# Técnicas de validación estadística
# Bondad de ajuste

**Georgina Flesia**

FaMAF

17 de mayo, 2016

# Pruebas de bondad de ajuste

- Dado un conjunto de observaciones, ¿de qué distribución provienen o cuál es la distribución que mejor ajusta a los datos?
- Si se realiza una simulación de datos por computadora, ¿podemos asegurar que responden a la distribución deseada?
- Para responder a estas preguntas, existen técnicas de validación estadística.
- Técnica: Prueba de hipótesis:

  $H_0$) Hipótesis nula. Los datos provienen de la distribución $F$.

  $H_1$) Hipótesis alternativa. Los datos no provienen de la distribución $F$.

# Tests de hipótesis

- Test - Prueba - Contraste.
  Se utilizan para
  - contrastar el valor de un parámetro.
    - Ejemplo: la media de una población es 30. Intervalo de confianza.
  - comparar dos parámetros.
    - Ejemplo: la efectividad de el medicamento A es mejor que la de B.
  - contrastar los datos con una distribución teórica.
    - Ejemplo: los datos provienen de una distribución normal.
  - contrastar hipótesis de homogeneidad.
    - Ejemplo: el porcentaje de desempleados, ¿es igual en Bs. As., Córdoba y Rosario? Tablas de contingencia
  - contrastar hipótesis de independencia.
    - Ejemplo: ser varón o mujer, ¿influye en la preferencia de un producto?

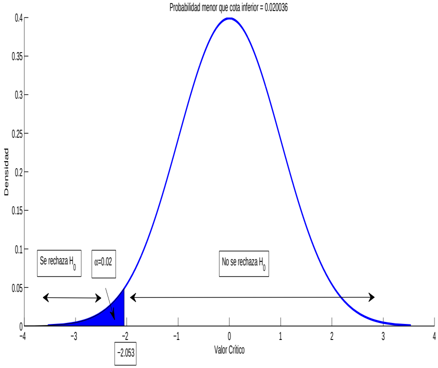
# Procedimiento en una prueba de hipótesis

- Plantear

  $H_0$) Hipótesis nula, con la que se contrastan los datos de la muestra.

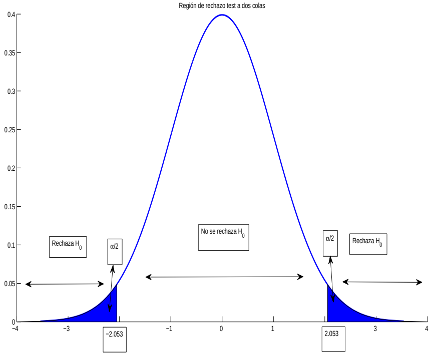
  $H_1$) Hipótesis alternativa.
- Fijar un estadístico de prueba $T$.
- Fijar el o los valores críticos para el estadístico de prueba, que delimitan la zona de rechazo. (valor $\alpha$).
- Tomar la muestra y calcular el estadístico de prueba.
- ¿Los datos evidencian que la hipótesis nula es falsa?
  - Sí. Se rechaza la hipótesis nula.
  - No. No se rechaza la hipótesis nula.

# Test cola izquierda




- valor $p = P(T < t_{obs}) < \alpha$: se rechaza la hipótesis nula.
- Equivalentemente, si el valor observado es menor que el valor crítico, se rechaza $H_0$.
- Si no, no hay evidencias para rechazar $H_0$.

# Test dos colas




- valor $p = P(|T| > t_{obs}) < \alpha$: se rechaza la hipótesis nula.
- Equivalentemente, si el valor observado es menor que el valor crítico (de ser negativo) o mayor que el valor crítico (de ser positivo), se rechaza $H_0$.
- Si no, no hay evidencias para rechazar $H_0$.

# Errores

Dado que una prueba de hipótesis se trabaja con muestras, puede haber errores:

| Errores | Rechazar $H_0$ | no Rechazar $H_0$ |
|---|---|---|
| $H_0$ verdadera | $E_I$ | DC |
| $H_0$ falsa | DC | $E_{II}$ |

$E_I$ : error de tipo *I*. $P(E_I) = \alpha$.

$E_{II}$ : error de tipo *II*. $P(E_{II}) = \beta$.

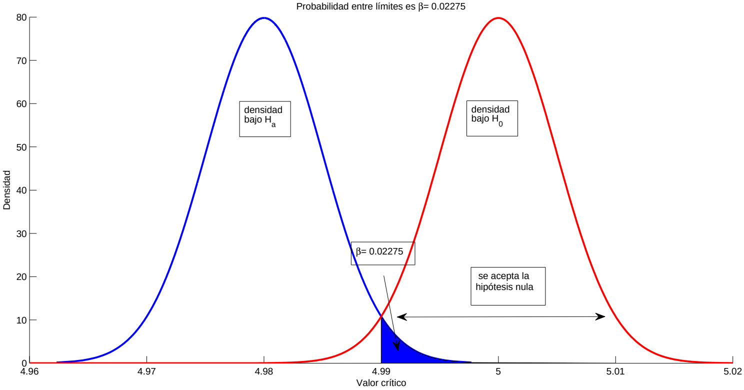
DC : Decisión correcta.

