

# Progetto di Strutture

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Civile

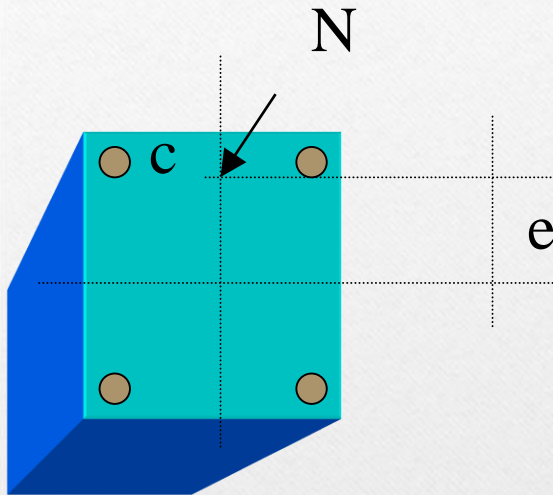
A/A 2018-2019

---

**Pressoflessione allo SLU**

## Introduzione

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta Definizione del Problema



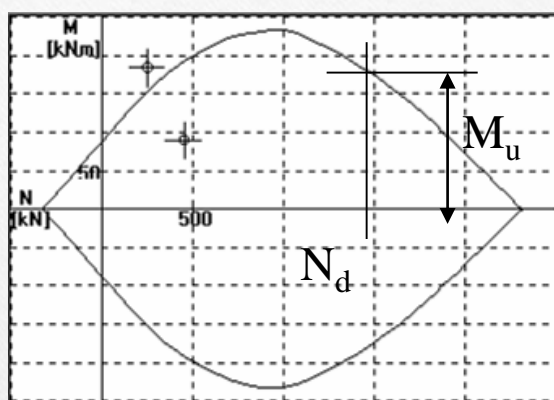
Si consideri una sezione rettangolare in c.a. con doppia armatura soggetta a pressione applicata al centro di pressione  $c$  con eccentricità  $e$ . Ragioni di equivalenza statica permettono di considerare la sollecitazione come composta da una forza applicata al baricentro della sezione e un momento flettente pari a  $M = N \times e$ .

Si vuole effettuare la verifica di resistenza allo stato limite ultimo, valutando quindi lo sforzo Normale e il Momento flettente ultimo che la sezione è capace di esplicare nel rispetto delle condizioni di equilibrio e di congruenza della sezione.



## Introduzione

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta Definizione del Problema



Esempio di dominio di Resistenza

Naturalmente esistono infinite coppie  $N, M$  che rispettano tali condizioni. Resta dunque individuata una regione detta dominio di resistenza al di fuori del quale il limite ultimo della sezione viene superato.

La verifica consiste dunque nel valutare che

$$M_u(N_d) \geq M_d$$

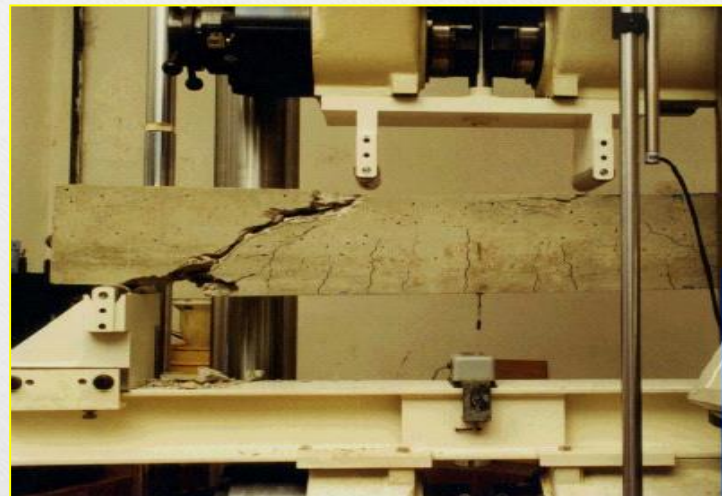
controllando che  $N_d$  non superi il valore massimo esplicabile dalla sezione.

IL CALCOLO DI PILASTRI IN C.A. ALLO SLU

## Pressoflessione retta

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta Ipotesi di lavoro (general)

1. Le sezioni si conservano piane (legge lineare delle deformazioni)
2. Il calcestruzzo teso non è reagente
3. Non vi è scorrimento relativo tra acciaio e cls (perfetta aderenza)



