Problemi di Fisica

ELETTROMAGNETISMO

La corrente elettrica

PROBLEMA

Un circuito alimentato da una batteria è percorso da una corrente elettrica di intensità 4 A. Calcolare il numero di elettroni di conduzione che in un'ora attraversano una sezione del circuito.

Soluzione

Ricaviamo la quantità di carica che attraversa la sezione del conduttore in 1 ora partendo dalla definizione di corrente:

$$i = \frac{Q}{t} \Rightarrow Q = i \cdot t = 4 \cdot 3600 = 14400\,C$$

dove: 1 ora = 3600 secondi.

Poiché la carica elettrica è quantizzata ossia, essendo la carica dell'elettrone ($1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C) il valore più piccolo possibile, tutte le cariche elettriche sono multipli interi di questa carica elettrica fondamentale:

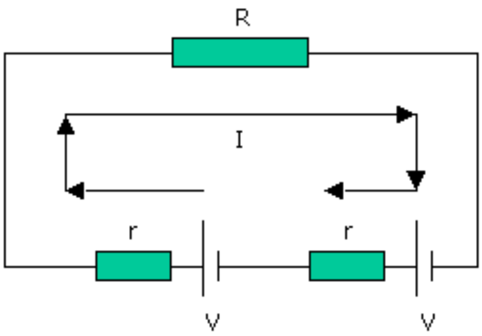
$$Q = n \cdot e$$

per cui il numero di elettroni che attraversa la sezione del conduttore in un'ora sarà:

$$n = \frac{Q}{e} = \frac{14400}{1{,}602 \cdot 10^{-19}} = 9 \cdot 10^{22} \text{ elettroni}$$

PROBLEMA

In un circuito sono inseriti una resistenza R = 3,6 Ω e due generatori, collegati in serie tra di loro, aventi ciascuno f.e.m. uguale a 2,0 V e la stessa resistenza interna r. L'intensità di corrente che percorre il circuito è 1,0 A. Calcolare la resistenza interna r di ciascuno dei due generatori e la tensione agli estremi della resistenza R.



Soluzione

Applichiamo la 1ª legge di Ohm:

$$V = RI$$

Poiché i generatori sono in serie, si sommano, così pure le resistenze, pertanto la legge assume la forma:

$$V + V = (R + r + r) \cdot I$$

Sostituendo i dati del problema siamo in grado di ricavare l'incognita r:

$$4{,}0 = (3{,}6 + 2r) \cdot 1{,}0 \Rightarrow 4{,}0 = 3{,}6 + 2r \Rightarrow r = \frac{0{,}40}{2} = 0{,}20\,\Omega$$

Poiché le resistenze interne dei due generatori provocano una caduta di tensione, la tensione ai capi di R sarà inferiore alla f.e.m. generata dai due generatori. Infatti, sempre applicando la 1ª legge di Ohm, si ottiene:

$$V_R = R \cdot I = 3{,}6 \cdot 1{,}0 = 3{,}6 \text{ V}$$

PROBLEMA

Una lampadina avente una resistenza di 8,0 Ω è alimentata da una batteria da 12 V con resistenza interna trascurabile.

1. Calcolare l'intensità di corrente che attraversa la lampadina e la resistenza che si dovrebbe inserire in serie con la lampadina per ridurre l'intensità di corrente a 0,30 A.

2. Quanto sarebbe l'intensità di corrente attraverso la lampadina, se la stessa resistenza fosse inserita in parallelo?

Soluzione

1. Applicando la 1ª legge di Ohm, otteniamo direttamente il valore della corrente che attraversa la lampadina:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{12}{8,0} = 1,5A$$

Mentre, la resistenza R_1 che si dovrebbe inserire in serie alla lampadina per ridurre l'intensità di corrente a I_1 = 0,30 A è:

$$V = (R + R_1) \cdot I_1 \Rightarrow 12 = (8,0 + R_1) \cdot 0,30 \Rightarrow 12 = 2,4 + 0,30 \cdot R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{9,6}{0,30} = 32\,\Omega$$

2. Inserendo la resistenza R_1 in parallelo alla lampadina, otteniamo una resistenza equivalente pari a:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{8,0} + \frac{1}{32} = 0,156 \Rightarrow R_e = \frac{1}{0,16} = 6,3\,\Omega$$

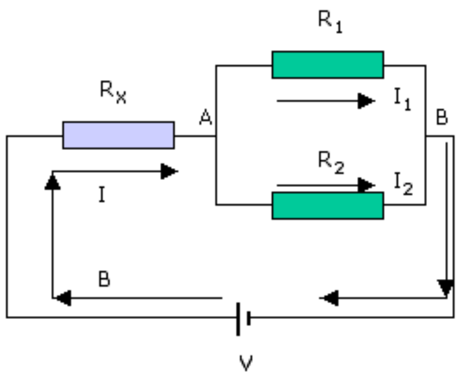
e quindi, la corrente che attraversa la lampadina in queste condizioni circuitali è:

$$I = \frac{V}{R_e} = \frac{12}{6,3} = 1,9A$$

PROBLEMA

Il circuito in figura, alimentato da un generatore da 22 V di resistenza interna trascurabile, è percorso da una corrente I = 1,0 A. Calcolare:

1. la resistenza indicata con x
2. la tensione agli estremi delle resistenze R_1 = 25 Ω e R_2 = 100 Ω



Soluzione

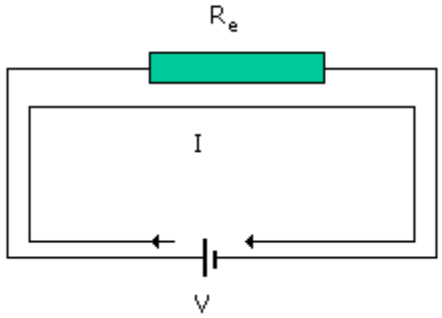
1. La resistenza R_{12}, derivante dal parallelo delle resistenze R_1 e R_2, è in serie con la resistenza R_X. Pertanto, la resistenza equivalente del circuito è:

$$R_e = R_X + R_{12}$$

dove:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{25} + \frac{1}{100} = 0{,}05 \Rightarrow R_{12} = \frac{1}{0{,}05} = 20\Omega$$

Il circuito dato, allora, diventa equivalente al seguente circuito, dove la R_e è data da:



$$R_e = \frac{V}{I} = \frac{22}{1{,}0} = 22\,\Omega$$

per cui, dalla (1), ricaviamo la R_X:

$$R_X = R_e - R_{12} = 22 - 20 = 2\Omega$$

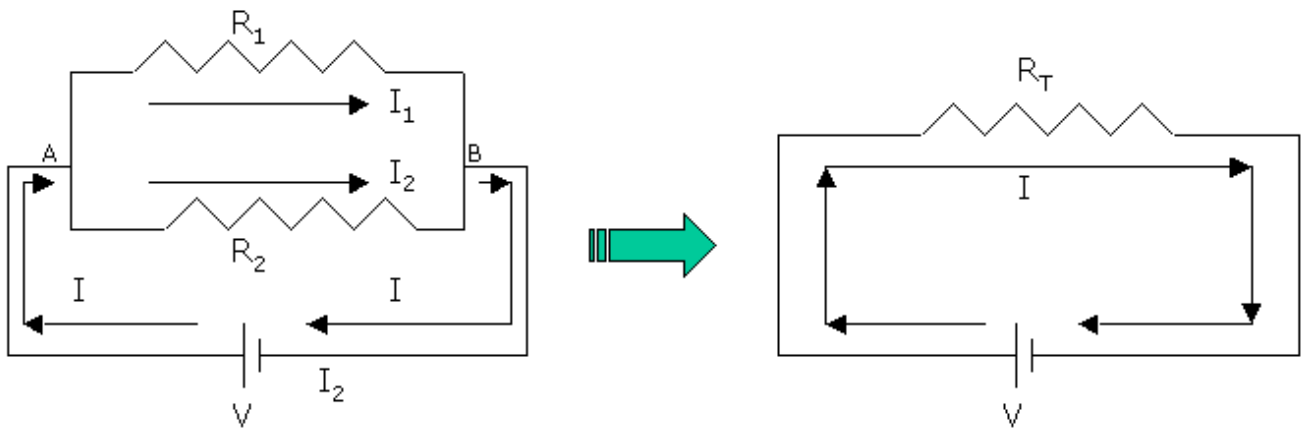
2. Dato che R_X provoca una caduta di tensione, la differenza di potenziale ai capi di R_1 e R_2 è:

$$V_{AB} = V - V_X = V - R_X I = 22 - 2 \cdot 1{,}0 = 20V$$

PROBLEMA

Due resistenze, 7 Ω e 13 Ω, sono collegate in parallelo e alimentate da una tensione di 12 V. Calcolare l'intensità di corrente erogata dal generatore e quella che attraversa ogni singola resistenza.

