CADENAS DE MARKOV

Georgina Flesia

Sumario

- Procesos estocásticos
- Concepto de cadena de Markov
- Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov
- Clasificación de estados
- Cadenas absorbentes
- Distribución estacionaria

PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Procesos estocásticos

- Un sistema informático complejo se caracteriza por demandas de carácter aleatorio y por ser dinámico
- Necesitamos una herramienta que modele procesos aleatorios en el tiempo, y para ello usaremos los *procesos estocásticos*
- Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias parametrizadas por el tiempo

Procesos estocásticos

- Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias definida sobre un espacio de probabilidad. Es decir:

$$\left\{ X_t : \Omega \rightarrow \Re, \quad t \in T \right\}$$

$$\omega \rightarrow X_t(\omega) = X(\omega, t)$$

Procesos estocásticos

- Tendremos que *X* es una función de dos argumentos. Fijado $\omega=\omega_0$, obtenemos una función determinista (no aleatoria):

$$X(\cdot,\omega_0):T\rightarrow\Re$$

$$t\rightarrow X(t,\omega_0)$$

Procesos estocásticos

- Asimismo, fijado $t=t_0$, obtenemos una de las variables aleatorias de la familia:

$$X(t_0,\cdot):\Omega\to\Re$$

$$\omega\to X(t_0,\omega)$$

Procesos estocásticos

- El espacio de estados S de un proceso estocástico es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar dicho proceso:

$$S = \{X_t(\omega) \mid t \in T \wedge \omega \in \Omega\}$$

Ejemplo de proceso estocástico

- Lanzamos una moneda al aire 6 veces. El jugador gana 1 peso cada vez que sale cara (C), y pierde 1 peso cada vez que sale cruz (F).
- X_i = estado de cuentas del jugador después de la *i*-ésima jugada
- La familia de variables aleatorias $\{X_1, X_2, \ldots, X_6\}$ constituye un proceso estocástico

Ejemplo de proceso estocástico

- $\Omega=\{CCCCCC, CCCCCF, \ldots\}$
- $card(\Omega) = 2^6 = 64$
- $P(\omega)=1/64 \quad \forall\ \omega\in\Omega$
- $T=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $S=\{-6, -5, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, 5, 6\}$
- $X_1(\Omega)=\{-1, 1\}$
- $X_2(\Omega)=\{-2, 0, 2\}$

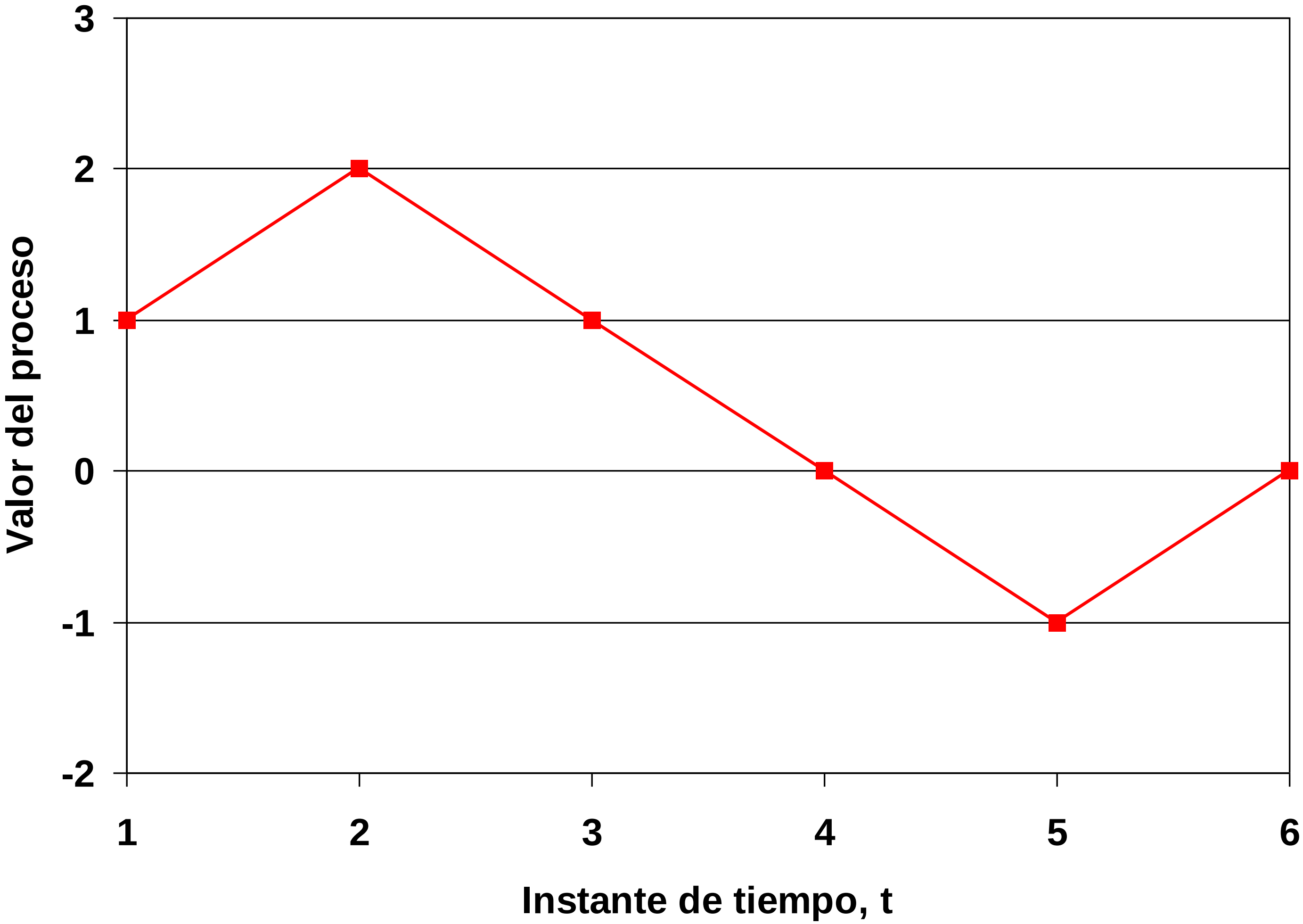
Ejemplo de proceso estocástico

- Si fijo ω, por ejemplo ω_0=CCFFFC, obtengo una secuencia de valores completamente determinista:
- $X_1(\omega_0)=1$, $X_2(\omega_0)=2$, $X_3(\omega_0)=1$, $X_4(\omega_0)=0$,

$X_5(\omega_0)= -1$, $X_6(\omega_0)=0$

- Puedo dibujar con estos valores la *trayectoria del proceso*:

Ejemplo de proceso estocástico



Ejemplo de proceso estocástico

- Si fijo t, por ejemplo t_0=3, obtengo una de las variables aleatorias del proceso:

$$X_3 : \Omega \to \Re$$

$$\omega \to X_3(\omega)$$

- Los posibles valores que puede tomar el proceso en t_0=3 son: $X_3(\Omega)=\{-3, -1, 1, 3\}$

Ejemplo de proceso estocástico

- Podemos hallar la probabilidad de que el proceso tome uno de estos valores:

$$P\left[X_3(\omega)=1\right]=P\left[CFC\right]+P\left[CCF\right]+P\left[FCC\right]=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$P\left[X_3(\omega)=3\right]=P\left[CCC\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P\left[X_3(\omega)=-1\right]=P\left[FCF\right]+P\left[FFC\right]+P\left[CFF\right]=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$P\left[X_3(\omega)=-3\right]=P\left[FFF\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

Clasificación de los procesos estocásticos

	S discreto	**S continuo**
T discreto	Cadena	Sucesión de variables aleatorias continuas
T continuo	Proceso puntual	Proceso continuo

Ejemplos de los tipos de procesos estocásticos

- Cadena: Ejemplo anterior
- Sucesión de variables aleatorias continuas: cantidad de lluvia caída cada mes
- Proceso puntual: Número de clientes esperando en la cola de un supermercado
- Proceso continuo: velocidad del viento

Funciones asociadas a los procesos estocásticos

- Función de distribución de primer orden:

$$F : \Re^2 \to [0,1]$$

$$(x,t) \to F(x,t) = P[X(t,\omega) \le x]$$

- Función de densidad de primer orden:

$$f(x,t) = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}$$

Funciones asociadas a los procesos estocásticos

- Función de distribución de 2º orden:

$$F : \Re^4 \to [0,1]$$

$$(x_1, x_2, t_1, t_2) \to F(x_1, x_2, t_1, t_2) = P[(X(t_1, \omega) \le x_1) \wedge (X(t_2, \omega) \le x_2)]$$

- Función de densidad de 2º orden:

$$f(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Funciones asociadas a los procesos estocásticos

- Función valor medio (es determinista):

$$m : T \to \Re$$

$$t \to E[X_t]$$

- Función varianza (es determinista):

$$\sigma^2 : T \to \Re$$

$$t \to \operatorname{var}(X_t)$$

CONCEPTO DE CADENA DE MARKOV

Cadenas de Markov

- Las cadenas de Markov y los procesos de Markov son un tipo especial de procesos estocásticos que poseen la siguiente propiedad:
- **Propiedad de Markov:** Conocido el estado del proceso en un momento dado, su comportamiento futuro no depende del pasado. Dicho de otro modo, "dado el presente, el futuro es independiente del pasado"

Cadenas de Markov

- Sólo estudiaremos las cadenas de Markov, con lo cual tendremos espacios de estados S discretos y conjuntos de instantes de tiempo T también discretos, T={t_0, t_1, t_2,…}
- Una cadena de Markov (CM) es una sucesión de variables aleatorias X_i, $i \in \mathbf{N}$, tal que:

$$P\left[X_{t+1} = j \big/ X_0, X_1, \ldots, X_t \right] = P\left[X_{t+1} = j \big/ X_t \right]$$

que es la expresión algebraica de la propiedad de Markov para T discreto.

