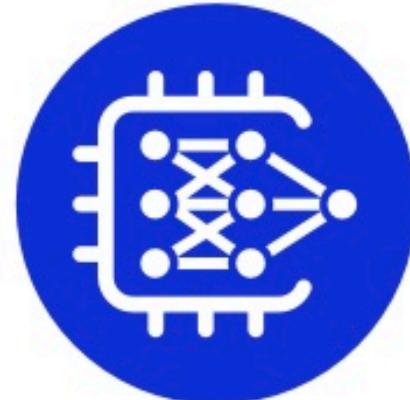




CNS
CENTRO NACIONAL
DE SUPERCÓMPUTO



**GRUPO DE
CIENCIA E INGENIERÍA
COMPUTACIONALES**



**DIVISIÓN DE
CONTROL Y SISTEMAS
DINÁMICOS**

ROBERTO ÁLVAREZ

Universidad Autónoma de Querétaro

SERIES DE TIEMPO EN ECOLOGÍA: MÉTRICAS DE SEÑALES DE ALERTA TEMPRANA ANTE CAMBIOS CRÍTICOS

OUTLINE

- ▶ Transiciones críticas: modelos
- ▶ Series de tiempo univariadas
- ▶ Series de tiempo multivariadas
- ▶ Medidas no basadas en modelos: machine learning medidas de estabilidad
- ▶ Redes y gráficos de recurrencia
- ▶ Aplicaciones: microbiota , COVID

SESIÓN 1



Materiales de todo el curso

redmexbiomate@gmail.com
redmexbiomate.org.mx
 RedMexBioMate

SEGUNDO encuentro de la
Red Mexicana de Biología & Matemáticas

Un espacio para personas interesadas en el estudio de las matemáticas, la biología y todas sus intersecciones.

¡Te esperamos en Querétaro!