Soluzione



Per calcolare la corrente erogata dal generatore, dobbiamo prima determinare la resistenza totale. Poiché le due resistenze sono in parallelo, la resistenza totale si calcola come:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{7} + \frac{1}{13} = 0{,}22\Omega^{-1} \Rightarrow R_T = \frac{1}{0{,}22} = 4.5\,\Omega$$

e, pertanto, il circuito sarà equivalente a quello indicato in figura. Applicando a questo circuito la legge di Ohm, si ottiene la corrente erogata dal generatore:

$$R_T = \frac{V}{I} \Rightarrow I = \frac{V}{R_T} = \frac{12}{4{,}5} = 2{,}7A$$

Poiché le due resistenze sono collegate in parallelo, e quindi sottoposte alla stessa differenziale di potenziale del generatore, la corrente che le attraversa sarà:

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{12}{7} = 1{,}7A \qquad I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{12}{13} = 0{,}9A$$

Ovviamente:

$$I = I_1 + I_2 = 2{,}7A$$

Questo risultato esprime il cosiddetto:

1° PRINCIPIO DI KIRCHHOFF - La somma delle correnti entranti in un nodo è uguale alla somma delle correnti uscenti:

$$\sum I_{Entranti} = \sum I_{Uscenti}$$

Infatti:

I = corrente entrante nel nodo A
I_1 = corrente uscente dal nodo A $\qquad$ I_2 = corrente uscente dal nodo A

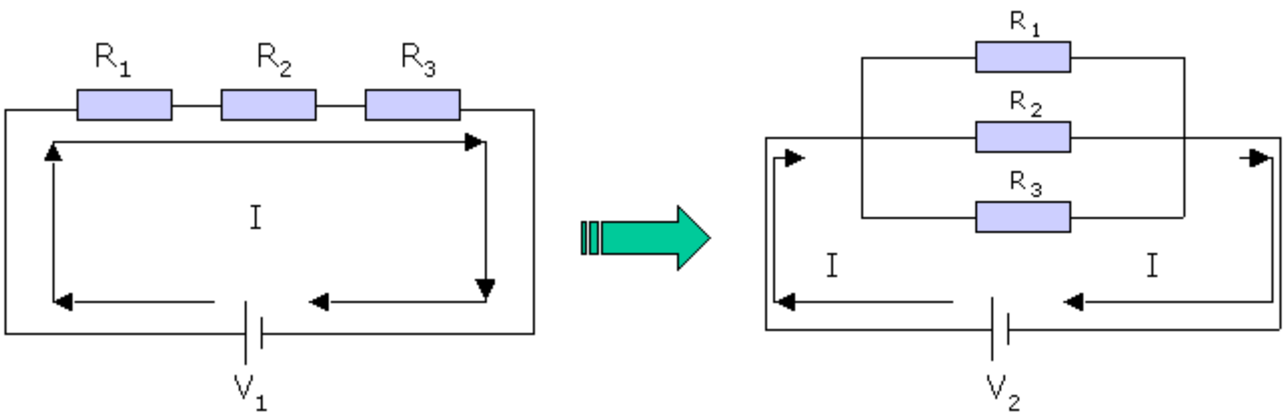
Oppure:

I_1 = corrente entrante nel nodo B $\qquad$ I_2 = corrente entrante nel nodo B
I = corrente uscente dal nodo B

Nodo: punto di un circuito in cui confluiscono, o da cui si diramano, più di due rami di un circuito.

PROBLEMA

Un circuito comprendente tre resistenze in serie di valore, rispettivamente, 10 Ω, 15 Ω e 20 Ω è alimentato da 220 V. Calcolare la d.d.p. da applicare al sistema delle tre resistenze collegate in parallelo affinché l'intensità di corrente non subisca variazioni.



Soluzione

Nel primo circuito le tre resistenze sono in serie, pertanto la resistenza totale si calcola come:

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3 = 10 + 15 + 20 = 45\Omega$$

Applichiamo la prima legge di Ohm per calcolare la corrente erogata dal generatore V_1:

$$R_T = \frac{V_1}{I} \Rightarrow I = \frac{V_1}{R_T} = \frac{220}{45} = 4{,}9A$$

Nel secondo circuito le tre resistenze sono in parallelo, per cui la resistenza totale si determina nel seguente modo:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} = 0{,}22\Omega^{-1} \Rightarrow R_T = \frac{1}{0{,}22} = 4{,}5\,\Omega$$

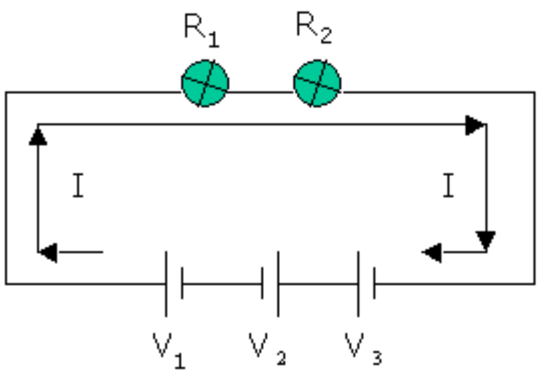
Affinché nel secondo circuito circoli la stessa corrente del primo circuito, bisogna applicare un generatore di tensione V_2 pari a:

$$V_2 = R_T \cdot I = 4{,}5 \cdot 4{,}9 = 22V$$

PROBLEMA

Due lampadine di 10 Ω e di 5 Ω collegate in serie sono alimentate da tre generatori di tensione inseriti in serie come in figura, aventi ciascuno un valore, rispettivamente, di 10 V, 13 V e 7 V. Calcolare l’intensità di corrente che attraversa il circuito.

Soluzione



2° PRINCIPIO DI KIRCHHOFF: la somma algebrica delle f.e.m. (V) applicate in un circuito è uguale alla somma delle cadute di tensione (V_R = R·I) provocate dal passaggio della corrente nelle resistenze presenti nel circuito:

$$\sum V = \sum R \cdot I$$

Convenzione:

1. Il verso della corrente nel circuito, quando sono presenti più generatori di tensione, viene fissato a piacere. Se il valore trovato è positivo, allora il verso fissato è quello giusto; se il valore trovato è negativo, allora il verso giusto sarà contrario a quello fissato.

2. La f.e.m. (forza elettromotrice) è positiva se la corrente la attraversa dal polo negativo al polo positivo; la f.e.m. è negativa se la corrente la attraversa dal polo positivo al polo negativo, nel qual caso si chiama f.c.e.m. (forza controelettromotrice)

Applichiamo il 2° principio di Kirchhoff:

$$V_1 - V_2 + V_1 = (R_1 + R_2) \cdot I \Rightarrow I = \frac{V_1 - V_2 + V_3}{R_1 + R_2} = \frac{10 - 13 + 7}{10 + 5} = 0{,}27A$$

dove:

- in base alla convenzione adottata, V_1 e V_3 sono positive, quindi si comportano come f.e.m., e V_2 è negativa, quindi si comporta come una f.c.e.m.
- le due resistenze, essendo in serie, sono state sommate

Poiché il valore trovato è positivo, il verso fissato alla corrente nel circuito è quello giusto.

Ripetiamo l'esercizio con i seguenti valori delle f.e.m.:

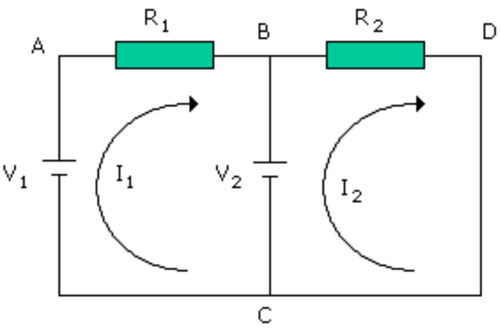
$$V_1 = 10\ V \qquad V_2 = 20\ V \qquad V_3 = 6\ V$$

Applichiamo il 2° principio di Kirchhoff:

$$V_1 - V_2 + V_1 = (R_1 + R_2)\cdot I \Rightarrow I = \frac{V_1 - V_2 + V_3}{R_1 + R_2} = \frac{10 - 20 + 6}{10 + 5} = -0{,}27A$$

Poiché il valore trovato è negativo, il verso giusto della corrente nel circuito sarà contrario a quello fissato.