# Probabilidades

| Probabilidades | Rechazar $H_0$ | no Rechazar $H_0$ |
|---|---|---|
| $H_0$ verdadera | $\alpha$ | $1-\alpha$ |
| $H_0$ falsa | $1-\beta$ | $\beta$ |

- $\alpha$: es la probabilidad de equivocarse rechazando una hipótesis correcta. Es controlable.
- $\beta$: es la probabilidad de equivocarse no rechazando una hipótesis falsa. No se calcula fácilmente, y puede reducirse tomando muestras grandes.
- $1-\beta$: potencia del test.
- Control sobre $\beta$:
  - aumentar $\alpha$
  - aumentar el tamaño de la muestra.
- Un test deseable debe tener $1-\beta > \alpha$: la probabilidad de rechazar debería ser mayor cuando $H_0$ es falsa.

# Error de tipo II



# Pruebas de bondad de ajuste

- Aplicación: contrastar los datos con una distribución.
- Test chi-cuadrado (ji-cuadrado):
  - Es aplicable a distribuciones continuas o discretas.
  - Compara las frecuencias observadas con las frecuencias esperadas.
- Test de Kolmogorov-Smirnov:
  - Es aplicable a distribuciones continuas.
  - Compara las distribuciones acumuladas observadas y esperadas.
- Aconsejable: Utilizar chi-cuadrado para discretas, y Kolmogorov Smirnov para continuas.

# Test chi-cuadrado

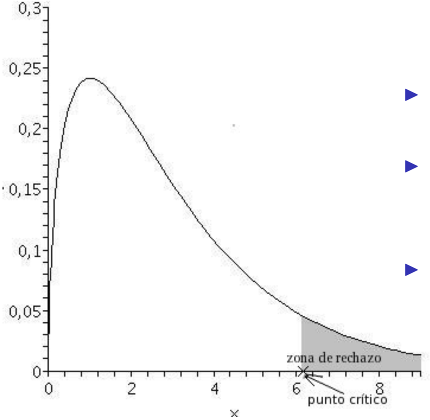
- No se utilizan los valores de las observaciones sino las frecuencias.
- Se compara la distribución de las frecuencias de los datos observados con las frecuencias según la distribución teórica supuesta.

$f_o$ : frecuencia observada.

$f_e$ : frecuencia esperada.

$$T = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}.$$

# Test chi-cuadrado




- valor $p = P(T > t_{obs}) < \alpha$: se rechaza la hipótesis nula.
- Equivalentemente, si el valor observado es mayor que el valor crítico, se rechaza $H_0$.
- Si no, no hay evidencias para rechazar $H_0$.

# Implementación

- Se observan $n$ valores de v.a. independientes igualmente distribuidas, $Y_1$, $Y_2$, $\ldots$, $Y_n$: Por ejemplo, se generan $n$ valores mediante simulación, o se tienen $n$ observaciones.
- Llamamos $Y$ a cualquiera de las $Y_i$.
- Se agrupan los datos en $k$ intervalos adyacentes que cubran el rango de la variable $Y$:

  $$[y_0, y_1), [y_1, y_2), \ldots, [y_{k-1}, y_k).$$

  Se puede elegir $y_0 = -\infty$ o $y_k = \infty$.
- $N_j$: cantidad de valores que cayeron en $[y_{j-1}, y_j)$. Es la frecuencia observada.

# Implementación

- $p_j$: Si $f_{H_0}$ o $p_{H_0}$ son las densidades (discretas o continuas) a ajustar:

$$p_j = \int_{y_{j-1}}^{y_j} f_{H_0}(x)\, dx \qquad \text{o} \qquad p_j = \sum_{y_{j-1} \leq x_i < y_j} p_{H_0}(x_i).$$

- $np_j$: es la frecuencia esperada. $\qquad H_0)$: $N_j = n\, p_j$.
- Estadístico:

$$T = \sum_{j=1}^{k} \frac{(N_j - np_j)^2}{np_j}.$$

Si $t$ es el valor observado del estadístico, se calcula

$$\text{valor } p = P_{H_0}(T \geq t)$$

que permite decidir si la hipótesis nula se rechaza o no.

# Valor *p*

Si el nivel de significación del test es $\alpha$,

- Valor $p < \alpha \Rightarrow$ se rechaza la hipótesis nula.
- Valor $p > \alpha \Rightarrow$ no se rechaza la hipótesis nula.
- Valor *p* próximo a $\alpha \Rightarrow$ se optimiza el cálculo del valor *p*: Simulación.