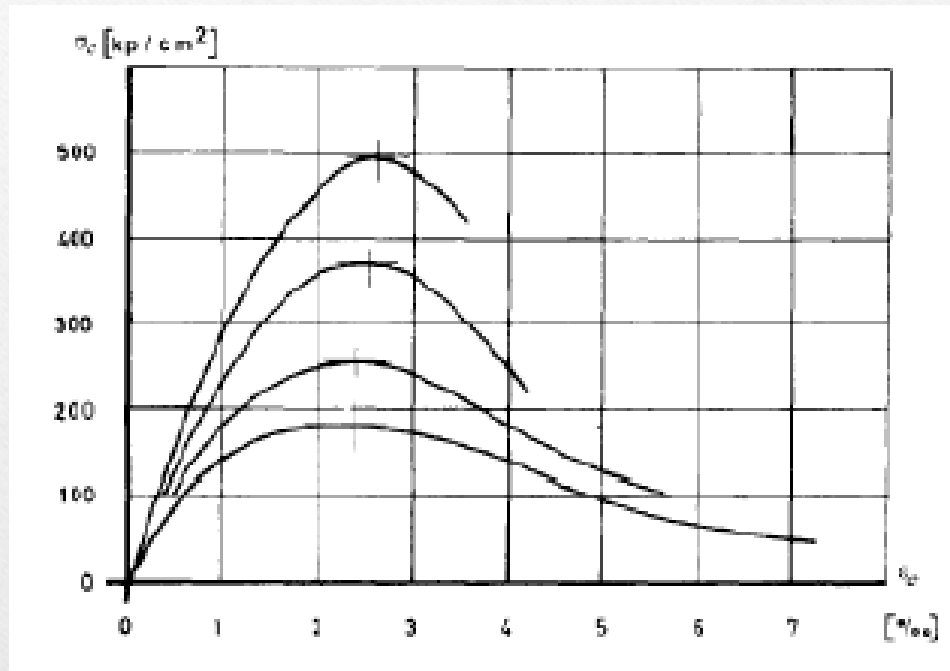


## IL CALCOLO DI PILASTRI IN C.A. ALLO SLU

### Pressoflessione retta

**Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta**  
**Ipotesi di lavoro (allo stato limite ultimo)**

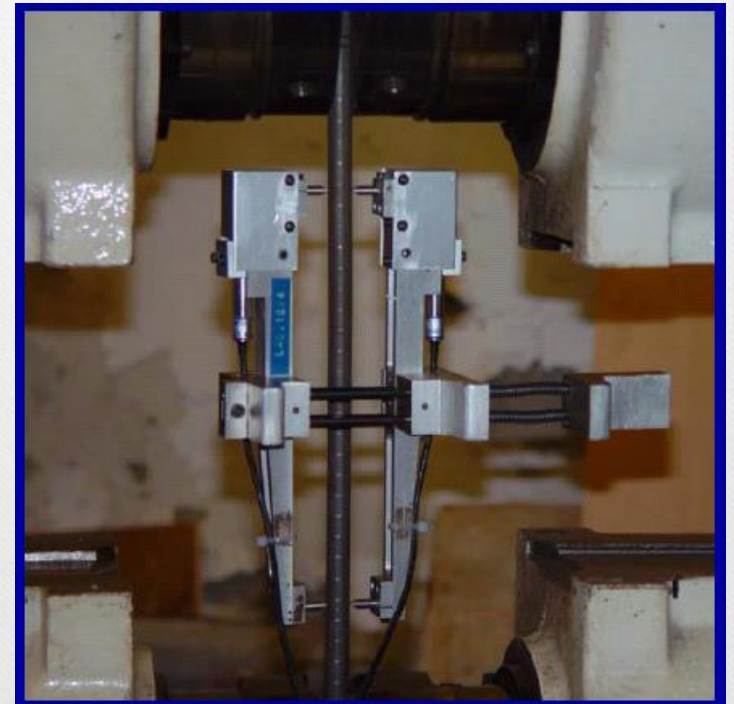
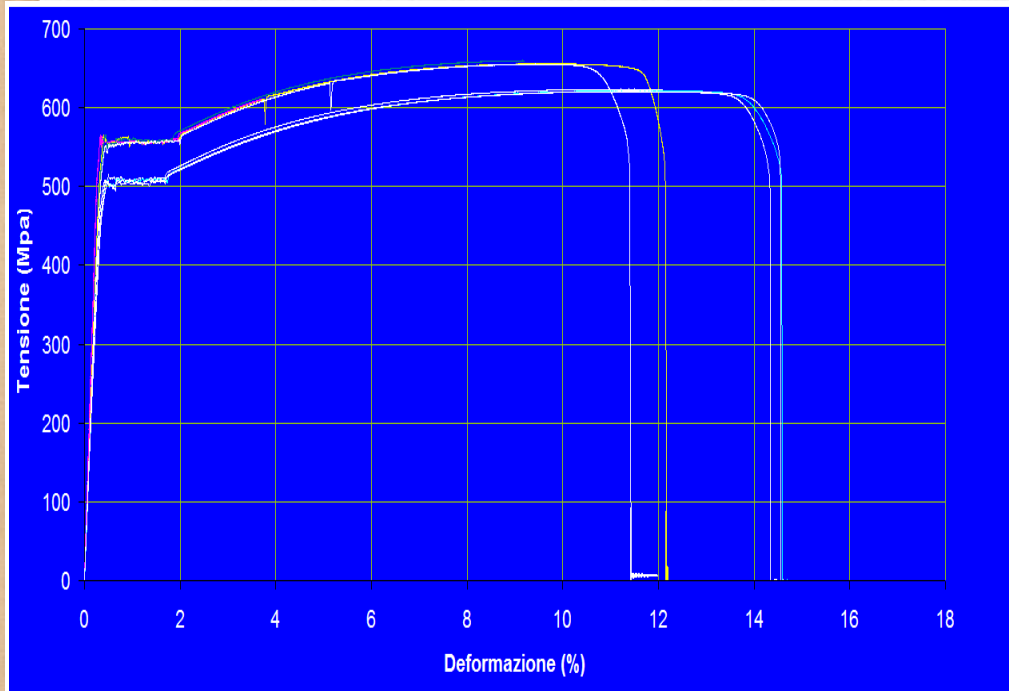
Legge costitutiva del Cls (tensione-deformazione)



## Pressoflessione retta

**Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta**  
**Ipotesi di lavoro (allo stato limite ultimo)**

Legge costitutiva dell'acciaio

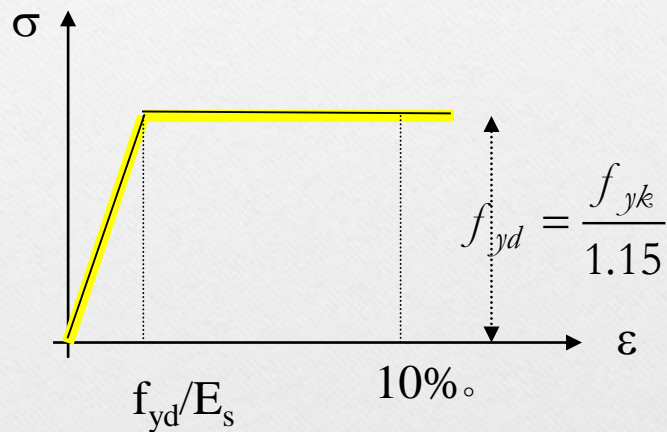




## Pressoflessione retta

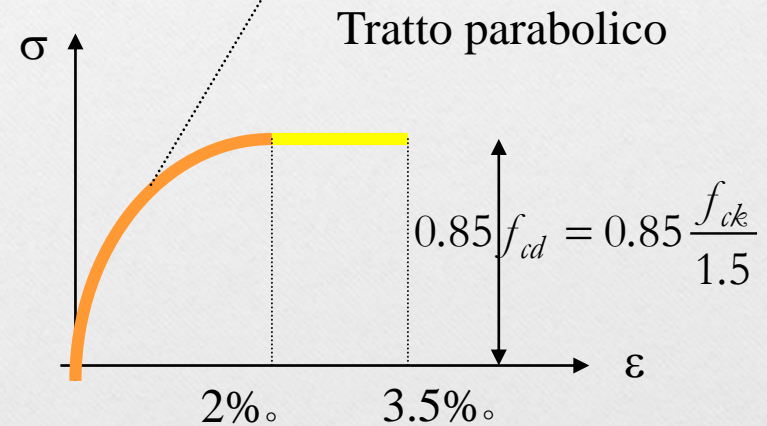
### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta Ipotesi di lavoro (Stato limite ultimo)

Leggi costitutive del Cls e dell'Acciaio



Legge costitutiva dell'acciaio

$$\sigma_c = 2f_c \left[ \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right)^2 \right]$$



Legge costitutiva del CLS

## IL CALCOLO DI PILASTRI IN C.A. ALLO SLU

### Pressoflessione retta

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta

#### Ipotesi di lavoro (Stato limite ultimo)

#### CLASSI DI RESISTENZA DEL CALCESTRUZZO

Classi di resistenza calcestruzzo	C12/15	C16/20	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50	C45/55	C50/60
$f_{ck}$	12	16	20	25	30	35	40	45	50
$f_{ctm}$	1.6	1.9	2.2	2.6	2.9	3.2	3.5	3.8	4.1

Classi di resistenza calcestruzzo	C12/15	C16/20	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50	C45/55	C50/60
$E_{cm}$	26	27.5	29	30.5	32	33.5	35	36	37

