

**AGH**

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

*Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki*

***Sterowanie dyskretne***

Prowadzący: dr inż. Agata Nawrocka

***„Układ regulacji położenia windy  
napędzanej obcowzbudnym silnikiem  
prądu stałego o zadanych parametrach”***

*Wykonali: Hartmann Jakub, Chmielarczyk Robert*

*Grupa: 2*

*Automatyka Przemysłowa i Robotyka*

*Numer projektu: 6*

## 1. Opis projektu

Celem projektu jest stworzenie układu regulacji dla windy napędzanej silnikiem obcowzbudnym prądu stałego. Aby to osiągnąć wyznaczyliśmy model matematyczny i transmitancję dyskretną obiektu, a następnie aby go wyregulować, użyliśmy trzech różnych algorytmów: regulatora PID, regulatora odpornego oraz regulatora rozmytego.

## 2. Dane projektowe

$V = 10 \text{ m/s}$	Prędkość w stanie ustalonym
$L = 0,3 \text{ H}$	Indukcyjność cewki wirnika
$R = 0,3 \text{ }\Omega$	Oporność cewki wirnika
$J = 0,1 \text{ kgm}^2/\text{s}^2$	Bezwładność silnika
$D = 1 \text{ Nms/rad}$	Tarcie wiskotyczne w łożyskach silnika
$k_m = 10 \text{ Nm/A}$	Stała mechaniczna
$k_e = 10 \text{ Vs/rad}$	Stała elektryczna
$P = 400 \text{ W}$	Moc silnika
$r = 0,2 \text{ m}$	Promień bębna
$m = 350/50 \text{ kg}$	Masa windy/obciążenia
$B = 1 \text{ Ns/m}$	Tarcie wiskotyczne między windą a szybem
$k = 600000 \text{ N/m}$	Sprężystość liny
$m_p = 375 \text{ kg}$	Masa przeciwwagi

z Twierdzenia Shannona-Kotelnikowa o próbkowaniu:

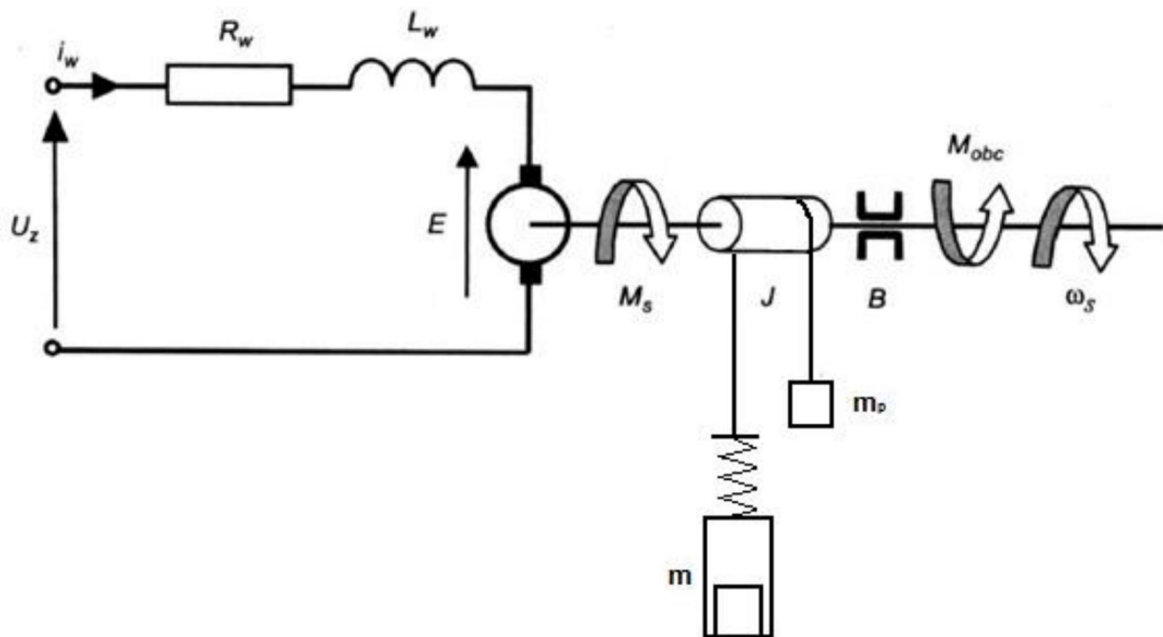
$$T_p \leq \frac{1}{2} * T_g$$

$T_p$  – czas próbkowania,

$T_g$  – minimalny okres sygnału próbkowanego.

Z wykresu odczytano  $T_g = 0,11\text{s}$ , zatem przyjęto  $T_p = 0,03 \text{ s}$ .

### 3. Model układu



Schemat ideowy

### 4. Obliczenia

Obliczenia do projektu zostały wykonane w programie Matlab, a wzory wyprowadzone z zależności fizycznych oraz równan Lagrange'a

#### a) Cześć elektryczna

Zgodnie z II prawem Kirchhoffa:

$$U_z = U_R + U_L + E$$

$$U_R = i \cdot R$$

$$U_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

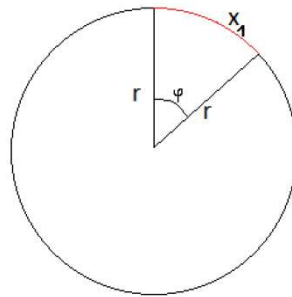
Indukowane SEM:

$$E = k_e \cdot \omega$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varphi = \frac{x_1}{r}$$

Gdzie  $x_1$  to współrzędna, o którą przemieścił się wałek, a  $x_2$  przemieszczenie windy



$$E = \frac{k_e}{r} \cdot \frac{dx_1}{dt}$$

Podstawiając:

$$U_z = Ri + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{k_e}{r} \cdot \frac{dx_1}{dt}$$

Transmitancja Laplace'a dla zerowych warunków początkowych:

$$U_z(s) = RI(s) + sLI(s) + s \frac{k_e}{r} X_1(s)$$

$$I(s) = \frac{U_z(s) - s \frac{k_e}{r} X_1(s)}{R + Ls}$$

## b) Część mechaniczna

Równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial N}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

$$L = E - U$$

Gdzie:

- L – potencjał kinetyczny,
- E – energia kinetyczna,
- U – energia potencjalna,
- $q_i$  – współrzędna uogólniona,
- N – funkcja dyssypacji energii,
- $Q_i$  – siła uogólniona.

Zapisano funkcję L, N oraz  $Q_i$ :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_p\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{\dot{x}_1}{r}\right)^2 - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 - mgx_2 - m_pg(l - x_1)$$

$$N = B\dot{x}_2^2 + D\dot{\phi}^2$$

$$N = B\dot{x}_2^2 + D\left(\frac{\dot{x}_1}{r}\right)^2$$

$$Q_i = \frac{M_s}{r}$$

Układ mechaniczny posiada dwa stopnie swobody, zostaną zapisane dwa równania.

Równania Lagrange'a II rodzaju dla bębna i przeciwwagi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial N}{\partial \dot{x}_1} = \frac{M_s}{r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{J}{r^2}\ddot{x}_1 + m_p\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = k(x_2 - x_1) + m_pg$$

$$\frac{\partial N}{\partial \dot{x}_1} = 2\frac{D}{r^2}\dot{x}_1$$

$$\left(\frac{J}{r} + m_pr\right) \cdot \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{D}{r} \cdot \frac{dx_1}{dt} - k(x_2 - x_1)r - m_pgr = M_s$$

$$M_s = k_m \cdot i$$

Obustronnie wykonujemy transformatę Laplace'a:

$$\left(\frac{J}{r} + m_pr\right)s^2X_1(s) + \frac{D}{r}sX_1(s) - kX_2(s)r + kX_1(s)r - m_pgr = k_mI(s)$$

$$X_1(s) \left( \left(\frac{J}{r} + m_pr\right)s^2 + \frac{D}{r}s + kr \right) = k_mI(s) + kX_2(s)r + m_pgr$$

$$X_1(s) = \frac{\frac{k_m}{r}I(s) + m_pg + kX_2(s)}{\left(\frac{J}{r^2} + m_p\right)s^2 + \frac{D}{r^2}s + k}$$

Równanie Lagrange'a II rodzaju dla obciążenia:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial N}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = m\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -k(x_2 - x_1) - mg$$

$$\frac{\partial N}{\partial x_2} = 2B\dot{x}_2$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} + B \frac{dx_2}{dt} + k(x_2 - x_1) + mg = 0$$

Obustronnie wykonujemy przekształcenie Laplace'a:

$$ms^2 X_2(s) + BsX_2(s) + kX_2(s) - kX_1(s) + mg = 0$$

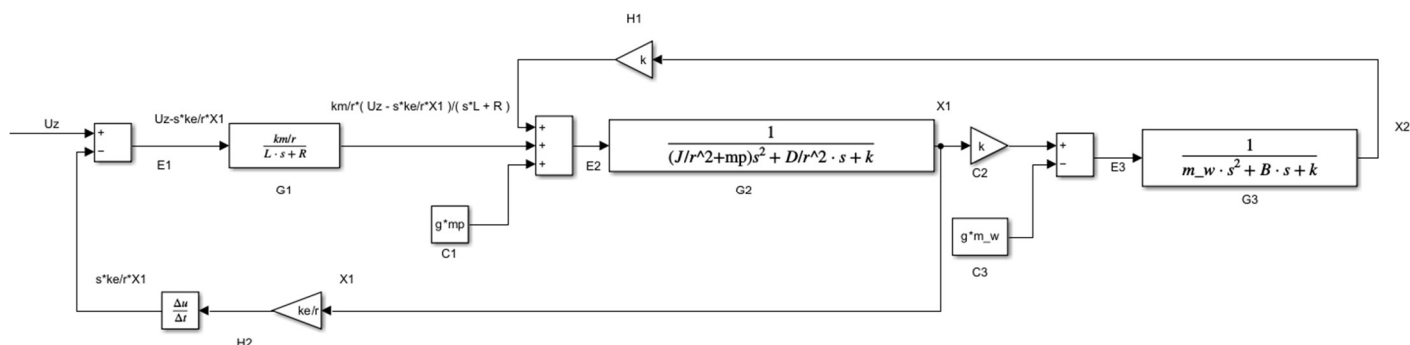
$$X_2(s)(ms^2 + Bs + k) = kX_1(s) - mg$$

