MATEMÁTICA I

Geometría

Si L pasa por dos puntos

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Forma General

A x + B y + C = 0

Forma Explícita

$$y=mx+b$$

m = Pendiente

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

b = Ordenada al Origen

$$b=-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot x_1+y_1$$

L y L’ son paralelas si y sólo si m=m’

L y L’ son perpendiculares si y sólo si m.m’ = -1

Distancia entre dos puntos

$$d=d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Ecuación estándar/canónica de la circunferencia

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

Elementos de una parábola

Vértice: Es el punto de intersección de la parábola con su eje.
Eje: Es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco.
Directriz: Es la recta fija **d**.
Foco: Es el punto fijo **F**.

Conjuntos

IGUALDAD DE CONJUNTOS

A y B son iguales si y sólo si A y B tienen los mismos elementos.

A = B   X ∈ A ⇔ x ∈ B

INCLUSIÓN

Todo elemento de A es elemento de B, pero no todo elemento de B es elemento de A.

A ⊆ B   ∀x, x ∈ A ⇒ x ∈ B

Propiedades:

1) **Antisimetría:** A=B si y sólo si A ⊆ B y B ⊆ A
2) **Reflexividad:** ∀ conjunto A se cumple que A ⊆ A
3) **Transitividad:** Dados los conjuntos A, B, C, Si A ⊆ B y B ⊆ C ⇒ A ⊆ C
4) ∀ conjunto A se cumple que Ø ⊆ A

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

UNIÓN

AUB = Es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B.

$$A \cup B = \{x;\ x \in A \vee x \in B\}$$

Propiedades:

1) **Asociatividad:** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
2) $A \subseteq B \iff A \cup B = B$
3) **Conmutatividad:** $A \cup B = B \cup A$

INTERSECCIÓN

A ∩ B = Es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y a B.

$$A \cap B = \{x;\ x \in A \wedge x \in B\}$$

Propiedades:

1) **Asociatividad:** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2) $A \subseteq B \iff A \cap B = A$
3) **Conmutatividad:** $A \cap B = B \cap A$

DIFERENCIA

A-B = es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.

$$A \cap B = \{x;\ x \in A \wedge x \in B\}$$

Propiedades:

1) $A - A = \emptyset$
2) $A - \emptyset = A$
3) $\emptyset - A = \emptyset$
4) Si $A - B = B - A \Rightarrow A = B$

COMPLEMENTO

El complemento de un conjunto A es el conjunto de todos los elementos (del universo U) que no están en A.

$$A^c = \{x;\ x \notin A\} = U - A$$

Propiedades:

1) $(A^c)^c = A$
2) $\emptyset^c = U$
3) $U^c = \emptyset$
4) $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$

PROPIEDADES COMBINANDO OPERACIONES

1) **Distributivas:**
   - **a)** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   - **b)** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2) **Leyes de De Morgan:**
   - **a)** $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
   - **b)** $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Funciones

Una relación binaria de A en B que cumpla que a todo elemento a ∈ A le asigna un único elemento b ∈ B es una función de A en B, se indica con f: A → B.

El elemento único de B asignado a cada a ∈ A se llama la **imagen** de a por f y se indica f(a).

El conjunto A se llama el **dominio** de f que se indica con Dom(f), y el conjunto B el **codominio.**

IGUALDAD DE FUNCIONES

Dos funciones son iguales si tienen el mismo dominio y establecen la misma relación.

$$f = g \Leftrightarrow \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) = D \ \wedge \ f(x) = g(x) \ \ \forall x, x \in D$$

FUNCIONES NUMÉRICAS

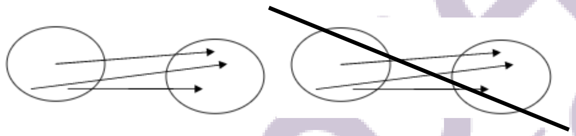
Función tal que su dominio y su codominio son conjuntos de números

Dominio: Es el conjunto de números que tienen imagen. Puede darse en forma explícita o implícita

FUNCIÓN INYECTIVA

A dos elementos distintos del dominio le corresponden imágenes distintas en el codominio.