$$E_{cm} = 22.000 \cdot [f_{cm}/10]^{0,3} \quad [\text{N/mm}^2]$$

$$E_{cm} \text{ in kN/mm}^2;$$

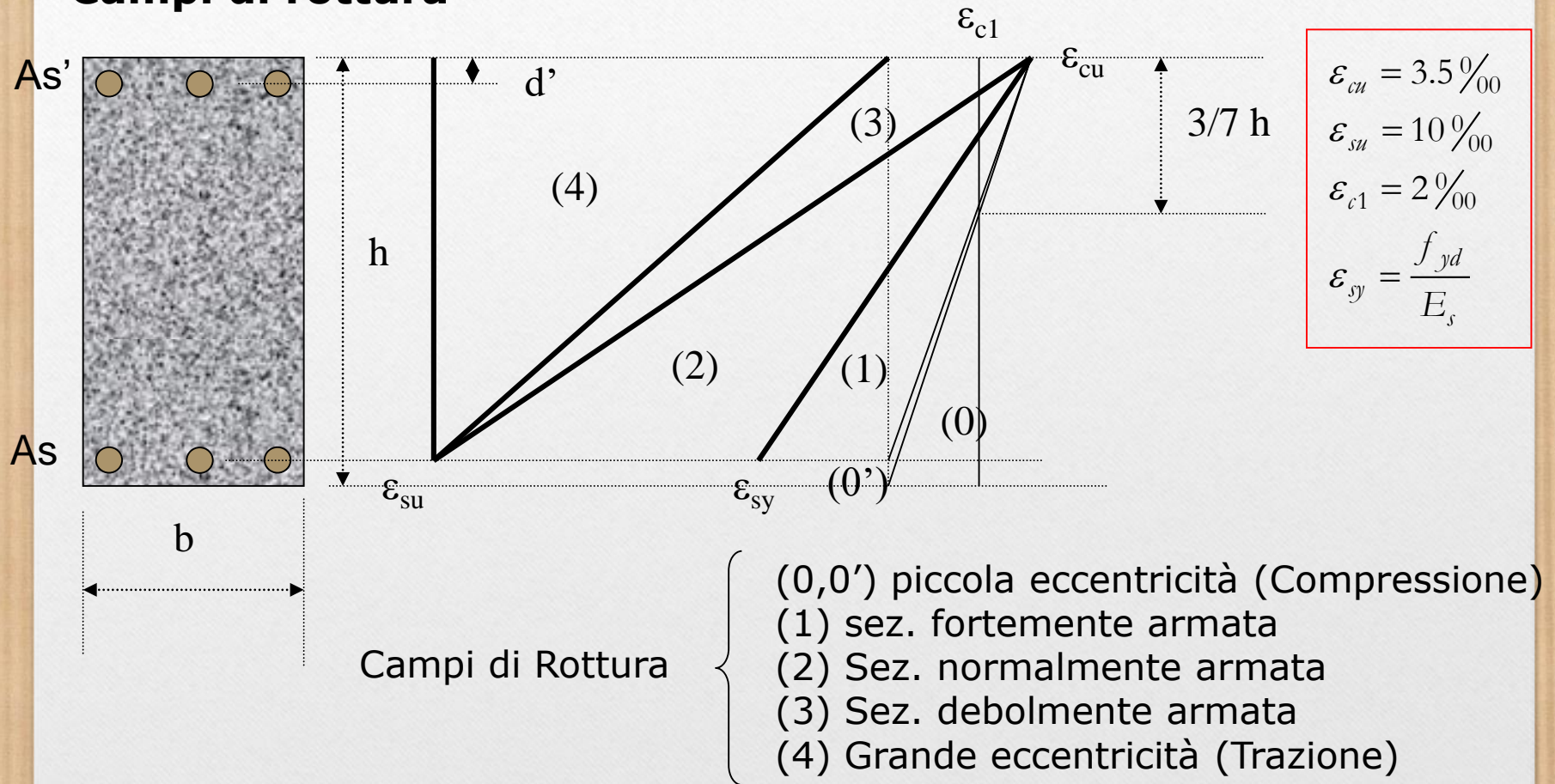
#### 11.2.10 caratteristiche del calcestruzzo



## Pressoflessione retta

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta

#### Campi di rottura



## Pressoflessione retta

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta Determinazione del campo di rottura

Il campo di rottura dipende oltre che dalla quantità di armatura (come succede nella flessione semplice) anche dall'entità dello sforzo normale  $N$ . All'aumentare di  $N$  si passa da sezioni duttili a sezioni fragili fino a schiacciamento per compressione uniforme, che per sezioni simmetriche corrisponde al caso di pressione centrata.

È utile poter determinare a priori il campo di rottura associato ad una determinata armatura e sforzo normale. A tale scopo è sufficiente determinare il valore di  $N$  che corrisponde alle linee di separazione tra i diversi campi di rottura. Sarà poi sufficiente confrontare il valore di calcolo  $N_d$  con i vari  $N$  prima calcolati per individuare in quale intervallo ci si colloca.

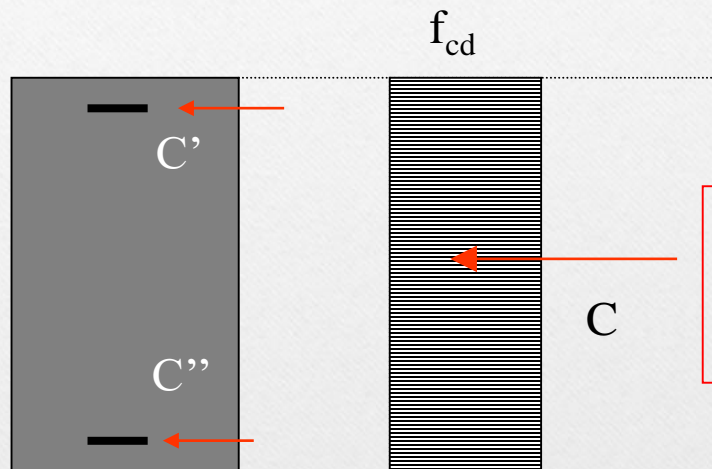


## Pressoflessione retta

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta Determinazione del campo di rottura

#### compressione centrata

Nel caso di compressione centrata l'equilibrio alla traslazione della sezione conduce alla seguente equazione:



$$N_{max} = \overbrace{0.8bh f_{cd}}^C + \overbrace{(A_s + A_s') f_{yd}}^{C'+C''}$$

$$n_{max} = \frac{N_{max}}{bdf_{cd}} = 0.8(1 + \delta) + (\mu_s + \mu_s') \quad \delta = \frac{d'}{d}$$

$$\mu_s = \frac{A_s}{bdf_{cd}} \quad \mu_s' = \frac{A_s'}{bdf_{cd}}$$

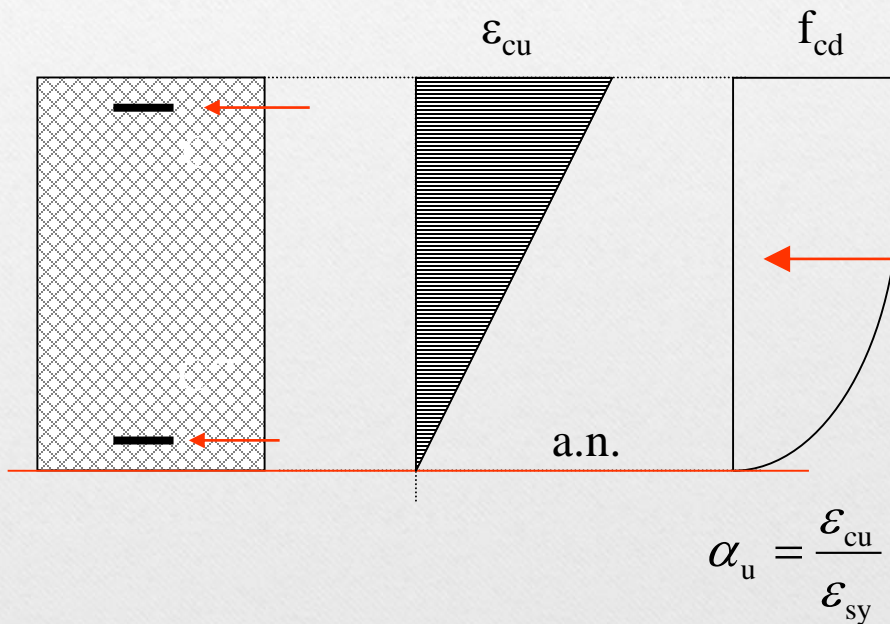
Il coefficiente 0.8 nella componente associata al cls dipende dal fatto che la normativa impone nel caso di compressione centrata che il coefficiente  $\gamma_c$  venga aumentato del 25%.