3-7 de noviembre 2025



LIIGH-UNAM
INTERNATIONAL LABORATORY FOR
HUMAN GENOME RESEARCH



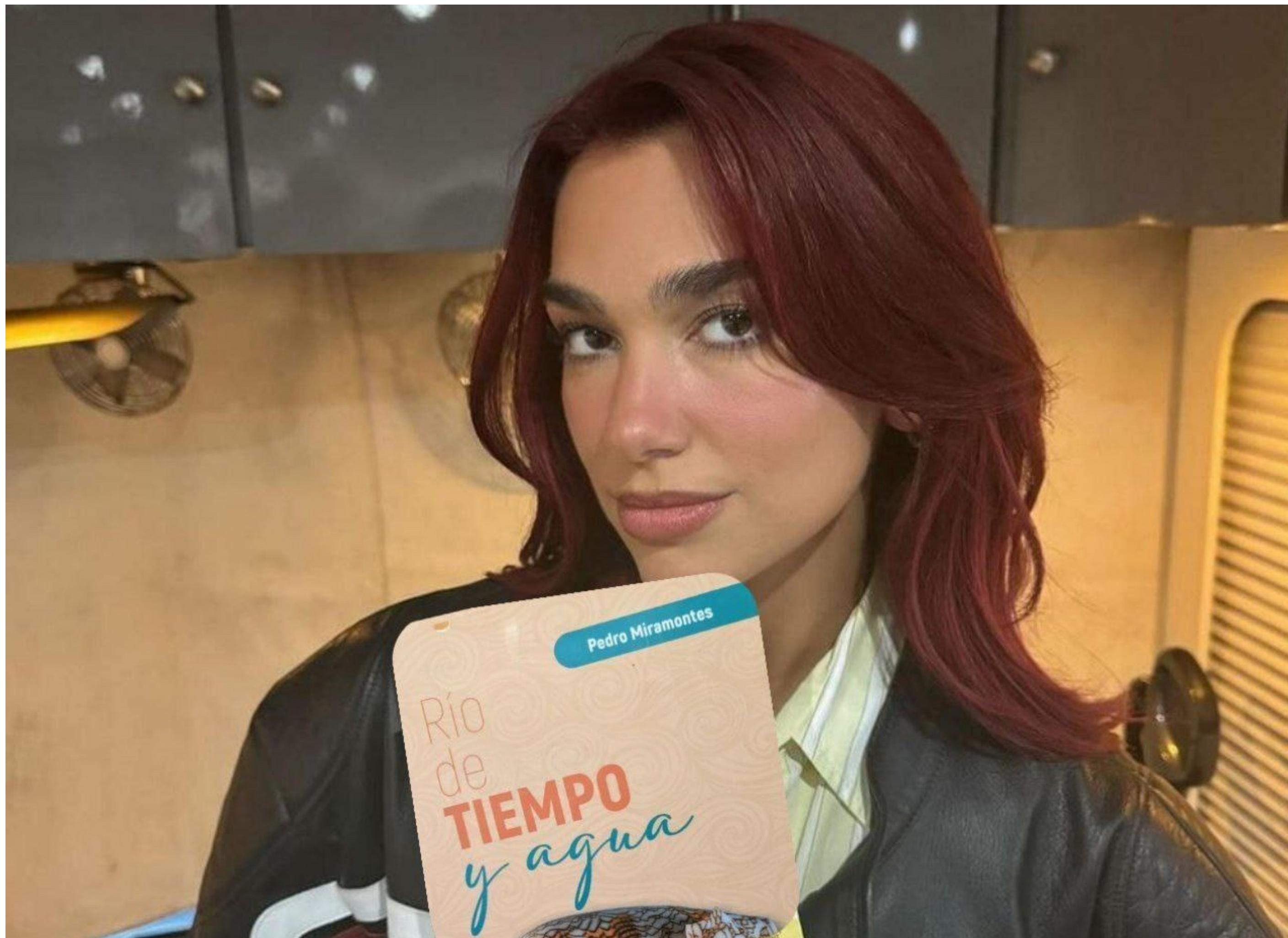
Instituto de
Matemáticas

**CCG**
Centro de Ciencias Genómicas

SOCIEDAD
MATEMÁTICA
MEXICANA

TEXTO

RÍO DE TIEMPO Y AGUA



MUCHAS GRACIAS



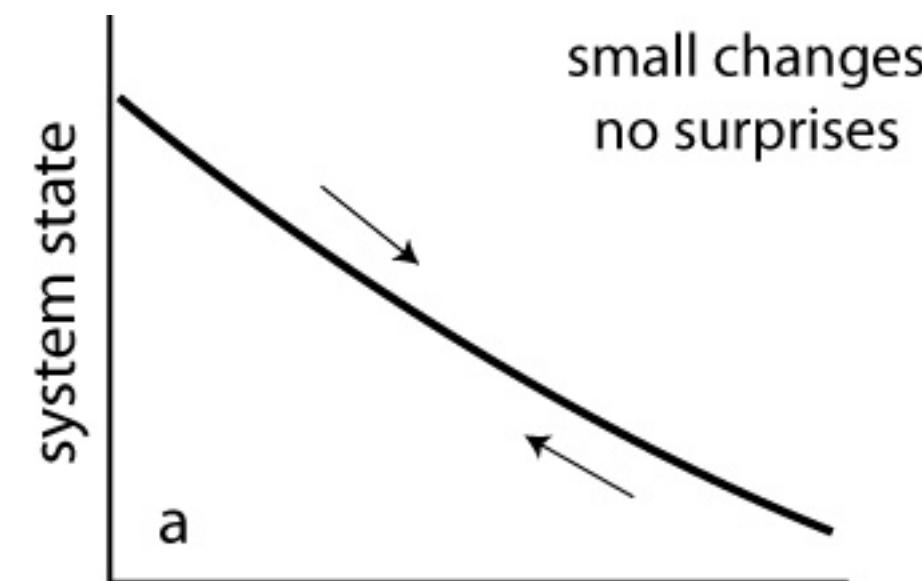
roberto.alvarez@uaq.edu.mx



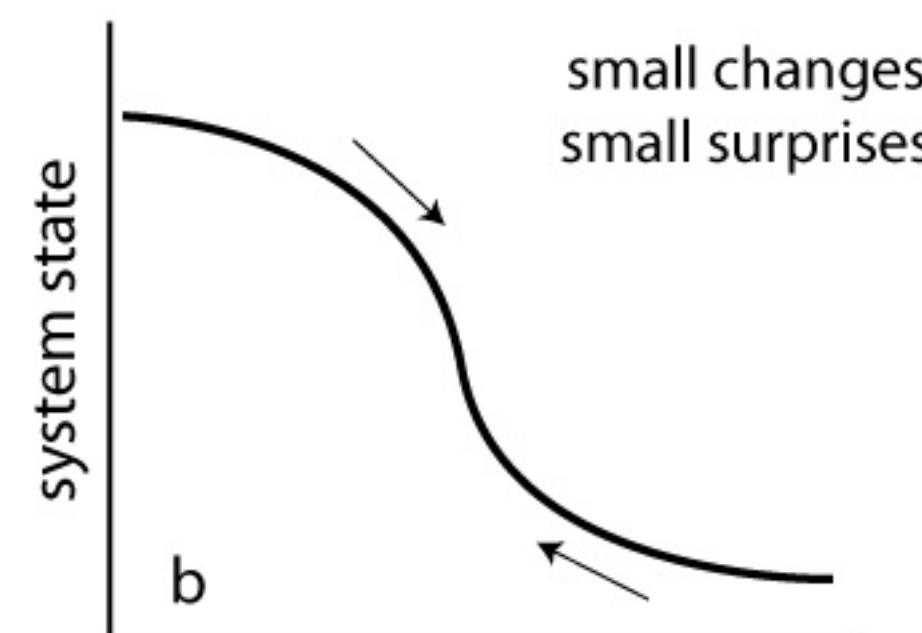
GRUPO EXTENDIDO



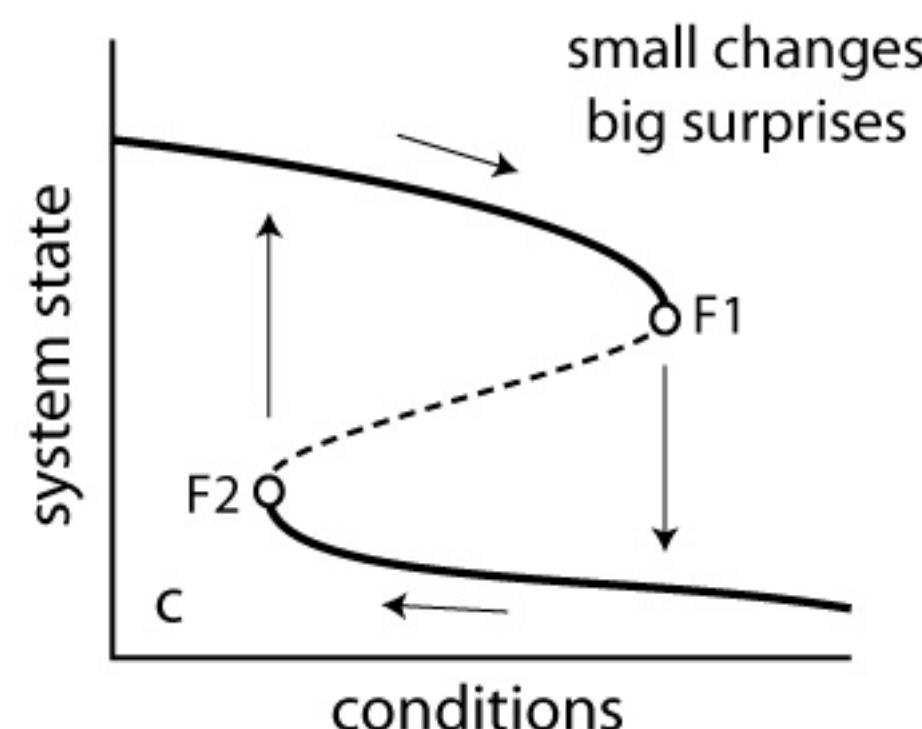
¿QUÉ ES UNA TRANSICIÓN CRÍTICA?



► Tipos de respuesta ante cambios en condiciones externas

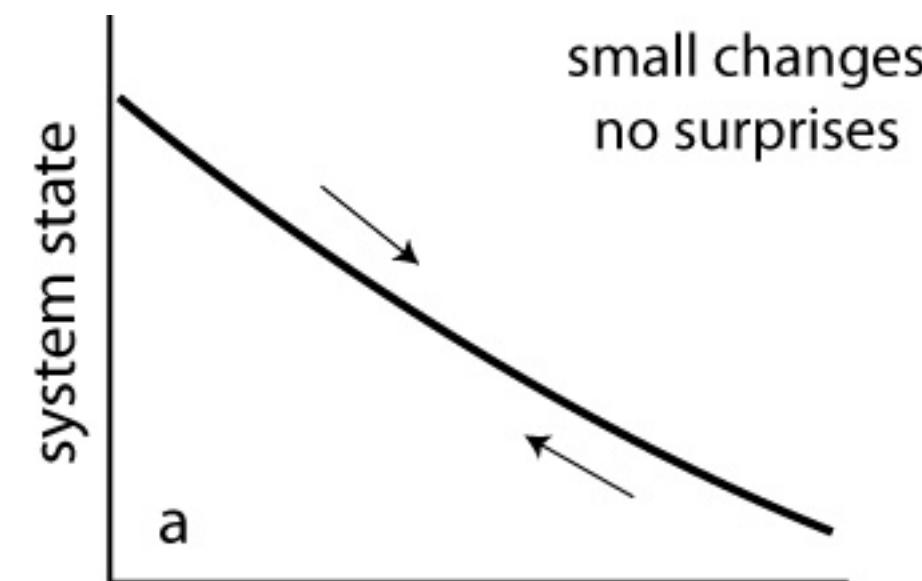


► Respuesta suave y continua (Panel A):

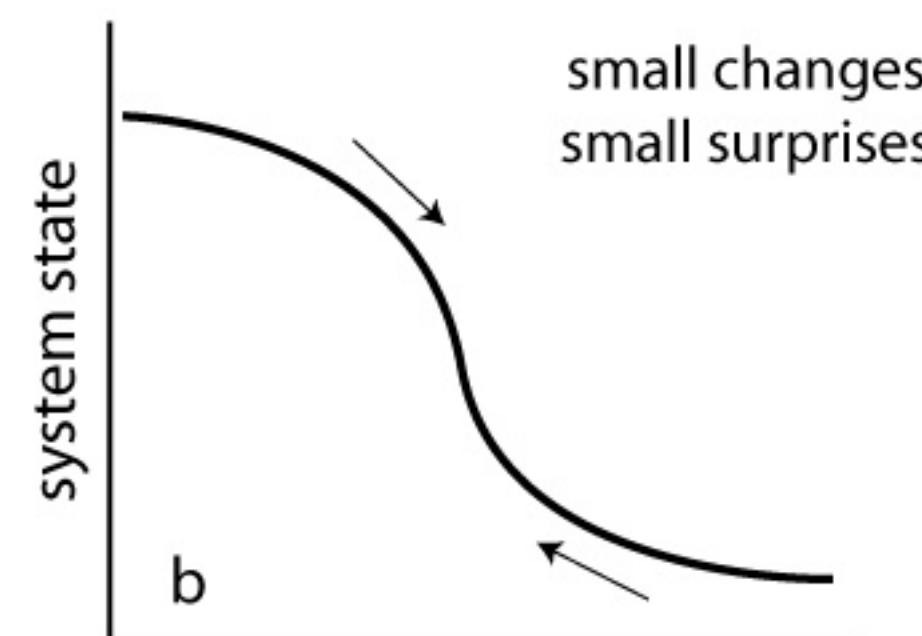


► Pequeños cambios → pequeños efectos

¿QUÉ ES UNA TRANSICIÓN CRÍTICA?