PROBLEMA



Dato il circuito in figura con i seguenti valori:

$$V_1 = 4\ V \qquad V_2 = 2\ V \qquad R_1 = 10\ \Omega \qquad R_2 = 20\ \Omega$$

calcolare le correnti che attraversano i tre rami (le due resistenze ed il generatore V_2).

Soluzione

Indichiamo con I_1 e I_2 le correnti di maglia, il cui verso viene fissato a piacere (noi lo fissiamo come in figura), ed applichiamo il 2° principio di Kirchhoff:

$$\sum V = \sum R\cdot I \Rightarrow \begin{cases} V_1 - V_2 = R_1 I_1 \\ V_1 = R_2 I_2 \end{cases}$$

Il sistema così ottenuto è un sistema di due equazioni in due incognite I_1 e I_2. Sostituendo i valori circuitali otteniamo:

$$\begin{cases} 2 = 10I_1 \\ 4 = 20I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 0{,}2A \\ I_2 = 0{,}2A \end{cases}$$

Poiché i valori delle correnti sono positivi, il verso fissato alle correnti nel circuito è quello giusto. Le correnti I_1 e I_2 rappresentano le correnti nei rami AB e BD, ossia che attraversano le resistenze R_1 e R_2. La corrente che attraversa il ramo BC, per il 1° principio di Kirchhoff, sarà:

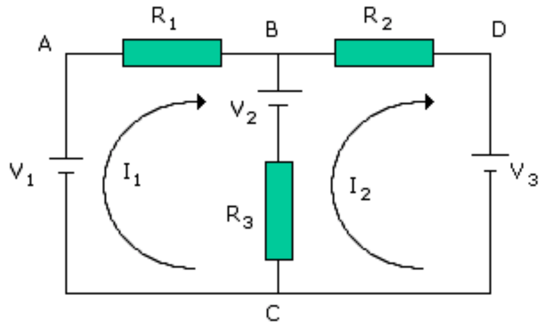
$$I_3 = I_1 - I_2 = 0{,}2 - 0{,}2 = 0$$

PROBLEMA

Sia dato il circuito in figura con i seguenti valori:

V_1=10 V V_2=7 V V_3=20 V
R_1=10 Ω R_2=20Ω R_3=30 Ω

- Calcolare le correnti che attraversano i tre rami AB, BC, BD.



Soluzione

Indichiamo con I_1 e I_2 le correnti di maglia, il cui verso viene fissato a piacere (noi lo fissiamo come in figura), ed applichiamo il 2° principio di Kirchhoff:

$$\sum V = \sum R \cdot I \Rightarrow \begin{cases} V_1 - V_2 = R_1 I_1 + R_3(I_1 - I_2) \\ V_2 - V_3 = R_2 I_2 + R_3(I_2 - I_1) \end{cases}$$

Il sistema così ottenuto è un sistema di due equazioni in due incognite I_1 e I_2.

Sostituiamo i valori circuitali e risolviamo il sistema con il metodo di Cramer:

$$\begin{cases} 3 = 10I_1 + 30I_1 - 30I_2 \\ -13 = 20I_2 + 30I_2 - 30I_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 40I_1 - 30I_2 = 3 \\ 30I_1 - 50I_2 = 13 \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -30 \\ 13 & -50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 40 & -30 \\ 30 & -50 \end{vmatrix}} = \frac{-150 + 390}{-2000 + 900} = -022\,A \qquad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 40 & 3 \\ 30 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 40 & -30 \\ 30 & -50 \end{vmatrix}} = \frac{520 - 90}{-2000 + 900} = -0{,}39\,A$$

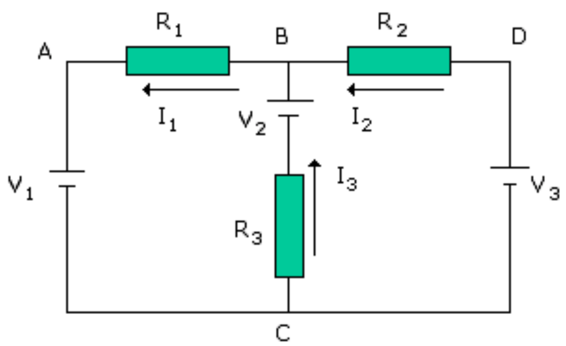
Poiché i valori delle correnti di maglia sono negativi, le correnti I_1 e I_2 nei rami AB e BD avranno verso opposto a quello fissato.
La corrente I_3 che attraversa il ramo BC, per il 1° principio di Kirchhoff, sarà la differenza tra la corrente I_1 e la corrente I_2:

$$I_3 = I_1 - I_2 = 0{,}22 - 0{,}39 = -0{,}17\ A$$

e, sempre per il 1° principio di Kirchhoff, sarà una corrente uscente, infatti:

$$\sum I_{Entranti} = \sum I_{Uscenti} \Rightarrow I_2 = I_1 + I_3 \Rightarrow 0{,}39 = 0{,}22 + 0{,}17$$

In definitiva, la situazione è la seguente:



PROBLEMA

Una bobina è formata da 500 spire di filo di acciaio (ρ = 0,18 $\Omega\cdot mm^2/m$) di sezione 0,4 mm^2. Il diametro delle spire è 4 cm. Calcolare la resistenza della bobina.

Soluzione

Poiché i dati del problema riguardano le caratteristiche fisiche e geometriche del filo di acciaio, la resistenza di una spira la calcoliamo attraverso la seconda legge di Ohm:

$$R = \rho \cdot \frac{L}{s}$$

Poiché la bobina è formata da N spire, allora la resistenza complessiva sarà:

$$R = \rho \cdot \frac{N \cdot L}{s}$$

dove L è la lunghezza di una spira, che ha la forma di un cerchio:

$$L = 2\pi \cdot R = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,02 = 0,13\,m$$

Pertanto:

$$R = 0,18 \cdot \frac{500 \cdot 0,13}{0,4} = 28,3\,\Omega$$

ATTENZIONE: usare bene le giuste unità di misura.

PROBLEMA

Determinare la resistenza di un filo di rame a 100 °C, lungo 1000 m e di sezione 1 mm^2, sapendo che la resistività a 20 °C è 0,017 $\Omega\cdot mm^2/m$ e che il coefficiente di temperatura è $3,9\cdot10^{-3}$ $°C^{-1}$.

Soluzione

La resistività dipende dalla temperatura attraverso la seguente relazione:

$$\rho_{100} = \rho_{20°} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t) = 0,017 \cdot (1 + 3,9 \cdot 10^{-3} \cdot 80) = 0,022\,\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$$

dove: Δt = 100 – 20 = 80 °C

Pertanto la resistenza del filo di rame a 100 °C vale:

$$R = \rho_{100} \cdot \frac{L}{s} = 0,022 \cdot \frac{1000}{1} = 22\,\Omega$$

PROBLEMA

Poiché la resistenza di un conduttore varia con la temperatura, si possono costruire termometri a resistenza che utilizzano come proprietà termometrica la resistenza di un resistore.
Ciò premesso, determinare la temperatura di un forno sapendo che un termometro a resistenza di platino ($\alpha = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$ °C^{-1}) alla temperatura di 20 °C presenta la resistenza di 50 Ω, mentre quando è posto nel forno la resistenza è 225 Ω.

Soluzione

La resistenza dipende dalla temperatura attraverso la seguente relazione:

$$R_t = R_{20°} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t)$$

Poiché sono noti i valori di R alla temperatura t e alla temperatura di 20 °C, l'incognita è Δt:

$$225 = 50 \cdot (1 + 3{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta t) \Rightarrow 225 = 50 + 0{,}175\Delta t \Rightarrow 0{,}175\Delta t = 175 \Rightarrow \Delta t = 1000°C$$

In definitiva la temperatura del forno sarà:

$$\Delta t = t - 20 = 1000 \Rightarrow t = 1000 + 20 = 1020°C$$

PROBLEMA

Il campo elettrico in un filo di rame percorso dalla corrente di 2 A è $5 \cdot 10^{-3}$ V/m. Calcolare il diametro del filo ($\rho = 0{,}017\ \Omega \cdot mm^2/m$).