$$X_2(s) = \frac{kX_1(s) - mg}{ms^2 + Bs + k}$$

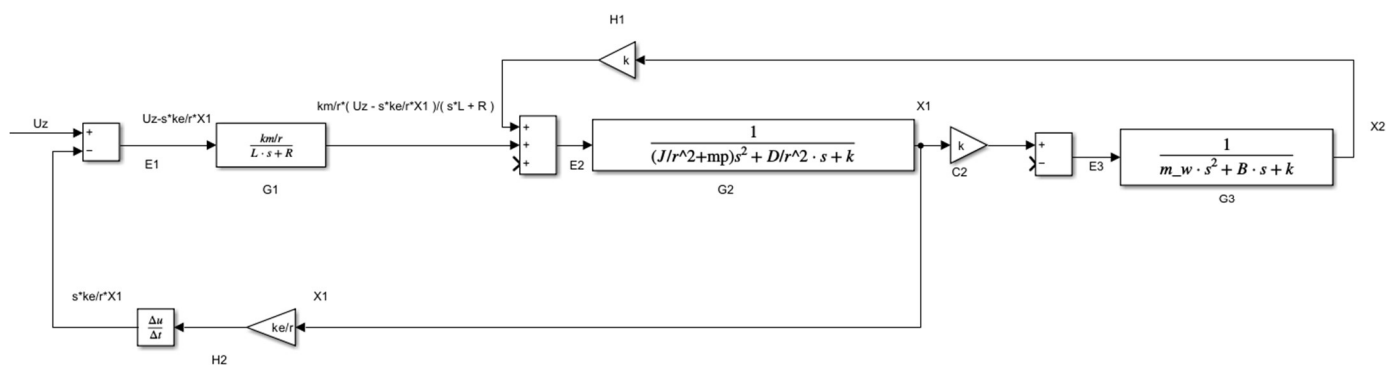
## 5. Model Matlab oraz Simulink

Aby stworzyć poprawny model w skróconej formie uwzględniający zakłócenia skorzystano z zasady superpozycji.

Najpierw policzono transmitancje bez zakłóceń od mas, następnie transmitancje zastępczą układu bez sygnału wejściowego oraz sygnału od przeciwwagi windy, kolejno wyznaczono bez sygnału wejściowego oraz masy windy.

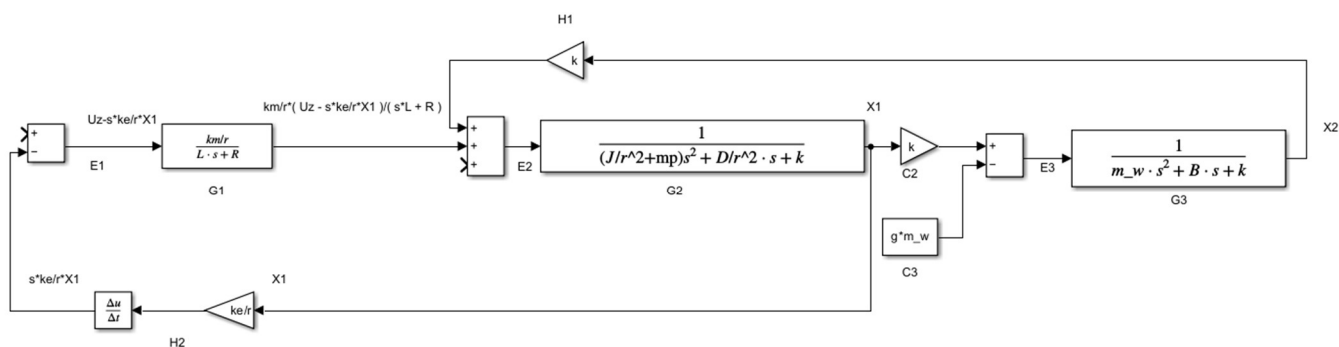


Rysunek 1 Model obiektu wraz z zakłóceniami



Rysunek 2 Model układu bez zakłóceń

$$G_U = \frac{\frac{G_1 * G_2 * G_3 * C_2}{1 - H_1 * G_2 * G_3 * C_2}}{1 + \frac{G_1 * G_2 * G_3 * C_2}{1 - H_1 * G_2 * G_3 * C_2} * \frac{H_2}{G_3 * C_2}}$$



Rysunek 3 Model układu bez sygnału wejściowego oraz zakłócenia od przeciwwagi windy

Transmitancja od sygnału przeciwwagi windy

$$E_1 = -E_2 * G_2 * H_2$$

$$E_2 = E_1 * G_1 + Z_1 + E_2 * G_2 * C_2 * G_3 * H_1$$

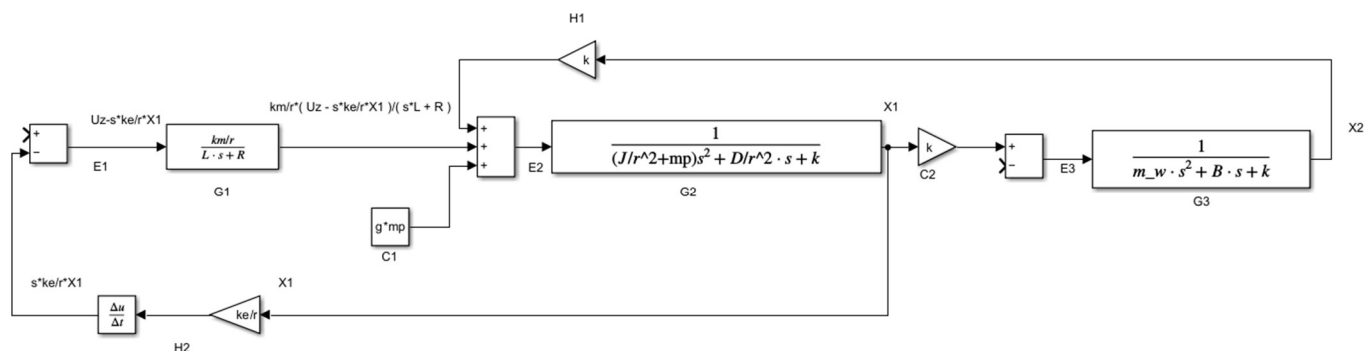
$$Z_1 = E_2 * (1 - E_2 * G_2 * H_2 * G_3 * H_1) - E_1 * G_1$$

$$Y = E_2 * G_2 * C_2 * G_3$$

$$Z_1 = E_2 * (1 - G_2 * H_2 * G_3 * H_1) + E_2 * G_2 * H_2 * G_1$$

$$Z_1 = E_2 * (1 - G_2 * H_2 * G_3 * H_1 + G_2 * H_2 * G_1)$$

$$\frac{Y}{Z_1} = \frac{G_2 * C_2 * G_3}{1 - G_2 * C_2 * G_3 * H_1 + G_2 * H_2 * G_1}$$



Rysunek 4 Model układu bez sygnału wejściowego oraz zakłócenia od masy windy

Transmitancja od sygnału masy windy

$$E_1 = -E_2 * G_2 * H_2$$

$$E_2 = E_1 * G_1 + H_1 * G_3 * E_3$$

$$E_2 = \frac{H_1 * G_3 * E_3}{1 + H_2 * G_2 * G_1}$$

$$E_3 = E_2 * G_2 * C_2 - Z_2 \rightarrow Z_2 = E_2 * G_2 * C_2 - E_3$$

$$Y = E_3 * G_3$$

$$\begin{aligned} \frac{Y}{Z_2} &= \frac{E_3 * G_3}{E_2 * G_2 * C_2 - E_3} = \frac{E_3 * G_3}{\frac{H_1 * G_3 * E_3}{1 + H_2 * G_2 * G_1} * G_2 * C_2 - E_3} = \frac{G_3}{\frac{H_1 * G_3 * G_2 * C_2}{1 + H_2 * G_2 * G_1} - 1} = \\ &= \frac{G_3 * (1 + H_2 * G_2 * G_1)}{H_1 * G_3 * G_2 * C_2 - 1 - H_2 * G_2 * G_1} \end{aligned}$$

Do wykonania obliczeń wykorzystano program Matlab . Poniższy kod pozwolił na osiągnięcie poprawnych wyników symulacji.

```
G1 = tf(km/r, [L R])
G2 = tf(1, [(J/r^2+mp) D/r^2 k])
G3 = tf(1, [m_w B k])
H1 = k
H2 = tf([ke/r 0], 1)
C1 = mp*g
C2 = k
C3 = m_w*g

%%transmitancja obiektu bez zaklocen
GL_bzak1 = G1 * G2 * G3 * C2;
GM_bzak1 = 1 - H1 * G2 * G3 * C2 + G1 * G2 * H2;
[GL_bzak, GM_bzak] = tfdata ( GL_bzak1 / GM_bzak1, 'v' )
```

%%transmitancja zakłócenia od przeciwwagi windy



```

GL_zakPW1 = G2 * C2 * G3
GM_zakPW1 = 1 - H1 * G2 * G3 * C2 + G1 * G2 * H2
[ GL_zakPW, GM_zakPW ] = tfdata( GL_zakPW1 / GM_zakPW1, 'v' )

```

```

%%transmitancja zaklozenia od masy windy

```

```

GL_zakW1 = G3 * (1 + H2 * G1 * G2);
GM_zakW1 = -(1 + H2 * G1 * G2) + H1 * G2 * G3 * C2;
[ GL_zakW, GM_zakW ] = tfdata( GL_zakW1 / GM_zakW1, 'v' )

```

```

Transmitancja_Ukladu_Bez_Zaklozen =

```

```

4.489e14 s^7 + 5.096e14 s^6 + 2.197e18 s^5 + 2.397e18 s^4 + 3.58e21 s^3 + 3.745e21 s^2 + 1.944e24 s + 1.944e24

```

```

-----
5.931e11 s^12 + 1.307e12 s^11 + 4.875e15 s^10 + 1.054e16 s^9 + 1.441e19 s^8 + 3.05e19 s^7 + 1.843e22 s^6 + 3.808e22 s^5
+ 8.742e24 s^4 + 1.752e25 s^3 + 1.063e26 s^2 + 9.75e25 s

```

```

Transmitancja_Ukladu_Zaklozenia_od_Masy_Windy =

```

```

-1.695e09 s^10 - 3.731e09 s^9 - 1.102e13 s^8 - 2.368e13 s^7 - 2.689e16 s^6 - 5.631e16 s^5 - 2.915e19 s^4 - 5.943e19 s^3
- 1.186e22 s^2 - 2.349e22 s - 1.166e22