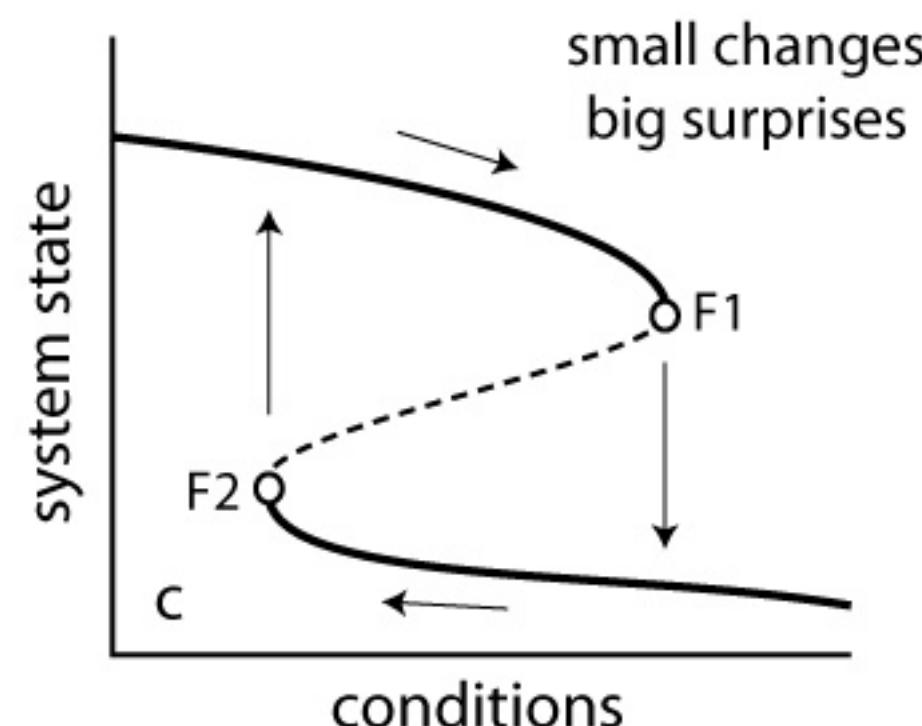


► Tipos de respuesta ante cambios en condiciones externas



► Respuesta suave y continua (Panel A):

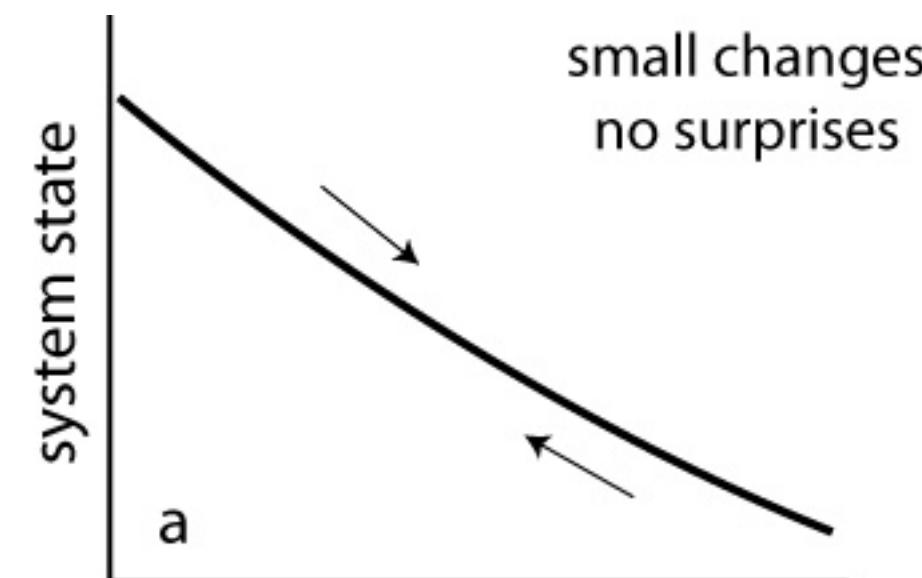
► Pequeños cambios → pequeños efectos



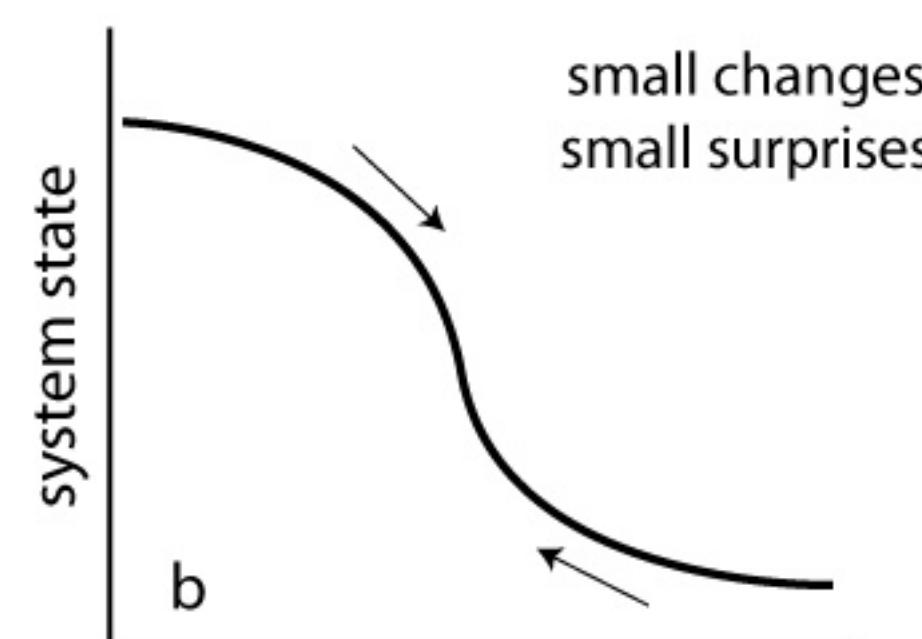
► Respuesta no lineal pero reversible (Panel B):

► Cerca de un **umbral**, pequeñas variaciones pueden causar cambios pequeños.

¿QUÉ ES UNA TRANSICIÓN CRÍTICA?

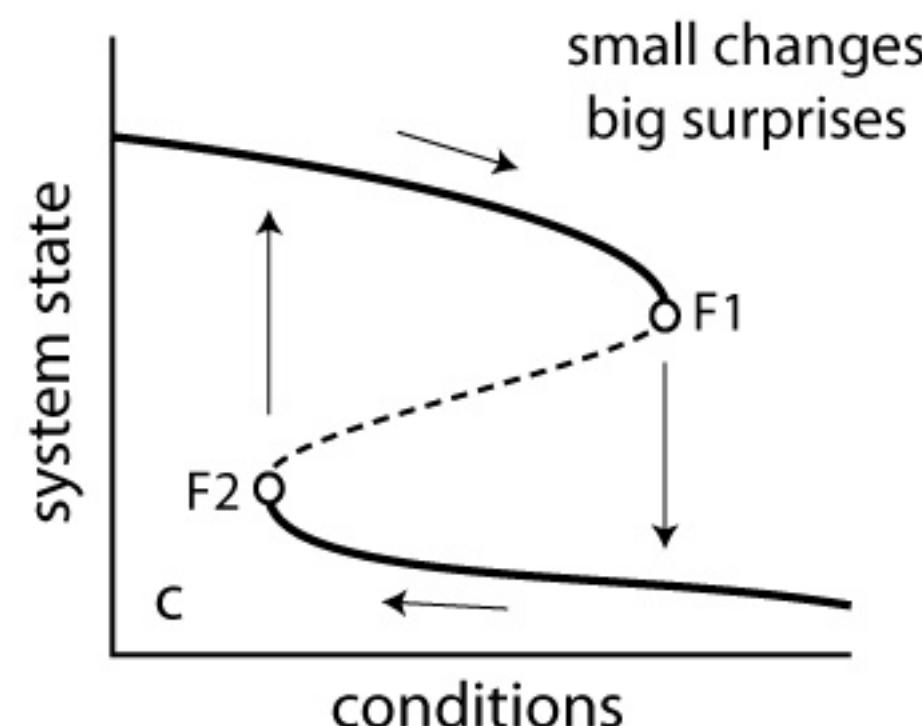


- ▶ Tipos de respuesta ante cambios en condiciones externas



- ▶ Respuesta suave y continua (Panel A):