Soluzione

Dall'unità di misura con cui è espresso il campo elettrico nel problema, cioè volt/metro, si ricava che:

$$E = \frac{V}{L} \quad \text{da cui:} \quad V = E \cdot L$$

Poiché:

$$V = R \cdot I = \rho \cdot \frac{L}{s} \cdot I$$

si ottiene:

$$\rho \cdot \frac{\cancel{L}}{s} \cdot I = E \cdot \cancel{L} \Rightarrow s = \frac{\rho \cdot I}{E} = \frac{0{,}017 \cdot 2}{5 \cdot 10^{-3}} = 6{,}8\,mm$$

Nota la sezione del filo, il calcolo del diametro è semplice:

$$s = \pi \cdot R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{s}{\pi} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{s}{\pi}} = 1{,}47\,mm \Rightarrow D = 2 \cdot R = 2 \cdot 1{,}47 = 2{,}9\,mm$$

PROBLEMA

Un filo di alluminio ($\rho = 2{,}80 \cdot 10^{-8}$ $\Omega \cdot m$) lungo 49,0 m e di diametro 0,700 mm è collegato in serie con un filo di rame ($\rho = 1{,}70 \cdot 10^{-8}$ $\Omega \cdot m$) lungo 98,0 m e avente lo stesso diametro. L'intensità di corrente che attraversa i fili è 3,14 A. Determinare l'intensità del campo elettrico all'interno dei fili.

Soluzione

Il campo elettrico è legato alla differenza di potenziale ai capi dei fili conduttori e alla loro lunghezza dalla relazione:

$$E = \frac{\Delta V}{L}$$

per cui dobbiamo calcolare le cadute di tensione ΔV causate dal filo di alluminio e di rame.

Per la 1ª legge di Ohm si ha che:

$$\Delta V = R \cdot I$$

dove:

$$R_{alluminio} = \rho_{al} \cdot \frac{L}{s} = 2{,}80 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{49{,}0}{0{,}38 \cdot 10^{-6}} = 3{,}61\,\Omega$$

con: $S = \pi R^2 = \pi \cdot (0{,}350 \cdot 10^{-3})^2 = 0{,}38 \cdot 10^{-6} m^2$

$$R_{rame} = \rho_{ra} \cdot \frac{L}{s} = 1{,}70 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{98{,}0}{0{,}38 \cdot 10^{-6}} = 4{,}38\,\Omega$$

con: $S = \pi R^2 = \pi \cdot (0{,}350 \cdot 10^{-3})^2 = 0{,}38 \cdot 10^{-6} m^2$

per cui:

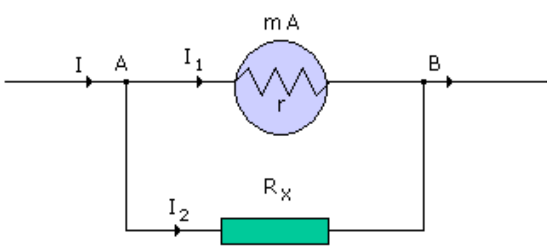
$$\Delta V_{al} = 3{,}61 \cdot 3{,}14 = 11{,}3V \qquad \Delta V_{ra} = 4{,}38 \cdot 3{,}14 = 13{,}8V$$

In definitiva il campo elettrico all'interno dei fili è:

$$E_{al} = \frac{11{,}3}{49{,}0} = 0{,}231V/m \qquad E_{al} = \frac{13{,}8}{98{,}0} = 0{,}141V/m$$

PROBLEMA

Un milliamperometro segna 1 mA a fondo scala e ha una resistenza interna r = 5 Ω. In che modo può essere utilizzato per misurare correnti superiori a 1 mA, per esempio I = 0,5 A?



Soluzione

Collegando fra i morsetti A e B del milliamperometro una resistenza R_X, la corrente nel nodo A si suddivide: una parte I_1 attraversa lo strumento, un'altra I_2 la resistenza R_X.
Infatti, per il 1° principio di Kirchhoff:

$$I = I_1 + I_2$$

Essendo le resistenze r e R_X in parallelo, si ha che:

$$V_A - V_B = r \cdot I_1 \qquad V_A - V_B = R \cdot I_2$$

Confrontando queste due relazioni:

$$r \cdot I_1 = R_X \cdot I_2$$

e risolvendo rispetto a R_X si ottiene:

$$R_X = r \cdot \frac{I_1}{I_2}$$

Il problema chiede che quando I = 0,5 A, la parte che attraversa lo strumento sia I_1 = 1 mA. Questo significa, in base al 1° principio di Kirchhoff, che I_2 = 0,499 A.
Pertanto, la resistenza R_X che bisogna inserire in parallelo al milliamperometro per aumentare la sua portata da 1 mA a 0,5 A è:

$$R_X = 5 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}}{0,499} = 50,1 \cdot 10^{-3}\ \Omega$$

La resistenza R_X si chiama resistenza di shunt.

PROBLEMA

Un resistore avente una resistenza di 22 Ω è alimentato da una tensione di 220 V. Calcolare l'intensità di corrente che percorre il resistore e l'energia dissipata in un'ora.

Soluzione

L'energia dissipata per effetto Joule dal resistore è data da:

$$Q = R \cdot I^2 \cdot t$$

dove il valore della corrente lo ricaviamo dalla prima legge di Ohm:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{220}{22} = 10A$$

Pertanto:

$$Q = 22 \cdot 10^2 \cdot 3600 = 7,92 \cdot 10^6\ J$$

dove: 1 ora = 3600 secondi.

PROBLEMA

Quanto calore sviluppa in un'ora un tostapane che assorbe una corrente di 5A a 220V?

Soluzione

Applichiamo la legge di Joule per calcolare il calore sviluppato:

$$Q = V \cdot I \cdot t = 1000Wh = 1,1kWh$$

PROBLEMA

Un motore elettrico assorbe una potenza di 4 W se alimentato da una batteria da 8V. Calcolare l'energia consumata in 10 minuti e l'intensità di corrente.

Soluzione

Applichiamo la legge di Joule per calcolare l'energia consumata:

$$Q = P \cdot t = 4 \cdot 600 = 2400\,J$$

dove: 10 minuti = 600 secondi

La corrente viene determinata partendo dalla definizione di potenza elettrica:

$$P = V \cdot I \Rightarrow I = \frac{P}{V} = \frac{4}{8} = 0{,}5A$$

PROBLEMA

Una stufa posta in un circuito di resistenza trascurabile alimentato a 220V, assorbe una potenza di 1100W. Poiché in tali condizioni riscalda troppo, si inserisce una resistenza di 11Ω in serie con la stufa. Calcolare di quanto si riduce la potenza dissipata attraverso la stufa e l'intero circuito.

Soluzione

In base ai dati del problema, la resistenza della stufa la calcoliamo dalla definizione della potenza dissipata:

$$P = R \cdot I^2 \Rightarrow R = \frac{P}{I^2} = \frac{1100}{5^2} = 44\,\Omega$$

dove la corrente è stata determinata dalla definizione di potenza elettrica:

$$P = V \cdot I \Rightarrow I = \frac{P}{V} = \frac{1100}{220} = 5A$$

Dunque, se inseriamo in serie alla stufa (R_{stufa} = 44Ω) la resistenza da 11Ω, la corrente che circolerà nel circuito, ovviamente, diminuirà, infatti dalla prima legge di Ohm:

$$I = \frac{V}{R_T} = \frac{220}{44+11} = 4A$$

quindi la potenza dissipata dalla stufa in queste nuove condizioni si riduce a:

$$P = R \cdot I^2 = 44 \cdot 4^2 = 704W$$

che in percentuale corrisponde a:

$$P\% = \frac{1100 - 704}{1100} \cdot 100 = 36\%$$

Poiché anche la resistenza da 11Ω dissipa una potenza pari a:

$$P = R \cdot I^2 = 11 \cdot 4^2 = 176W$$

allora l'intero circuito dissiperà una potenza pari a:

$$P_T = P_{stufa} + P_R = 704 + 176 = 880W$$

che corrisponde ad una diminuzione, rispetto al circuito con la sola stufa, pari a:

$$P_T\% = \frac{1100 - 880}{1100} = 20\%$$

PROBLEMA

Due stufe sono poste in parallelo in un circuito alimentato da una differenza di potenziale di 220 V. In tali condizioni esse dissipano rispettivamente 1100 W e 2000 W. Calcolare la potenza complessivamente dissipata e l'energia consumata dalle stufe per 5 ore di funzionamento, se vengono collegate in serie nello stesso circuito.