## Pressoflessione retta

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta Determinazione del campo di rottura

#### sezione interamente compressa - retta di separazione campo 0 e 0'

Nel passaggio tra campo 0 e campo 0' la sezione risulta ancora interamente compressa con l'asse neutro passante per il lembo inferiore della sezione.



$$N_0 = 0.81bh f_{cd} + A_s \sigma_s + A_s' f_{yd}$$

La deformazione dell'acciaio inferiore è immediatamente ricavabile da semplici considerazioni geometriche

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{cu} \frac{\delta}{1 + \delta}$$

$$\delta = \frac{d'}{d}$$

In termini adimensionalizzati si ha:

$$n_0 = 0.81(1 + \delta) + \mu_s \alpha_u \frac{\delta}{1 + \delta} + \mu_s'$$

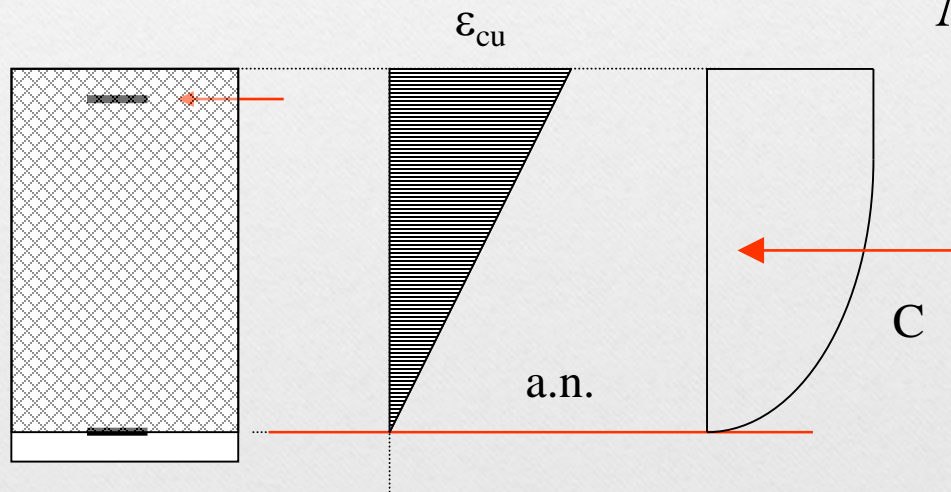


## Pressoflessione retta

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta Determinazione del campo di rottura

#### retta di separazione campo 0' e campo 1

Nel passaggio tra campo 0' e campo 1 la sezione risulta parzializzata con l'asse neutro che taglia la sezione in corrispondenza dell'armatura inferiore.



$$N_{0'} = 0.81 b d f_{cd} + A_s' f_{yd}$$

In termini adimensionalizzati si ottiene la semplice espressione:

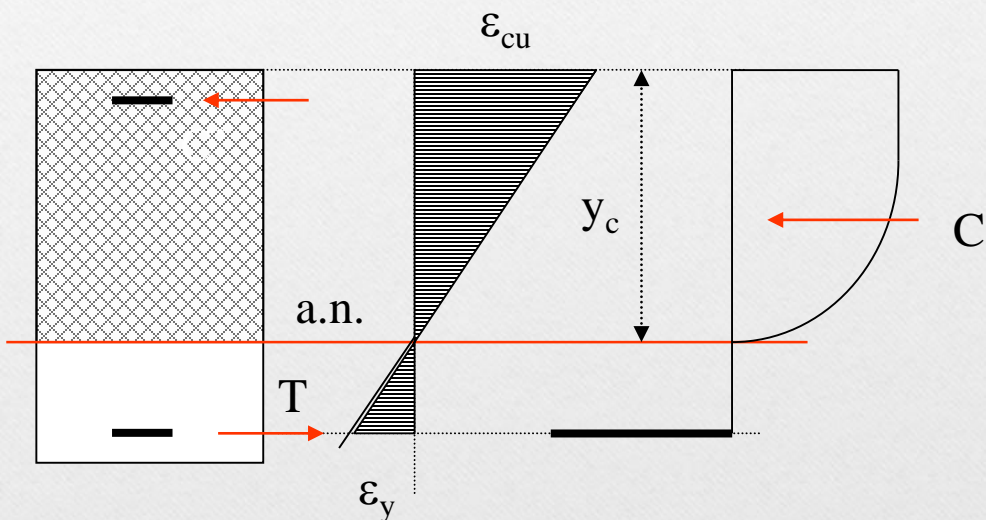
$$n_{0'} = 0.81 + \mu_s'$$

## Pressoflessione retta

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta Determinazione del campo di rottura

#### retta di separazione campo 1 e campo 2

Nel passaggio tra campo 1 e campo 2 la sezione risulta parzializzata con l'asse neutro che taglia la sezione ad una distanza  $y_c$  dal lembo superiore. L'acciaio inferiore risulta essere teso e snervato.



$$N_1 = 0.81by_c f_{cd} + A_s' f_{yd} - A_s f_{yd}$$

L'asse neutro  $y_c$  si trova con semplici proporzioni geometriche

$$y_c = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{sy}} d$$

$$n_1 = 0.81 \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{sy}} - \mu_s + \mu_s'$$



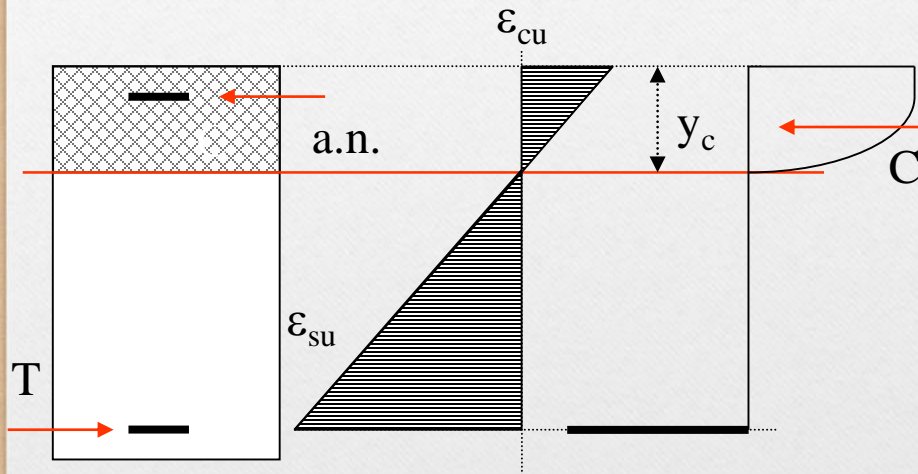
## Pressoflessione retta

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta

#### Determinazione del campo di rottura

#### retta di separazione campo 2 e campo 3

Passaggio tra campo 2 e campo 3: la fibra più esterna del cls e l'acciaio teso hanno raggiunto la deformazione massima. L'acciaio inferiore è snervato.



$$N_2 = 0.81by_c f_{cd} + A_s' \sigma_s(\epsilon_s') - A_s f_{yd}$$

$$y_c = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{su}} d = Kd = 0.259d$$

$$n_2 = 0.207 - \mu_s + \frac{\sigma_s'}{f_{yd}} \mu_s'$$

$$\epsilon_s' = \frac{K - \delta}{K} \epsilon_{cu} = 0.0035 \times (1 - 3.857\delta) \longrightarrow \delta = \frac{d'}{d}$$