- ▶ Pequeños cambios → pequeños efectos



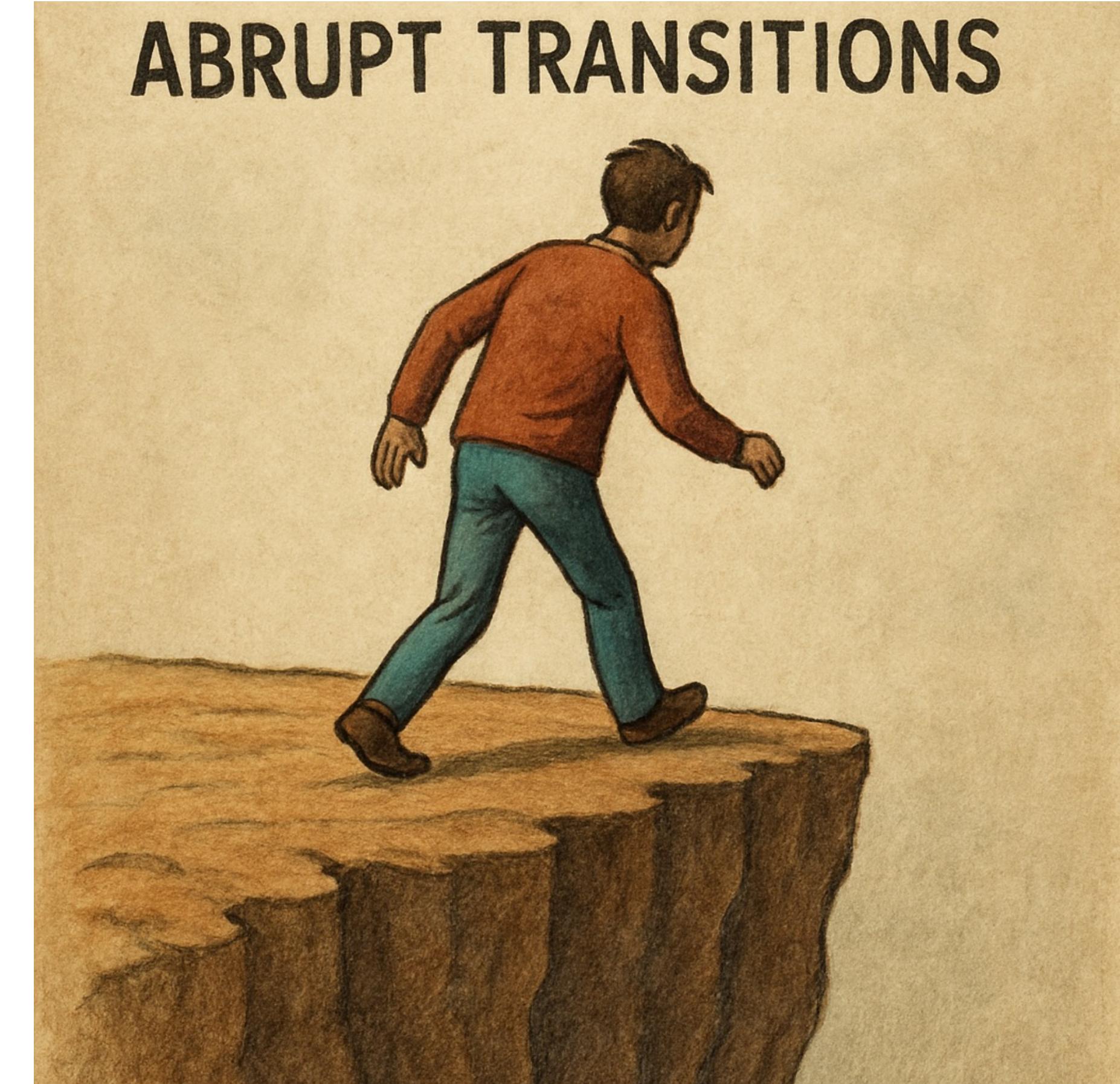
- ▶ Respuesta no lineal pero reversible (Panel B):

- ▶ Cerca de un umbral, pequeñas variaciones pueden causar cambios pequeños.

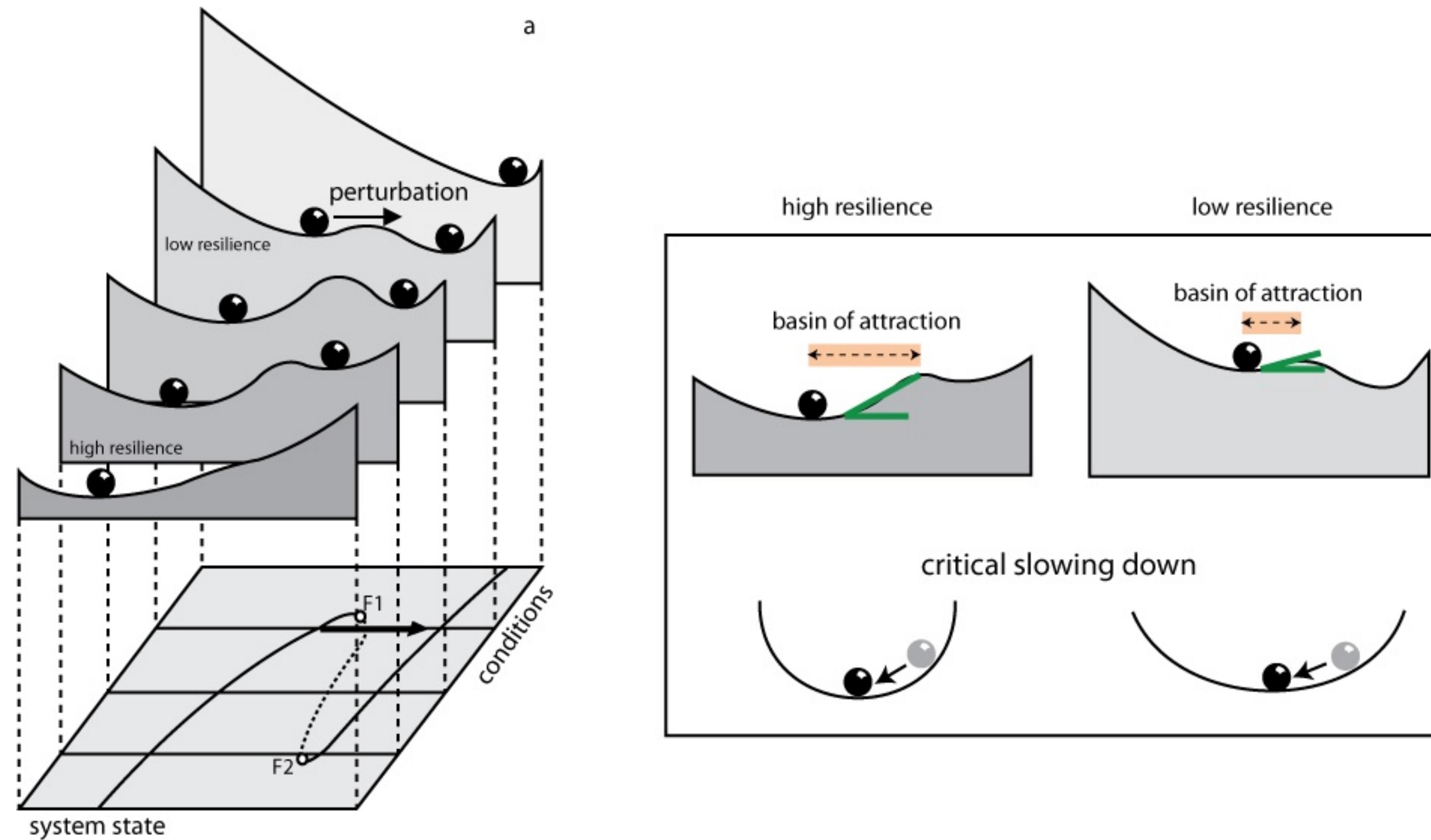
- ▶ Transición crítica (Panel C):