```

```

-----
5.931e11 s^12 + 1.307e12 s^11 + 4.875e15 s^10 + 1.054e16 s^9 + 1.441e19 s^8 + 3.05e19 s^7 + 1.843e22 s^6 + 3.808e22 s^5
+ 8.742e24 s^4 + 1.752e25 s^3 + 1.063e26 s^2 + 9.75e25 s

```

```

Transmitancja_Ukladu_Zaklozenia_od_Przeciwwagi =

```

```

8.978e12 s^7 + 1.019e13 s^6 + 4.393e16 s^5 + 4.794e16 s^4 + 7.161e19 s^3 + 7.491e19 s^2 + 3.888e22 s + 3.888e22

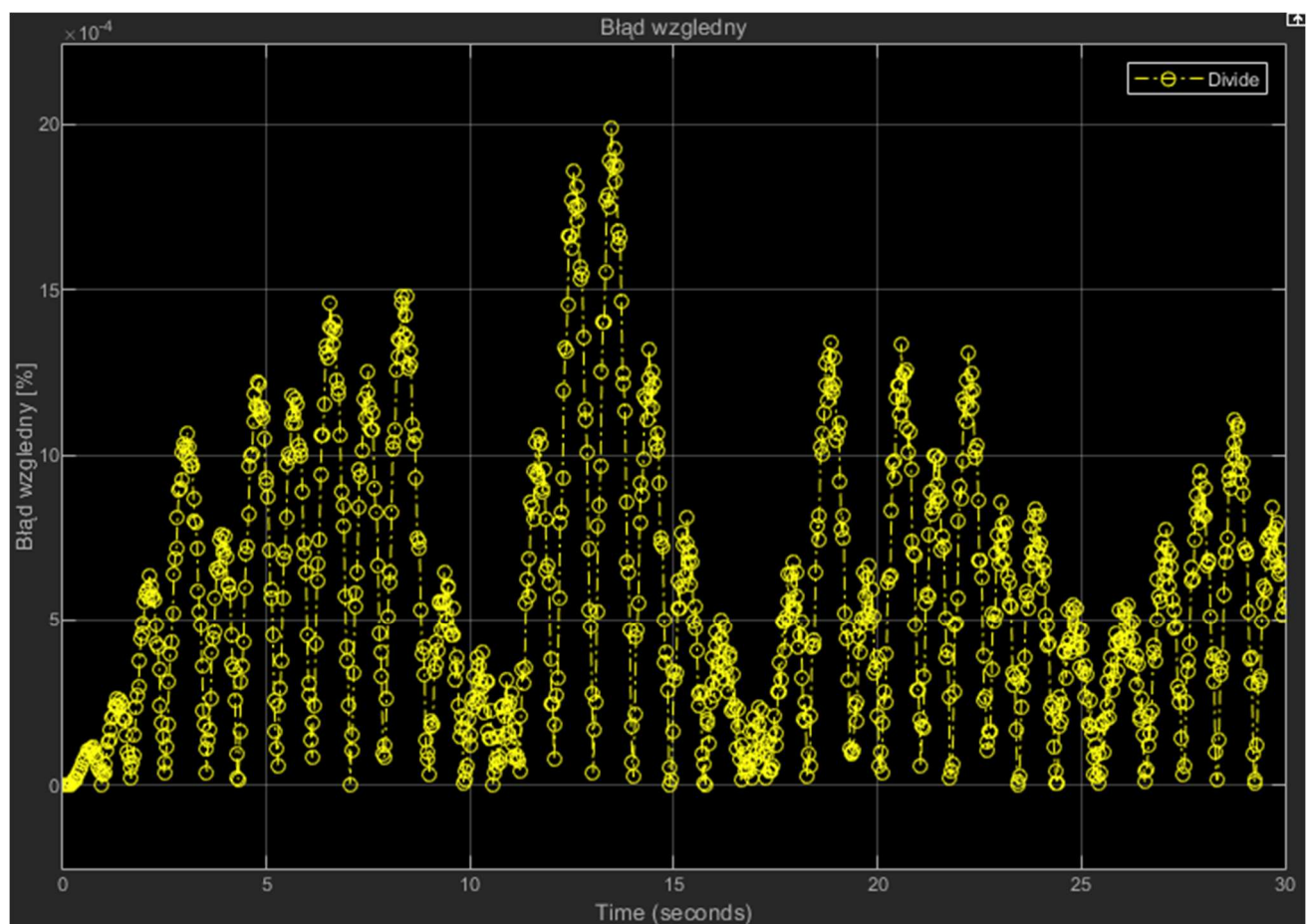
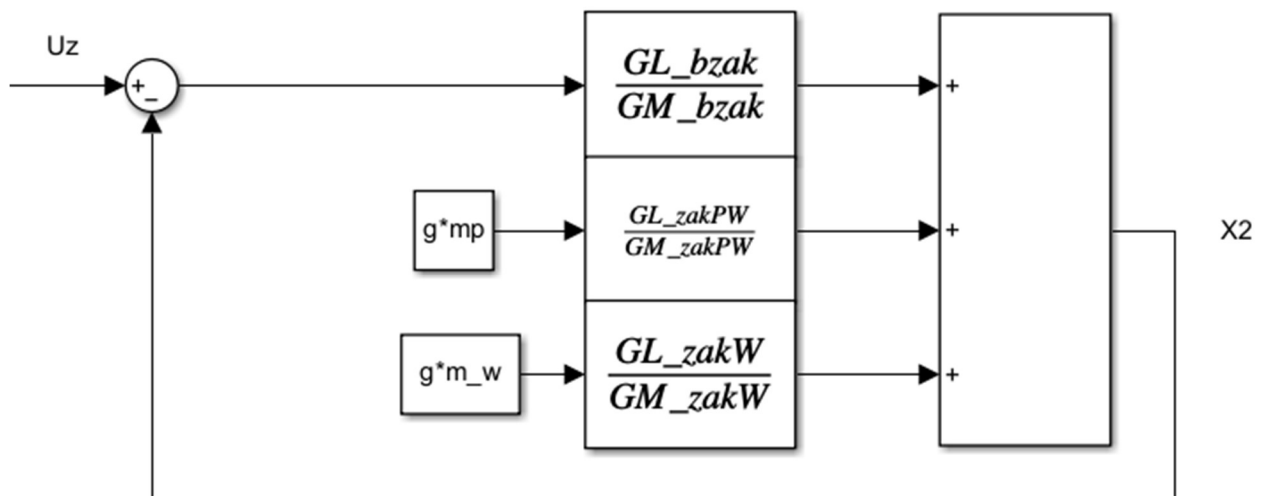
```

```

-----
1.977e12 s^11 + 2.381e12 s^10 + 1.625e16 s^9 + 1.888e16 s^8 + 4.802e19 s^7 + 5.363e19 s^6 + 6.137e22 s^5 + 6.556e22 s^4
+ 2.908e25 s^3 + 2.932e25 s^2 + 3.25e26 s

```

Zapis modelu został skrócony do poniższej formy:



Powyżej przedstawiono błąd względny zastosowanych przekształceń w [%].

## 6. Dyskretyzacja obiektu

Następnie powyższy skrócony model został poddany dyskretyzacji

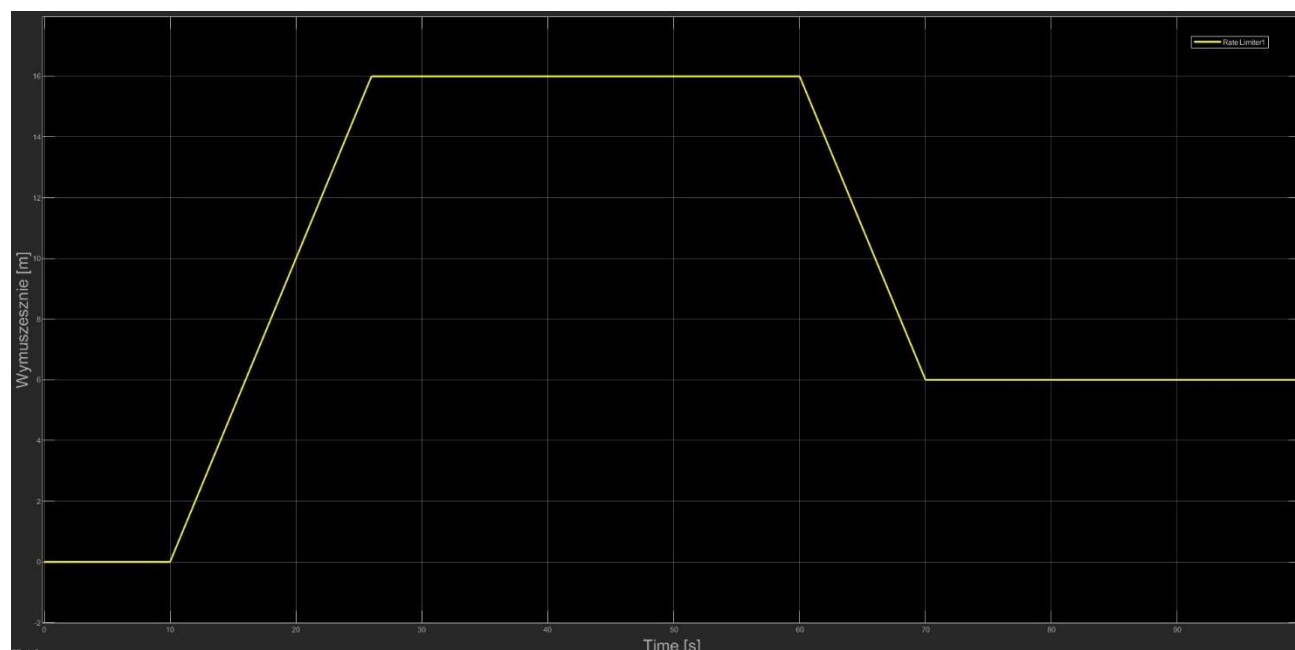
```
%%dyskretyzacja transmitancji od poszczególnych wejść
GD_bzak = c2d(tf(GL_bzak, GM_bzak), Tp, 'zoh')
GD_zakPW = c2d(tf(GL_zakPW, GM_zakPW), Tp, 'zoh')
GD_zakW = c2d(tf(GL_zakW, GM_zakW), Tp, 'zoh')
```

Próby dyskretyzacji obiektu funkcja *ident* (System Identification Toolbox) nie przyniosła okazałych wyników. Identyfikowany sygnał posiadał dokładność 98%, co jest gorszym wynikiem od metody analitycznej, dodatkowo nie uwzględniał on możliwości wprowadzenia zakłócenia od masy obciążenia w trakcie trwania symulacji.