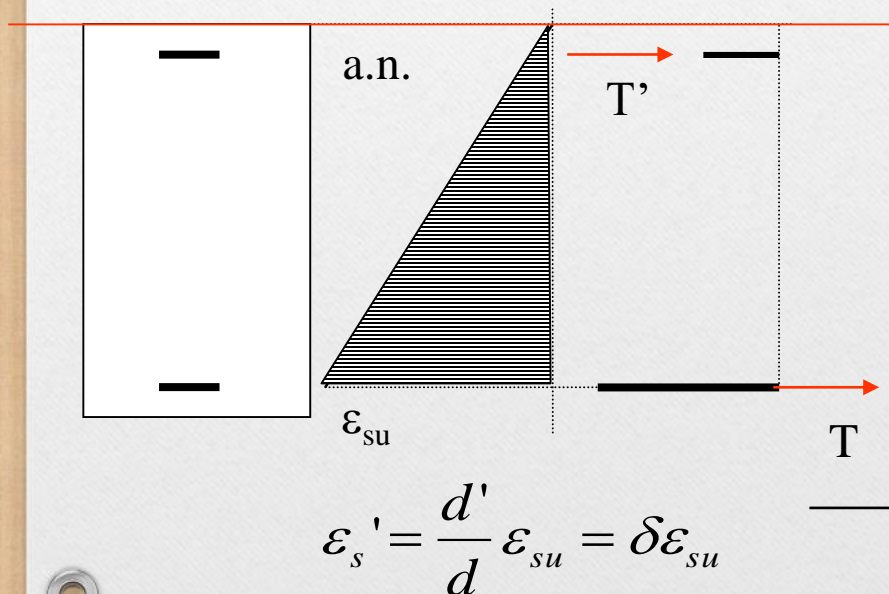
L'acciaio compresso risulta in genere snervato per travi con  $h > 30$  cm

## Pressoflessione retta

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta Determinazione del campo di rottura

Grande eccentricità : **retta di separazione campo 3 e campo 4**

Nel passaggio tra campo 3 e campo 4 la sezione risulta essere completamente tesa. La resistenza è affidata alle sole armature.



$$N_3 = -A_s' \sigma_s(\varepsilon_s') - A_s f_{yd}$$

$$n_3 = -\frac{\sigma_s'}{f_{yd}} \mu_s' - \mu_s = -\frac{E_s \varepsilon_s'}{E_s \varepsilon_{yd}} \mu_s' - \mu_s$$

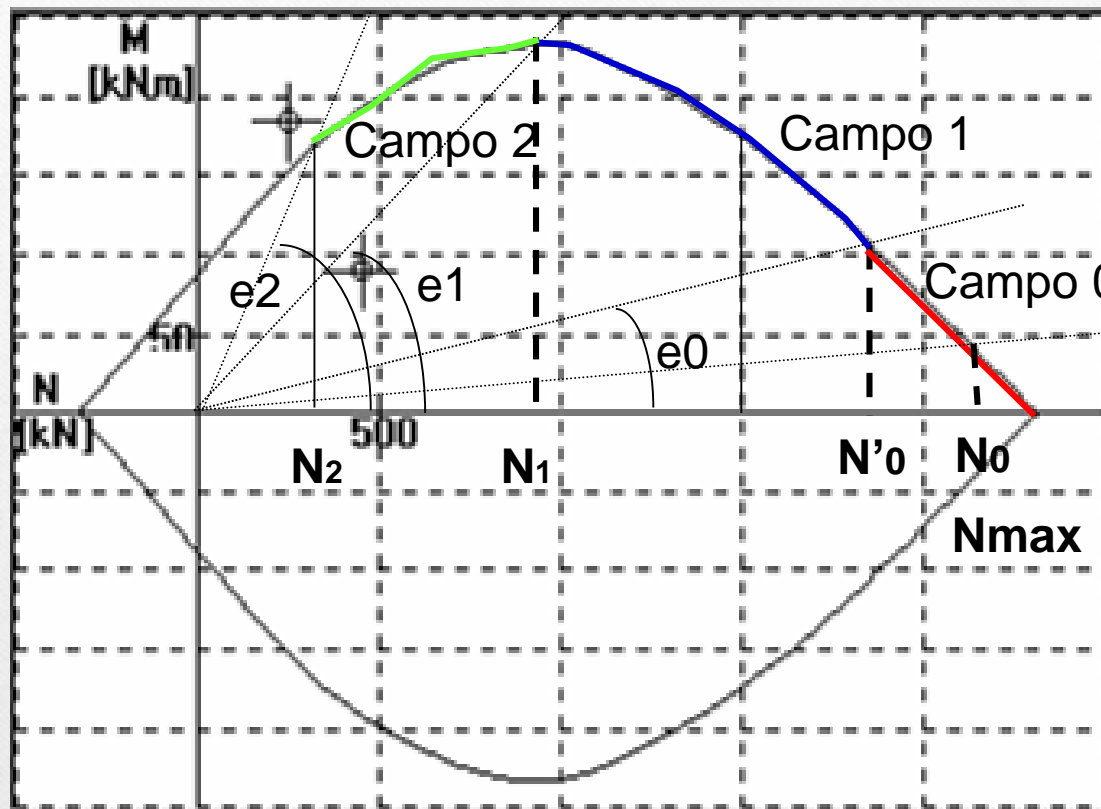
$$n_3 = -\alpha_l \delta \mu_s' - \mu_s \quad \alpha_l = \frac{\varepsilon_{su}}{\varepsilon_{sy}}$$

L'acciaio superiore risulta in genere non snervato per travi con  $h > 20$  cm



## Pressoflessione retta

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta Determinazione del campo di rottura



Noti gli sforzi normali corrispondenti alle linee di separazione tra i diversi campi di rottura, questi ultimi possono essere facilmente individuati e visualizzati sul diagramma di interazione  $M-N$

## Pressoflessione retta

### **Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta** **Determinazione del Momento Ultimo**

Per la determinazione del Momento Ultimo della sezione considerata occorre seguire in sequenza i seguenti due passi:

1. Determinazione della posizione dell'asse neutro
2. Determinazione del valore del Momento Ultimo



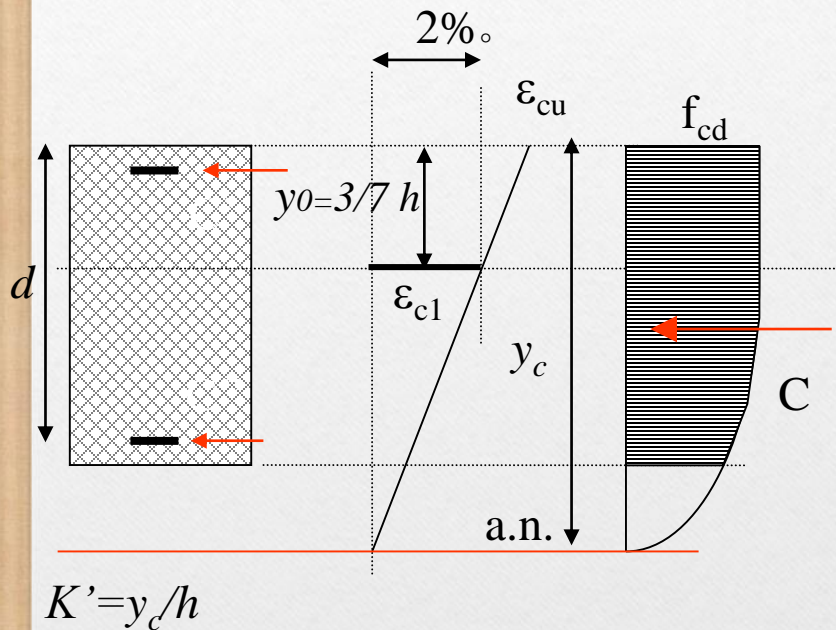
## IL CALCOLO DI PILASTRI IN C.A. ALLO SLU