- ▶ Pequeño cambio → salto abrupto a un nuevo estado

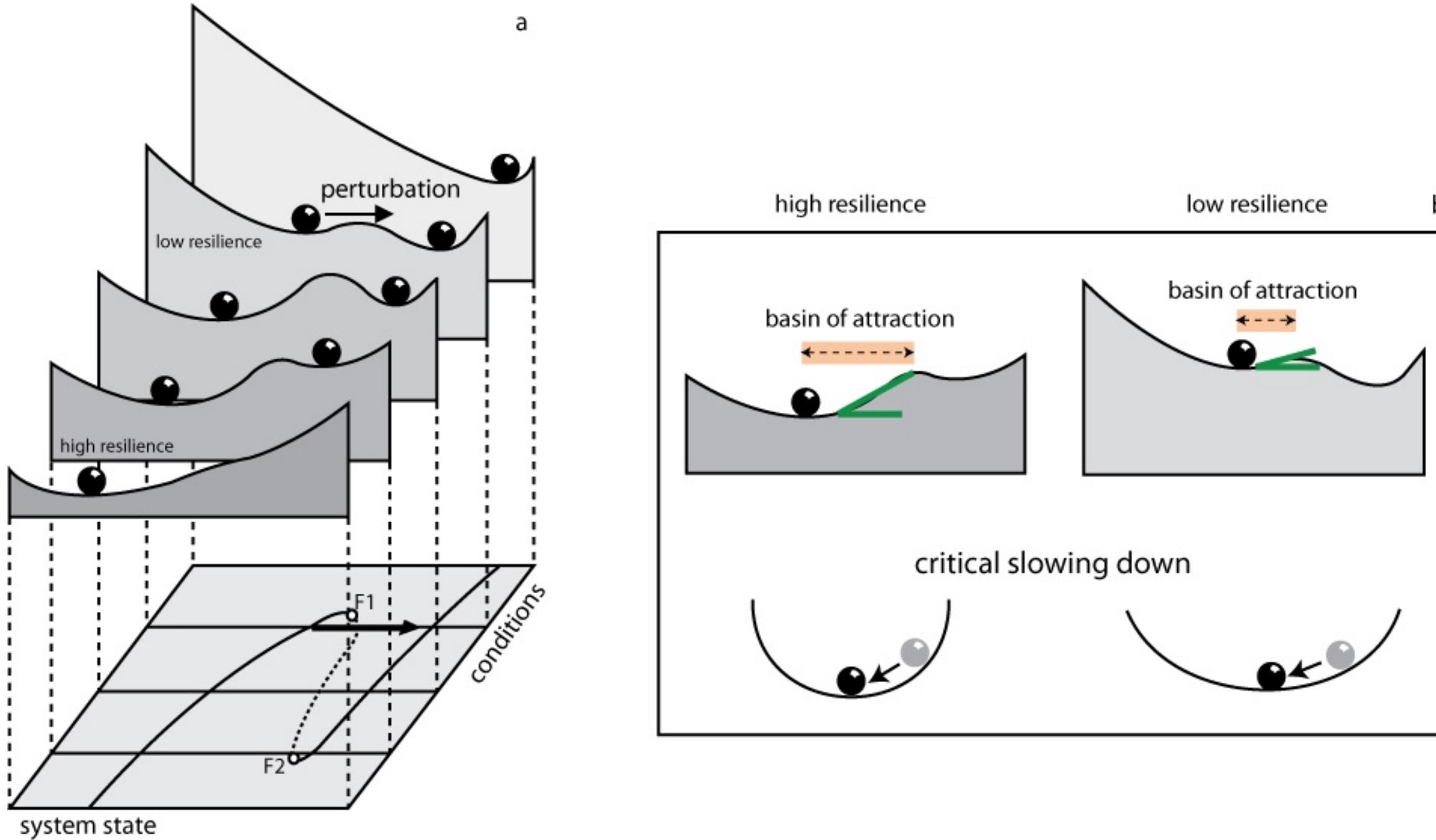
¿PODEMOS ANTICIPARNOS A UNA TRANSICIÓN CRÍTICA?



¿POR QUÉ DEBERÍAMOS ESPERAR ALERTAS TEMPRANAS ANTES DE UNA TRANSICIÓN CRÍTICA?

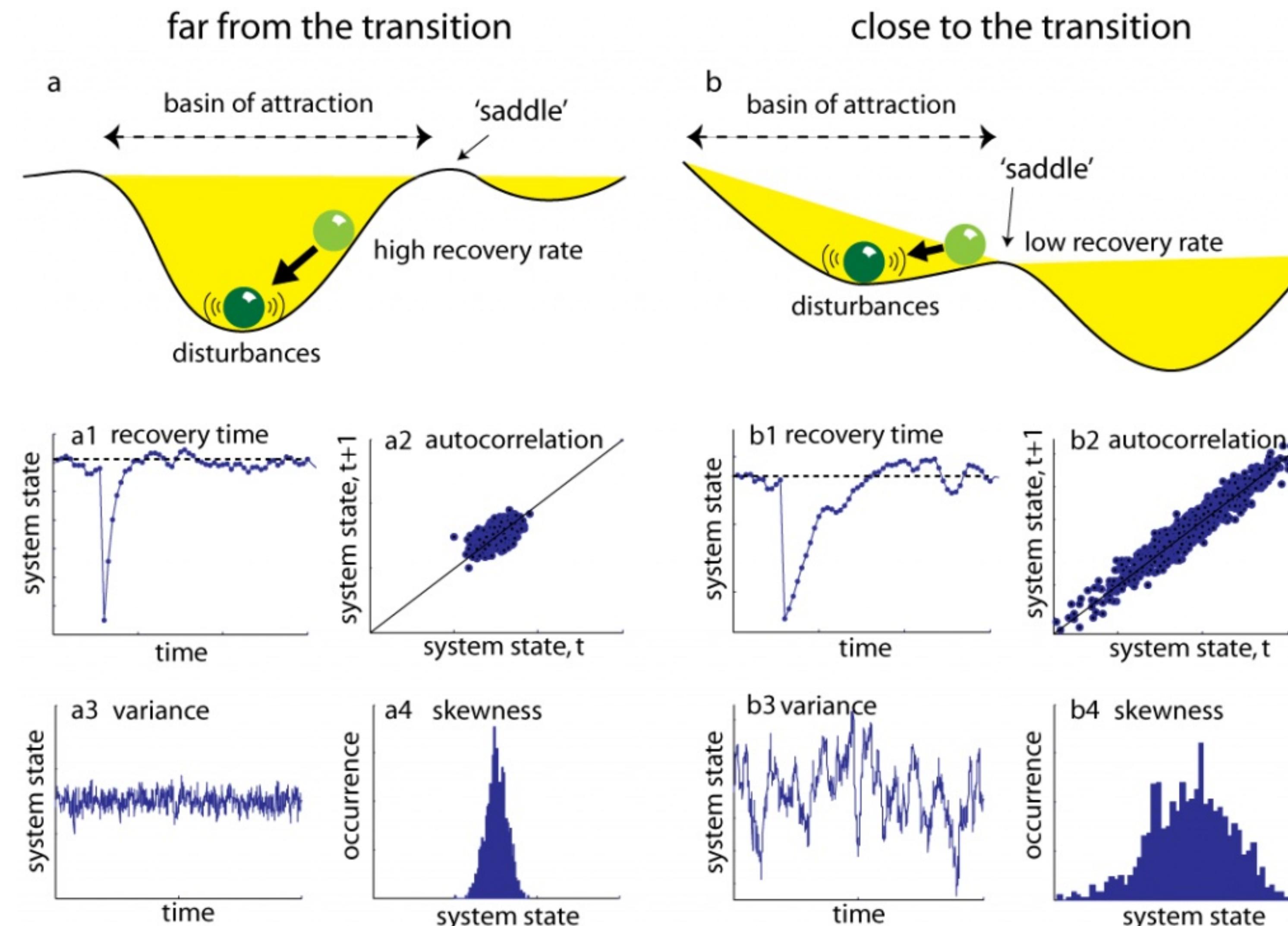


¿POR QUÉ DEBERÍAMOS ESPERAR ALERTAS TEMPRANAS ANTES DE UNA TRANSICIÓN CRÍTICA?



- ▶ **Metáfora del paisaje:** El sistema se comporta como una canica en un valle; los valles representan estados estables (atractores) y su profundidad refleja la **resiliencia** del sistema.
- ▶ **Pérdida de resiliencia:** Al acercarse a una transición crítica, el valle se hace más angosto y menos profundo, lo que facilita que perturbaciones pequeñas empujen al sistema hacia otro estado.
- ▶ **Critical slowing down (CSD):** Las perturbaciones tardan más en disiparse debido al aplanamiento del valle – el sistema se recupera más lentamente.
- ▶ **Indicadores tempranos:** Esta ralentización refleja la cercanía a una bifurcación catastrófica y permite detectar señales tempranas de cambio crítico mediante el análisis de la dinámica.