## 7. Wymuszenie

Jako wymuszenie założono ruch windy na wysokość 16m, następnie odczekanie tam 40s i powrót na wysokość 6m.

Sygnałem wejściowym jest pozycja zadana ograniczona bloczkiem *Rate Limiter*, który ogranicza nachylenie krzywej a więc odpowiada za ustaloną prędkość windy. Układ został sprawdzony na innych większych prędkościach. Postanowiono przeprowadzić poniższe rozważania dla prędkości 1m/s, ze względu na widoczną różnicę w odpowiedziach modelu.



## 8. Regulator PID

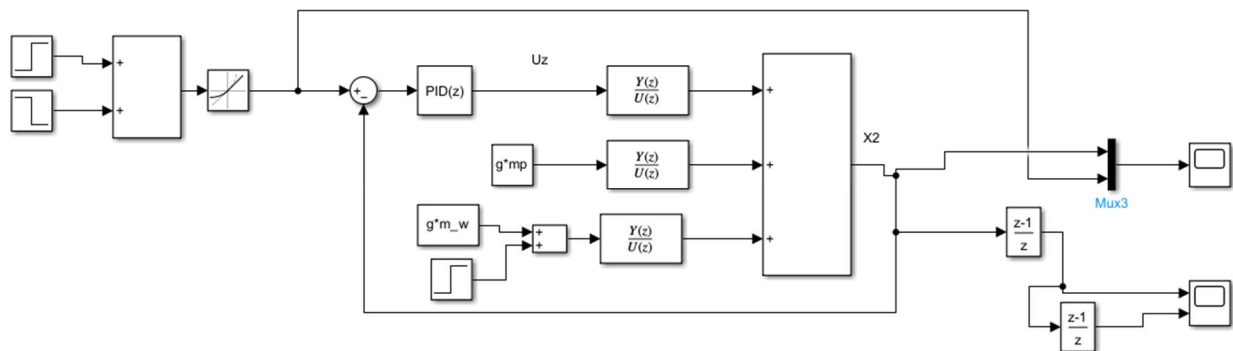
Jako pierwszy został zastosowany dyskretny regulator PID.

$$P \left( 1 + I \cdot T_s \frac{1}{z-1} + D \cdot \frac{1}{T_s} \frac{z-1}{z} \right)$$

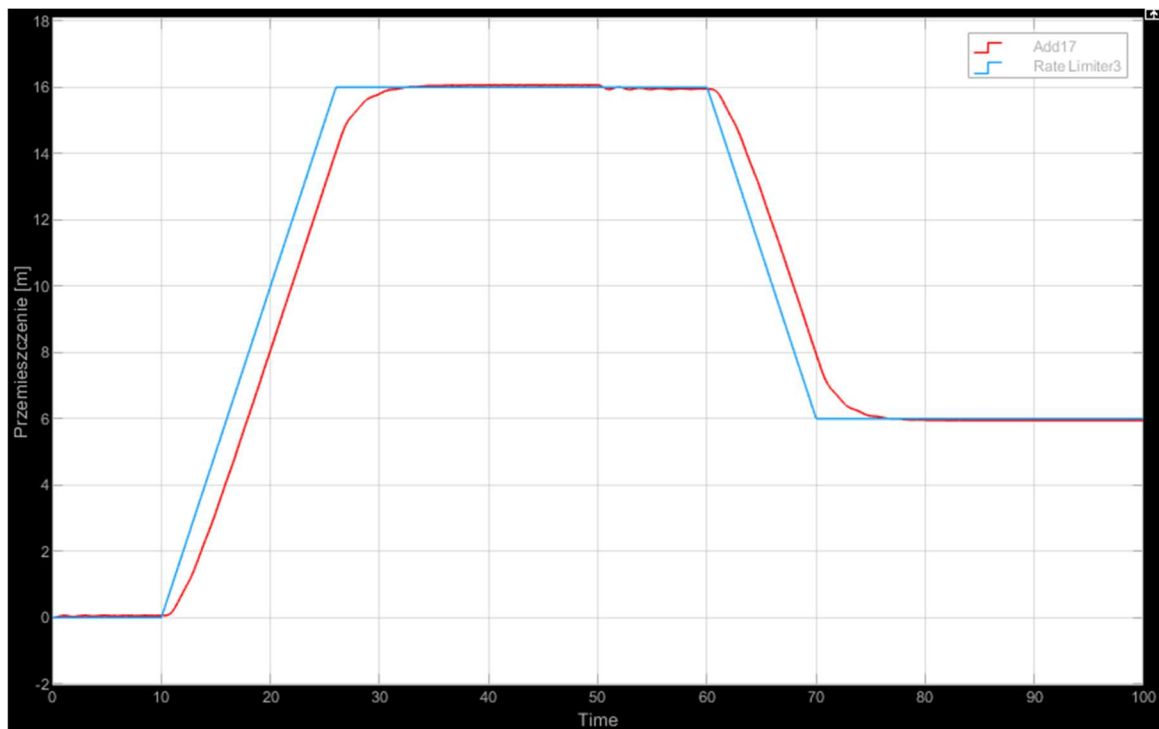
Gdzie;

- $P = 25$ ,
- $I = 0.0003$ ,
- $D = 0.001$ .

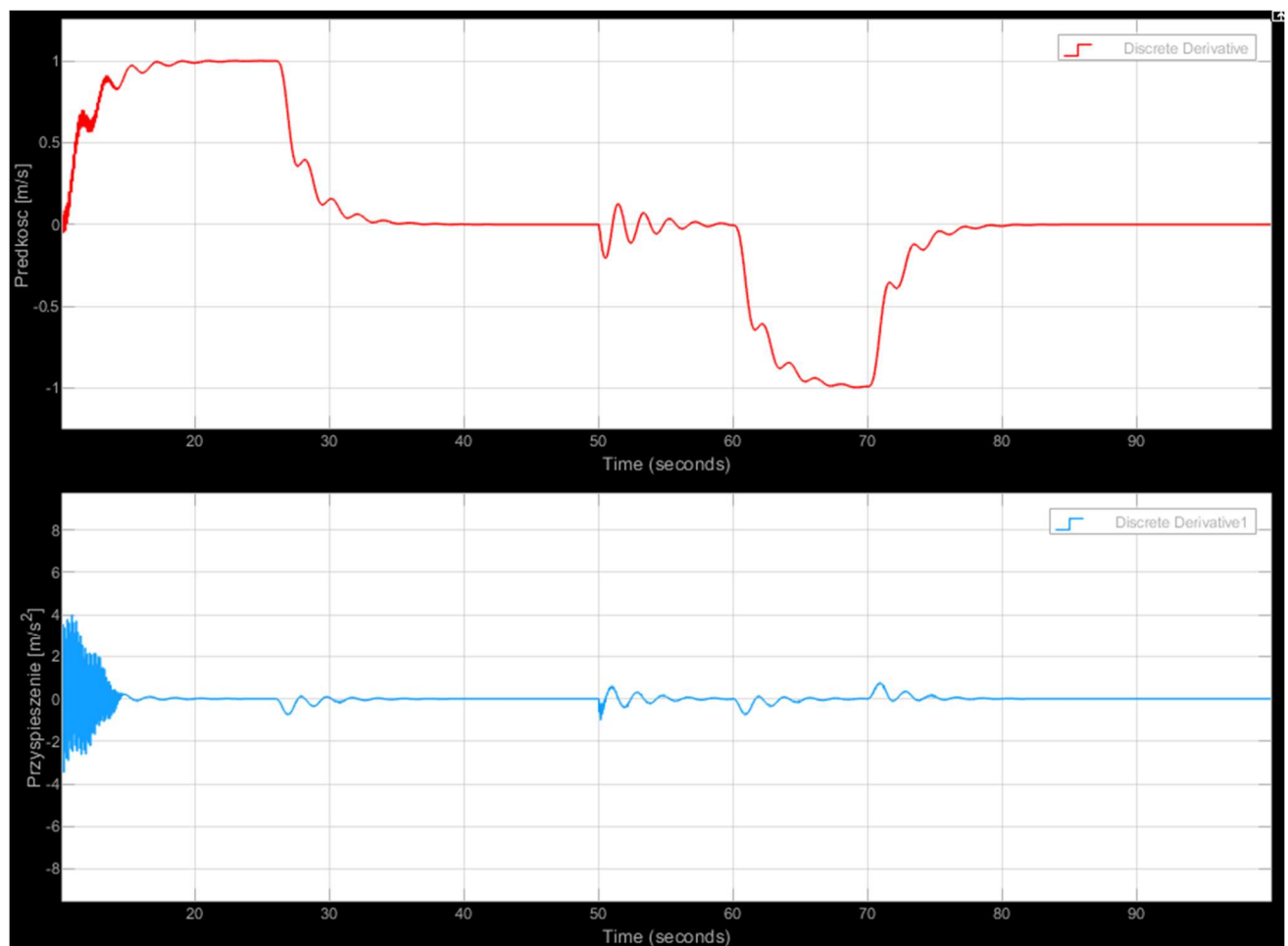
W 50s do masy windy zostaje dodana składowa odpowiedzialna za obciążenie windy, wynosząca  $m_o \cdot g$