### Pressoflessione retta

## Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta

### Determinazione del Momento Ultimo

### compressione eccentrica ( $n_0 < n < n_{max}$ )



## Determinazione asse neutro

La posizione dell'asse neutro  $y_c$  si determina a partire dall'equazione di equilibrio alla traslazione della sezione. L'acciaio inferiore risulta generalmente non snervato per cui:

$$N_d = C + A_s' f_{vd} + A_s \sigma_s(\varepsilon_s)$$

$$C = by_0 f_{cd} + b \int_{y_c-h}^{y_c-y_0} \sigma_c(\varepsilon) dy$$

$$C = bh\bar{f}_{cd} \left[ 1 - \frac{64}{21(7K' - 3)^2} \right]$$

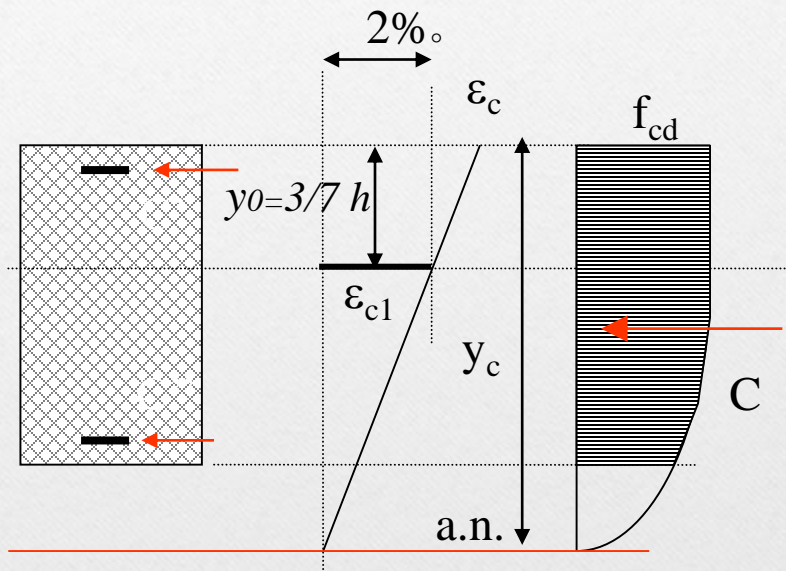
$$\varepsilon = \varepsilon_{c1} \frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{Y}_c - \mathcal{Y}_0}$$

$$\sigma_c(\epsilon) = 2\bar{f}_{cd} \left[ \frac{\epsilon}{\epsilon_{c1}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{c1}} \right)^2 \right]$$

## Pressoflessione retta

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta Determinazione del Momento Ultimo

Piccola eccentricità : **compressione eccentrica** ( $n_0 < n < n_{\max}$ )



#### Determinazione asse neutro

$$N_d = C + A_s' f_{yd} + A_s \sigma_s(\varepsilon_s)$$

$$N_d = C(k') + A_s' f_{yd} + A_s \sigma_s(\varepsilon_s(k'))$$

$$K' = y_c / h$$



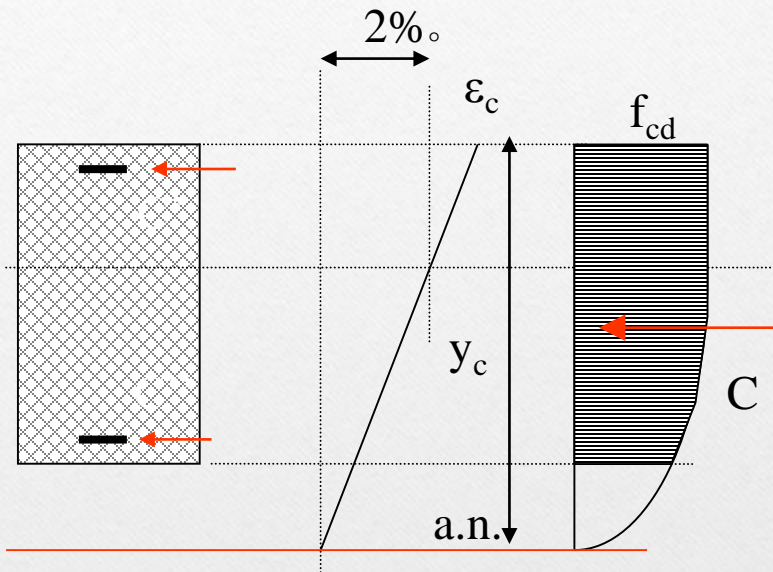
$$\varepsilon_s = \frac{(y_c - d)}{(y_c - y_0)} \varepsilon_{c1} = \frac{(K' - d/h)}{(K' - y_0/h)} \varepsilon_{c1} = \frac{(K' - d/h)}{(K' - 3/7)} \varepsilon_{c1}$$



## Pressoflessione retta

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta Determinazione del Momento Ultimo

compressione eccentrica ( $n_0 < n < n_{\max}$ )



#### Determinazione Momento Ultimo

L'equazione di equilibrio alla rotazione attorno al baricentro geometrico della sezione ci fornisce il Momento Ultimo della sezione

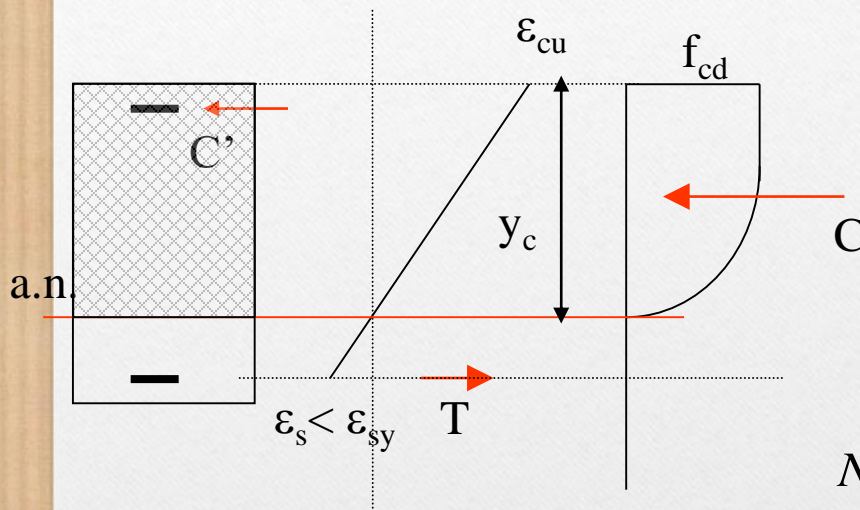
$$M_c = bh^2 f_{cd} \frac{160}{147(7K'-3)^2}$$

$$M = +A_s' f_{yd} \left( \frac{h}{2} - d' \right) + A_s \sigma_s(\varepsilon_s) \left( \frac{h}{2} - d \right) + by_0 f_{cd} \left( \frac{h}{2} - \frac{y_0}{2} \right) + b \int_{y_c-h}^{y_c-y_0} \sigma_c(\varepsilon) y dy$$

## Pressoflessione retta

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta Determinazione del Momento Ultimo

#### Collasso nel campo 1 ( $n_1 < n < n'_0$ )



#### Determinazione Asse neutro

La posizione dell'asse neutro  $y_c$  si determina a partire dall'equazione di equilibrio alla traslazione della sezione. L'acciaio inferiore risulta per definizione non snervato. L'equilibrio alla traslazione si scrive come segue:

$$N_d = 0.81by_cf_{cd} + A_s'f_{yd} - A_s\sigma_s(\varepsilon_s)$$

$$\sigma_s(\varepsilon_s) = E_s\varepsilon_{cu} \frac{d - y_c}{y_c} = E_s\varepsilon_{cu} \frac{1 - K}{K} \quad ; \quad K = \frac{y_c}{d}$$

