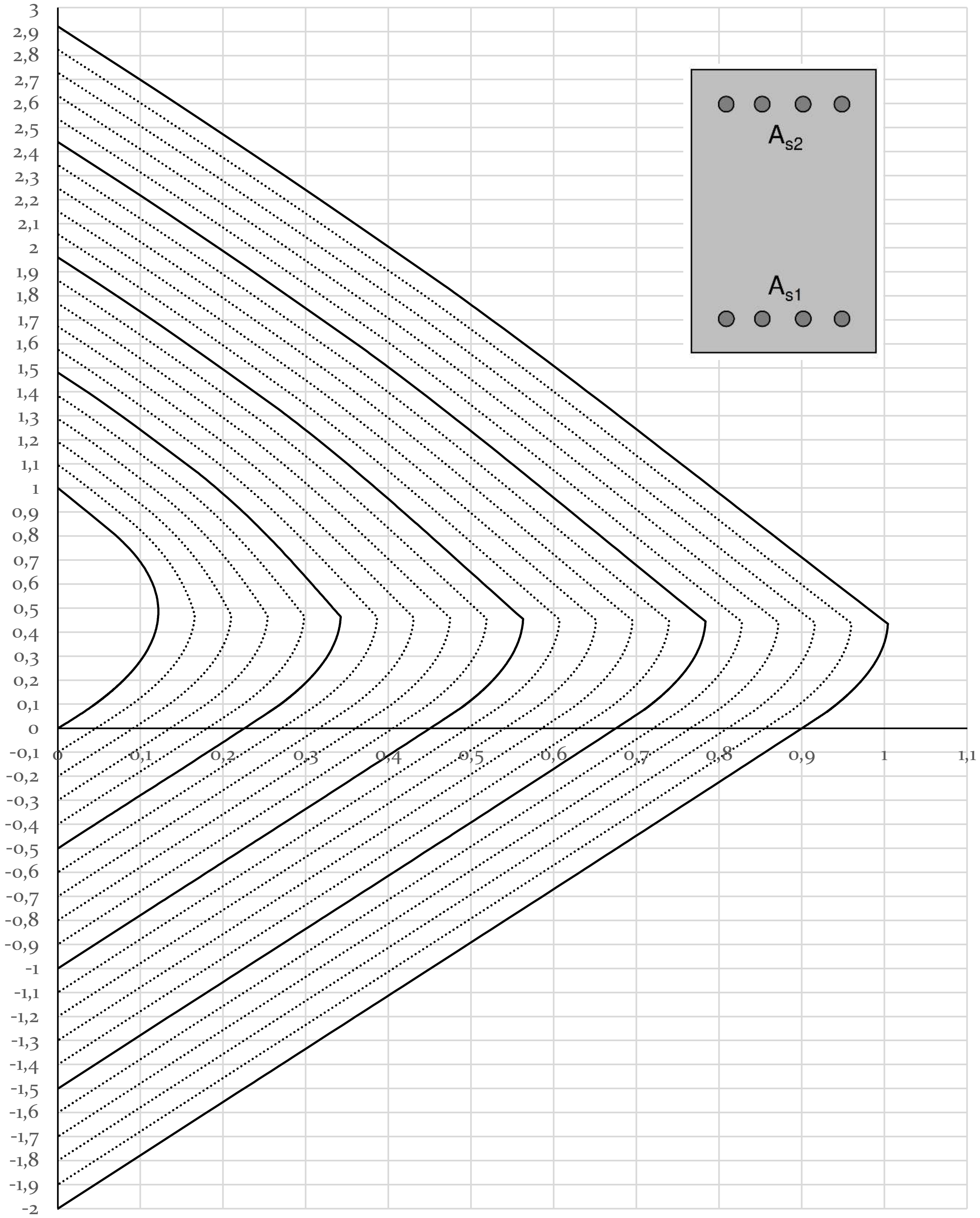

Parabel-Rechteck-Model Stahlbeton

HERLEITUNG DER FUNKTIONSGLEICHUNGEN FÜR BELIEBIGE RECHTECKQUERSCHNITTE – NORMALBETON BIS C50/60

M. Sc. Robert Lachmann | 04/2021

Inhalt

Grundlagen

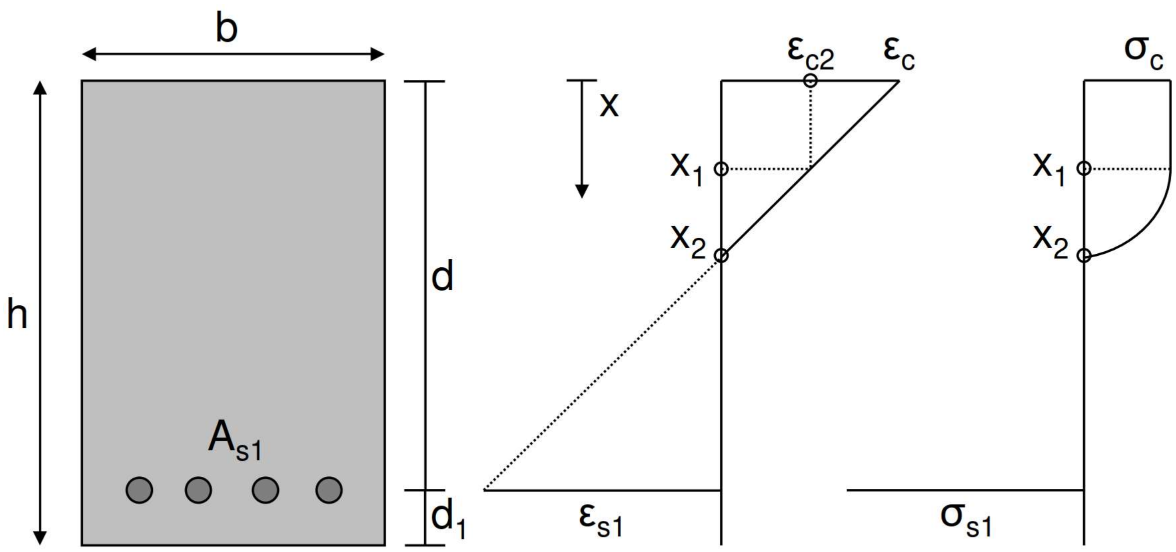

Abbildung 1: Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Parabel-Rechteck-Models

Funktionsgleichung der linearen Dehnungsverteilung:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_c - \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}}{d} * x$$

Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons gemäß DIN EN 1992-1-1, Abschnitt 3.1.7:

$$\sigma_c(x) = \begin{cases} f_{cd} * \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n\right] & für \quad 0 \leq \varepsilon_c < \varepsilon_{c2} \\ f_{cd} & für \quad \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu2} \end{cases}$$

Formeln der Integrationsgrenzen x_1 und x_2:

$$x_1 = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}} * d$$

$$x_2 = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}} * d$$

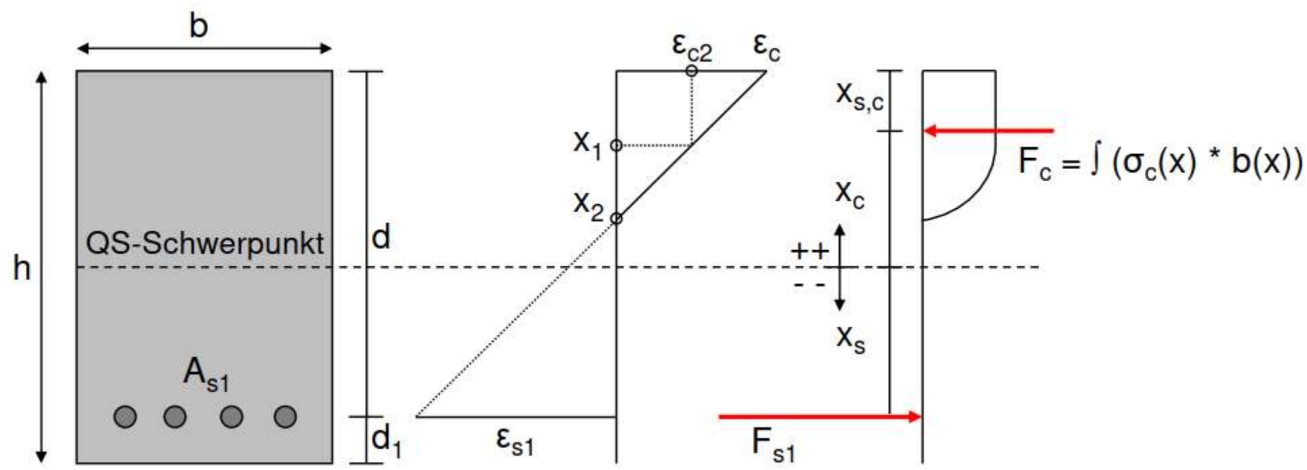

Abbildung 2: Innere Kräfte infolge der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen

Innere Schnittgrößen im Querschnitt:

$$M_{Rd} = F_c * x_c + F_{s1} * x_{s1}$$

$$N_{Rd} = F_c + F_{s1}$$

Für die Darstellung eines M-N-Interaktionsdiagramms müssen die folgenden Funktionsgleichungen aufgestellt werden:

- Betondruckkraft $\mathbf{F_c}$ **($\boldsymbol{\varepsilon_c;\varepsilon_{s1}}$)**
- Schwerpunkt $\mathbf{x_{s,c}}$ **($\boldsymbol{\varepsilon_c;\varepsilon_{s1}}$)** der Betondruckkraft

Die Herleitung erfolgt auf den nachfolgenden Seiten.

Betondruckkraft F_c

Allgemein gilt:

$$F_c = \int_0^{x1} f_{cd} * b * dx + \int_{x1}^{x2} \sigma_c(x) * b * dx$$

$$F_c = b * \left(\int_0^{x1} f_{cd} * dx + \int_{x1}^{x2} \sigma_c(x) * dx \right)$$

STAMMFUNKTION DES 1.INTEGRALS

$$\int f_{cd} * dx = f_{cd} * x$$

In den Grenzen von 0 bis x1:

$$f_{cd} * x_1 - f_{cd} * 0 = f_{cd} * x_1 = f_{cd} * \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}} * d$$

$$= f_{cd} * k * d^2$$

mit:

$$k = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}}$$

STAMMFUNKTION DES 2.INTEGRALS

$$\int \sigma_c(x) * dx = \int f_{cd} * \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n\right] * dx$$

Vereinfachung:

Nach DIN EN 1992-1-1, Tabelle 3.1 gilt n=2 für Normalbeton von C12/15 bis C50/60

Auflösung der Klammer durch 2. Binomische Formel:

$$f_{cd} * \int \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^2\right] * dx = f_{cd} * \int \left[1 - \left(1 - 2 * 1 * \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} + \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^2\right)\right] * dx$$

$$= f_{cd} * \int 2 * \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} - \frac{\varepsilon_c^2}{\varepsilon_{c2}^2} * dx$$

Es gilt:

$$\varepsilon_c = \varepsilon(x) = \varepsilon_c - \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}}{d} * x$$

Einsetzen von ε(x) und Bilden der Stammfunktion:

$$f_{cd} * \int 2 * \frac{\left(\varepsilon_c - \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}}{d} * x\right)}{\varepsilon_{c2}} - \frac{\left(\varepsilon_c - \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}}{d} * x\right)^2}{\varepsilon_{c2}^2} * dx$$

$$= f_{cd} * \int \frac{2 * \varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} - \frac{2 * (\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})}{\varepsilon_{c2} * d} * x - \frac{\varepsilon_c^2 - 2 * \varepsilon_c * \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}}{d} * x + \left(\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}}{d} * x\right)^2}{\varepsilon_{c2}^2} * dx$$

$$= f_{cd} * \int \frac{2 * \varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} - \frac{2 * (\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})}{\varepsilon_{c2} * d} * x - \frac{\varepsilon_c^2 - \frac{2 * \varepsilon_c^2 - 2 * \varepsilon_c * \varepsilon_{s1}}{d} * x + \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})^2}{d^2} * x^2}{\varepsilon_{c2}^2} * dx$$

$$= f_{cd} * \int \frac{2 * \varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} - \frac{2 * (\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})}{\varepsilon_{c2} * d} * x - \frac{\varepsilon_c^2}{\varepsilon_{c2}^2} + \frac{2 * \varepsilon_c^2 - 2 * \varepsilon_c * \varepsilon_{s1}}{\varepsilon_{c2}^2 * d} * x - \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})^2}{\varepsilon_{c2}^2 * d^2} * x^2 * dx$$