Soluzione

1. Calcoliamo le resistenze delle due stufe:

$$R_1 = \frac{V}{I_1} = \frac{220}{5} = 44,0\,\Omega \qquad R_2 = \frac{V}{I_2} = \frac{220}{9,1} = 24,2\,\Omega$$

dove le correnti le calcoliamo dalla relazione della potenza, tenendo presente che le due stufe sono in parallelo e quindi sottoposte alla stessa tensione V:

$$P_1 = V \cdot I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{P_1}{V} = \frac{1100}{220} = 5,0A \qquad P_2 = V \cdot I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{P_2}{V} = \frac{2000}{220} = 9,1A$$

A questo punto colleghiamo le due stufe in serie nello stesso circuito, per cui la resistenza equivalente è:

$$R_e = R_1 + R_2 = 44,0 + 24,2 = 68,2\,\Omega$$

mentre la corrente è data da:

$$I = \frac{V}{R_e} = \frac{220}{68,2} = 3,23A$$

Pertanto, la potenza complessivamente dissipata in queste condizioni è:

$$P = V \cdot I = 220 \cdot 3,23 = 711\,W$$

mentre l'energia consumata in 5 ore di funzionamento è:

$$E = P \cdot t = 711 \cdot 5 = 3555Wh = 3,56\ kW/h$$

PROBLEMA

Un elettricista ha a disposizione tre resistenze R_1 = 1 Ω, R_2 = 2 Ω, R_3 = 3 Ω ed una batteria da 12 V con resistenza interna R_i = 1,46 Ω. In che modo deve collegare le tre resistenze alla batteria affinché sia massima/minima la potenza dissipata sulle resistenze?

Soluzione

Poiché la potenza dissipata è data dalla relazione:

$$(1)\quad P = \frac{V^2}{R_T}$$

si capisce che la P è minima se la R_T è la più grande possibile. Per cui le resistenze devono essere collegate in serie.
Pertanto, passando ai calcoli si ottiene:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 = 1 + 2 + 3 = 6\,\Omega$$

La resistenza equivalente R_{eq}, a sua volta è in serie con la resistenza interna della batteria, per cui la resistenza totale del circuito è:

$$R_T = R_i + R_{eq} = 1{,}46 + 6 = 7{,}46\,\Omega$$

In definitiva:

$$P_{min} = \frac{12^2}{7{,}46} = 19{,}3\,W$$

Se, invece, si vuole massimizzare la potenza dissipata, sempre dalla (1) si deduce che la R_T deve essere la più piccola possibile per cui le resistenze devono essere collegate in parallelo.
Passando ai calcoli si ottiene:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1{,}83 \Rightarrow R_{eq} = \frac{1}{1{,}83} = 0{,}54\,\Omega$$

Anche in questo caso, la resistenza equivalente R_{eq} è in serie con la resistenza interna della batteria, per cui la resistenza totale del circuito è:

$$R_T = R_i + R_{eq} = 1{,}46 + 0{,}54 = 2\,\Omega$$

In definitiva:

$$P_{max} = \frac{12^2}{2} = 72\,W$$

PROBLEMA

Un elettricista inesperto connette in serie, anziché in parallelo, tre lampadine da 80 W di un lampadario che è alimentato a 220 V. Si calcoli:

1. la potenza totale del lampadario, quando la connessione è fatta in modo corretto;
2. la potenza totale del lampadario, quando la connessione è fatta in modo corretto;
3. se, nel caso scorretto, le lampade sono più o meno luminose che nella situazione regolare;
4. che succede se si svita una lampada?

Soluzione

1. Quando le lampade sono collegate nel modo corretto, cioè in parallelo, ossia sottoposte alla stessa d.d.p. di 220 V, si ha che:

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 = 80 + 80 + 80 = 240\,W$$

2. Analizziamo la situazione nel caso in cui le lampade siano collegate in serie. Ciascuna lampada, in questo caso, è sottoposta ad una d.d.p. pari a:

$$V_i = \frac{V}{3} = \frac{220}{3} = 73{,}3\,V$$

La resistenza di ciascuna lampada si può calcolare dal caso normale:

$$R_i = \frac{V^2}{P_i} = \frac{220^2}{80} = 605\,\Omega$$

per cui, la potenza di ciascuna lampada è:

$$P_i = \frac{V_i^2}{R_i} = \frac{73{,}3^2}{605} = 8{,}9\,W$$

mentre la potenza totale è:

$$P_T = 8{,}9 + 8{,}9 + 8{,}9 = 26{,}7\,W$$

3. Nel caso scorretto la potenza di ogni lampada è talmente bassa che quasi non si accendono.

4. Poiché le lampade sono collegate in serie, se si svita una lampada si interrompe il circuito e si spengono anche le altre lampade.

PROBLEMA

La resistenza di uno scaldabagno ha il valore di 22Ω e viene alimentata a 220V per riscaldare 50 litri di acqua alla temperatura iniziale di 25°C. Calcolare la temperatura raggiunta dall'acqua in 30 minuti.

Soluzione

Per calcolare la temperatura dell'acqua dobbiamo far uso della:

LEGGE FONDAMENTALE DELLA TERMOLOGIA: $Q = mc\Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{Q}{mc}$

dove: Q = calore fornito per effetto Joule dalla resistenza alla massa m di acqua
m = massa di acqua
c = costante (calore specifico dell'acqua)
$\Delta T = T_{finale} - T_{iniziale}$

Però ci manca Q, che calcoliamo attraverso la legge di Joule:

$$Q = R \cdot I^2 \cdot t = 22 \cdot 10^2 \cdot 1800 = 3,96 \cdot 10^6 \text{ J}$$

dove:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{220}{22} = 10A$$

Pertanto:

$$\Delta T = \frac{3,96 \cdot 10^6}{50 \cdot 4186} = 18,9°C$$

dove: m = 50 litri = 50kg (approssimativamente) c = 4186 J/kg·°C (ricavato dalla tabella dei calori specifici delle sostanze)

In definitiva:

$$\Delta T = T_F - T_I = 18,9°C \Rightarrow T_F = T_I + 18,9 = 25 + 18,9 = 43,9°C$$

PROBLEMA

Una caldaia è alimentata con una resistenza elettrica a 220 V. Determinare:

1. la potenza occorrente per portare in t = 10 minuti da T_1 = 20 °C a T_2 = 100 °C una massa M = 5 kg di acqua (calore specifico = 4186 J/kg·°C) considerato che il rendimento della caldaia sia η = 80%;
2. la resistenza elettrica

Soluzione

1. Per scaldare la massa di acqua M occorre una quantità di calore pari a:

$$Q = Mc\Delta T = 5 \cdot 4186 \cdot 80 = 1,67 \cdot 10^6 \text{ J}$$

che otteniamo dall'energia dissipata E_d per effetto Joule dalla resistenza della caldaia. Pertanto, se indichiamo con P_d la potenza dissipata, deve essere:

$$E_d = Q \Rightarrow P_d \cdot t = Mc\Delta T$$

da cui ricaviamo che:

$$P_d = \frac{Q}{t} = \frac{1,67 \cdot 10^6}{600} = 2783\,W$$

Poiché per definizione il rendimento è il rapporto tra la potenza dissipata P_d e quella assorbita P_a:

$$\eta = \frac{P_d}{P_a}$$

ricaviamo P_a, che non è altro la potenza occorrente per riscaldare la massa d'acqua in questione:

$$P_a = \frac{P_d}{\eta} = \frac{2783}{0,8} = 3479\ \text{W}$$

2. Essendo la potenza elettrica:

$$P = V \cdot I$$

la corrente che circola nella resistenza è:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{3479}{220} = 15,8\text{A}$$

e pertanto, la resistenza elettrica della caldaia è:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{220}{15,8} = 14\,\Omega$$

PROBLEMA

Un fornello elettrico è alimentato da una batteria che fornisce una certa differenza di potenziale. Il fornello è costituito da una resistenza elettrica R = 50 Ω e porta in 10 minuti all'ebollizione una quantità di 2 litri d'acqua, inizialmente alla temperatura di 10 °C. Calcolare la corrente che passa nella resistenza

Soluzione

La quantità di calore Q necessaria per riscaldare la massa d'acqua non è altro che l'energia E_J dissipata dalla resistenza per effetto Joule. Pertanto dall'eguaglianza di Q ed E_j ricaviamo il valore della corrente che attraversa la resistenza:

$$Q = E_J \Rightarrow mc(T_f - T_i) = RI^2t \Rightarrow I = \sqrt{\frac{mc\Delta T}{Rt}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4186 \cdot 90}{50 \cdot 600}} = 5,01\,\text{A}$$

m = 2 litri = 2 kg   t = 10 min = 600 s   c = calore specifico acqua = 4186 J/kg·°C

PROBLEMA

Un resistore alimentato a 220 V, posto in un calorimetro contenente un miscuglio di acqua e ghiaccio, fa fondere in 3 minuti, a pressione atmosferica, 30 grammi di ghiaccio a 0 °C.