Equazione algebrica di 2° grado

$$0.81K^2 + K(\mu_s' + \mu_s\alpha_u - n_d) - \mu_s\alpha_u = 0$$



Sostituendo la precedente nella equazione di equilibrio alla traslazione si ha:

$$\alpha_u = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{sy}}$$



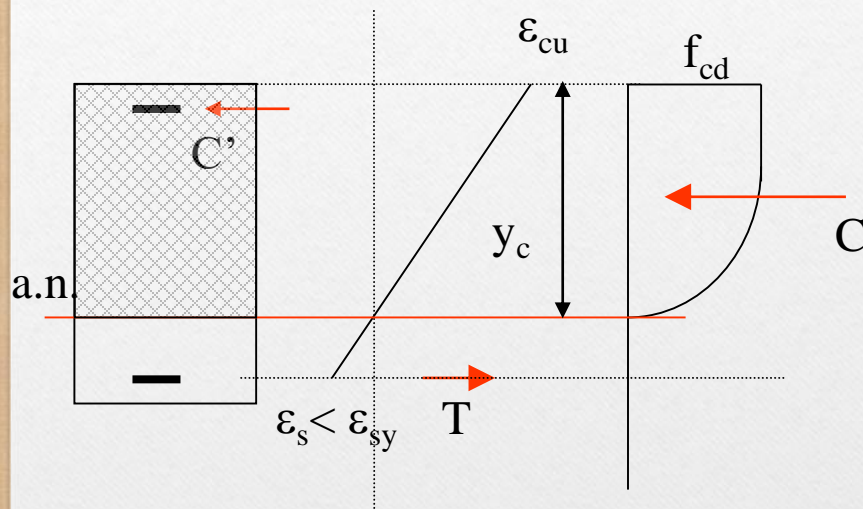
# IL CALCOLO DI PILASTRI IN C.A. ALLO SLU

## Pressoflessione retta

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta

#### Determinazione del Momento Ultimo

**Collasso nel campo 1 ( $n_1 < n < n_0$ )**



#### Determinazione Momento Ultimo

L'equazione di equilibrio alla rotazione attorno al baricentro geometrico della sezione ci fornisce il Momento Ultimo della sezione.

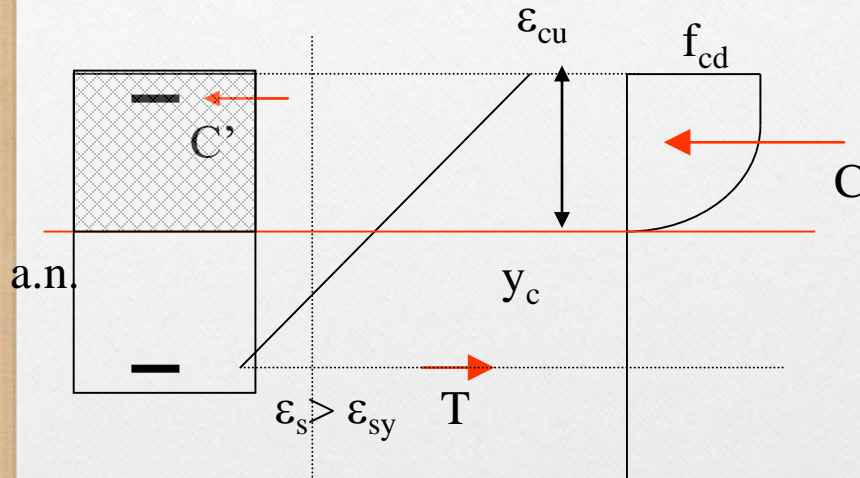
$$\epsilon_s = \epsilon_{cu} \frac{1-K}{K}$$

$$M_u = 0.81by_c f_{cd} \left( \frac{h}{2} - 0.416 y_c \right) + A_s' f_{yd} \left( \frac{h}{2} - d' \right) + A_s \sigma_s(\epsilon_s) \left( \frac{h}{2} - d' \right)$$

## Pressoflessione retta

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta Determinazione del Momento Ultimo

**Collasso nel campo 2 ( $n_2 < n < n_1$ )**



HP: acciaio compresso snervato

$$K = \frac{n_d + \mu_s - \mu_s'}{0.81}$$

#### Determinazione Asse neutro

La posizione dell'asse neutro  $y_c$  si determina a partire dall'equazione di equilibrio alla traslazione della sezione. L'acciaio inferiore risulta certamente snervato e quindi *nell'ipotesi che anche l'acciaio compresso sia snervato* l'equilibrio alla traslazione si scrive :

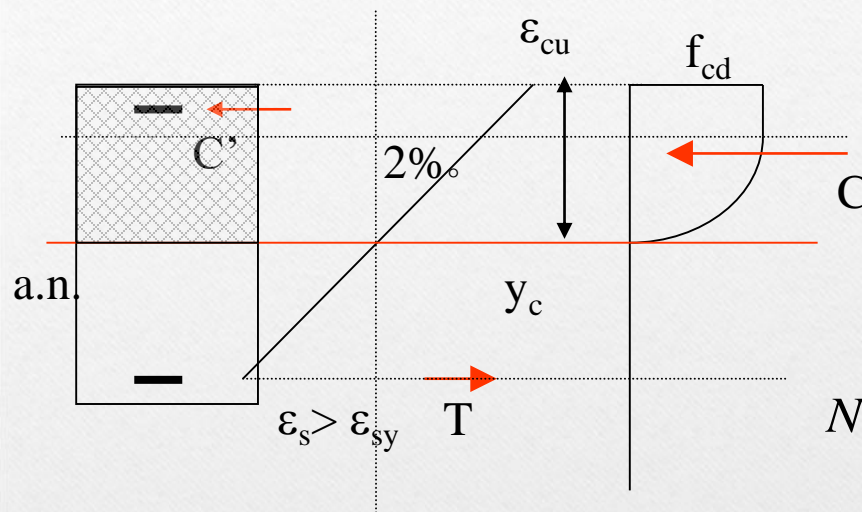
$$N_d = 0.81 b y_c f_{cd} + A_s' f_{yd} - A_s f_{yd}$$



## Pressoflessione retta

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta Determinazione del Momento Ultimo

Collasso nel campo 2 ( $n_2 < n < n_1$ )



#### Determinazione Asse neutro

Nel caso l'ipotesi di armatura compressa snervata non sia verificata occorre esprimere l'equazione alla traslazione in funzione di  $K$  ottenendo l'equazione di secondo grado con incognita la stessa  $K$

$$N_d = 0.81by_c f_{cd} - A_s f_{yd} + A_s' \sigma_s'(\epsilon_s')$$

$$\epsilon_s' = \epsilon_{cu} \frac{K-1}{K}$$



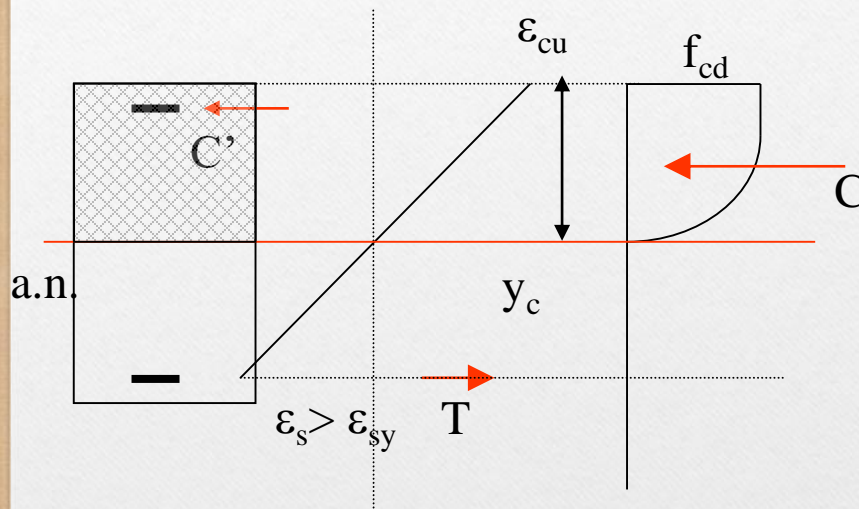
Equazione per la determinazione dell'asse neutro nel caso che l'armatura compressa non risulti snervata

$$0.81K^2 - K(n_d + \mu_s - \mu_s' \alpha_u) - \mu_s' \alpha_u \delta = 0$$

## Pressoflessione retta

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta Determinazione del Momento Ultimo