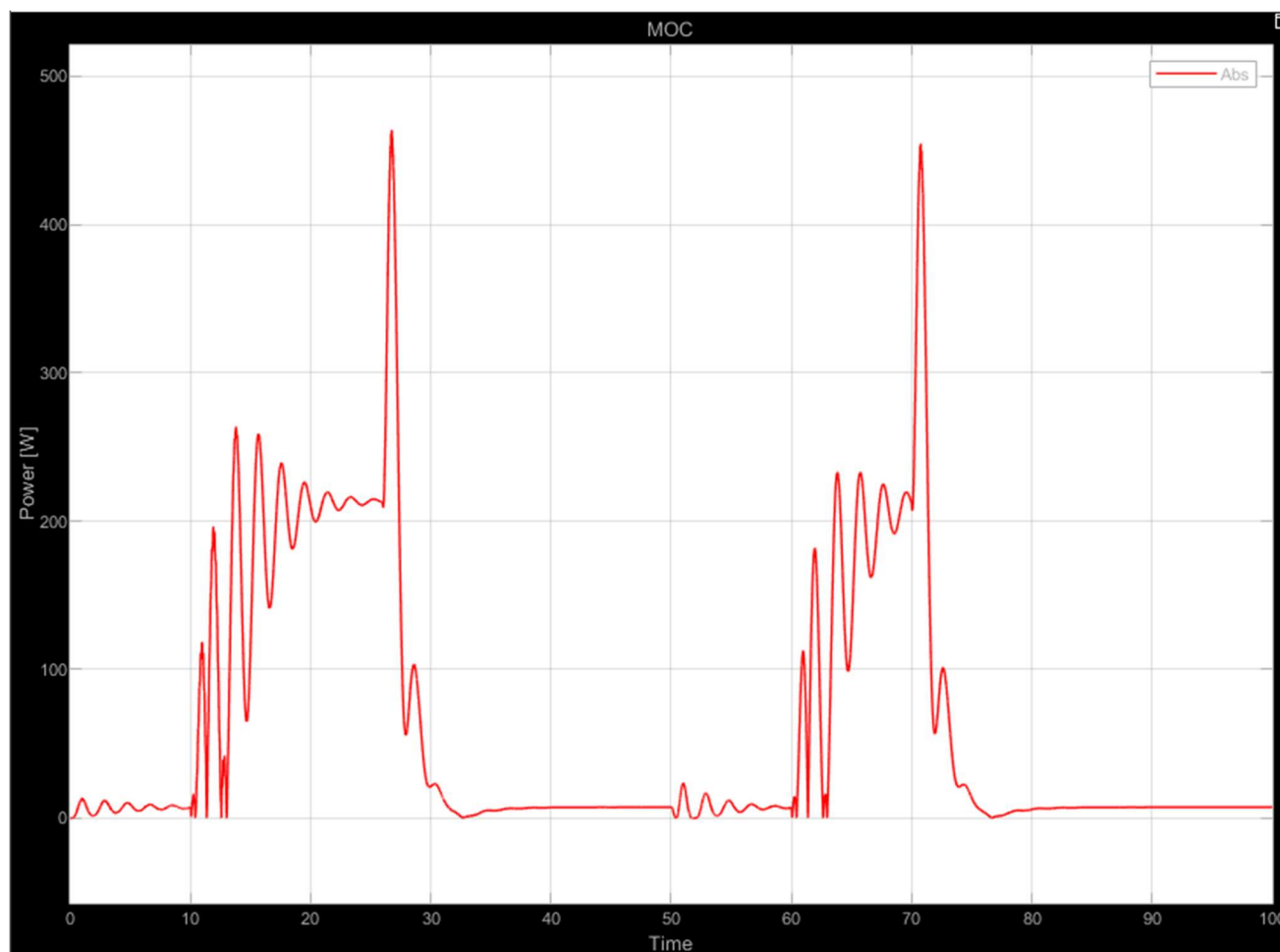
Schemat układu pomiarowego



Sygnał wymuszenia oraz odpowiedzi układu.



Wykres prędkości oraz przyspieszenia



Wykres mocy silnika

Z powodu braku możliwości dostrojenia regulatora PID za pomocą funkcji „Tune”, nastawy regulatora dobrano metodą prób i błędów tak, aby otrzymać pożądane efekty. Po podłączeniu regulatora PID do układu z obiektem można zaobserwować poszczególne charakterystyki układu.

Wykres mocy posiada dwa nieznaczne nagłe wzrosty mocy znajdujące się powyżej mocy maksymalnej wynoszącej 460W, trwają poniżej 0,5s. Moc średnia = 60,83W

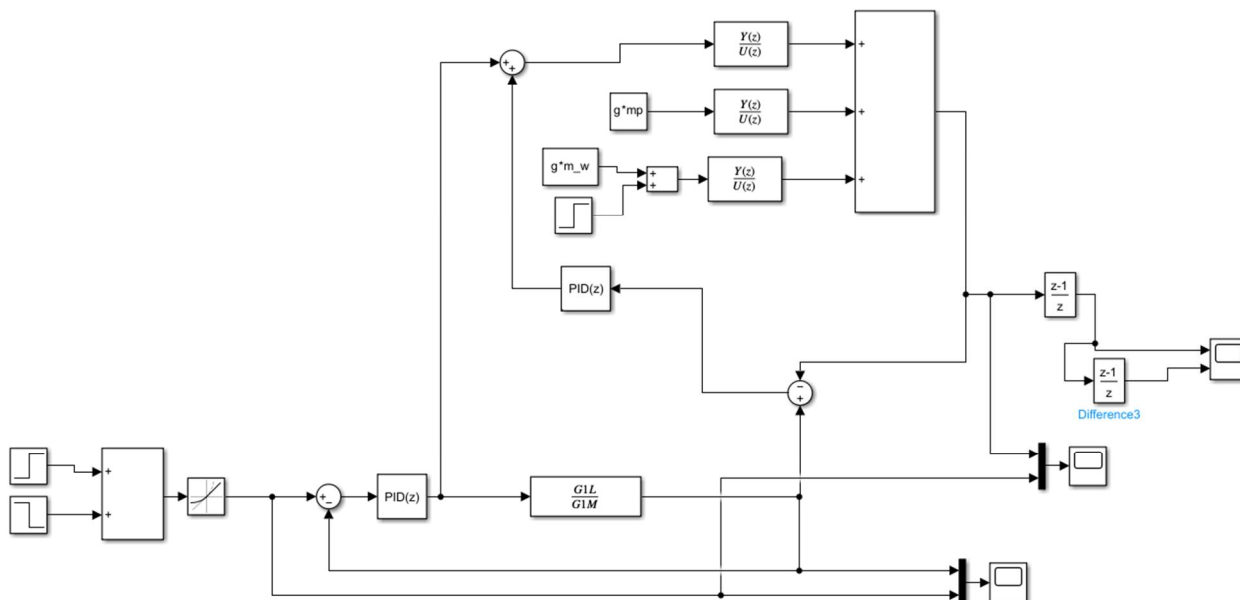
Maksymalna prędkość oraz przyspieszenie układu wynosi kolejno 1m/s oraz 0,8m/s<sup>2</sup>.

Czas regulacji układu sięga 24 sekund.

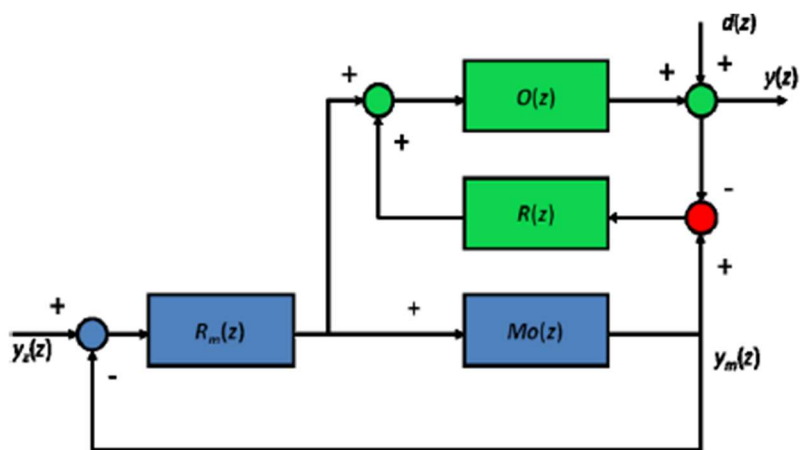
Uchyb ustalony równy 0,07m.

## 9. Regulator odporny

Następnie przetestowano regulator odporny.



Schemat układu pomiarowego



Gdzie:

- $M_o(z)$  - obiekt inercyjny II rzędu, posiadający w mianowniku parametry silnika elektrycznego windy, poddany dyskretyzacji czasem  $T_p=0.03s$ , ma postać:

$$G1D = \frac{0.01343 z + 0.01299}{z^2 - 1.902 z + 0.9048}$$

- $R_m(z)$  – regulator modelu obiektu PI o nastawach:

Proportional (P): 6

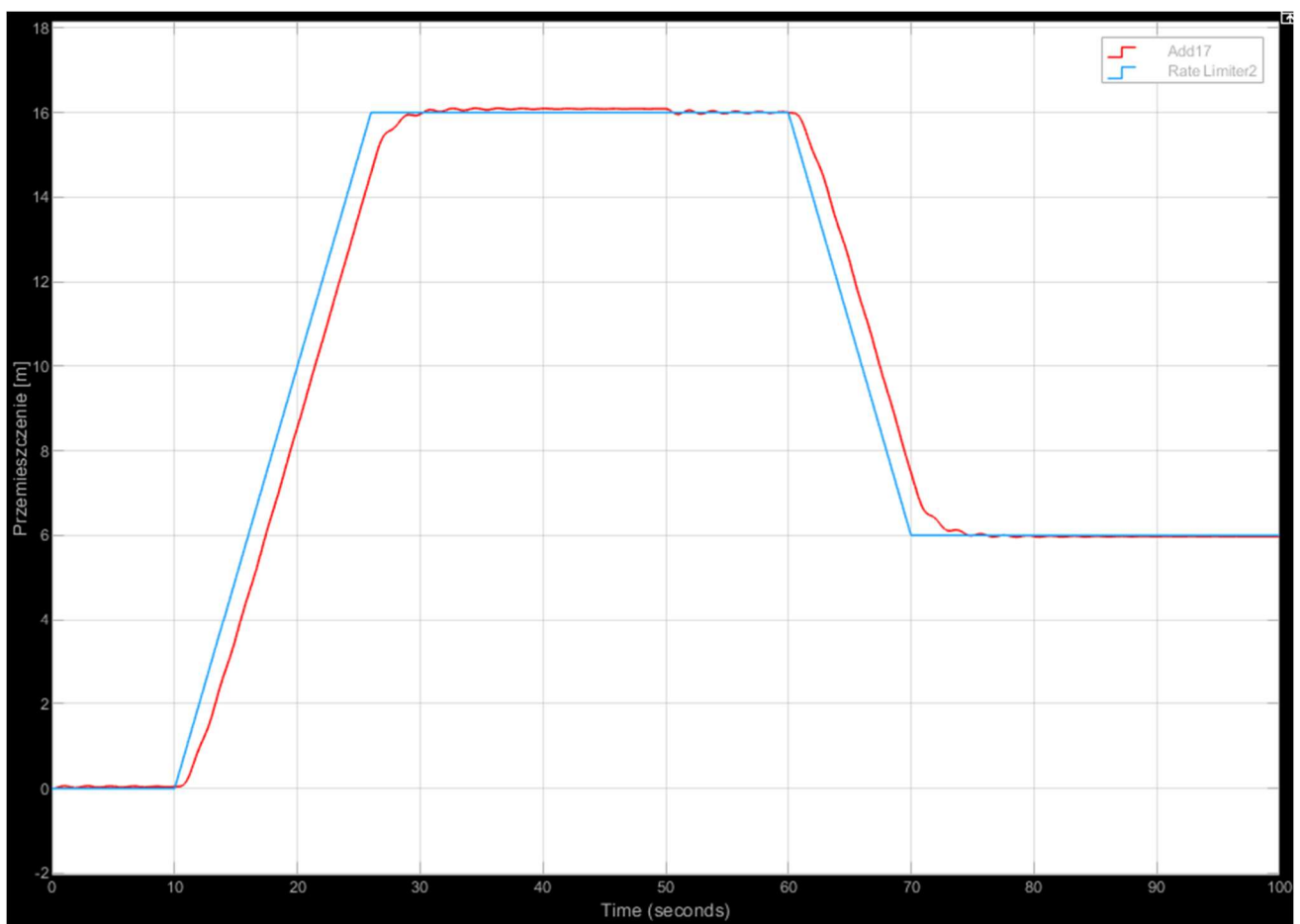
Integral (I): 0.1

- $R(z)$  – Regulator PI głównego obiektu windy o nastawach:

Proportional (P): 35

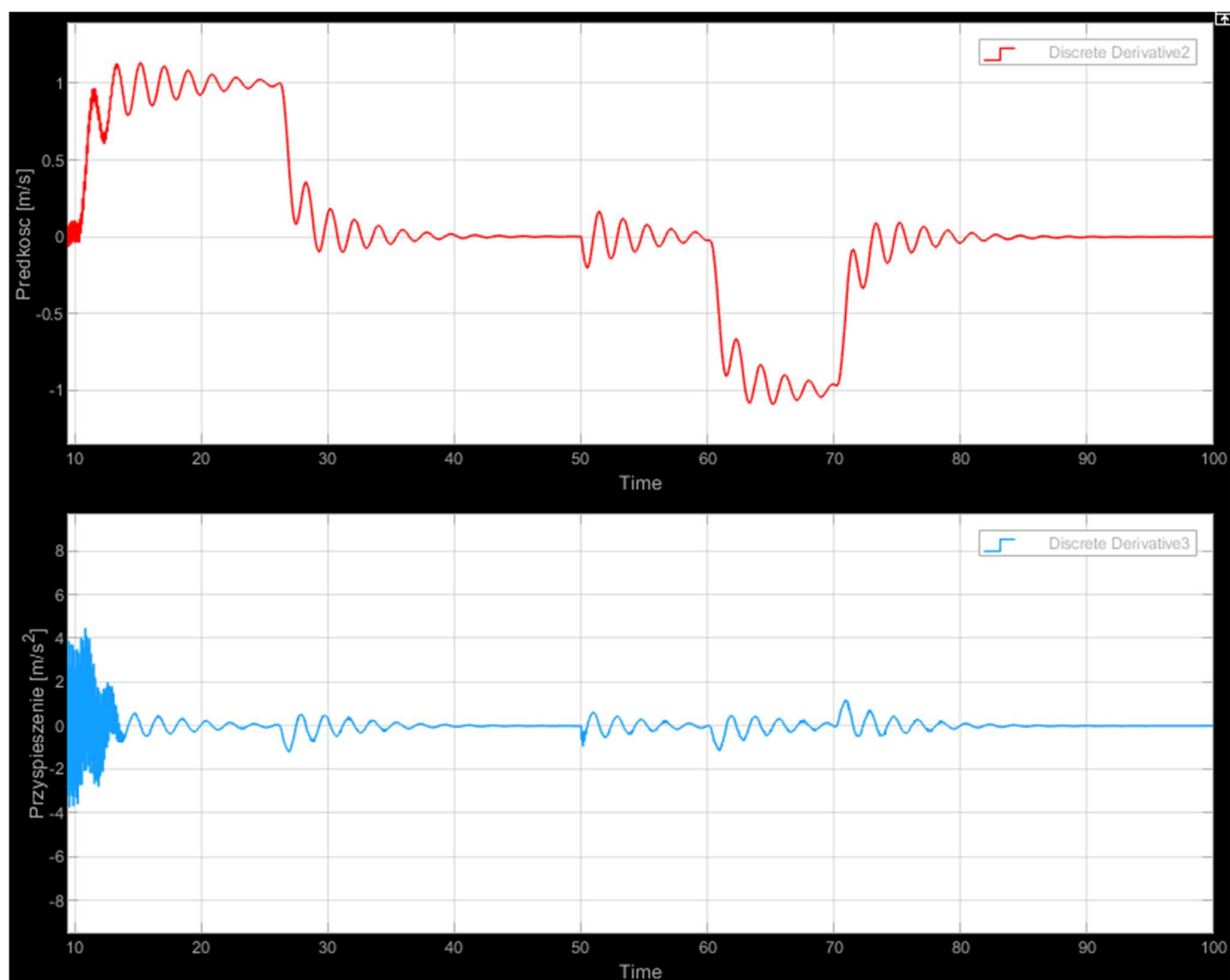
Integral (I): 0.0001

- $O(z)$  – dyskretny model windy.

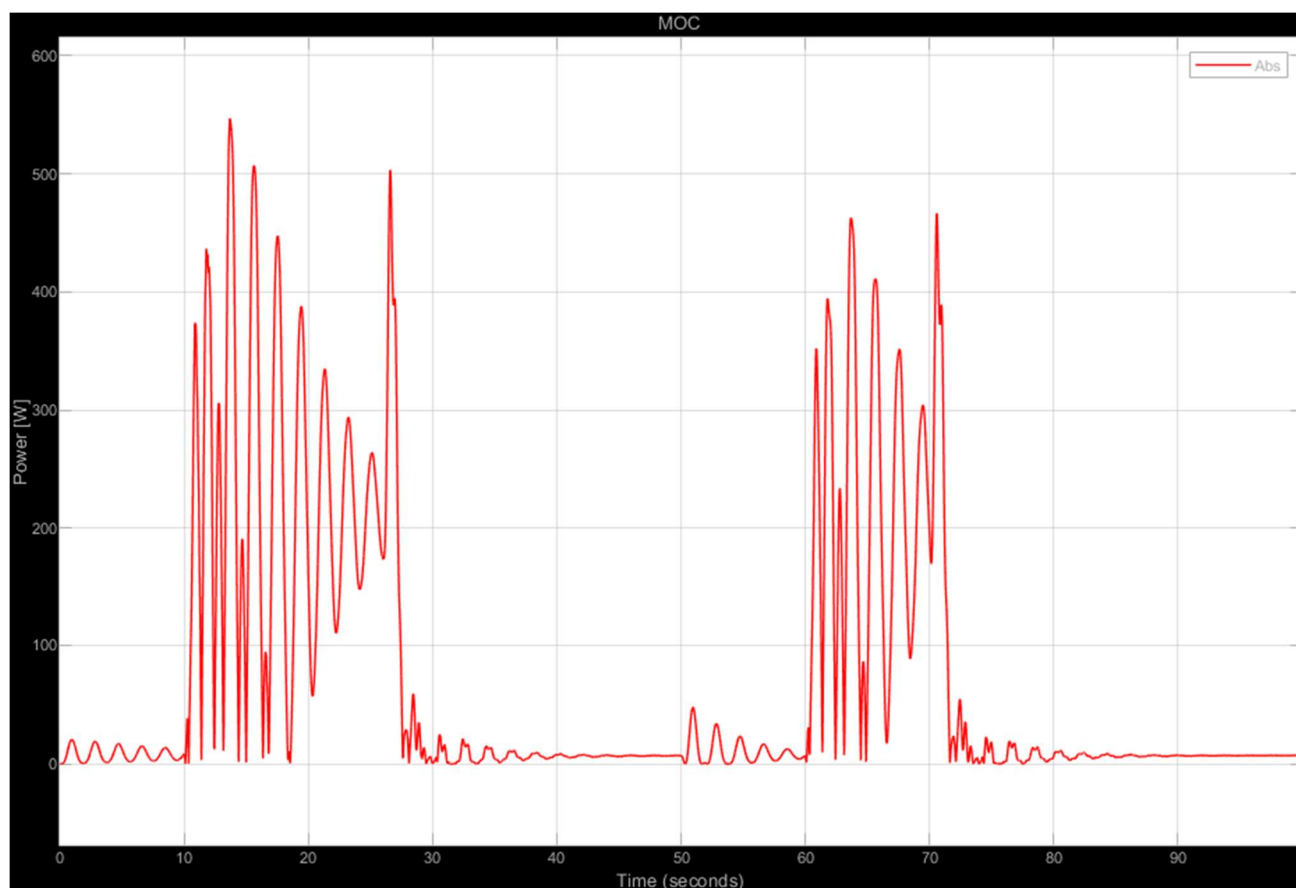


Sygnał wymuszenia oraz odpowiedzi układu.





Wykres prędkości oraz przyspieszenia



Wykres mocy silnika

Parametry regulatorów typu PI dobrano ręcznie, z powodu braku możliwości użycia funkcji „Tune”, tak, aby otrzymać pożądane efekty.

Moc dostarczana do układu przekracza chwilami nawet 540W. Moc średnia na poziomie 71,73W

Maksymalna prędkość oraz przyspieszenie układu wynosi kolejno 1,2m/s oraz 1,6m/s<sup>2</sup>.