- Determinare la resistenza del resistore

Soluzione

L'energia dissipata nel tempo t per effetto Joule nella resistenza R è data dalla relazione:

$$E_J = P_J \cdot t = \frac{V^2}{R} \cdot t$$

D'altra parte, dalla termologia sappiamo che per sciogliere una massa m di ghiaccio alla temperatura di 0 °C e alla pressione di 1 atm c'è bisogno di una quantità di calore pari a:

$$Q = mL_f$$

dove $L_f = 3{,}34 \cdot 10^5$ J/kg è il calore latente di fusione del ghiaccio.

Poiché deve essere:

$$E_J = Q \Rightarrow \frac{V^2}{R} \cdot t = mL_f$$

da questa equazione ricaviamo l'incognita R:

$$R = \frac{V^2 t}{mL_f} = \frac{220^2 \cdot 180}{0{,}030 \cdot 3{,}34 \cdot 10^5} = 869\,\Omega$$

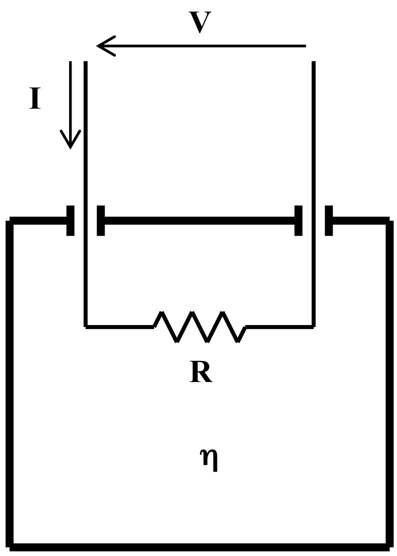
PROBLEMA

Si abbia un forno elettrico a resistenza alimentato con una tensione continua pari a V=230 V. Calcolare:

1. il valore della resistenza R del forno sapendo che esso deve essere in grado di elevare da T_1=20 °C a T_2=60 °C la temperatura di una quantità d'olio minerale pari a 50 litri nel tempo di 15 minuti. Si assuma per il forno un rendimento del η=90%.
2. sezione e lunghezza della resistenza, nel caso in cui sia realizzata con un filo di nichel-cromo a spirale (resistività a 0 °C = 1,06 $\Omega \cdot mm^2/m$; coefficiente di temperatura 0 °C = $5{,}1 \cdot 10^{-5}$ [$°C^{-1}$]; densità di corrente = 9 A/mm^2)

Soluzione

Il sistema allo studio può essere rappresentato con la seguente figura:



1. Per prima cosa si deve determinare il lavoro termico necessario per realizzare il voluto riscaldamento dell'olio. Come si sa dalla termologia la quantità di calore Q necessaria per riscaldare una sostanza si determina con l'espressione:

$$Q = mc_S(T_2 - T_1)$$

dove m [kg] è la massa della sostanza, c_S [cal/(°C·g)] è il calore specifico della sostanza, T_1 e T_2 [°C] le temperature iniziale e finale della sostanza.
Nel nostro caso la massa la determiniamo attraverso il volume V [dm^3] e la densità dell'olio minerale δ [kg/dm^3]:

$$m = \delta \cdot V = 0{,}875 \cdot 50 = 43{,}75\,kg$$

Il calore specifico per l'olio minerale vale c_S=458,6 [cal/(kg·°C)], siamo quindi in grado di determinare il calore necessario:

$$Q = 43{,}75 \cdot 458{,}6 \cdot (60 - 20) = 80{,}25 \cdot 10^4\ cal = 80{,}25 \cdot 10^4 \cdot 4{,}186 = 33{,}60 \cdot 10^5\ J$$

Considerando che detto lavoro deve essere compiuto in 15 minuti, calcoliamo la potenza calorica del forno:

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{33{,}60 \cdot 10^5}{15 \cdot 60} = 3733\,\mathrm{W}$$

Naturalmente, essendo il forno non ideale ma caratterizzato da un rendimento pari al 90% ovvero pari a 0,90, la potenza elettrica della resistenza riscaldante sarà maggiore:

$$\eta = \frac{P}{P_R} \Rightarrow P_R = \frac{P}{\eta} = \frac{3733}{0{,}90} = 4148\,\mathrm{W}$$

Considerando che è nota la tensione applicata alla resistenza, mediante la legge di Joule possiamo trovare la resistenza stessa:

$$P_R = VI = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{P_R} = \frac{230^2}{4148} = 12{,}75\,\Omega$$

2. La corrente che attraversa il filo è:

$$I = \frac{P_R}{V} = \frac{4148}{230} = 18{,}03\,\mathrm{A}$$

per cui, conoscendo la corrente I e la densità di corrente σ, la sezione del filo si calcola immediatamente dalla definizione di densità di corrente:

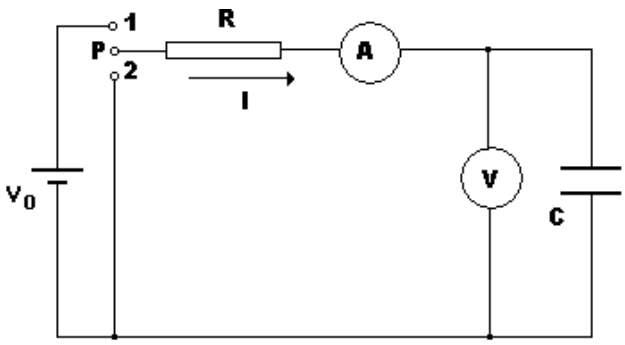
$$\sigma = \frac{I}{s} \Rightarrow s = \frac{I}{\sigma} = \frac{18{,}03}{9} = 2\,\mathrm{mm}^2$$

Visto il piccolissimo valore del coefficiente di temperatura possiamo ritenere in questa applicazione trascurabile la variazione di resistività conseguente alla variazione di temperatura, e pertanto, dalla 2ª legge di Ohm ricaviamo il valore della lunghezza della resistenza:

$$R = \rho \cdot \frac{L}{s} \Rightarrow L = \frac{R \cdot s}{\rho} = \frac{12{,}75 \cdot 2}{1{,}06} = 24{,}06\,\Omega$$

PROBLEMA

Dato il circuito in figura, calcolare il valore della tensione ai capi del condensatore e quello della corrente nel circuito dopo un tempo t = 0,2 s, sia nella fase di carica che scarica. Calcolare inoltre dopo quanto tempo il condensatore si può ritenere carico o scarico completamente.



Dati circuitali:

V_0 = 50 V   R = 7 kΩ   C = 40 μF

Soluzione

LEGGE DI CARICA DEL CONDENSATORE $V = V_0 \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ $I = \frac{V_0}{R} \cdot e^{-t/\tau}$

dove: e = 2,7….. numero di Nepero (numero irrazionale) $\tau = R\cdot C$ costante di tempo del circuito

Applichiamo tali leggi per calcolare il valore della tensione ai capi del condensatore e quello della corrente, nella fase di carica, dopo un tempo t = 0,2 s:

$$V = 50\cdot\left(1-e^{-0{,}2/0{,}28}\right) = 25{,}4V \qquad I = \frac{50}{7000}\cdot e^{-0{,}2/0{,}28} = 3{,}5\cdot 10^{-3}A$$

dove: $\tau = 7\cdot 10^{3}\cdot 40\cdot 10^{-6} = 280\cdot 10^{-3} = 0{,}28$ s

Il condensatore si può ritenere completamente carico dopo un tempo pari a:

$$t = 5\tau = 5\cdot 0{,}28 = 1{,}4s$$

Infatti il valore della tensione e della corrente dopo un tempo pari a t = 1,4 s sono:

$$V = 50\cdot\left(1-e^{-1{,}4/0{,}28}\right) = 49{,}7V \qquad I = \frac{50}{7000}\cdot e^{-1{,}4/0{,}28} = 5\cdot 10^{-5}A$$

LEGGE DI SCARICA DEL CONDENSATORE $V = V_0\cdot e^{-t/\tau}$ $I = \frac{V_0}{R}\cdot e^{-t/\tau}$

dove: e = 2,7….. numero di Nepero (numero irrazionale) $\tau = R\cdot C$ costante di tempo del circuito

Applichiamo tali leggi per calcolare il valore della tensione ai capi del condensatore e quello della corrente, nella fase di scarica, dopo un tempo t = 0,2 s:

$$V = 50\cdot e^{-0{,}2/0{,}28} = 30{,}5V \qquad I = \frac{50}{7000}\cdot e^{-0{,}2/0{,}28} = 3{,}5\cdot 10^{-3}A$$

dove: $\tau = 7\cdot 10^{3}\cdot 40\cdot 10^{-6} = 280\cdot 10^{-3} = 0{,}28$ s

Il condensatore si può ritenere completamente scarico dopo un tempo pari a:

$$t = 5\tau = 5\cdot 0{,}28 = 1{,}4s$$

Infatti il valore della tensione e della corrente dopo un tempo pari a t = 1,4 s sono:

$$V = 50\cdot e^{-1{,}4/0{,}28} = 0{,}3V \qquad I = \frac{50}{7000}\cdot e^{-0{,}2/0{,}28} = 3{,}5\cdot 10^{-3}A$$

IMPORTANTE – Nella fase di scarica il verso della corrente è contrario a quello della fase di carica. Ossia nella fase di carica la corrente parte da un valore alto positivo per poi tendere a zero; nella fase di scarica la corrente parte da un valore alto negativo per poi tendere a zero.