Grande eccentricità : **Collasso nel campo 2** ( $n_2 < n < n_1$ )



#### Determinazione Momento Ultimo

L'equazione di equilibrio alla rotazione attorno al baricentro geometrico della sezione ci fornisce il Momento Ultimo della sezione.

$$\epsilon_s' = \epsilon_{cu} \frac{K-1}{K}$$

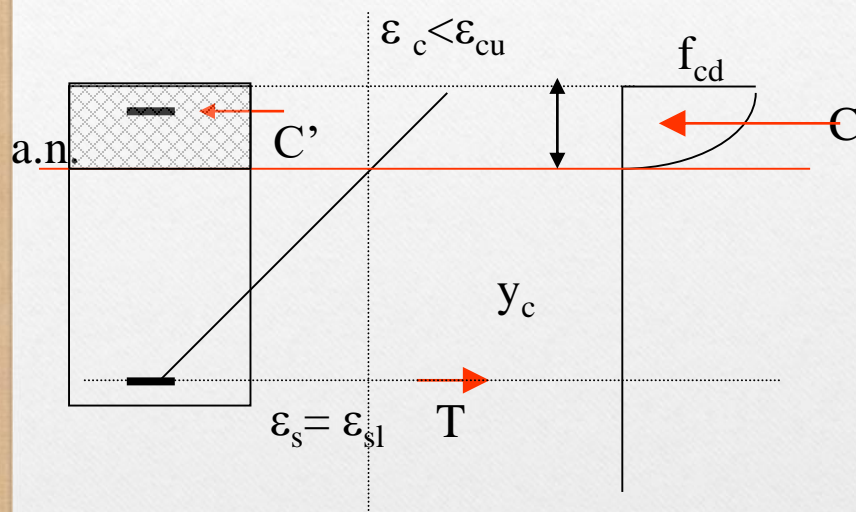
$$M_u = 0.81by_cf_{cd}\left(\frac{h}{2} - 0.416y_c\right) + A_s'\sigma_s(\epsilon_s')\left(\frac{h}{2} - d'\right) + A_sf_{yd}\left(\frac{h}{2} - d'\right)$$



## Pressoflessione retta

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta Determinazione del Momento Ultimo

Grande eccentricità : **Collasso nel campo 3 ( $n_3 < n < n_2$ )**



#### Determinazione Asse neutro

La posizione dell'asse neutro  $y_c$  si determina a partire dall'equazione dei equilibri alla traslazione della sezione. L'acciaio inferiore risulta certamente snervato e quindi nell'ipotesi che anche *l'acciaio compresso sia snervato* l'equilibrio alla traslazione si scrive :

$$N_d = 0.81by_c f_{cd} + A_s' f_{yd} - A_s f_{yd}$$

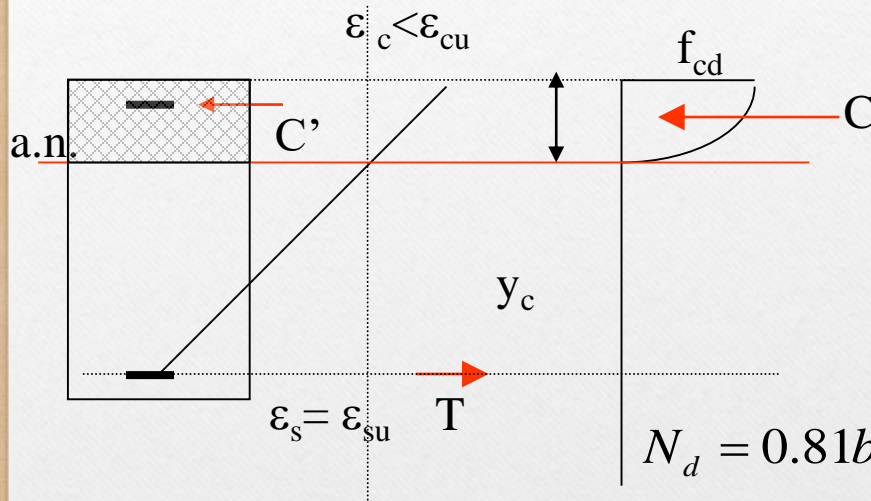
Equazione per la determinazione dell'asse Neutro nel caso che l'armatura compressa risulti snervata

$$K = \frac{n_d + \mu_s - \mu_s'}{0.81}$$

## Pressoflessione retta

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta Determinazione del Momento Ultimo

Grande eccentricità : **Collasso nel campo 3** ( $n_3 < n < n_2$ )



#### Determinazione Asse neutro

Nel caso l'ipotesi di armatura compressa snervata non sia verificata occorre esprimere l'equazione alla traslazione in funzione di  $K$  ottenendo l'equazione di secondo grado con incognita la stessa  $K$

$$N_d = 0.81by_c f_{cd} - A_s f_{yd} + A_s' \sigma_s'(\varepsilon_s') \quad \varepsilon_s' = \varepsilon_{su} \frac{K - \delta}{1 - K}$$



$$0.81K^2 - K(n_d + 0.81 + \mu_s + \mu_s' \alpha_l) + \mu_s' \alpha_l \delta + \mu_s + n_d = 0$$

Equazione per la determinazione dell'asse neutro nel caso che l'armatura compressa risulti non snervata

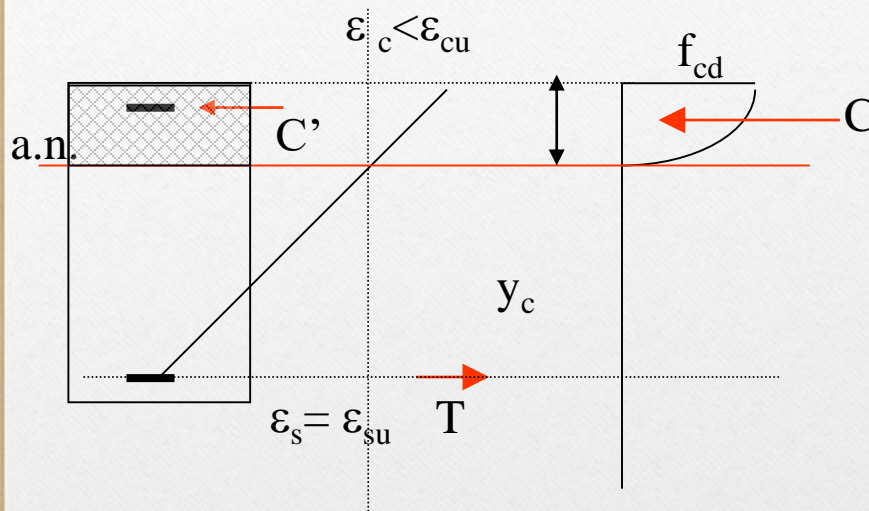
$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon_{su}}{\varepsilon_{sy}}$$



## Pressoflessione retta

### Stato limite ultimo di sezioni in c.a.: Pressoflessione Retta Determinazione del Momento Ultimo

Grande eccentricità : **Collasso nel campo 3** ( $n_3 < n < n_2$ )



#### Determinazione Momento Ultimo

L'equazione di equilibrio alla rotazione attorno al baricentro geometrico della sezione ci fornisce il Momento Ultimo della sezione.

$$\epsilon_s' = \epsilon_{su} \frac{K - \delta}{1 - K}$$

$$M_u = 0.81 b y_c f_{cd} \left( \frac{h}{2} - 0.416 y_c \right) + A_s' \sigma_s(\epsilon_s') \left( \frac{h}{2} - d' \right) + A_s f_{yd} \left( \frac{h}{2} - d' \right)$$