Probabilidades de transición

- Las CM están completamente caracterizadas por las probabilidades de transición en una etapa,

$$P\left[X_{t+1} = j \big/ X_t = i \right], \quad i, j \in S, t \in T$$

- Sólo trabajaremos con CM homogéneas en el tiempo, que son aquellas en las que

$$\forall i, j \in S \ \forall t \in T, P\left[X_{t+1} = j \big/ X_t = i \right] = q_{ij}$$

donde q_{ij} se llama probabilidad de transición en una etapa desde el estado i hasta el estado j

Matriz de transición

- Los q_{ij} se agrupan en la denominada matriz de transición de la CM:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \left(q_{ij}\right)_{i,j\in S}$$

Propiedades de la matriz de transición

- Por ser los q_{ij} probabilidades,

$$\forall i, j \in S, \quad q_{ij} \in [0,1]$$

- Por ser 1 la probabilidad del suceso seguro, cada fila ha de sumar 1, es decir,

$$\forall i \in S, \quad \sum_{j \in S} q_{ij} = 1$$

- Una matriz que cumpla estas dos propiedades se llama matriz estocástica

Diagrama de transición de estados

- El diagrama de transición de estados (DTE) de una CM es un grafo dirigido cuyos nodos son los estados de la CM y cuyos arcos se etiquetan con la probabilidad de transición entre los estados que unen. Si dicha probabilidad es nula, no se pone arco.

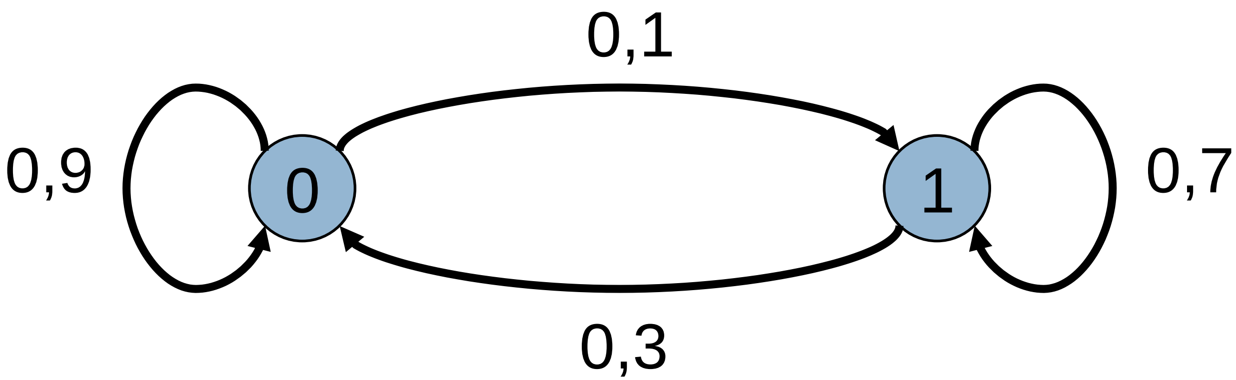
$$i \xrightarrow{q_{ij}} j$$

Ejemplo: línea telefónica

- Sea una línea telefónica de estados ocupado=1 y desocupado=0. Si en el instante t está ocupada, en el instante t+1 estará ocupada con probabilidad 0,7 y desocupada con probabilidad 0,3. Si en el instante t está desocupada, en el t+1 estará ocupada con probabilidad 0,1 y desocupada con probabilidad 0,9.

Ejemplo: línea telefónica

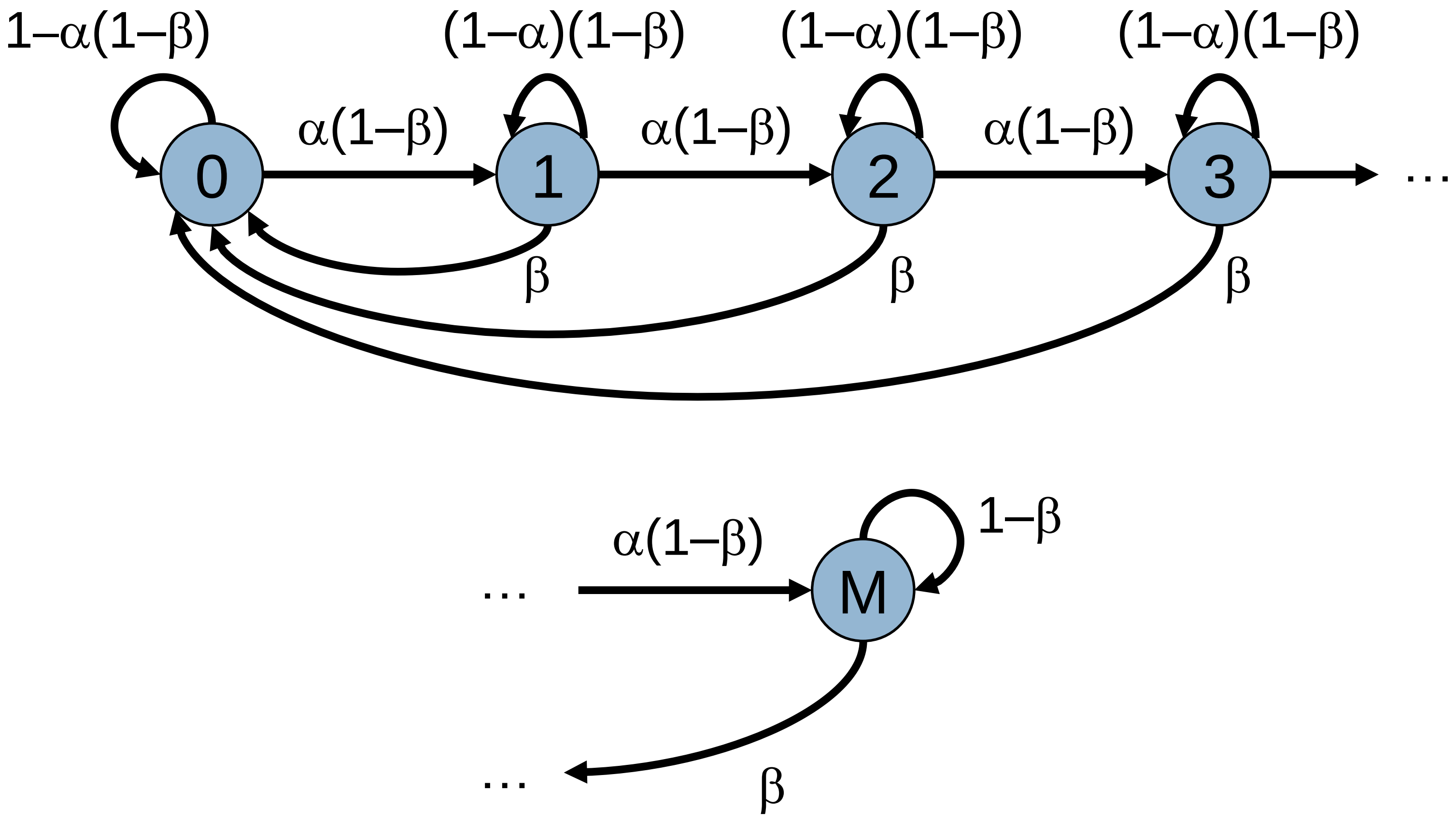
$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$



Ejemplo: *buffer* de E/S

- Supongamos que un *buffer* de E/S tiene espacio para M paquetes. En cualquier instante de tiempo podemos insertar un paquete en el *buffer* con probabilidad α o bien el *buffer* puede vaciarse con probabilidad β. Si ambos casos se dan en el mismo instante, primero se inserta y luego se vacía.
- Sea X_t=nº de paquetes en el *buffer* en el instante t. Suponiendo que las inserciones y vaciados son independientes entre sí e independientes de la historia pasada, $\{ X_t \}$ es una CM, donde S={0, 1, 2, …, M}

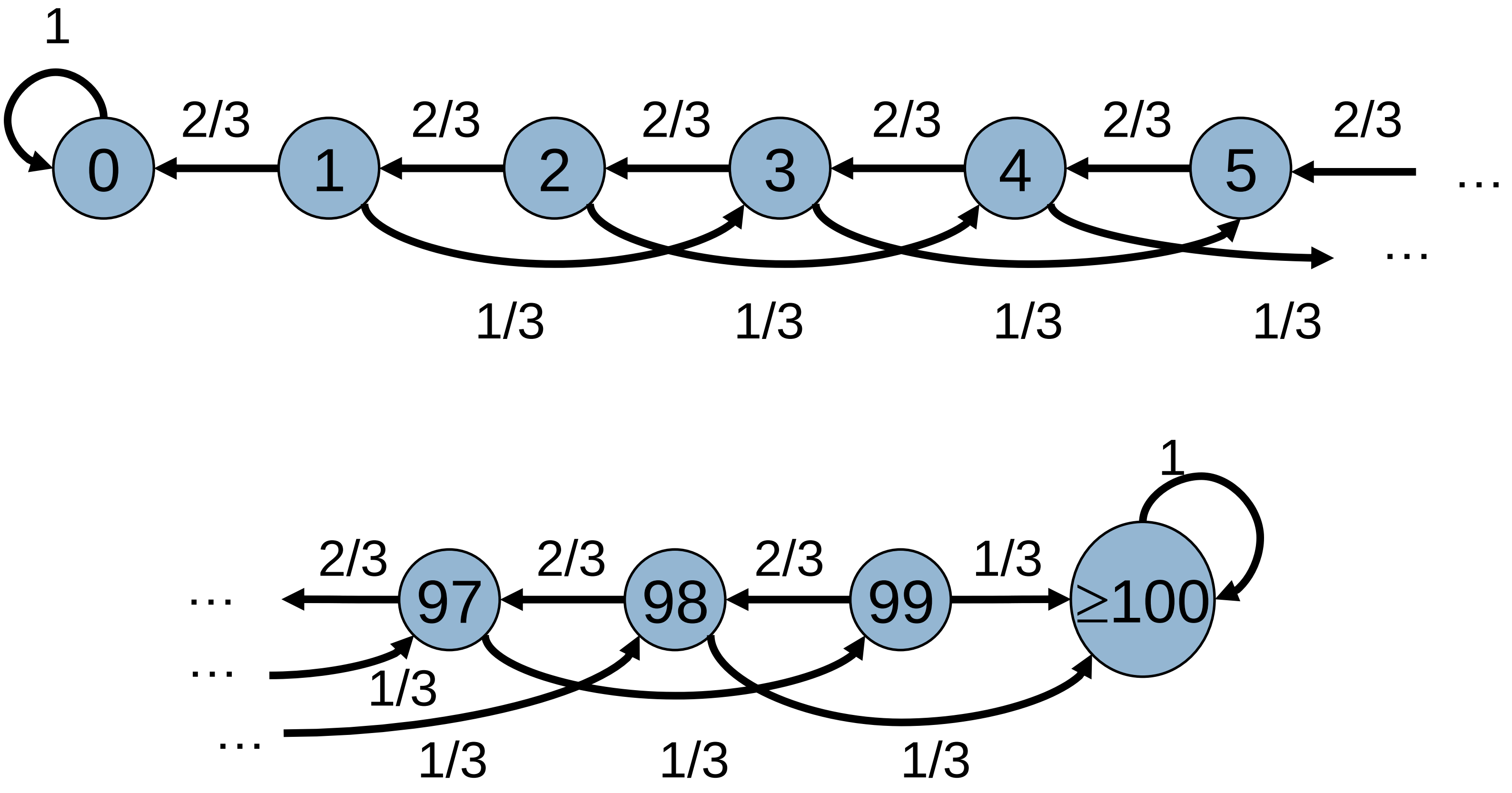
Ejemplo: *buffer* de E/S



Ejemplo: Lanzamiento de un dado

- Se lanza un dado repetidas veces. Cada vez que sale menor que 5 se pierde 1 €, y cada vez que sale 5 ó 6 se gana 2 pesos. El juego acaba cuando se tienen 0 peso ó 100 pesos.
- Sea X_t=estado de cuentas en el instante t. Tenemos que $\{ X_t \}$ es una CM
- S={0, 1, 2, …, 100}