El valor *p* está relacionado con los valores críticos y el nivel de significación del test de la siguiente manera:
Para valores de *n* grandes, el estadístico

$$T = \sum_{j=1}^{k} \frac{(N_j - np_j)^2}{np_j}$$

tiene aproximadamente una distribución $\chi^2$.

# El valor $p$

- Si se conocen todos los parámetros de la distribución, el número de grados de libertad es $k-1$.
- En algunos casos hace falta estimar parámetros ($\lambda$ en una Poisson, $p$ en una binomial, etc.).
- Si se estiman $m$ parámetros, el número de grados de libertad es

$$(k-1)-m.$$

- Para estimar el valor $p$, puede utilizarse

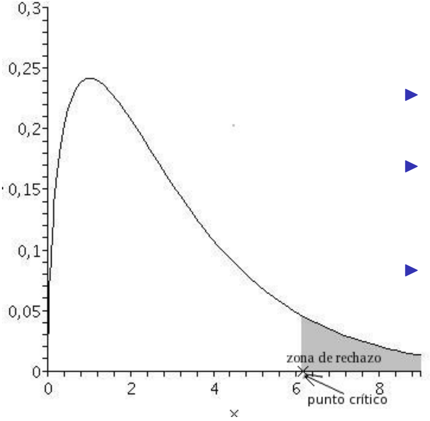
$$\text{valor } p = P_{H_0}(T \geq t) \approx P\left(\chi^2_{k-1-m} \geq t\right)$$

- Se toma como punto crítico $\chi^2_{k-m-1,1-\alpha}$:

$$P\left(\chi^2_{k-m-1} \geq \chi^2_{k-m-1,1-\alpha}\right) = \alpha.$$

# Test chi-cuadrado

- Si el valor observado cae en la "zona de rechazo", se rechaza la hipótesis nula.




- valor $p < \alpha$: se rechaza la hipótesis nula.
- Equivalentemente, si el valor observado es mayor que el valor crítico, se rechaza $H_0$.
- Si no, no hay evidencias para rechazar $H_0$.

# Ejemplo: tiempos entre arribos

- Se tiene el registro de $n = 219$ tiempos entre arribos, y se utiliza la prueba chi-cuadrado para ajustar a una distribución exponencial

$$F_{H_0}(x) = 1 - e^{-x/0.399}, \qquad x \geq 0.$$

- Se han construido $k = 10$ intervalos, con $p_j = 0.1$.
- $np_j = 21.9$. ($\geq 5$).

$H_0$): Los datos provienen de una distribución exponencial con media 0.399.

$H_1$): Los datos no provienen de una distribución exponencial con media 0.399.

# Ejemplo: tiempos entre arribos

| $j$ | Intervalo | $N_j$ | $np_j$ | $\frac{(N_j - np_j)^2}{np_j}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $[0, 0.042)$ | 19 | 21.9 | 0.384 |
| 2 | $[0.42, 0.089)$ | 28 | 21.9 | 1.699 |
| 3 | $[0.089, 0.142)$ | 26 | 21.9 | 0.768 |
| 4 | $[0.142, 0.204)$ | 12 | 21.9 | 4.475 |
| 5 | $[0.204, 0.277)$ | 25 | 21.9 | 0.439 |
| 6 | $[0.277, 0.366)$ | 14 | 21.9 | 2.850 |
| 7 | $[0.366, 0.480)$ | 22 | 21.9 | 0.000 |
| 8 | $[0.480, 0.642)$ | 29 | 21.9 | 2.302 |
| 9 | $[0.642, 0.919)$ | 20 | 21.9 | 0.165 |
| 10 | $[0.919, \infty)$ | 24 | 21.9 | 0.201 |
| | | | | $T = 13.283$ |

# Ejemplo: tiempos entre arribos

- $H_0$: la distribución es exponencial con media 0.399.
- Dado que los parámetros son todos conocidos, se utiliza una $\chi^2$ con $9 = 10 - 1$ grados de libertad.
- $\chi^2_{9,\,0.90} = 14.684$ es mayor que 13.283, no se rechaza la hipótesis al nivel $\alpha = 0.10$.
- Equivalentemente, valor $p \approx P(\chi^2_9 > 13.283) \sim 0.2$

  valor $p > 0.10$ no se rechaza la hipótesis

- Al nivel $\alpha = 0.10$, el test no da razones para concluir que la distribución no se ajuste a una exponencial con $\lambda = 0.399$.
- $\chi^2_{9,\,0.75} = 11.389$ es menor que 13.283, se rechaza la hipótesis al nivel $\alpha = 0.25$.