PROBLEMA

Un condensatore di capacità C = 5,0 μF possiede una carica q_0 all'istante in cui inizia il processo di scarica in un circuito RC. Se dopo 5,0 s la carica si riduce a $q_0/5$, quanto vale la resistenza R?

Soluzione

Nella fase di scarica, la carica in funzione del tempo è espressa dalla relazione:

$$(1) \qquad q = CVe^{-t/\tau}$$

All'istante t = 0, ossia all'inizio della fase di scarica, dalla (1) si ricava che:

$$(2) \qquad q_0 = CV \quad \text{in quanto } e^{0/\tau} = 1$$

Dopo t = 5 s la carica sulle armature del condensatore vale $q_0/5$, per cui dalla (1) si ricava che:

$$(3) \qquad \frac{q_0}{5} = CVe^{-5/\tau} \Rightarrow q_0 = 5CVe^{-5/\tau}$$

Confrontiamo la (2) e la (3):

$$CV = 5CVe^{-5/\tau} \qquad \text{e si ricava che:} \qquad 5e^{-5/\tau} = 1$$

che rappresenta un'equazione esponenziale la cui soluzione ci dà il valore dell'incognita costante di tempo τ:

$$e^{-5/\tau} = \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{5}{\tau} = \ln\frac{1}{5} \Rightarrow \tau \ln\frac{1}{5} = -5 \Rightarrow \tau = -\frac{5}{\ln\frac{1}{5}} = 3{,}1\,s$$

Dalla definizione di costante di tempo ricaviamo la formula per calcolare la resistenza:

$$\tau = RC \Rightarrow R = \frac{\tau}{C} = \frac{3{,}1}{5{,}0 \cdot 10^{-6}} = 0{,}62 \cdot 10^{6}\,\Omega$$

PROBLEMA

Un circuito RC alimentato da un generatore viene utilizzato per caricare un condensatore. Calcolare il tempo, espresso in unità della costante di tempo del circuito, necessario perché la carica sulle armature del condensatore raggiunga un valore uguale ai 9/10 del valore finale.

Soluzione

La fase di carica di un condensatore è descritta dalla seguente legge di tipo esponenziale:

$$(1) \qquad q = CV\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Il valore finale della carica è pari a:

$$(2) \qquad q_{fin} = CV$$

infatti poiché:

$$\lim_{t \to \infty} e^{-t/\tau} = 0 \qquad \text{la (1) si riduce alla (2)}$$

Ma la (2) comunque rappresenta la carica massima che si può accumulare sulle armature del condensatore in quanto in queste condizioni la differenza di potenziale tra le armature è la stessa di quella del generatore.

Poiché vogliamo calcolare il tempo necessario perché la carica sulle armature del condensatore raggiunga un valore uguale ai 9/10 del valore finale, deve essere:

$$(3) \qquad q = \frac{9}{10} q_{fin}$$

per cui sostituendo nella (3) le relazioni (1) e (2) otteniamo:

$$CV\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \frac{9}{10} CV$$

che rappresenta, effettuate le dovute semplificazioni, un'equazione esponenziale nell'incognita t:

$$1 - e^{-t/\tau} = \frac{9}{10} \Rightarrow e^{-t/\tau} = \frac{1}{10} \Rightarrow -\frac{t}{\tau} = \ln\frac{1}{10} \Rightarrow t = -\ln\frac{1}{10} \cdot \tau = 2{,}3\tau$$

PROBLEMA

Un condensatore inizialmente carico viene scaricato in un circuito RC. Calcolare il tempo, espresso in unità della costante di tempo del circuito, dopo il quale la carica sulle armature del condensatore si riduce a 1/10 del valore iniziale.

Soluzione

Nella fase di scarica, la carica in funzione del tempo è espressa dalla relazione:

$$(1) \qquad q = CVe^{-t/\tau}$$

All'istante di tempo t = 0, ossia all'inizio della fase di scarica, dalla (1) si ricava che:

$$(2) \qquad q_{ini} = CV \quad \text{in quanto } e^{0/\tau} = 1$$

come è ovvio che sia, in quanto all'inizio della fase di scarica il condensatore è completamente caricato per cui la carica presente sulle armature è data proprio dalla (1).

Poiché vogliamo calcolare il tempo necessario perché la carica sulle armature del condensatore si riduca a 1/10 del valore iniziale, deve essere:

$$(3) \qquad q = \frac{1}{10} q_{ini}$$

per cui sostituendo nella (3) le relazioni (1) e (2) otteniamo:

$$CVe^{-t/\tau} = \frac{1}{10} CV$$

che rappresenta, effettuate le dovute semplificazioni, un'equazione esponenziale nell'incognita t:

$$e^{-t/\tau} = \frac{1}{10} \Rightarrow\Rightarrow -\frac{t}{\tau} = \ln\frac{1}{10} \Rightarrow t = -\ln\frac{1}{10} \cdot \tau = 2{,}3\tau$$

PROBLEMA

Un condensatore di capacità C = 5,0 μF viene caricato a 10 V e poi collegato agli estremi di un resistore da 2,0 kΩ.

Determinare:

1. la carica sulle armature del condensatore dopo un tempo t = $2{,}0\cdot10^{-2}$ s e dopo un tempo molto lungo;
2. l'energia immagazzinata dal condensatore dopo un tempo t = $3{,}0\cdot10^{-2}$ s nella fase di carica

Soluzione

1. Il condensatore, dopo essersi caricato, se viene collegato alla resistenza R e staccato dal generatore di tensione, si scaricherà attraverso la resistenza (l'energia immagazzinata viene dissipata per effetto Joule attraverso la resistenza) seguendo la legge:

$$q = CV \cdot e^{-t/\tau}$$

per cui dopo un tempo t = $2{,}0\cdot10^{-2}$ s sulle armature del condensatore ci sarà una carica accumulata pari a:

$$q = 5{,}0\cdot10^{-6}\cdot10\cdot e^{-\frac{2{,}0\cdot10^{-2}}{10^{-2}}} = 6{,}8\cdot10^{-6}C = 6{,}8\mu C \qquad \text{dove } \tau = R\cdot C = 2{,}0\cdot10^{3}\cdot5{,}0\cdot10^{-6} = 10^{-2}\,s$$

Ovviamente, dopo un tempo molto lungo la carica sulle armature del condensatore su riduce a zero. Infatti:

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = \lim_{t\to\infty}\left(CV\cdot e^{-t/\tau}\right) = 0$$

2. L'energia immagazzinata dal condensatore dopo un tempo t = $3{,}0\cdot10^{-2}$ s è data da:

$$(1) \qquad U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

dove q è la carica accumulata al tempo t:

$$q = CV\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = 5{,}0\cdot10^{-6}\cdot10\cdot\left(1 - e^{-\frac{3{,}0\cdot10^{-2}}{10^{-2}}}\right) = 47{,}5\cdot10^{-6}C$$

per cui la (1) assume il valore:

$$U = \frac{1}{2}\cdot\frac{(47{,}5\cdot10^{-6})^2}{5{,}0\cdot10^{-6}} = 226\cdot10^{-6}J = 0{,}23\cdot10^{-3}J = 0{,}23\,mJ$$

PROBLEMA

In un metallo la distanza media percorsa da un elettrone fra due urti consecutivi è pari a $1{,}0\cdot10^{-6}$ cm. Se l'elettrone viene accelerato con un campo elettrico di $5{,}0\cdot10^{8}$ V/m, qual è l'energia cinetica da esso acquistata prima di subire un urto con conseguente perdita di energia?