Ejemplo: Lanzamiento de un dado



Ejemplo: organismos unicelulares

- Se tiene una población de organismos unicelulares que evoluciona así: cada organismo se duplica con probabilidad 1–p o muere con probabilidad p. Sea X_n el nº de organismos en el instante n. La CM $\{ X_n \}$ tendrá S = { 0, 1, 2, 3, … } = **N**
- Si hay i organismos en el instante n, en el instante n+1 tendremos k organismos que se dupliquen e i–k que mueran, con lo que habrá 2k organismos.

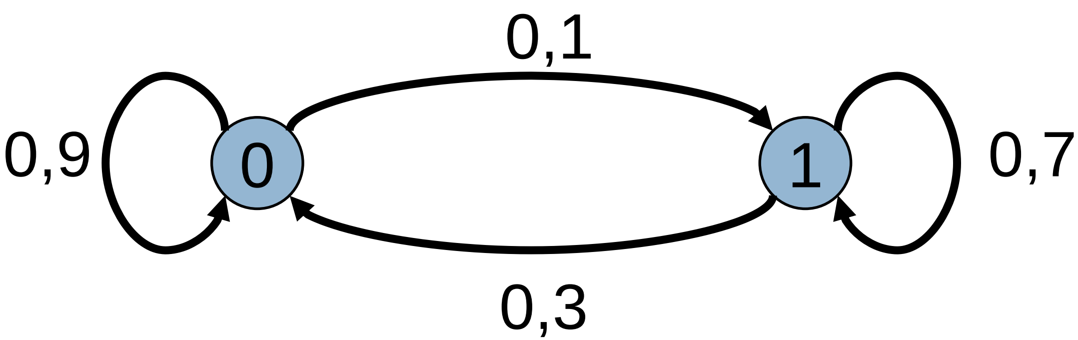
Ejemplo: organismos unicelulares

- Mediante la distribución binomial podemos hallar las probabilidades de transición $q_{i,2k}$ (el resto de probabilidades son nulas):

$$\forall k \in \{0,1,2,\ldots,i\}, \quad q_{i,2k} = \binom{i}{k} (1-p)^k \, p^{i-k}$$

Ejemplo: línea telefónica

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$



- Q1: Si la linea esta desocupada en tiempo t como estara en t+1?
- A1: Como no sabemos que va a pasar en forma segura, podemos decir que hay un 90% de chance de que siga desocupada y un 10% de que no lo este.

Ejemplo: línea telefónica

- Q2: y en tiempo t+2?
- A2: en t+1: 90% desocupada, 10% ocupada.
- En tiempo t+2, t+1 puede estar desocupada y en t+2 seguir desocupada. Las chances de que eso ocurra son 0.9*0.9
- O en t+1 puede estar ocupada y en t+2 estar desocupada. Las chances de que eso ocurrra son 0.1 * 0.3
- Por lo cual la probabilidad de estar desocupada en t+2 es:

Prob(estar desocupada en t+2) = 0.9 0.9 + 0.1 0.3 = 0.81 + 0.09 = 0.9

Ejemplo: línea telefónica

- En forma similar, la probabilidad de que este ocupada en t+2, siendo que en tiempo t esta desocupada es:
- Prob(este ocupada en t+2) = 0.9 0.1+ 0.1 * 0.7 = 0.09 + 0.07 = 0.16
- Si se siguen haciendo estos pronósticos, se puede ver que en t+n se llega a probabilidades de equilibrio, P(ocupada) y P(desocupada), a partir de las cuales t+n y t+k permanecen iguales para todo k.
- Ademas, estas probabilidades de equilibrio no dependen de si se inicio el calculo con la linea ocupada o desocupada.

Equilibrio

- No todas las cadenas llegan a un equilibrio, pero si lo hacen , es independiente del inicio de la iteracion.
- Esta propiedad puede usarse para simular distribuciones de probabilidad.
- Supongamos que queremos armar una muestra de una distribución particular.

Markov Chain Monte Carlo

- Para hacerlo, identificamos una forma de construir una cadena de Markov de tal forma que su distribución de probabilidad en equilibrio sea la distribución buscada.
- Si podemos construir esa cadena entonces podemos empezar desde un punto arbitrario e iterar la cadena muchas veces. Eventualmente las observaciones generadas apareceran como si provinieran de la distribución buscada.
- Algunos algoritmos de construcción de cadenas son el Gibbs sampler y Metropolis Hasting, entre otros.

ECUACIONES DE CHAPMAN-KOLMOGOROV

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

- **Teorema:** Las probabilidades de transición en n etapas vienen dadas por la matriz Q^n:

$$\forall i, j \in S, P\left[X_{t+n} = j \big/ X_t = i \right] = q_{ij}^{(n)}$$

- **Demostración:** Por inducción sobre n
  - Caso base (n=1). Se sigue de la definición de q_{ij}

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

- Hipótesis de inducción. Para cierto n, suponemos cierta la conclusión del teorema.
- Paso inductivo (n+1). Para cualesquiera i,j$\in$S,

$$P\left[X_{t+n+1}=j \big/ X_t=i\right]=\sum_{k\in S}P\left[\left(X_{t+n}=k\right)\wedge\left(X_{t+n+1}=j\right)\big/ X_t=i\right]=$$

$$=\sum_{k\in S}P\left[X_{t+n}=k \big/ X_t=i\right]P\left[X_{t+n+1}=j \big/ X_{t+n}=k\right]=\{H.I.\}=$$

$$=\sum_{k\in S}q_{ik}^{(n)}P\left[X_{t+n+1}=j \big/ X_{t+n}=k\right]=\sum_{k\in S}q_{ik}^{(n)}q_{kj}=q_{ij}^{(n+1)}$$

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

- Por este teorema sabemos que la probabilidad de transitar de i hasta j en n pasos es el elemento (i,j) de Q^n.
- Para evitar computaciones de potencias elevadas de matrices, se intenta averiguar el comportamiento del sistema en el límite cuando $n \to \infty$, llamado también comportamiento a largo plazo
- A continuación estudiaremos esta cuestión

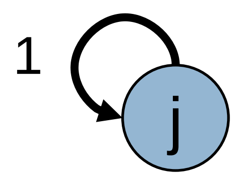
CLASIFICACIÓN DE ESTADOS

Clasificación de estados

- Probabilidad de alcanzar un estado:

$$\forall i, j \in S, \quad \nu_{ij} = P\left[X_n = j \text{ para algún } n > 0 \,\Big/\, X_0 = i \right]$$

- Diremos que un estado $j \in S$ es alcanzable desde el estado $i \in S$ sii $\nu_{ij} \neq 0$. Esto significa que existe una sucesión de arcos (camino) en el DTE que van desde i hasta j.
- Un estado $j \in S$ es absorbente sii $q_{jj}=1$. En el DTE,



Subconjuntos cerrados

- Sea $C \subseteq S$, con $C \neq \emptyset$. Diremos que C es cerrado sii $\forall i \in C\ \forall j \notin C$, j no es alcanzable desde i, o lo que es lo mismo, $\nu_{ij}=0$. En particular, si $C=\{i\}$, entonces i es absorbente. S siempre es cerrado.
- Un subconjunto cerrado $C \subseteq S$ se dice que es irreducible sii no contiene ningún subconjunto propio cerrado

Estados recurrentes y transitorios

- Si S es irreducible, se dice que la CM es irreducible. En el DTE, esto ocurre sii dados i,j cualesquiera, j es alcanzable desde i
- Diremos que un estado $j \in S$ es recurrente sii $\nu_{jj}=1$. En otro caso diremos que j es transitorio. Se demuestra que una CM sólo puede pasar por un estado transitorio como máximo una cantidad finita de veces. En cambio, si visitamos un estado recurrente, entonces lo visitaremos infinitas veces.

Estados recurrentes y transitorios

- **Proposición:** Sea $C \subseteq S$ cerrado, irreducible y finito. Entonces $\forall i \in C$, i es recurrente
- **Ejemplos:** La CM de la línea telefónica es irreducible. Como además es finita, todos los estados serán recurrentes. Lo mismo ocurre con el ejemplo del *buffer*
- **Ejemplo:** En el lanzamiento del dado, tenemos los subconjuntos cerrados $\{0\}$, $\{\geq 100\}$, con lo que la CM no es irreducible. Los estados 0 y ≥ 100 son absorbentes, y el resto son transitorios