¿QUÉ SON LAS SEÑALES DE ADVERTENCIA TEMPRANAS?

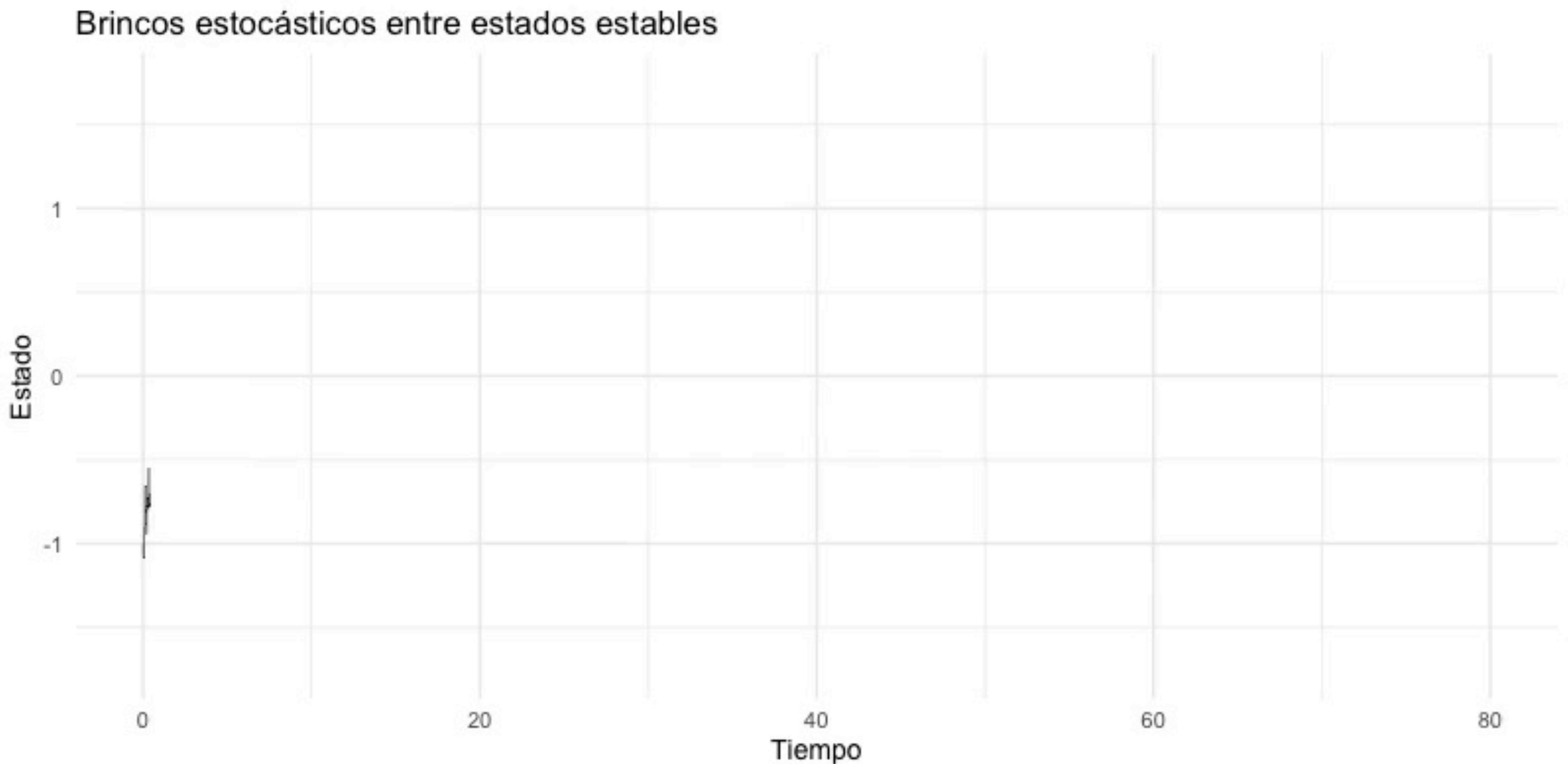


MÉTODOS BASADOS EN SERIES DE TIEMPO

$$\dot{x} = -\frac{dU}{dx} + \text{ruido}$$

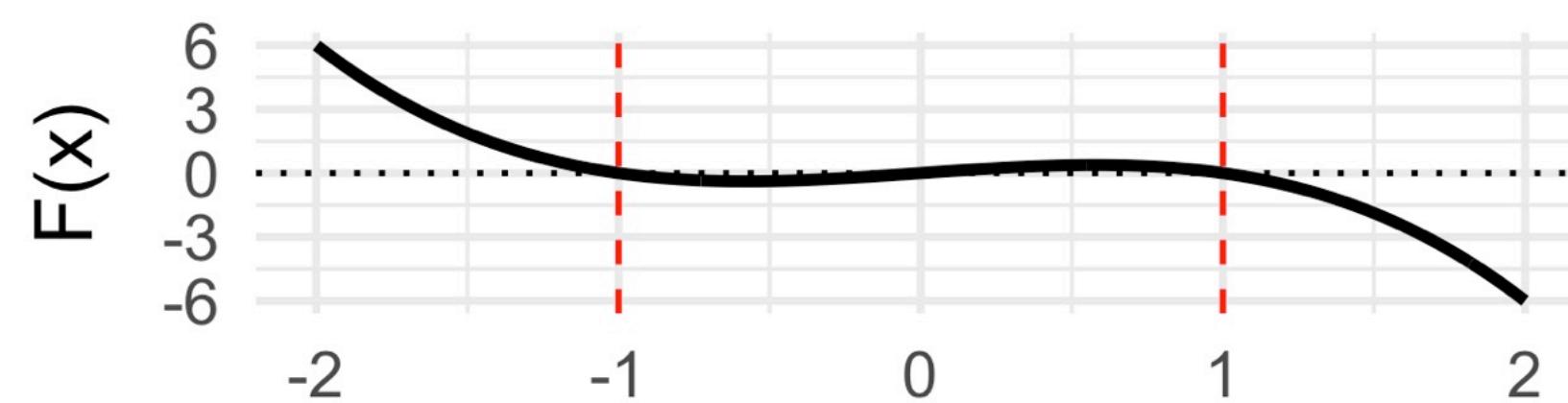
$$U(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = x - x^3$$