$$= f_{cd} * \int -\frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})^2}{\varepsilon_{c2}^2 * d^2} * x^2 + \left(\frac{2 * \varepsilon_c^2 - 2 * \varepsilon_c * \varepsilon_{s1}}{\varepsilon_{c2}^2 * d} - \frac{2 * (\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})}{\varepsilon_{c2} * d}\right) * x + \left(\frac{2 * \varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} - \frac{\varepsilon_c^2}{\varepsilon_{c2}^2}\right) * dx$$

$$= f_{cd} * \left[-\frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})^2}{3 * \varepsilon_{c2}^2 * d^2} * x^3 + \left(\frac{\varepsilon_c^2 - \varepsilon_c * \varepsilon_{s1}}{\varepsilon_{c2}^2 * d} - \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})}{\varepsilon_{c2} * d}\right) * x^2 + \left(\frac{2 * \varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} - \frac{\varepsilon_c^2}{\varepsilon_{c2}^2}\right) * x\right]$$

In den Grenzen von x1 bis x2:

$$x = x_2 = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}} * d = p * d \qquad mit \qquad \boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon_c}}{\boldsymbol{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}}}$$

$$x = x_1 = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}} * d = k * d \qquad mit \qquad \boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon_c - \varepsilon_{c2}}}{\boldsymbol{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}}}$$

Auflösung der Stammfunktion für obere und untere Grenze:

$$= f_{cd} * d * \left[-\frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})^2}{3 * \varepsilon_{c2}^2} * (p^3 - k^3) + \left(\frac{\varepsilon_c^2 - \varepsilon_c * \varepsilon_{s1}}{\varepsilon_{c2}^2} - \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})}{\varepsilon_{c2}} \right) * (p^2 - k^2) + \left(\frac{2 * \varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} - \frac{\varepsilon_c^2}{\varepsilon_{c2}^2} \right) * (p - k) \right]$$

BETONDRUCKKRAFT F_C – ALLGEMEINE FORMEL

Gültig für Normalbeton C12/15 bis C50/60:

$$F_c = b * f_{cd} * d * [\alpha * (p^3 - k^3) + \beta * (p^2 - k^2) + \gamma * (p - k) + k]$$

mit:

$$\alpha = -\frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})^2}{3 * \varepsilon_{c2}^2}$$

$$\beta = \left(\frac{\varepsilon_c^2 - \varepsilon_c * \varepsilon_{s1}}{\varepsilon_{c2}^2} - \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})}{\varepsilon_{c2}} \right)$$

$$\gamma = \left(\frac{2 * \varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} - \frac{\varepsilon_c^2}{\varepsilon_{c2}^2} \right)$$

$$p = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}}$$

$$k = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}}$$

Schwerpunkt $x_{s,c}$ der Betondruckkraft

Allgemein gilt:

$$x_{s,c} = \frac{b * \int \sigma_c(x) * x * dx}{F_c}$$

$$x_{s,c} = \frac{b * (\int_0^{x1} f_{cd} * x * dx + \int_{x1}^{x2} \sigma_c(x) * x * dx)}{F_c}$$

STAMMFUNKTION DES 1.INTEGRALS

$$\int f_{cd} * x * dx = \frac{1}{2} * f_{cd} * x^2$$

In den Grenzen von 0 bis x1:

$$\frac{1}{2} * f_{cd} * x_1^2 - \frac{1}{2} * f_{cd} * 0 = \frac{1}{2} * f_{cd} * \left(\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}}\right)^2 * d^2$$

$$= f_{cd} * \frac{k^2}{2} * d^2$$

mit:

$$k = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}}$$

STAMMFUNKTION DES 2.INTEGRALS

$$\int \sigma_c(x) * x * \ dx = f_{cd} * \left[-\frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})^2}{4 * \varepsilon_{c2}^2 * d^2} * x^4 + \left(\frac{2 * (\varepsilon_c^2 - \varepsilon_c * \varepsilon_{s1})}{3 * \varepsilon_{c2}^2 * d} - \frac{2 * (\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})}{3 * \varepsilon_{c2} * d}\right) * x^3 + \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} - \frac{\varepsilon_c^2}{2 * \varepsilon_{c2}^2}\right) * x^2\right]$$

