,(CP)

5. $\neg(p \to q) \vdash p$.

1. $\neg(p \to q)$	(P1)
2. $\quad \| \; \neg p$	(Ass,IP)
3. $\quad \| \; \| \; p$	(Ass,CP)
4. $\quad \| \; \| \; q$	3,2,(ECQ)
5. $\quad \| \; p \to q$	3–4,(CP)
6. $\quad \| \; (p \to q) \wedge \neg(p \to q)$	5,1,(CON)
7. p	2–6,(IP)

6. $\neg r \to \neg(p \wedge q) \vdash p \to \neg\neg(q \to r)$.

1.	$\neg r \to \neg(p \wedge q)$	(P1)
2.	$\| \; p$	(Ass,CP)
3.	$\| \; \| \; q$	(Ass,CP)
4.	$\| \; \| \; p \wedge q$	2,3,(CON)
5.	$\| \; \| \; \neg\neg(p \wedge q)$	4,(DN1)
6.	$\| \; \| \; \neg\neg r$	5,1,(MT)
7.	$\| \; \| \; r$	6,(DN2)
8.	$\| \; q \to r$	3–7,(CP)
9.	$\| \; \neg\neg(q \to r)$	8,(DN1)
10.	$p \to \neg\neg(q \to r)$	2–9,(CP)

7. $p \vee q \vdash (p \to q) \to q$.

1.	$p \vee q$	(P1)
2.	$\| \; p \to q$	(Ass,CP)
3.	$\| \; \| \; \neg q$	(Ass,IP)
4.	$\| \; \| \; p$	1,3,(DS2)
5.	$\| \; \| \; q$	4,2,(MP)
6.	$\| \; \| \; q \wedge \neg q$	5,3,(CON)
7.	$\| \; q$	3–6,(IP)
8.	$(p \to q) \to q$	2–7,(CP)

8. $\vdash p \vee \neg p$. (No premises.)

1.	$\| \; \neg(p \vee \neg p)$	(Ass,IP)
2.	$\| \; \| \; \neg\neg p$	(Ass,IP)
3.	$\| \; \| \; p$	2,(DN2)
4.	$\| \; \| \; p \vee \neg p$	3,(ADD1)
5.	$\| \; \| \; (p \vee \neg p) \wedge \neg(p \vee \neg p)$	4,1,(CON)
6.	$\| \; \neg p$	2–5,(IP)
7.	$\| \; p \vee \neg p$	6,(ADD2)
8.	$\| \; (p \vee \neg p) \wedge \neg(p \vee \neg p)$	7,1,(CON)
9.	$p \vee \neg p$	1–8,(IP)

9. $p \vee q, p \to r, q \to s \vdash r \vee s$.

1.	$p \vee q$	(P1)
2.	$p \to r$	(P2)
3.	$q \to s$	(P3)
4.	$\| \; \neg(r \vee s)$	(Ass,IP)
5.	$\| \; \| \; \neg\neg r$	(Ass,IP)
6.	$\| \; \| \; r$	5,(DN2)
7.	$\| \; \| \; r \vee s$	6,(ADD1)
8.	$\| \; \| \; (r \vee s) \wedge \neg(r \vee s)$	7,4,(CON)
9.	$\| \; \neg r$	5–8,(IP)
10.	$\| \; \neg p$	2,9,(MT)
11.	$\| \; q$	1,10,(DS1)
12.	$\| \; s$	11,3,(MP)
13.	$\| \; r \vee s$	12,(ADD2)
14.	$\| \; (r \vee s) \wedge \neg(r \vee s)$	13,4,(CON)
15.	$r \vee s$	4–14,(IP)

10. $p \lor q, \neg p \lor r \vdash q \lor r$, **without** using Case Distinction (CD).

1.	$p \lor q$	(P1)
2.	$\neg p \lor r$	(P2)
3.	$\| \; p$	(Ass,CP)
4.	$\| \; \neg\neg p$	3,(DN1)
5.	$\| \; r$	2,4(DS1)
6.	$\| \; q \lor r$	5,(ADD2)
7.	$p \to q \lor r$	2–6,(CP)
8.	$\| \; \neg p$	(Ass,CP)
9.	$\| \; q$	1,8,(DS1)
10.	$\| \; q \lor r$	9,(ADD1)
11.	$\neg p \to q \lor r$	8–10,(CP)
12.	$p \lor \neg p \to q \lor r$	7,11,(DIS)
13.	$\| \; \neg(p \lor \neg p)$	(Ass,IP)
14.	$\| \; \| \; \neg\neg p$	(Ass,IP)
15.	$\| \; \| \; p$	14,(DN2)
16.	$\| \; \| \; p \lor \neg p$	15,(ADD1)
17.	$\| \; \| \; (p \lor \neg p) \land \neg(p \lor \neg p)$	16,13,(CON)
18.	$\| \; \neg p$	14–17,(IP)
19.	$\| \; p \lor \neg p$	18,(ADD2)
20.	$\| \; (p \lor \neg p) \land \neg(p \lor \neg p)$	19,13,(CON)
21.	$p \lor \neg p$	13–20,(IP)
22.	$q \lor r$	12,21,(MP)

11. $\vdash ((p \to q) \to p) \to p$. (No premises.)

1.	$\| \; (p \to q) \to p$	(Ass,CP)
2.	$\| \; \| \; \neg p$	(Ass,IP)
3.	$\| \; \| \; \| \; p$	(Ass,CP)
4.	$\| \; \| \; \| \; q$	3,2,(ECQ)
5.	$\| \; \| \; p \to q$	3–4,(CP)
6.	$\| \; \| \; p$	5,1,(MP)
7.	$\| \; \| \; p \land \neg p$	6,2,(CON)
8.	$\| \; p$	2–7,(IP)
9.	$((p \to q) \to p) \to p$	1–8,(CP)