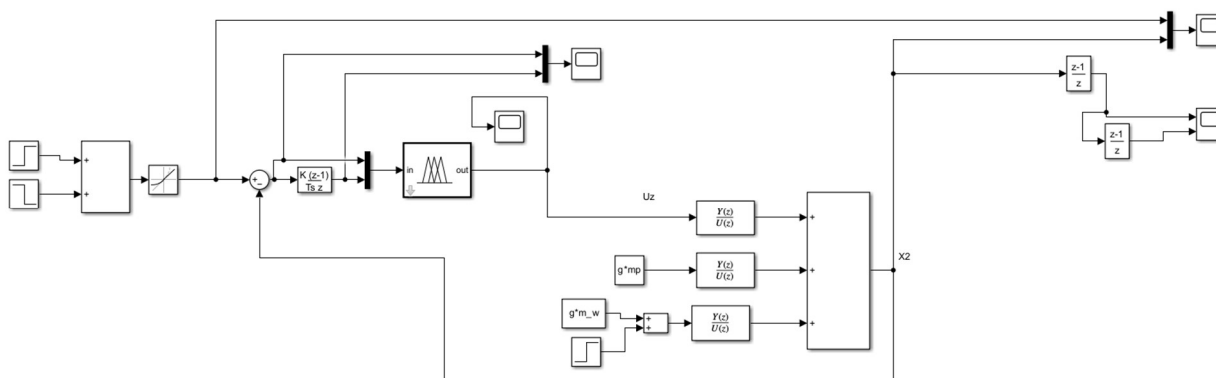
Czas regulacji układu sięga 21 sekund.

Układ posiada duże drgania oraz uchyb ustalony (0,0056%). Odpowiedź układu jest niezadowalająca.

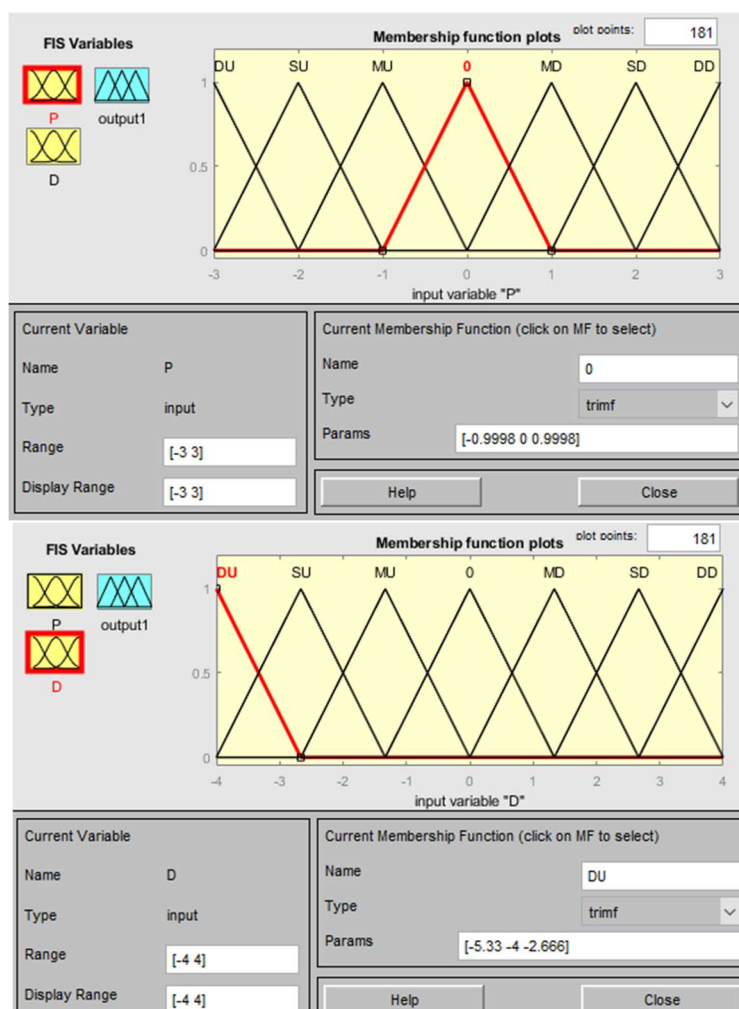
## 10. Regulator rozmyty – model Mamdan’iego

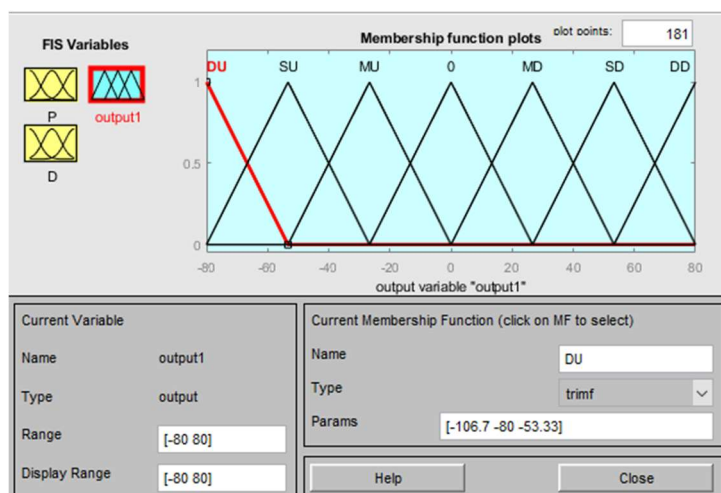
Następnie przetestowano regulator rozmyty. Pokróćce skupimy się na nim oraz go opiszemy:

Regulator rozmyty (ang. Fuzzy logic contoler) polega na otrzymaniu sygnału sterującego na podstawie operacji stosowanych w logice rozmytej. Logika ta różni się od klasycznej logiki boolowskiej tym, że otrzymane wartości działań logicznych występują w przedziale od 0 do 1, prawdziwość stwierdzenia nie jest jednoznacznie określona jako prawda lub fałsz, nie opiera się o logikę bulowską bazującą na dwóch wartościach reprezentowanych jako 0 lub 1 gdzie granica jest jednoznacznie określona i niezmienna. Modele rozmyte stosuje się wszędzie tam, gdzie trudno jest utworzyć matematyczny model lub występuje brak pełnej odpowiedzi układu.



Schemat układu pomiarowego



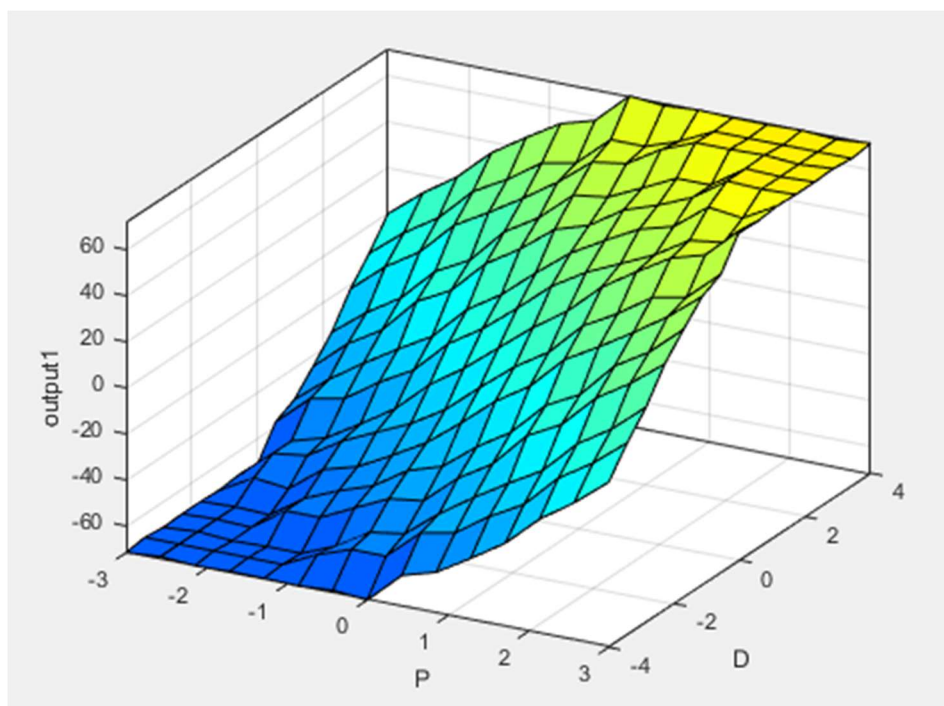


Przyjęto model Mamdan’iego o dwóch wejściach, proporcjonalnym oraz różniczkującym. Obydwa wejścia mają siedem takich samych zdefiniowanych funkcji przynależności. Różnica występuje w ich zakresie, wejście *D* ma zakres  $[-4, 4]$  natomiast wejście *P*  $[-3, 3]$ .

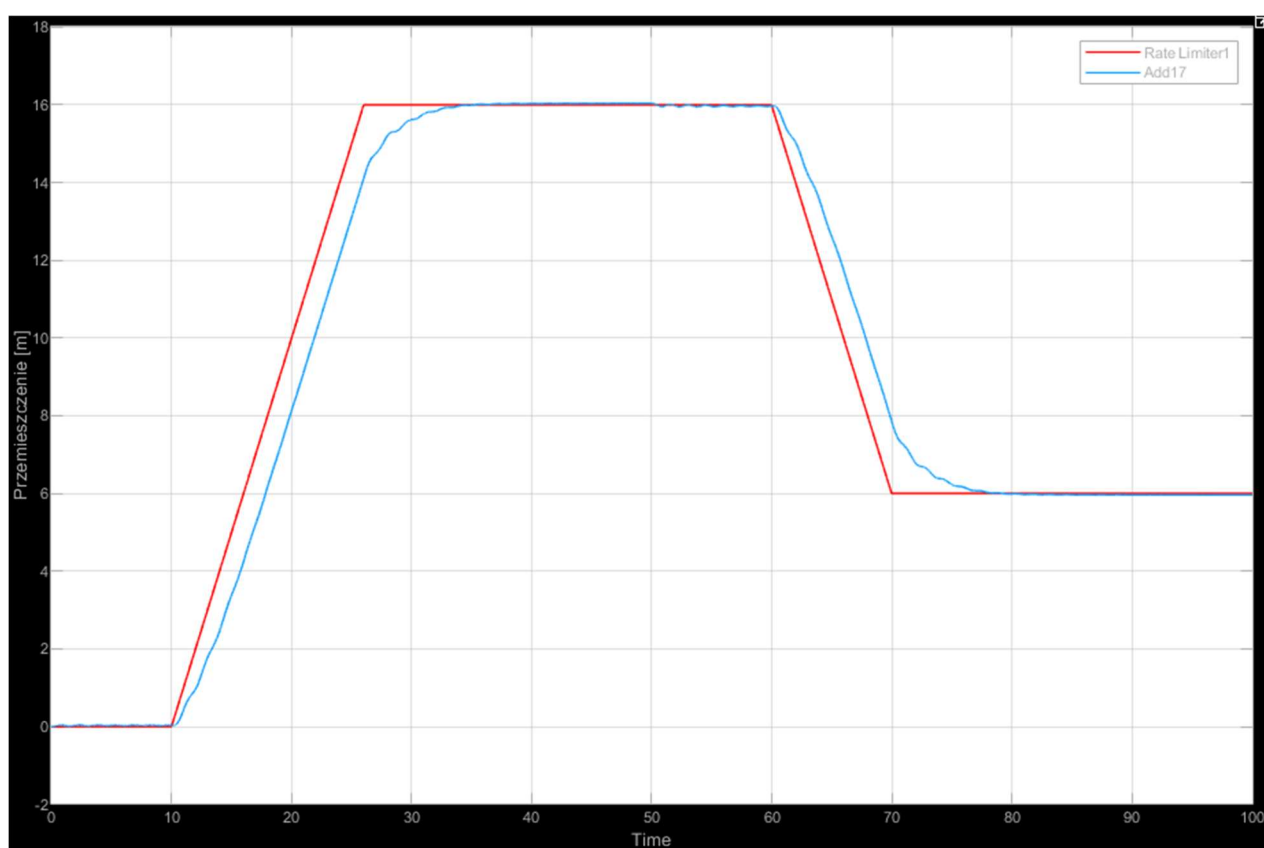
Wyjście układu również posiada siedmiu funkcji przynależności z zakresu  $[-80, 80]$ .