Soluzione

L'elettrone sottoposto al campo elettrico subisce una forza pari a:

$$F = eE = 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 5,0 \cdot 10^{8} = 8,01 \cdot 10^{-11}\,N$$

Il campo elettrico compie sull'elettrone un lavoro dato da:

$$L = F \cdot s = 8,01 \cdot 10^{-11} \cdot 1,0 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6} = 8,01 \cdot 10^{-19}\,J$$

che ritroviamo sotto forma di energia cinetica:

$$E_c = 8,01 \cdot 10^{-19}\,J = 5,0\,eV$$ dove: 1 eV = $1,602 \cdot 10^{-19}$ J

PROBLEMA

Un elettrone, emesso dal filamento di un diodo, viene accelerato con una tensione di 20,0 V.

- Determinare la velocità sull'anodo sapendo che la velocità sul catodo è nulla.

Soluzione

L'energia minima ΔE necessaria per estrarre un elettrone da un metallo è data da:

$$\Delta E = U_e - E_i$$

dove:

E_i = energia totale posseduta dall'elettrone all'interno del metallo
U_e = energia potenziale dell'elettrone subito fuori dalla superficie del metallo

Questa energia ΔE, chiamata energia di estrazione o lavoro di estrazione, è legata al potenziale di estrazione ΔV dalla relazione:

$$\Delta V = \frac{\Delta E}{e} \qquad \text{per cui:} \qquad \Delta E = e \cdot \Delta V = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 20,0 = 32 \cdot 10^{-19}\,J$$

Dal teorema dell'energia cinetica, ΔE è uguale alla variazione di energia cinetica:

$$\Delta E = \Delta E_c$$

e poiché la velocità dell'elettrone sul catodo è nulla, otteniamo:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m v^2$$

da cui ricaviamo il valore della velocità posseduta dall'elettrone quando raggiunge l'anodo:

$$\Delta E = E_C = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 32 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31}}} = 2,65 \cdot 10^{6}\,m/s$$

PROBLEMA

I potenziali di estrazione dello zinco e del rame sono, rispettivamente, 3,4 V e 4,4 V.

- Calcolare la velocità minima che deve possedere un elettrone ($e = 1{,}6\cdot 10^{-12}$ C; $m=9{,}108\cdot10^{-31}$ kg) perché possa uscire dai metalli.

Soluzione

Dalla definizione del potenziale di estrazione ricaviamo l'energia minima (energia di estrazione o lavoro di estrazione) che è necessario fornire ai metalli in questione perché si abbia emissione di un elettrone:

$$\Delta V = \frac{\Delta E}{e} \Rightarrow \begin{cases} \Delta E_{Cu} = e\cdot\Delta V_{Cu} = 1{,}6\cdot10^{-19}\cdot 4{,}4 = 7{,}04\cdot10^{-19}\,J \\ \Delta E_{Zn} = e\cdot\Delta V_{Zn} = 1{,}6\cdot10^{-19}\cdot 3{,}4 = 5{,}44\cdot10^{-19}\,J \end{cases}$$

Le energie ΔE_{Cu} e ΔE_{Cu} acquisite dagli elettroni non sono altro che le energie cinetiche con le quali gli elettroni vengono emessi dai due metalli, per cui dalla definizione dell' energia cinetica ricaviamo la velocità minima che deve possedere un elettrone perché possa uscire dal metallo:

$$\Delta E = E_C = \frac{1}{2}mV^2 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2\cdot\Delta E}{m}} \Rightarrow \begin{cases} V = \sqrt{\frac{2\cdot\Delta E_{Cu}}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 7{,}04\cdot10^{-19}}{9{,}108\cdot10^{-31}}} = 1{,}24\cdot10^{6}\,m/s \\ V = \sqrt{\frac{2\cdot\Delta E_{Zn}}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 5{,}44\cdot10^{-19}}{9{,}108\cdot10^{-31}}} = 1{,}09\cdot10^{6}\,m/s \end{cases}$$

PROBLEMA

In un diodo un elettrone, emesso dal filamento e accelerato da una differenza di potenziale, giunge sulla placca anodica con l'energia di 180 eV. Determinare la velocità con cui l'elettrone arriva sulla placca.

Soluzione

L'energia minima fornita all'elettrone consente a questo di fuoriuscire dal metallo con energia cinetica nulla. Poiché l'elettrone viene accelerato con una certa d.d.p., arriverà sulla placca anodica con una energia cinetica pari a 180 eV. Per cui, dalla definizione di energia cinetica ricaviamo la velocità finale:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot180\cdot1{,}602\cdot10^{-19}}{9{,}108\cdot10^{-31}}} = 7{,}96\cdot10^{6}\,m/s$$

dove: $1\ eV = 1{,}602\cdot10^{-19}$ J

PROBLEMA

Al catodo di un voltametro si depositano 30,06 g di calcio, che ha una massa atomica pari a 40,08 u. Calcolare la carica elettrica che è passata nel voltametro

Soluzione

Sapendo che la massa totale della sostanza depositata sul catodo del voltametro è data da:

$$m = n \cdot \frac{M}{N_A}$$

da questa relazione possiamo ricavare il numero n di atomi che si sono sviluppati:

$$n = m \cdot \frac{N_A}{M} = 30{,}06 \cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}}{40{,}08} = 4{,}5 \cdot 10^{23}$$

Pertanto, in definitiva, la carica elettrica che è passata nel voltametro è pari a:

$$q = nze = 4{,}5 \cdot 10^{23} \cdot 2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} = 14{,}4 \cdot 10^{4}\ C$$

dove il numero di valenza del calcio è z = 2.

PROBLEMA

Attraverso un voltametro, contenente ioni di zinco Zn^{++}, passa una corrente di 5,0 A. Calcolare il tempo necessario perché al catodo si depositano 6,0 g di zinco, sapendo che la massa atomica dello zinco è 65,4 u

Soluzione

Il numero di atomi di zinco che si sviluppano sul catodo è dato da:

$$n = m \cdot \frac{N_A}{M} = 6{,}0 \cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}}{65{,}4} = 0{,}55 \cdot 10^{23}$$

a cui corrisponde una quantità di corrente nel voltametro pari a:

$$q = nze = 0{,}55 \cdot 10^{23} \cdot 2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} = 1{,}8 \cdot 10^{4}\ C$$

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per calcolare il tempo necessario affinché sul catodo si depositi la massa di zinco:

$$I = \frac{q}{t} \Rightarrow t = \frac{q}{I} = \frac{1{,}8 \cdot 10^{4}}{5{,}0} = 0{,}36 \cdot 10^{4}\ s = 3600\ s = 1\ \text{ora}$$

PROBLEMA

Si vuole ricoprire di rame una sfera di raggio 40,0 mm, posta al catodo di un voltametro contenente un sale di rame attraversato dalla corrente di 10,0 A.
Calcolare il tempo necessario affinché sulla sfera si depositi uno strato di rame spesso 1,00 mm, sapendo che il rame è bivalente e che la massa atomica e la densità sono rispettivamente 63,54 u e 8,90 g/cm^3

Soluzione

Calcoliamo il volume V dello strato di rame depositato sulla sfera come differenza tra il volume V_2 della sfera ricoperta dallo strato di rame e il volume V_1 della sfera senza lo strato di rame:

$$V = V_2 - V_1 = \frac{4}{3}\pi R_2^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3 = \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3) = \frac{4}{3}\pi(4{,}1^3 - 4{,}0^3) = 20{,}6\,\text{cm}^3$$

Dalla definizione di densità calcoliamo la massa di rame depositata sulla sfera:

$$m = \rho V = 8{,}90 \cdot 20{,}6 = 183{,}3\,\text{g}$$

Nota la massa, ricaviamo il numero di atomi di rame sviluppati sulla sfera:

$$n = m \cdot \frac{N_A}{M} = 183{,}3 \cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}}{63{,}54} = 17{,}3 \cdot 10^{23}$$

a cui corrisponde una quantità di corrente nel voltametro pari a:

$$q = nze = 17{,}3 \cdot 10^{23} \cdot 2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} = 55{,}4 \cdot 10^4\ \text{C}$$

Infine, dalla definizione di intensità di corrente ricaviamo il tempo necessario affinché sulla sfera si depositi lo strato di 1 mm di rame:

$$t = \frac{q}{I} = \frac{55{,}4 \cdot 10^4}{10} = 5{,}54 \cdot 10^4\ \text{s} = 15{,}4\,\text{h}$$