Estados recurrentes y transitorios

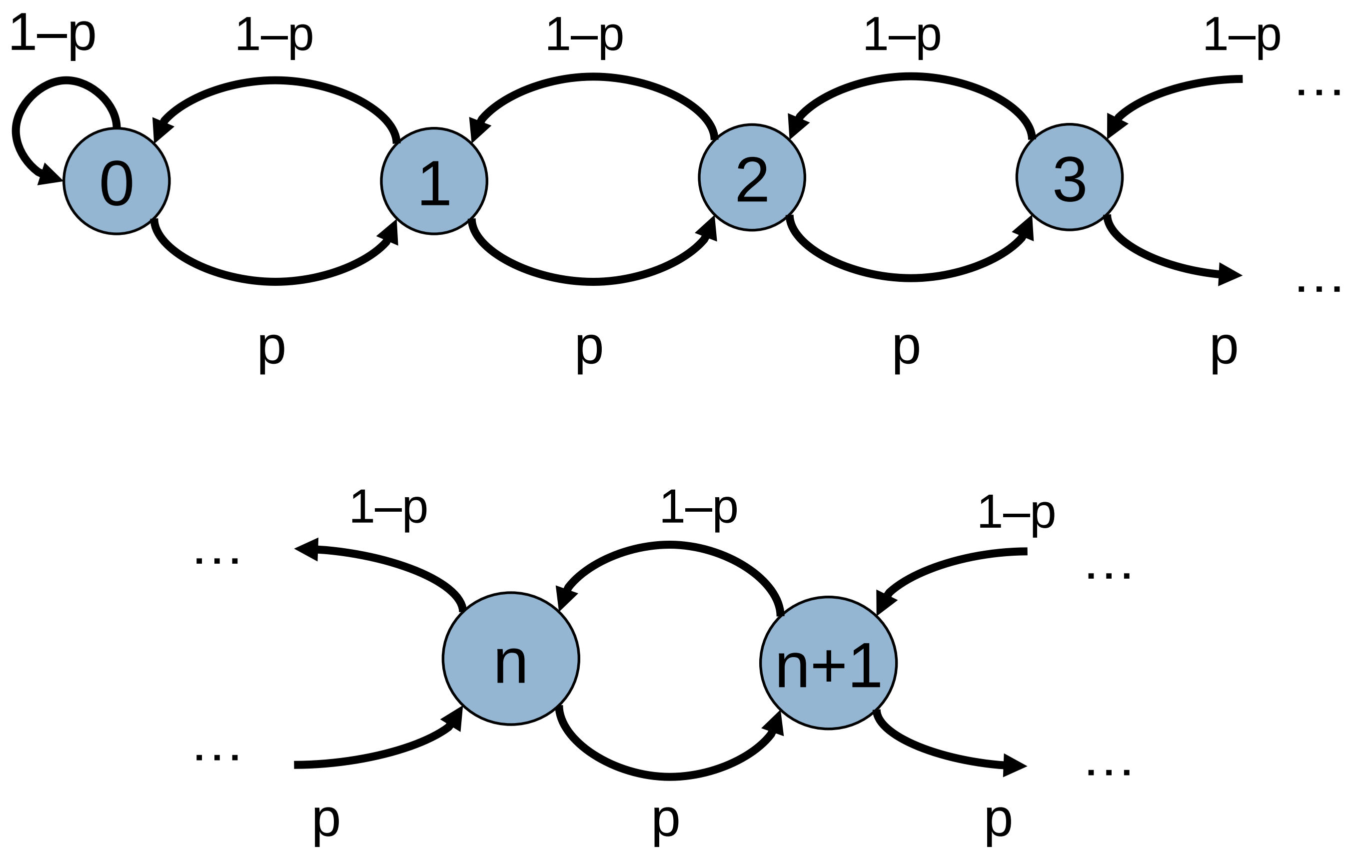
- **Proposición:** Sea $i \in S$ recurrente, y sea $j \in S$ un estado alcanzable desde i. Entonces j es recurrente.
- **Demostración:** Por reducción al absurdo, supongamos que j es transitorio. En tal caso, existe un camino A que sale de j y nunca más vuelve. Por ser j alcanzable desde i, existe un camino B que va desde i hasta j. Concatenando el camino B con el A, obtengo el camino BA que sale de i y nunca más vuelve. Entonces i es transitorio, lo cual es absurdo porque contradice una hipótesis.

Cadenas recurrentes y transitorias

- **Proposición:** Sea *X* una CM irreducible. Entonces, o bien todos sus estados son recurrentes (y decimos que *X* es recurrente), o bien todos sus estados son transitorios (y decimos que *X* es transitoria).

- **Ejemplo:** Estado de cuentas con banca Probabilidad p de ganar 1 peso y 1–p de perder 1 peso. Cuando me arruino, la banca me presta dinero para la próxima tirada:

Cadenas recurrentes y transitorias



Cadenas recurrentes y transitorias

- Esta cadena es irreducible e infinita. Se demuestra que es transitoria sii $p>0,5$ y recurrente en otro caso ($p\leq 0,5$)
- La cadena es transitoria cuando la “tendencia global” es ir ganando dinero. Esto implica que una vez visitado un estado, al final dejaremos de visitarlo porque tendremos más dinero.

Periodicidad

- Sea j$\in$S tal que ν_{jj}>0. Sea

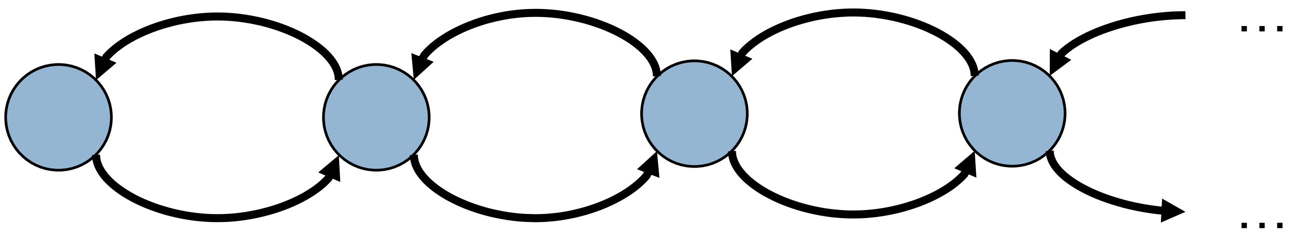
$$k = mcd\ \{n \in \mathbf{N} - \{0\} \mid q_{jj}^{(n)} > 0\}$$

Si k>1, entonces diremos que j es periódico de periodo k.

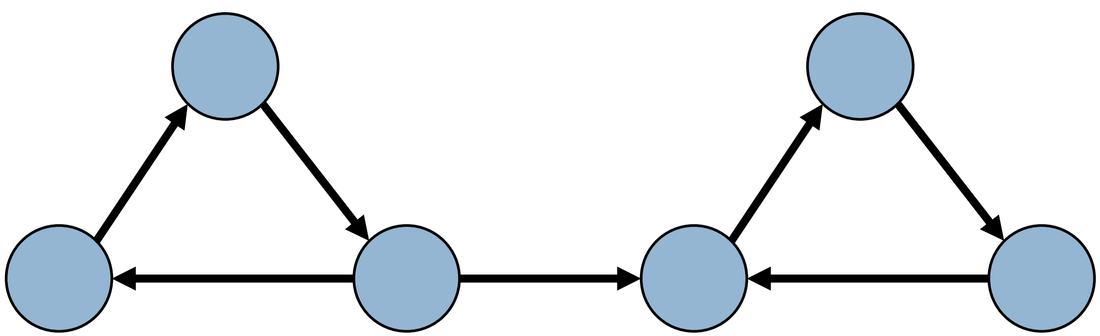
El estado j será periódico de periodo k>1 sii existen caminos que llevan desde j hasta j pero todos tienen longitud mk, con m>0

Periodicidad

- **Ejemplo:** En la siguiente CM todos los estados son periódicos de periodo k=2:



- **Ejemplo:** En la siguiente CM todos los estados son periódicos de periodo k=3:

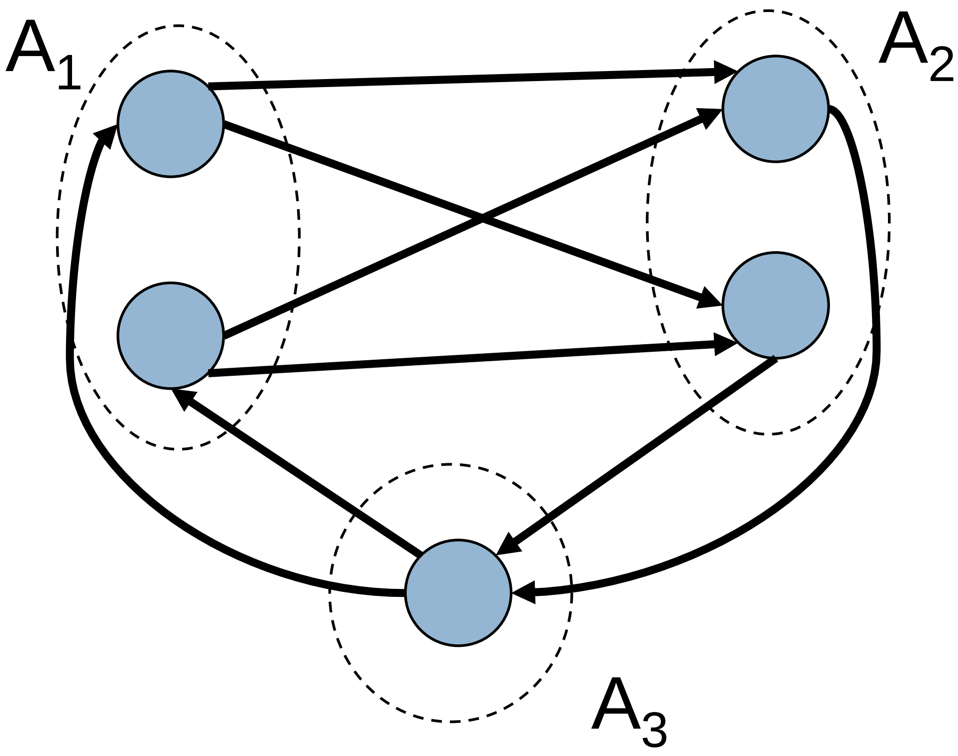


Periodicidad

- **Proposición:** Sea *X* una CM irreducible. Entonces, o bien todos los estados son periódicos de periodo k (y decimos que *X* es periódica de periodo k), o bien ningún estado es periódico (y decimos que *X* es aperiódica)
- En toda CM periódica de periodo k, existe una partición Π de S, $\Pi=\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$, de tal manera que todas las transiciones van desde A_i hasta $A_{(i \bmod k)+1}$

Periodicidad

- Ejemplo de CM periódica de periodo k=3:



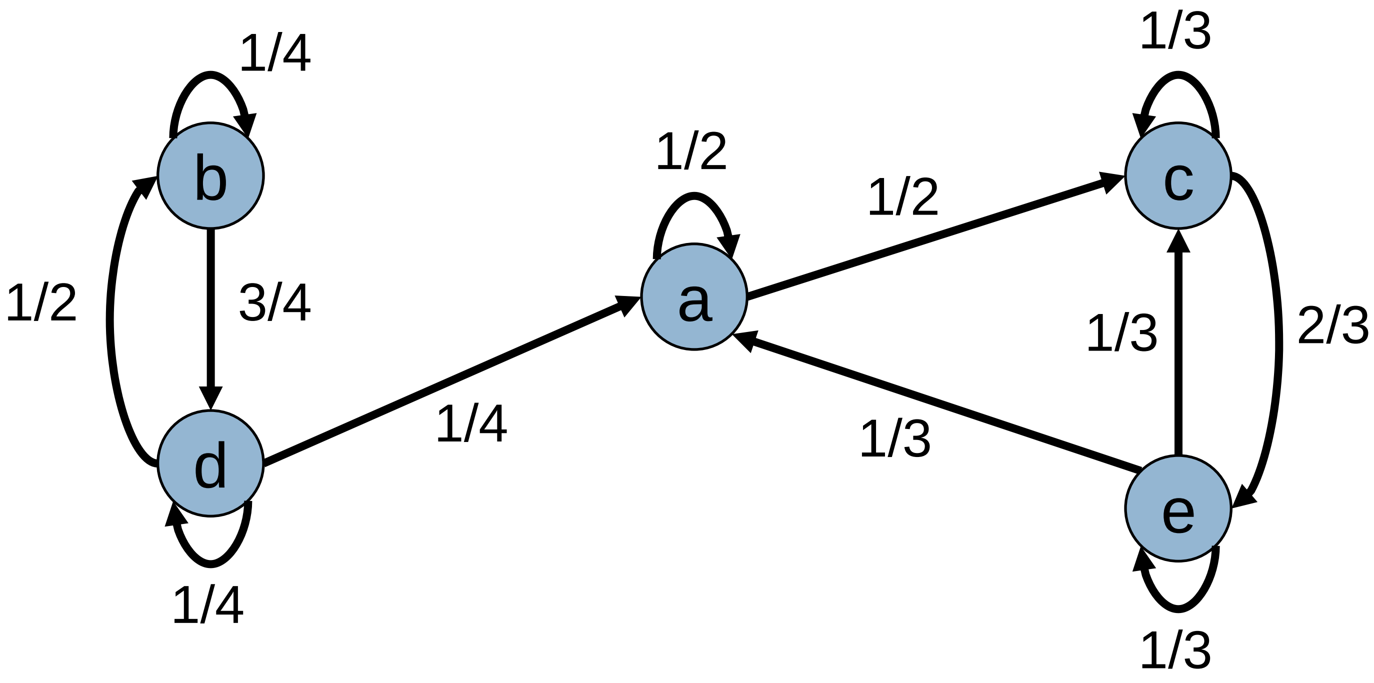
Cadenas ergódicas

- Sea X una CM finita. Diremos que X es ergódica sii es irreducible, recurrente y aperiódica
- **Ejemplo 1:** Analizar la siguiente CM, con S={a, b, c, d, e}:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

- 1º Dibujar el DTE:



Ejemplo 1

- 2º Hallar los conjuntos cerrados
  - Tomado un estado i, construimos un conjunto cerrado C_i con todos los alcanzables desde él en una o más etapas (el propio i también se pone):
  - $C_a=\{a, c, e\}=C_c=C_e$
  - $C_b=\{b, d, a, c, e\}=C_d=S$
  - La CM no será irreducible, ya que C_a es un subconjunto propio cerrado de S

Ejemplo 1

- 3º Clasificar los estados
  - Recurrentes: a, c, e
  - Transitorios: b, d
  - Periódicos: ninguno
  - Absorbentes: ninguno
- 4º Reorganizar Q. Dada una CM finita, siempre podemos agrupar los estados recurrentes por un lado y los transitorios por otro, y hacer:

$$Q = \left(\begin{array}{c:c} \begin{array}{c} Movimientos\ entre \\ recurrentes \end{array} & 0 \\ \hdashline \begin{array}{c} Paso\ de\ transitorios \\ a\ recurrentes \end{array} & \begin{array}{c} Movimientos\ entre \\ transitorios \end{array} \end{array} \right)$$

Ejemplo 1

En nuestro caso, la nueva ordenación de S es S={a, c, e, b, d}, con lo que obtenemos:

$$Q = \left(\begin{array}{ccc|cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

- 5º Clasificar la cadena. No es irreducible, con lo cual no será periódica, ni aperiódica, ni recurrente, ni transitoria ni ergódica.

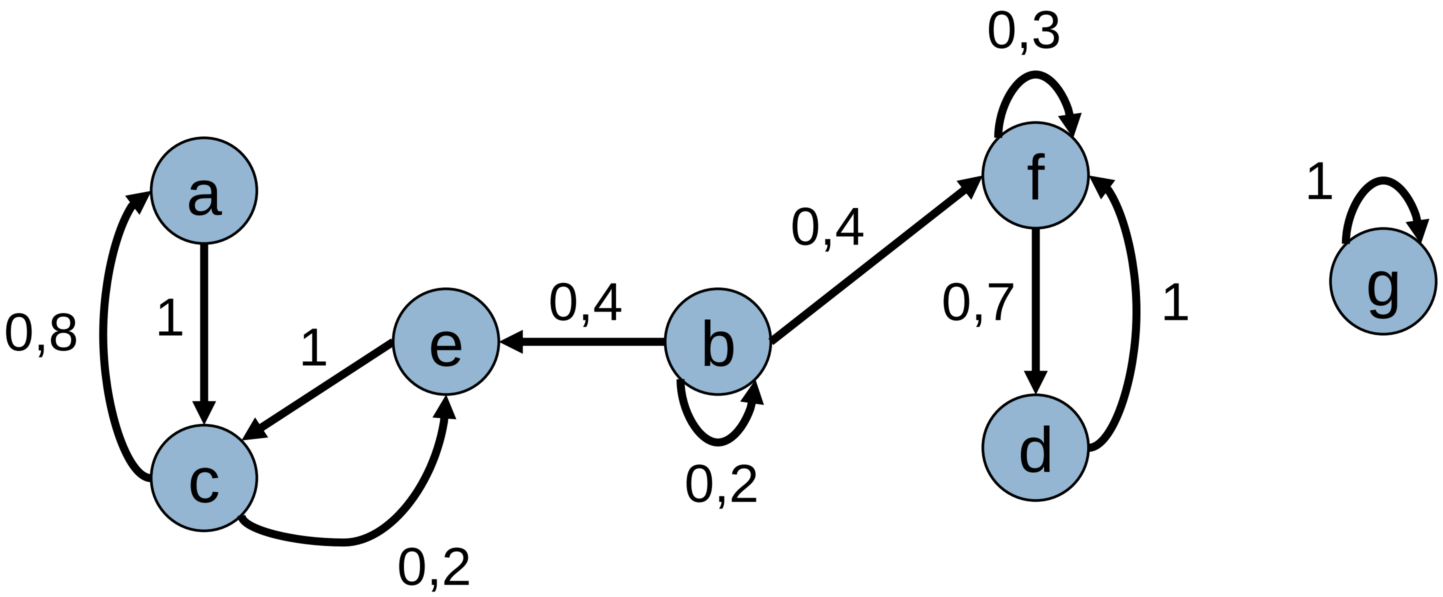
Ejemplos

- **Ejemplo 2:** Analizar la siguiente CM, con S={a, b, c, d, e, f, g}:

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

- 1º Dibujar el DTE:



Ejemplo 2

- 2º Hallar los conjuntos cerrados
  - $C_a=\{a, c, e\}=C_c=C_e$
  - $C_f=\{f, d\}=C_d$
  - $C_g=\{g\}$
  - S
- 3º Clasificar los estados
  - Recurrentes: a, c, d, e, f, g
  - Transitorios: b
  - Periódicos: a, c, e (todos de periodo 2)
  - Absorbentes: g

Ejemplo 2

- 4º Reorganizar Q. Cuando hay varios conjuntos cerrados e irreducibles de estados recurrentes (por ejemplo, n conjuntos), ponemos juntos los estados del mismo conjunto:

$$Q = \left(\begin{array}{c:c:c:c:c:c} P_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & P_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & P_3 & \dots & 0 & 0 \\ \hdashline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \dots & P_n & 0 \\ \hdashline Z_1 & Z_2 & Z_3 & & Z_n & Z \end{array}\right)$$

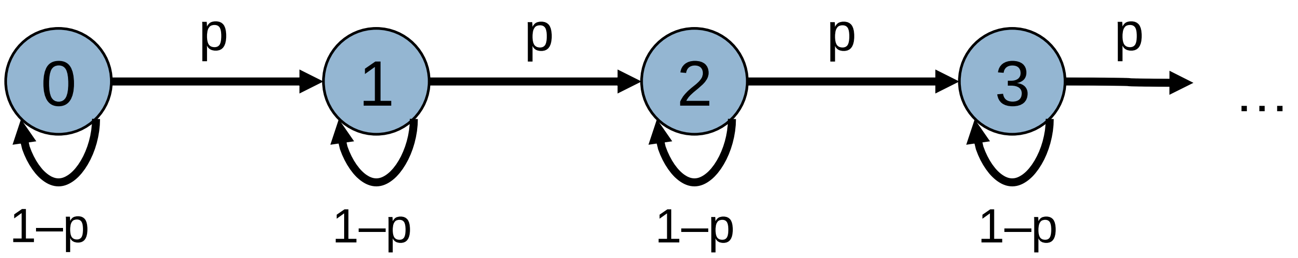
Ejemplo 2

En nuestro caso, reordenamos S={a, c, e, d, f, g, b} y obtenemos:

$$Q = \left(\begin{array}{ccc|cc|c|c}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}8 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}2
\end{array}\right)$$

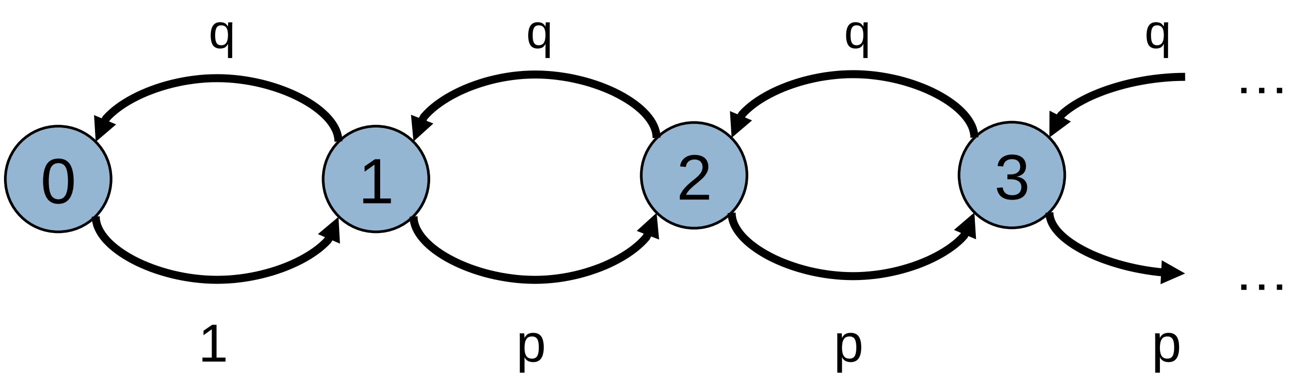
Ejemplo 2

- 5º Clasificar la cadena. No es irreducible, con lo cual no será periódica, ni aperiódica, ni recurrente, ni transitoria ni ergódica.
- **Ejemplo 3:** Número de éxitos al repetir indefinidamente una prueba de Bernoulli (probabilidad p de éxito). No es CM irreducible, porque por ejemplo $C_1=\{1, 2, 3, \ldots\}$ es cerrado. Todos los estados son transitorios.