$$= f_{cd} * \left[\frac{3\alpha}{4} * x^4 + \frac{2\beta}{3} * x^3 + \frac{\gamma}{2} * x^2\right]$$

mit:

$$\alpha = -\frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})^2}{3 * \varepsilon_{c2}^2}$$

$$\beta = \left(\frac{\varepsilon_c^2 - \varepsilon_c * \varepsilon_{s1}}{\varepsilon_{c2}^2} - \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})}{\varepsilon_{c2}}\right)$$

$$\gamma = \left(\frac{2 * \varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} - \frac{\varepsilon_c^2}{\varepsilon_{c2}^2}\right)$$

In den Grenzen von x_1 bis x_2:

$$x = x_2 = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}} * d = p * d \qquad mit \qquad \boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon_c}}{\boldsymbol{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}}}$$

$$x = x_1 = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}} * d = k * d \qquad mit \qquad \boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon_c - \varepsilon_{c2}}}{\boldsymbol{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}}}$$

Auflösung der Stammfunktion für obere und untere Grenze:

$$= f_{cd} * d^2 * \left[-\frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})^2}{4 * \varepsilon_{c2}^2 *} * (p^4 - k^4) + \left(\frac{2 * (\varepsilon_c^2 - \varepsilon_c * \varepsilon_{s1})}{3 * \varepsilon_{c2}^2} - \frac{2 * (\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})}{3 * \varepsilon_{c2}}\right) * (p^3 - k^3) + \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} - \frac{\varepsilon_c^2}{2 * \varepsilon_{c2}^2}\right) * (p^2 - k^2)\right]$$

$$= f_{cd} * d^2 * \left[\frac{3\alpha}{4} * (p^4 - k^4) + \frac{2\beta}{3} * (p^3 - k^3) + \frac{\gamma}{2} * (p^2 - k^2)\right]$$

SCHWERPUNKT X_{S,C} – ALLGEMEINE FORMEL

$$x_{s,c} = \frac{b * f_{cd} * d^2 * \left[\frac{3\alpha}{4} * (p^4 - k^4) + \frac{2\beta}{3} * (p^3 - k^3) + \frac{\gamma}{2} * (p^2 - k^2) + \frac{k^2}{2}\right]}{F_c}$$

mit:

$$\alpha = -\frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})^2}{3 * \varepsilon_{c2}^2}$$

$$\beta = \left(\frac{\varepsilon_c^2 - \varepsilon_c * \varepsilon_{s1}}{\varepsilon_{c2}^2} - \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})}{\varepsilon_{c2}}\right)$$

$$\gamma = \left(\frac{2 * \varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} - \frac{\varepsilon_c^2}{\varepsilon_{c2}^2}\right)$$

$$p = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}}$$

$$k = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}}$$

Zusammenfassung

Gültig für Normalbeton C12/15 bis C50/60

Betondruckkraft:

$$F_c = b * f_{cd} * d * [\alpha * (p^3 - k^3) + \beta * (p^2 - k^2) + \gamma * (p - k) + k]$$

Schwerpunkt der Betondruckkraft:

$$x_{s,c} = \frac{b * f_{cd} * d^2 * \left[\frac{3\alpha}{4} * (p^4 - k^4) + \frac{2\beta}{3} * (p^3 - k^3) + \frac{\gamma}{2} * (p^2 - k^2) + \frac{k^2}{2}\right]}{F_c}$$

mit:

$$\alpha = -\frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})^2}{3 * \varepsilon_{c2}^2}$$

$$\beta = \left(\frac{\varepsilon_c^2 - \varepsilon_c * \varepsilon_{s1}}{\varepsilon_{c2}^2} - \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_{s1})}{\varepsilon_{c2}}\right)$$

$$\gamma = \left(\frac{2 * \varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} - \frac{\varepsilon_c^2}{\varepsilon_{c2}^2}\right)$$

$$p = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}}$$

$$k = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}}$$