# Ejemplo: cantidades de demanda

Se tienen registros de cantidades de demanda de un producto, y se quiere testear el ajuste de estos datos a una distribución geométrica con $p = 0.346$.

$$F_{H_0}(x) = P(X \leq x) = 1 - (0.654)^x, \qquad x = 1, 2, \ldots.$$

- Se han construido $k = 3$ intervalos.
- Como la distribución es discreta, los intervalos son esencialmente subconjuntos de valores de la variable.
- En este caso se han elegido:

$$I_1 = \{1\},\ I_1 = \{2, 3\},\ I_1 = \{4, 5, \ldots\}.$$

$H_0$): Los datos provienen de una distribución geométrica con $p = 0.346$.

# Ejemplo: cantidades de demanda

| $j$ | Intervalo | $N_j$ | $np_j$ | $\frac{(N_j - np_j)^2}{np_j}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\{1\}$ | 59 | 53.960 | 0.471 |
| 2 | $\{2, 3\}$ | 50 | 58.382 | 1.203 |
| 3 | $\{4, 5, \dots\}$ | 47 | 43.658 | 0.256 |
| | | | | $T = 1.930$ |

- Los parámetros de la distribución son conocidos.
- Se utiliza una $\chi^2$ con $2 = 3 - 1$ grados de libertad.
- $\chi^2_{2,0.90} = 4.605$. No se rechaza la hipótesis nula a un nivel de $\alpha = 0.10$.
- Equivalentemente, valor $p \approx P(\chi^2_2 > 1.930) \sim 0.6$
- valor $p > 0.10$, no se rechaza la hipótesis nula.

## Ejemplo

Una v.a. puede tomar los valores 1,2,3,4,5. Testear la hipótesis que estos valores son equiprobables.

$$H_0)\ \ p_i = 0.2, \text{ para cada } i = 1, \dots, 5.$$

- Se toma una muestra de tamaño $n = 50$.
- Se obtienen los siguientes valores:

$$N_1 = 12, \quad N_2 = 5, \quad N_3 = 19, \quad N_4 = 7, \quad N_5 = 7.$$

- $np_i = 50 \cdot 0.2 = 10$ para cada $i = 1, \dots, 5$.

# Ejemplo

- Estadístico:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{(12-10)^2 + (5-10)^2 + (19-10)^2 + (7-10)^2 + (7-10)^2}{10} \\
&= 12.8
\end{aligned}
$$

- valor $p \approx P(\chi_4^2 > 12.8) = 0.0122.$
- Para este valor de $p$, se rechaza la hipótesis que todos los valores son igualmente probables.

# Simulación del valor $p$

- Si el valor $p$ es próximo a $\alpha$ significa que el valor observado $t$ es próximo al valor crítico.
- ¿Se rechaza o no se rechaza?
- Es conveniente tener una estimación más exacta para $p$.
- Método: simulación.

Implementación en el caso discreto

- $H_0$: $P(Y = y_j) = p_j$, para todo $j = 1, \ldots, k$.
- Generar $n$ v.a. independientes con probabilidad de masa $p_i$, $1 \leq i \leq k$.
- Evaluar el estadístico $T$.
- Repetir el procedimiento $r$ veces y calcular la proporción de valores mayores que $t$.

# Implementación

- Generar $Y_1^{(1)}, Y_2^{(1)}, \ldots, Y_n^{(1)}$ independientes, que tomen los valores $1, 2, \ldots, k$ con probabilidad de masa

$$P\left(Y_i^{(1)} = j\right) = p_j.$$

- $N_j^{(1)} = \#\{i \mid Y_i^{(1)} = j\}$.
- Evaluar el estadístico $T$ para este conjunto de valores:

$$T^{(1)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i^{(1)} - np_i)^2}{np_i}$$

- Repetir el procedimiento $r$ veces, para obtener $T^{(1)},\ T^{(2)}, \ldots, T^{(r)}$.

$$\text{valor } p = P_{H_0}(T \geq t) \approx \frac{\#\{i \mid T_i \geq t\}}{r}$$

# Estimación del valor *p* en el caso continuo

Implementación en el caso continuo

- $H_0$: Las v.a. $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ tienen distribución continua $F_{H_0}$.
- Particionar el rango de $Y = Y_j$ en $k$ intervalos distintos:

$$[y_0, y_1), [y_1, y_2), \ldots, [y_{k-1}, y_k),$$

- Considerar las $n$ v.a. discretizadas $Y_1^d, Y_2^d, \ldots, Y_n^d$ dadas por

$$Y_j^d = i \qquad \text{si } Y_i \in [y_{j-1}, y_j).$$

- La hipótesis nula es entonces
  $H_0)$ $P(Y_j^d = i) = F_{H_0}(y_i) - F_{H_0}(y_{i-1}), \qquad i = 1, \ldots, k.$
- Proceder ahora como en el caso discreto.
- Es aconsejable utilizar el test de Kolmogorov-Smirnov.