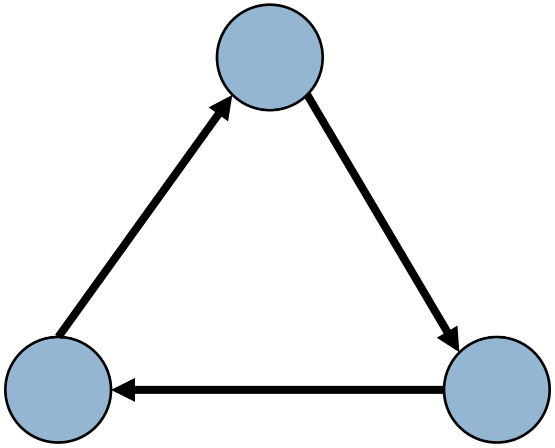
Ejemplos

- **Ejemplo 4:** *Recorrido aleatorio*. Es una CM irreducible y periódica de periodo 2. Se demuestra que si p≤q, todos los estados son recurrentes, y que si p>q, todos son transitorios.



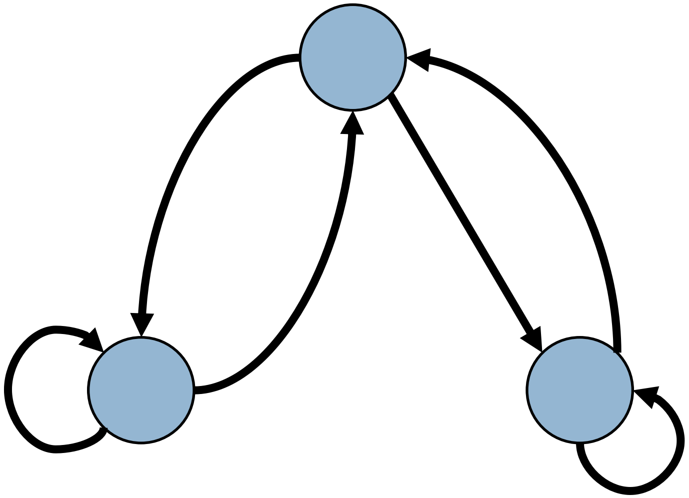
Ejemplos

- **Ejemplo 5:** La siguiente CM es irreducible, recurrente y periódica de periodo 3. No es ergódica.



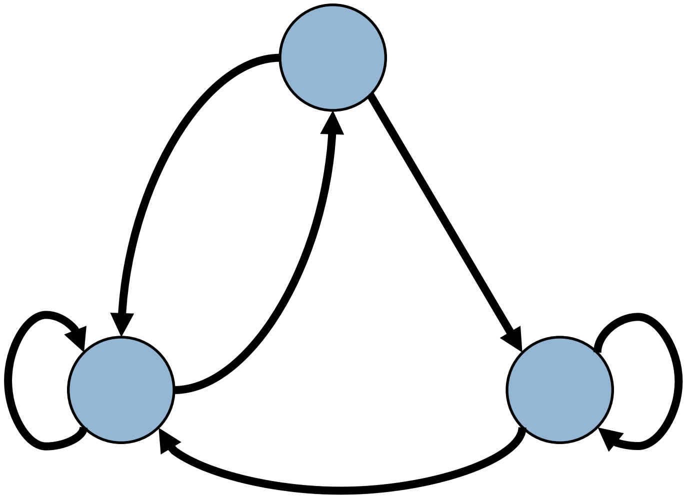
Ejemplos

- **Ejemplo 6:** La siguiente CM es irreducible, aperiódica, recurrente y ergódica.



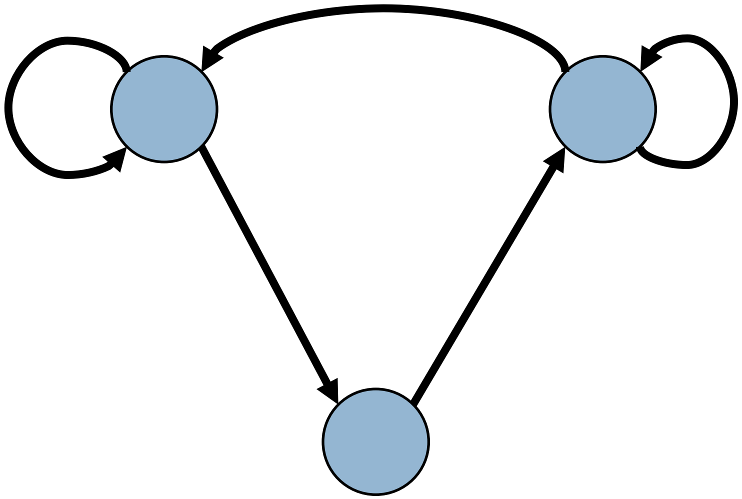
Ejemplos

- **Ejemplo 7:** La siguiente CM es irreducible, aperiódica, recurrente y ergódica



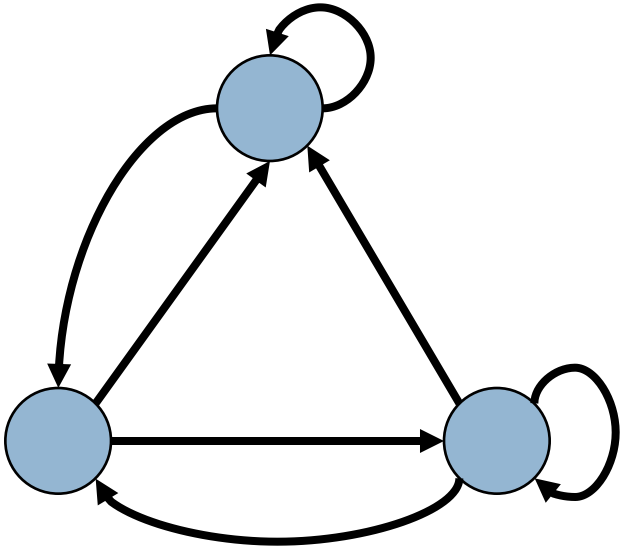
Ejemplos

- **Ejemplo 8:** La siguiente CM es irreducible, aperiódica, recurrente y ergódica



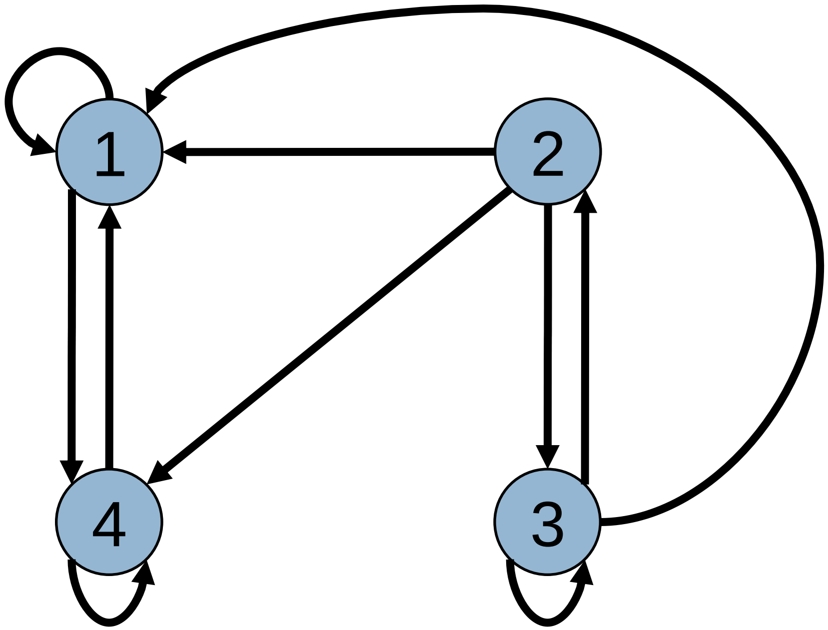
Ejemplos

- **Ejemplo 9:** La siguiente CM es irreducible, aperiódica, recurrente y ergódica



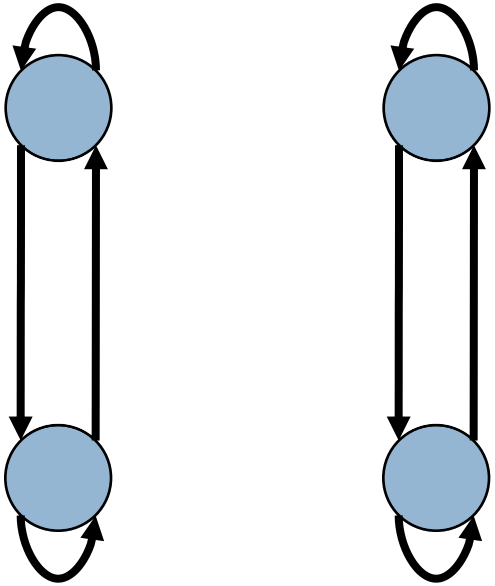
Ejemplos

- **Ejemplo 10:** La siguiente CM no es irreducible, y por tanto no es de ninguno de los demás tipos. 1 y 4 son recurrentes; 2 y 3 son transitorios.