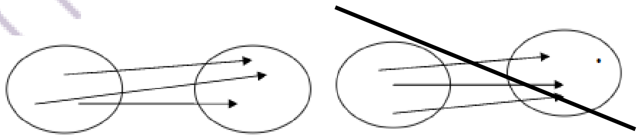
$f(x)$ es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in A, \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$



FUNCIÓN SURYECTIVA

Todo elemento del codominio es la imagen de uno o más elementos del dominio.

$$\text{Im}(f) = \text{Codominio}(f)$$



Sucesiones

Relación entre los números naturales y un conjunto A cualquiera, con la siguiente condición: A cada natural le corresponde un único elemento del conjunto A.

Forma descriptiva	Forma explícita	Forma recursiva
Consiste en describir con palabras la ley de formación de la sucesión. **Ejemplos:** 1) 2, 4, 6, 8 sucesión de los números pares 2) 3, 9 ,27, 81 sucesión de las potencias de 3	Consiste en dar una fórmula que defina el término general de la sucesión en función del índice, dando información acerca del valor inicial del índice. Permite para un valor de n cualquiera saber cuál es el término correspondiente. **Ejemplos:** 1) 2, 4, 6, 8 a_n = 2.n, $n \geq 1$ 2) 3, 9 ,27, 81 $b_n = 3^n$, $n \geq 1$	Consiste en dar los primeros k términos de la sucesión y luego establecer cómo se construye el término n-ésimo de la sucesión a partir de términos anteriores. **Ejemplos:** 1) 2, 4, 6, 8 $a_1 = 2$ $a_n = a_{n-1} + 2, \ n \geq 2$ 2) 3, 9 ,27, 81 $b_1 = 3$ $b_n = b_{n-1}3, \ n \geq 2$

Sucesiones Aritméticas	Sucesiones Geométricas
Es una sucesión en la cual cada término se puede obtener del anterior, sumando un mismo número, llamado diferencia. Si llamamos a1, a2, a3... an, a los n primeros términos de una progresión aritmética, siendo d la diferencia, el término general de la progresión se puede obtener de acuerdo con el siguiente análisis: a1 a2= a1+ d a3= a1+ d+ d= a1+2 d a4= a1+ d+ d+ d= a1+3 d a5= a1+ d +d +d + d = a1+4 d **an= a1+(n-1)d** es el n-ésimo término de la progresión aritmética **an:** es el término nésimo, **a1:** es el primer término **d:** es la diferencia.	Es una sucesión en la cual cada término se puede obtener del anterior, multiplicándolo por un mismo número, llamado razón. Si llamamos a1, a2, a3 ... an, a los n primeros términos de una progresión geométrica, siendo r la razón, el término general de la progresión se puede obtener de acuerdo con el siguiente análisis: a1 a2= a1 .r a3= a1 .r.r = a1.r^2 a4= a1 .r.r.r = a1. r^3 a5= a1.r.r.r.r = a1. r^4 **an= a1. rn-1** es el n-ésimo término de la progresión geométrica **an:** es el término n-ésimo, **a1:** es el primer término **r:** es la razón.

Inducción

El principio de inducción afirma que cualquier subconjunto de los naturales que posea esas mismas propiedades es necesariamente igual a N.

- P(1) es verdadera
- Si para un número k cualquiera P(k) es verdadera → P(k+1) es verdadera, entonces P(n) es verdadera para todo natural n.

1º P (1) es verdadera = reemplazamos las variables por 1 y verificamos la igualdad.
2º P(k) = reemplazamos variable después del igual por k. Va a ser nuestra hipótesis.
3º P(k+1) = lo que antes reemplazamos por k, lo reemplazamos por k+1. Va a ser nuestra tesis.
4º Usando la hipótesis, demostramos que nuestra tesis es verdadera.