Tablica reguł prezentuje się następująco:

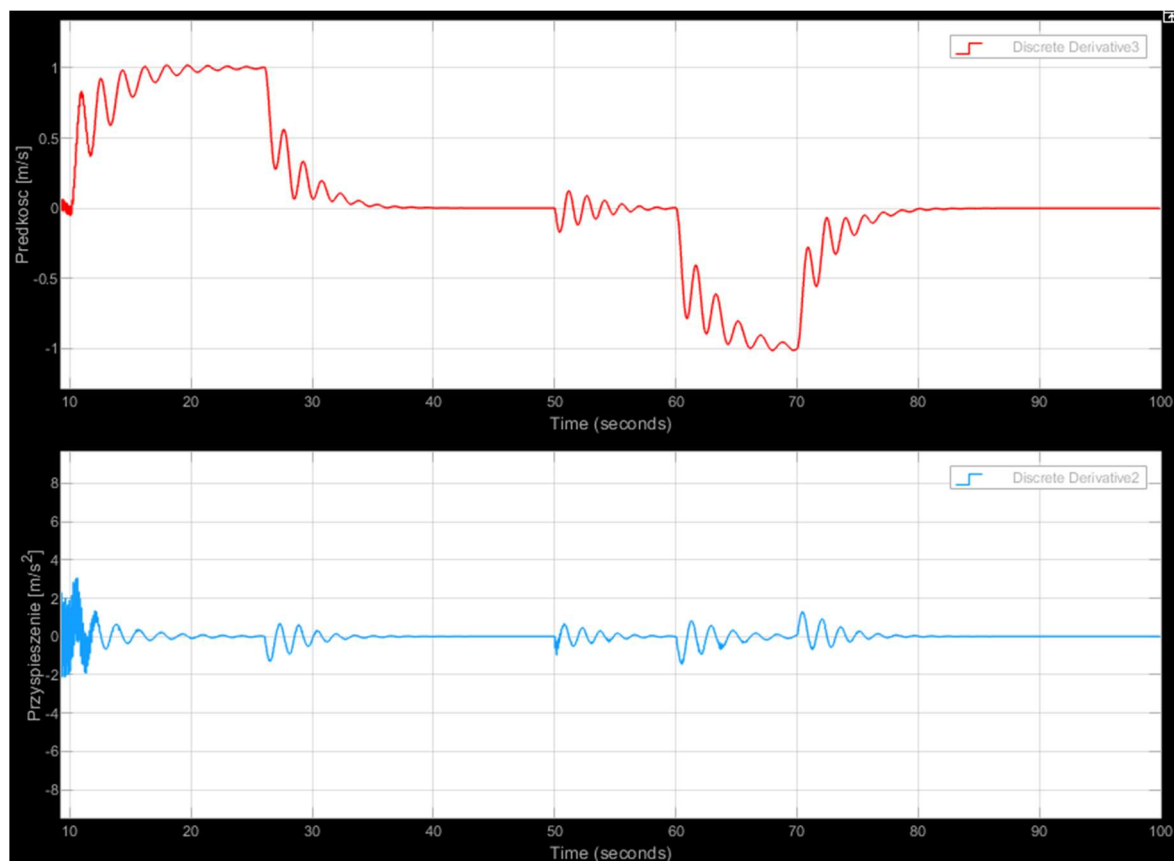
<b>D \ P</b>	<b>DU</b>	<b>SU</b>	<b>MU</b>	<b>0</b>	<b>MD</b>	<b>SD</b>	<b>DD</b>
<b>DU</b>	<i>DU</i>	<i>DU</i>	<i>DU</i>	<i>DU</i>	<i>SU</i>	<i>MU</i>	<i>0</i>
<b>SU</b>	<i>DU</i>	<i>DU</i>	<i>DU</i>	<i>SU</i>	<i>MU</i>	<i>0</i>	<i>MD</i>
<b>MU</b>	<i>DU</i>	<i>DU</i>	<i>SU</i>	<i>MU</i>	<i>0</i>	<i>MD</i>	<i>SD</i>
<b>0</b>	<i>DU</i>	<i>SU</i>	<i>MU</i>	<i>0</i>	<i>MD</i>	<i>SD</i>	<i>DD</i>
<b>MD</b>	<i>SU</i>	<i>MU</i>	<i>0</i>	<i>MD</i>	<i>SD</i>	<i>DD</i>	<i>DD</i>
<b>SD</b>	<i>MU</i>	<i>0</i>	<i>MD</i>	<i>SD</i>	<i>DD</i>	<i>DD</i>	<i>DD</i>
<b>DD</b>	<i>0</i>	<i>MD</i>	<i>SD</i>	<i>DD</i>	<i>DD</i>	<i>DD</i>	<i>DD</i>



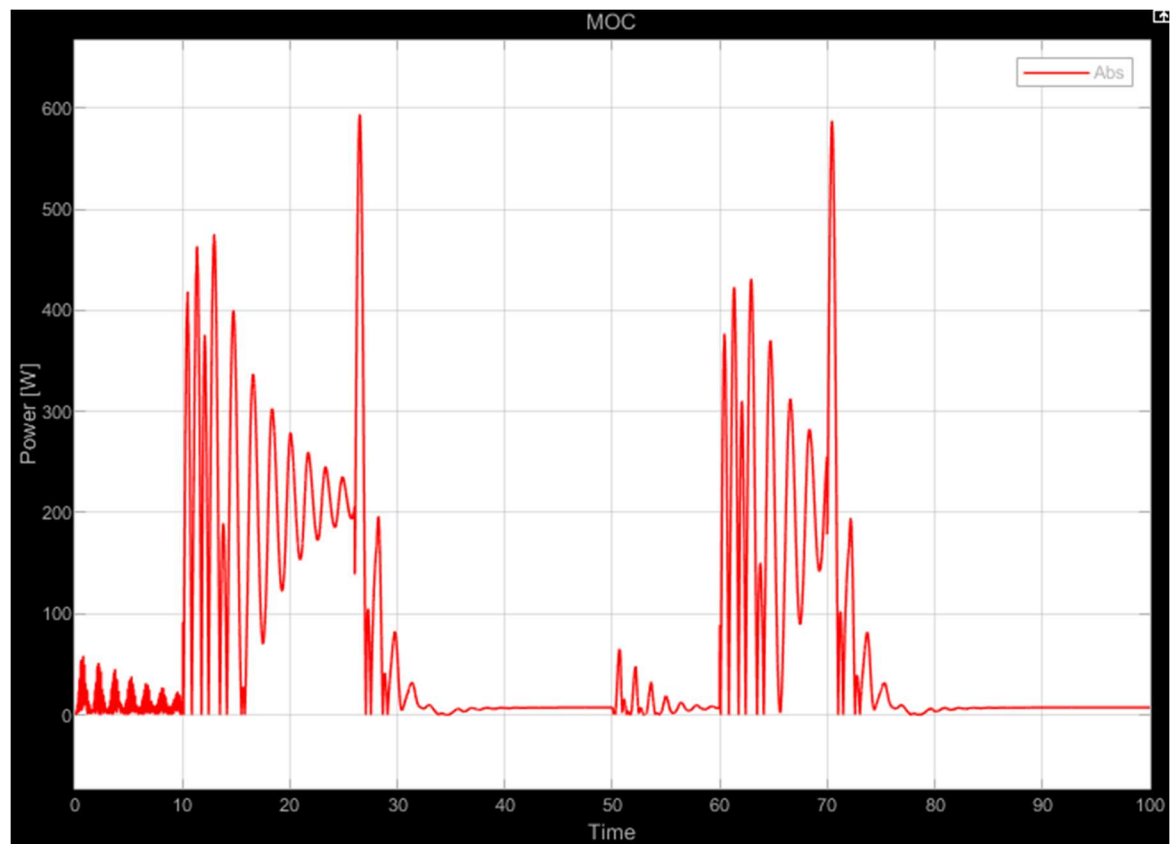
Płaszczyzna reguł



Sygnał wymuszenia oraz odpowiedzi układu.



Wykres prędkości oraz przyspieszenia



Wykres mocy silnika

Moc dostarczana do układu osiąga ułamek sekundy 590W. Moc średnia na poziomie 72,30W

Maksymalna prędkość oraz przyspieszenie układu wynosi kolejno 1m/s oraz  $1,3\text{m/s}^2$ .

Czas regulacji układu sięga 22 sekund.

Układ charakteryzuje się bardzo dobrą jakością regulacji. Posiada prawie zerowe przeregulowanie oraz bardzo małe oscylacje.

Uchyb w stanie ustalonym wynosi 0,037m.

## 11. Wnioski ostateczne

Porównując opisane, przetestowane oraz przedstawione regulatory można wywnioskować, że:

- Najlepszą „jakością” regulacji charakteryzuje się regulator rozmyty. Pobrał on najwięcej mocy z zasilania.
- Regulator odporny nie wybił się na tle pozostałych, poprzez duży uchyb ustalony (0,09m), przeregulowanie oraz oscylację.
- Regulator PID okazał się najbardziej energooszczędny.
- Najdłużej implementowanym regulatorem okazał się regulator odporny.
- Najkrótszym czasem regulacji wykazał się regulator odporny.