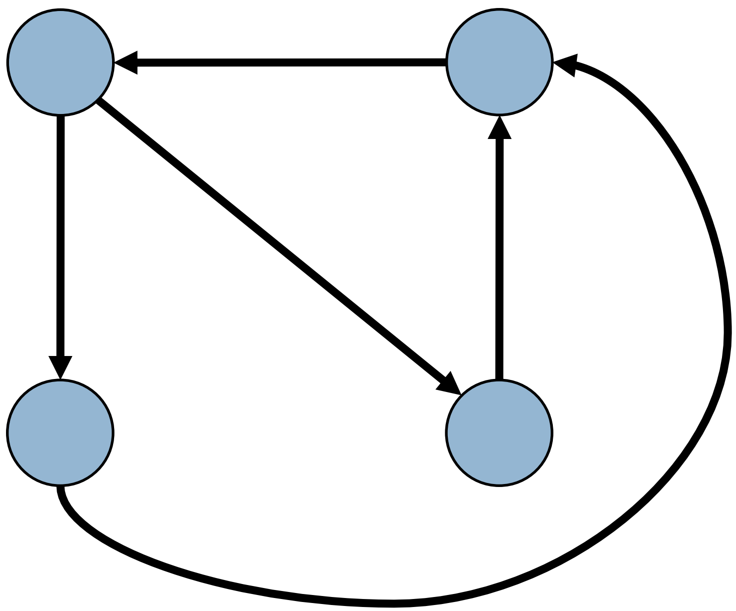
Ejemplos

- **Ejemplo 11:** La siguiente CM no es irreducible, y por tanto no es de ninguno de los demás tipos. Todos los estados son recurrentes y ninguno es periódico.



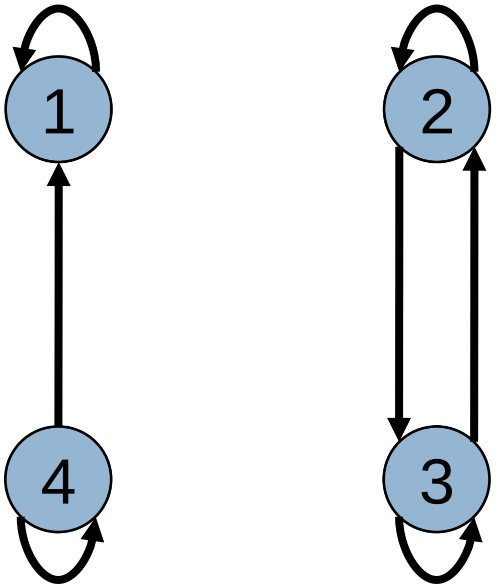
Ejemplos

- **Ejemplo 12:** La siguiente CM es irreducible, recurrente y periódica de periodo 3. No es ergódica.



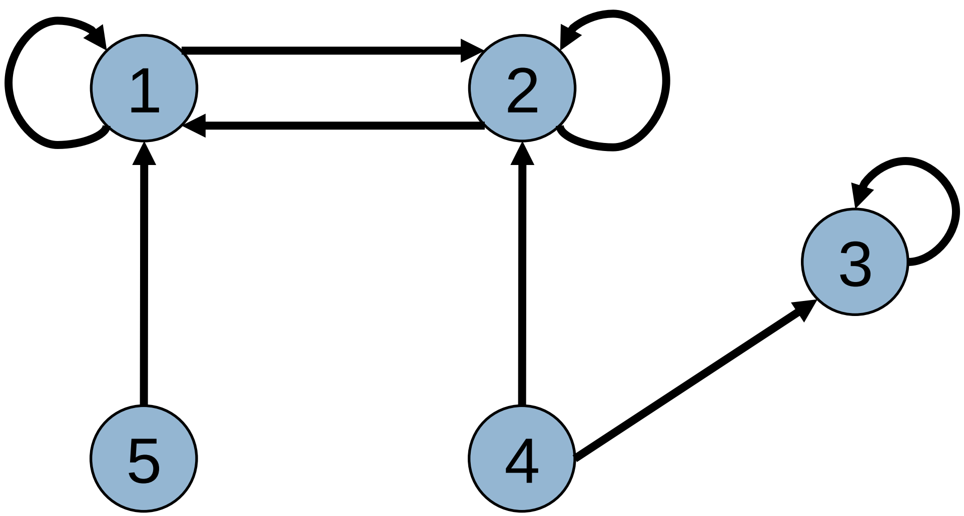
Ejemplos

- **Ejemplo 13:** La siguiente CM no es irreducible, y por tanto no es de ninguno de los demás tipos. Ningún estado es periódico. 4 es transitorio, y el resto recurrentes. 1 es absorbente.



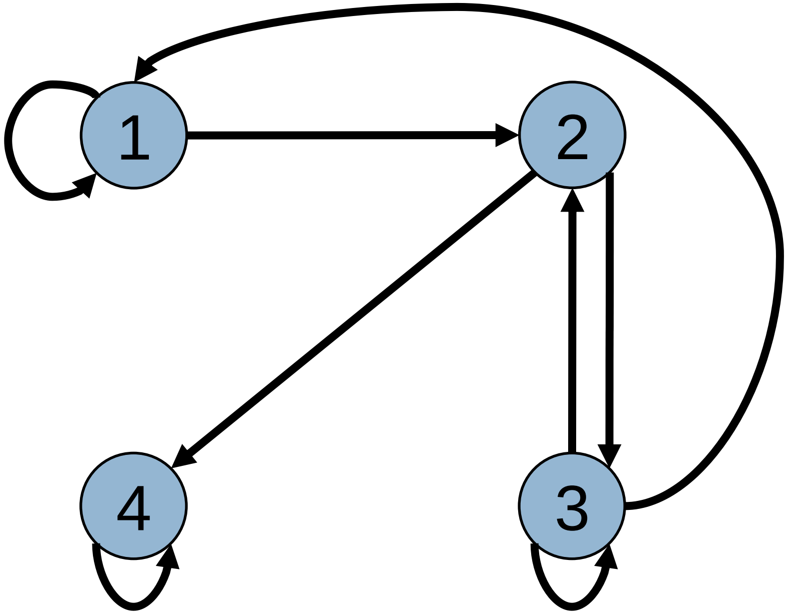
Ejemplos

- **Ejemplo 14:** La siguiente CM no es irreducible, y por tanto no es de ninguno de los demás tipos. Ningún estado es periódico. 4 y 5 son transitorios, y el resto recurrentes. 3 es absorbente.



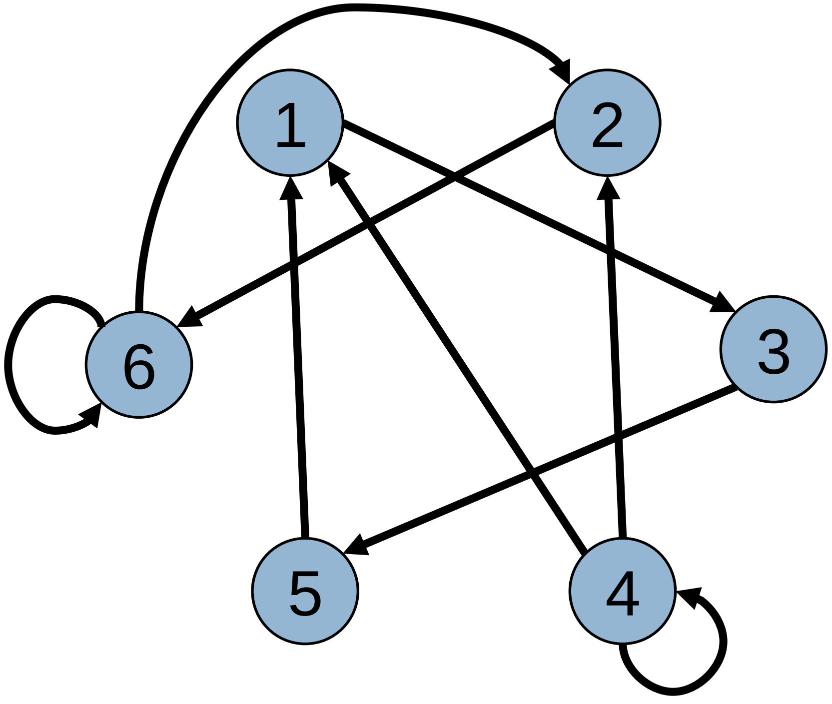
Ejemplos

- **Ejemplo 15:** La siguiente CM es no es irreducible, y por tanto tampoco de ninguno de los demás tipos. 4 es absorbente, y el resto son transitorios.



Ejemplos

- **Ejemplo 16:** La siguiente CM no es irreducible y por tanto no es de ninguno de los demás tipos. 1,3 y 5 son recurrentes de periodo 3. 2 y 6 son recurrentes, pero no periódicos. 4 es transitorio.



CADENAS ABSORBENTES

Concepto de cadena absorbente

- Sea *X* una CM cuyos estados son todos transitorios o absorbentes. En tal caso diremos que *X* es absorbente.
- Si *X* es finita y absorbente, reordenamos S poniendo primero los estados transitorios y obtenemos:

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} Q' & R \\ \hline 0 & I \end{array} \right)$$

Resultados sobre cadenas absorbentes

- **Proposición:** El número medio de etapas que se estará en el estado transitorio $j \in S$ antes de la absorción, suponiendo que empezamos en el estado transitorio $i \in S$, viene dado por el elemento (i,j) de $(I-Q')^{-1}$
- **Nota:** La etapa inicial también se cuenta, es decir, en la diagonal de $(I-Q')^{-1}$ todos los elementos son siempre mayores o iguales que 1

Resultados sobre cadenas absorbentes

- **Proposición:** La probabilidad de ser absorbido por un estado absorbente $j \in S$, suponiendo que empezamos en el estado transitorio $i \in S$, viene dada por el elemento (i,j) de la matriz $(I - Q')^{-1} R$, que se denomina matriz fundamental de la CM

Ejemplo de CM absorbente

- En un juego participan dos jugadores, A y B.
- En cada turno, se lanza una moneda al aire.
- Si sale cara, A le da 1 peso a B. Si sale cruz, B le da 1 peso a A.
- Al principio, A tiene 3 pesos y B tiene 2 pesos.
- El juego continúa hasta que alguno de los dos se arruine. Calcular:
  - La probabilidad de que A termine arruinándose.
  - La probabilidad de que B termine arruinándose.
  - El número medio de tiradas que tarda en acabar el juego.