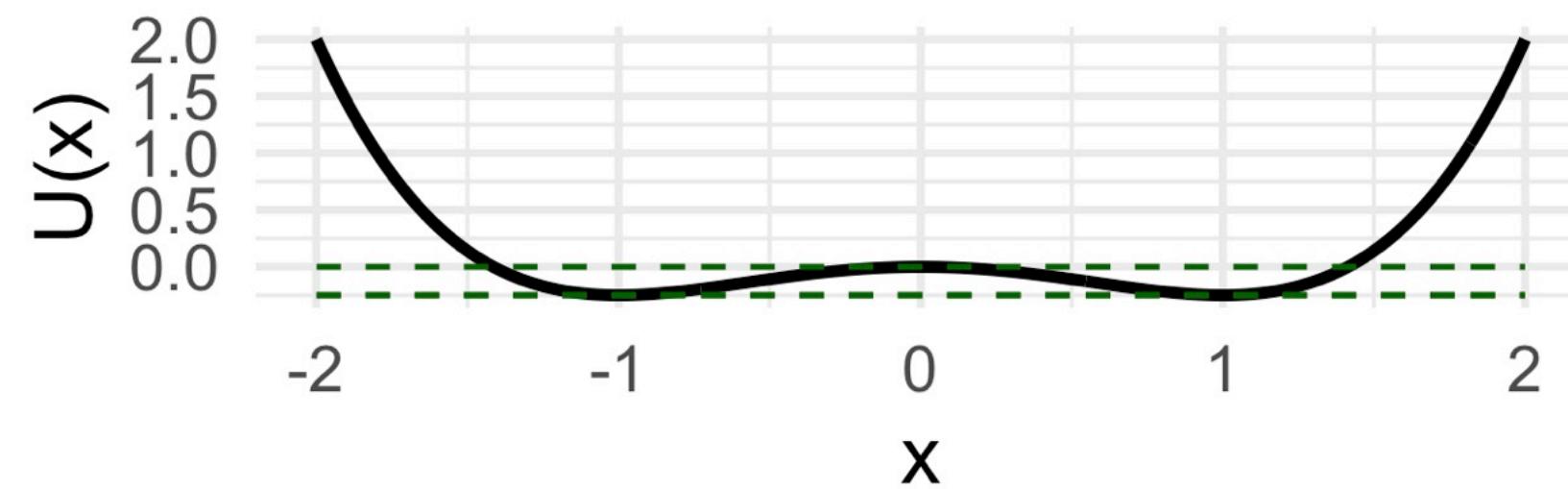


MÉTODOS BASADOS EN SERIES DE TIEMPO

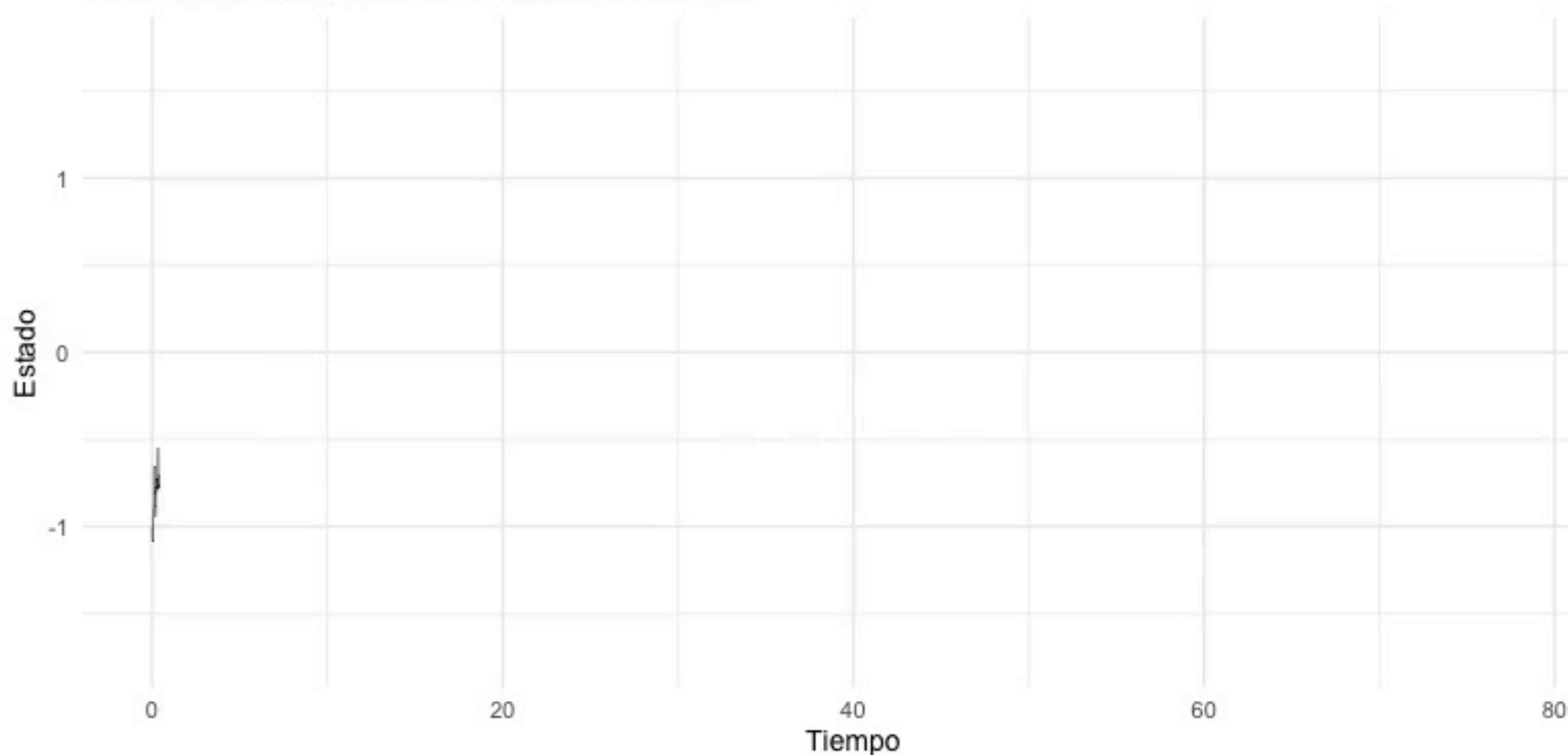
$$F(x) = x - x^3$$



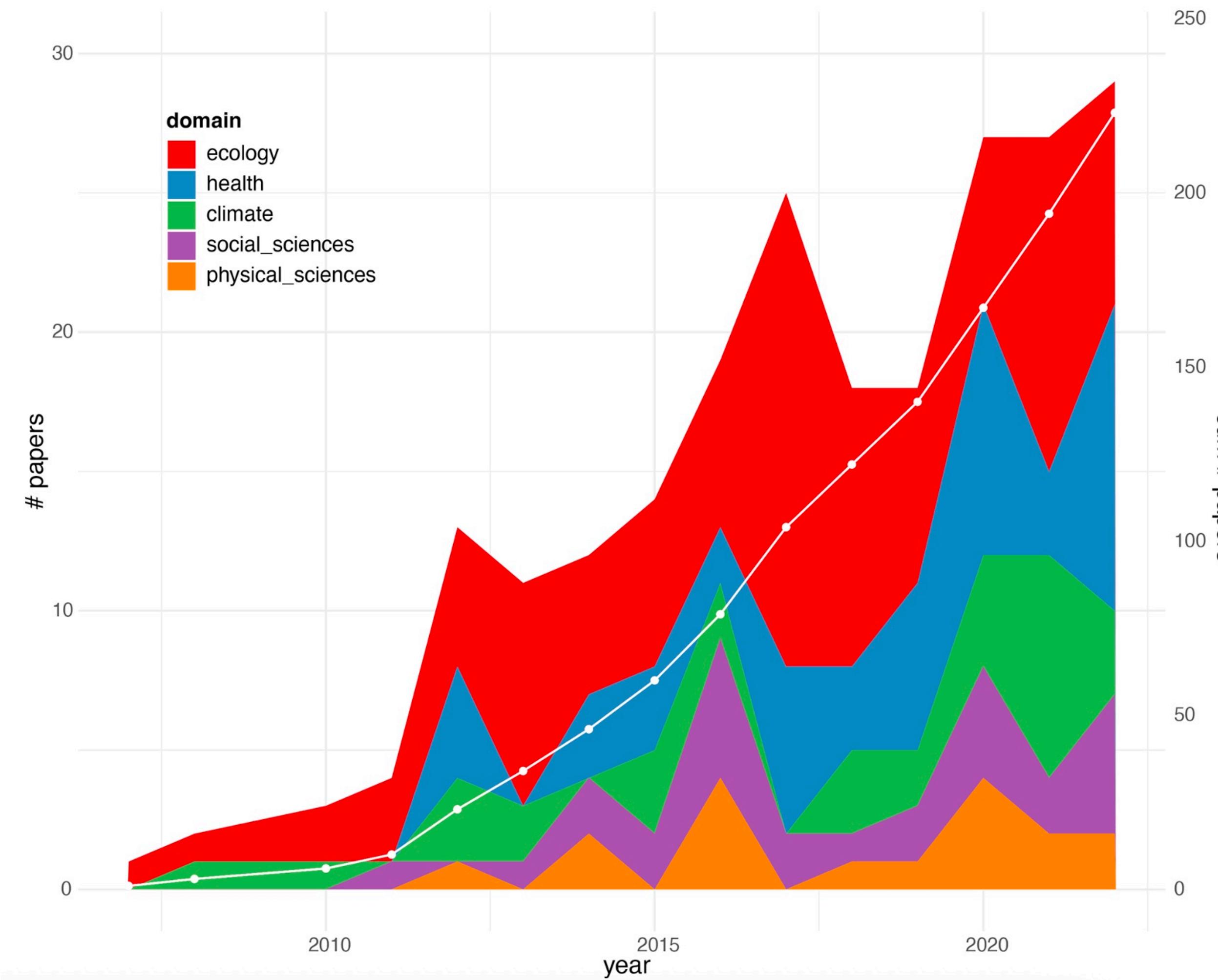
$$U(x) = x^4/4 - x^2/2$$