Ejemplo de CM absorbente

- Tendremos una CM con un estado por cada posible estado de cuentas de A: S={1, 2, 3, 4, 5, 0}. Descomponemos Q:

$$Q = \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$Q' = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo de CM absorbente

- Realizamos los cálculos necesarios:

$$(I - Q')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}6 & 1{,}2 & 0{,}8 & 0{,}4 \\ 1{,}2 & 2{,}4 & 1{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 1{,}6 & 2{,}4 & 1{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 1{,}2 & 1{,}6 \end{pmatrix}$$

$$(I - Q')^{-1} R = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo de CM absorbente

- Probabilidad de que A termine arruinándose.
  - La ruina de A está representada por el estado 0, que es el 2º estado absorbente. Como empezamos en el 3er estado transitorio (A empieza con 3 pesos), debemos consultar la 3ª fila, 2ª columna de $(I–Q')^{-1}R$, que nos da una probabilidad de 0,4 de que A empiece con 3 pesos y termine en la ruina.
- Probabilidad de que B termine arruinándose
  - Como es el suceso contrario del apartado a), su probabilidad será 1–0,4=0,6. También podríamos haber consultado la 3ª fila, 1ª columna de $(I–Q')^{-1}R$.

Ejemplo de CM absorbente

- Número medio de tiradas que tarda en acabar el juego
  - Sumamos los números medios de etapas que se estará en cualquier estado transitorio antes de la absorción, suponiendo que empezamos en el 3^er^ estado transitorio. Dichos números medios son los que forman la 3ª fila de la matriz $(I-Q')^{-1}$. El promedio es: 0,8+1,6+2,4+1,2=6 tiradas.
- Nota: si observamos la 1ª columna de $(I-Q')^{-1}R$, vemos que los valores van creciendo. Esto se debe a que, cuanto más dinero tenga al principio A, más probabilidad tiene de ganar el juego.

DISTRIBUCIÓN ESTACIONARIA

Concepto de distribución estacionaria

- **Teorema:** Sea *X* una CM irreducible, aperiódica y recurrente. Entonces,

$$\forall j \in S, \quad \exists p_j = \lim_{n \to \infty} q_{ij}^{(n)}$$

- Diremos que una CM alcanza la distribución estacionaria sii existen los límites del teorema anterior y además se cumple que:

$$\sum_{j \in S} p_j = 1$$

Existencia de la distribución estacionaria

- **Teorema:** Sea *X* finita y ergódica. Entonces la distribución estacionaria existe y viene dada por la solución de las siguientes ecuaciones:

$$\forall j \in S, \quad p_j = \sum_{i \in S} p_i q_{ij}$$

$$\sum_{j \in S} p_j = 1$$

- Este teorema no sólo dice cuándo existe distribución estacionaria (en los casos finitos), sino que además nos dice cómo calcularla.

Nomenclatura para las ecuaciones

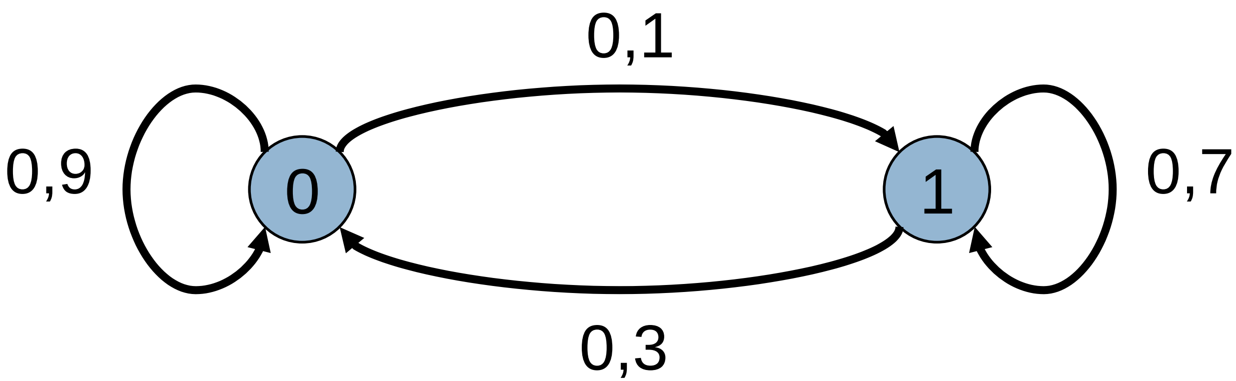
- A las primeras ecuaciones del teorema se les llama ecuaciones de equilibrio, porque expresan que lo que “sale” de j (izquierda) es igual a lo que “entra” en j (derecha):

$$\sum_{i \in S} p_j q_{ji} = \sum_{i \in S} p_i q_{ij}$$

- A la última ecuación se le llama ecuación normalizadora, ya que obliga a que el vector formado por los p_j esté normalizado (en la norma 1)

Ejemplos

- **Ejemplo:** Hallar la distribución estacionaria (si existe) del ejemplo de la línea telefónica.



- 1º Comprobar que la CM es finita y ergódica, para así saber que existe la distribución estacionaria. Lo es, con lo cual dicha distribución existe.

Ejemplos

- 2º Plantear las ecuaciones de equilibrio (una por nodo):

$$Nodo\,0: \quad p_0 = 0{,}9\,p_0 + 0{,}3\,p_1$$

$$Nodo\,1: \quad p_1 = 0{,}1\,p_0 + 0{,}7\,p_1$$

O lo que es más fácil,

$$\vec{p} = Q^T \vec{p}, \quad donde\ \vec{p} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

- 3º Plantear la ecuación normalizadora:

$$p_0 + p_1 = 1$$

Ejemplos

- 4º Resolver el sistema. Hay dos métodos:
  - Utilizar un algoritmo estándar de sistemas de ecuaciones lineales para resolver todas las ecuaciones conjuntamente, por ejemplo, Gauss. El sistema debe tener solución única. En nuestro caso,

$$p_0 = 0{,}75; \quad p_1 = 0{,}25$$

Ejemplos

- Encontrar una solución cualquiera de las ecuaciones de equilibrio. Para ello le daremos un valor no nulo a nuestra elección a una sola de las incógnitas. Una vez conseguida esa solución, la solución verdadera será un múltiplo de ella (usaremos la normalizadora). En nuestro caso, haciendo $p_1=1$,

$$p_0 = 0{,}9\,p_0 + 0{,}3 \Rightarrow p_0 = 3$$

La solución verdadera será de la forma $(3k,k)^T$.
Aplicando la normalizadora,

$$3k + k = 1 \Rightarrow k = 0{,}25$$

Con lo cual la solución verdadera es $(0'75,0'25)^T$

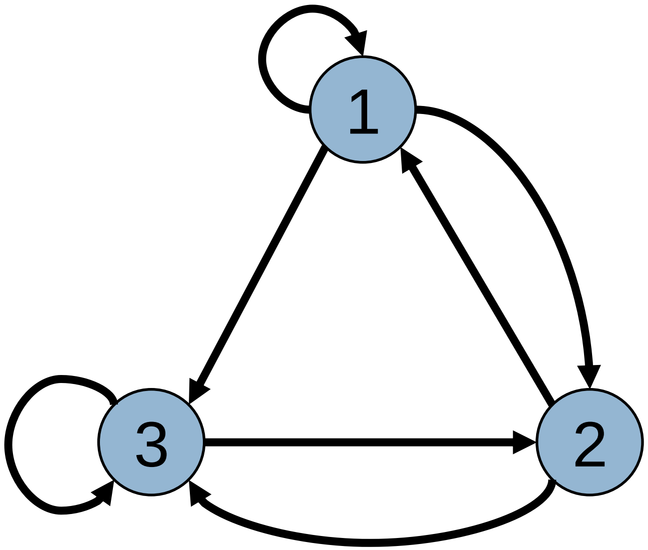
Ejemplos

- **Ejemplo:** Hallar, si existe, la distribución estacionaria para esta CM con S={1, 2, 3}:

$$Q = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Ejemplos

- 1º Dibujamos el DTE y así comprobamos más fácilmente que la CM es finita y ergódica:



Ejemplos

- 2º y 3º Planteamos las ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

- 4º Resolvemos. Para ello fijamos $p_1=1$ y hallamos una solución para las ecuaciones de equilibrio:

Ejemplos

$$1 = 0{,}3 + 0{,}6\,p_2 \Rightarrow p_2 = \frac{0{,}7}{0{,}6}$$

$$\frac{0{,}7}{0{,}6} = 0{,}5 + 0{,}4\,p_3 \Rightarrow p_3 = \frac{0{,}7 - 0{,}3}{0{,}6 \cdot 0{,}4} = \frac{1}{0{,}6}$$

Por tanto la solución verdadera será de la forma:

$$\left(k, \frac{0'7}{0'6}k, \frac{1}{0'6}k\right)^T = (0'6\lambda, 0'7\lambda, \lambda)^T$$

Normalizamos y obtenemos la solución verdadera:

$$0'6\lambda + 0'7\lambda + \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2'3}$$

$$(0'6\lambda, 0'7\lambda, \lambda)^T = \left(\frac{6}{23}, \frac{7}{23}, \frac{10}{23}\right)^T$$

Ejemplos

- **Ejemplo:** Hallar la distribución estacionaria, si existe, en el ejemplo del *buffer*.
- 1º Ya vimos que la CM es finita y ergódica
- 2º y 3º Planteamos las ecuaciones de equilibrio nodo a nodo y expresándolas como "salidas"="entradas" (usar Q^T sería más difícil):

$$Nodo\ 0: \beta p_1 + \beta p_2 + \ldots + \beta p_M = \alpha(1-\beta)p_0$$

$$Nodo\ i\ \left(i \in \{1,2,\ldots,M-1\}\right): \alpha(1-\beta)p_{i-1} = \beta p_i + \alpha(1-\beta)p_i$$

$$Nodo\ M: \alpha(1-\beta)p_{M-1} = \beta p_M$$

Ejemplos

4º Podemos despejar p_i en la ecuación de cada nodo i, y así observamos que los p_i forman una progresión geométrica, cuya razón llamaremos γ:

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,M-1\},\ p_i = \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta+\alpha(1-\beta)}\, p_{i-1} = \gamma p_{i-1}$$

$$\Rightarrow \forall i \in \{0,1,\ldots,M-1\},\ p_i = \gamma^i p_0$$

Ejemplos

Usando la suma de los M–1 primeros términos de una sucesión geométrica y la ecuación normalizadora, llegamos a la solución:

$$p_0 = \frac{\beta}{\beta + \alpha(1-\beta)}$$

$$\forall i \in \{1,\ldots,M-1\},\ p_i = \gamma^i p_0$$

$$p_M = \frac{\alpha(1-\beta)\gamma^{M-1}}{\beta} p_0$$