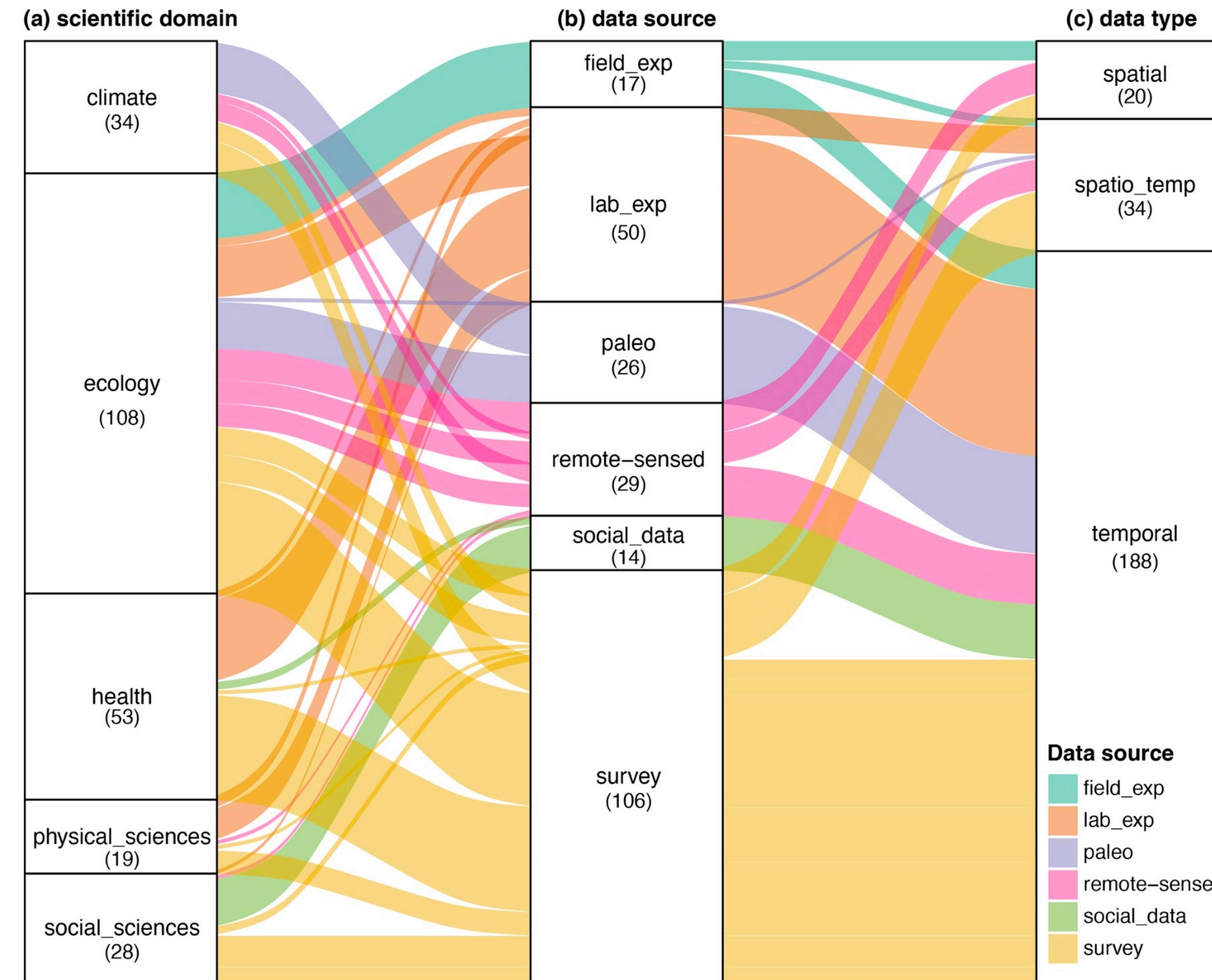
Brincos estocásticos entre estados estables



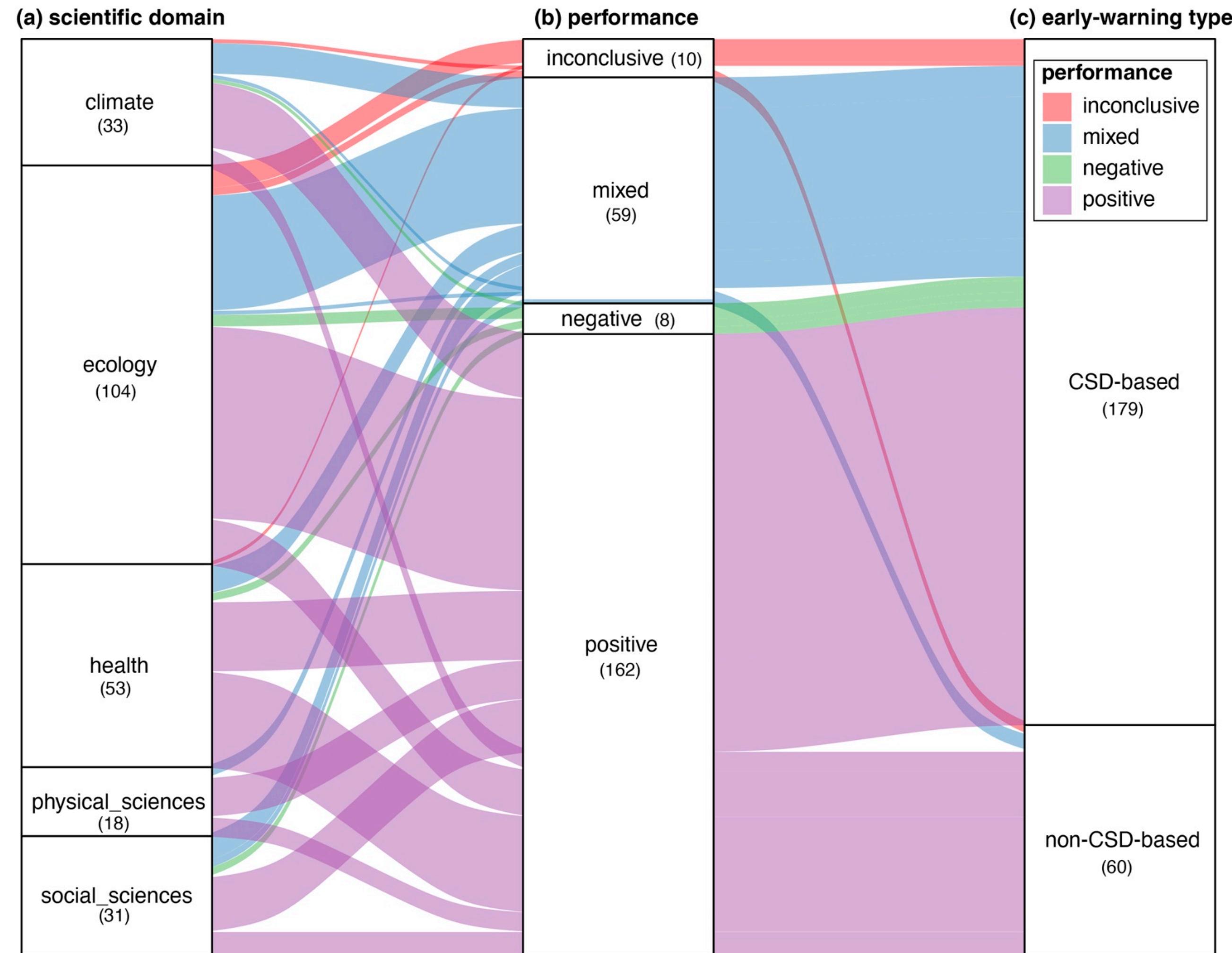
LAS SEÑALES DE ALERTA TEMPRANA SE HAN VUELTO MAINSTREAM



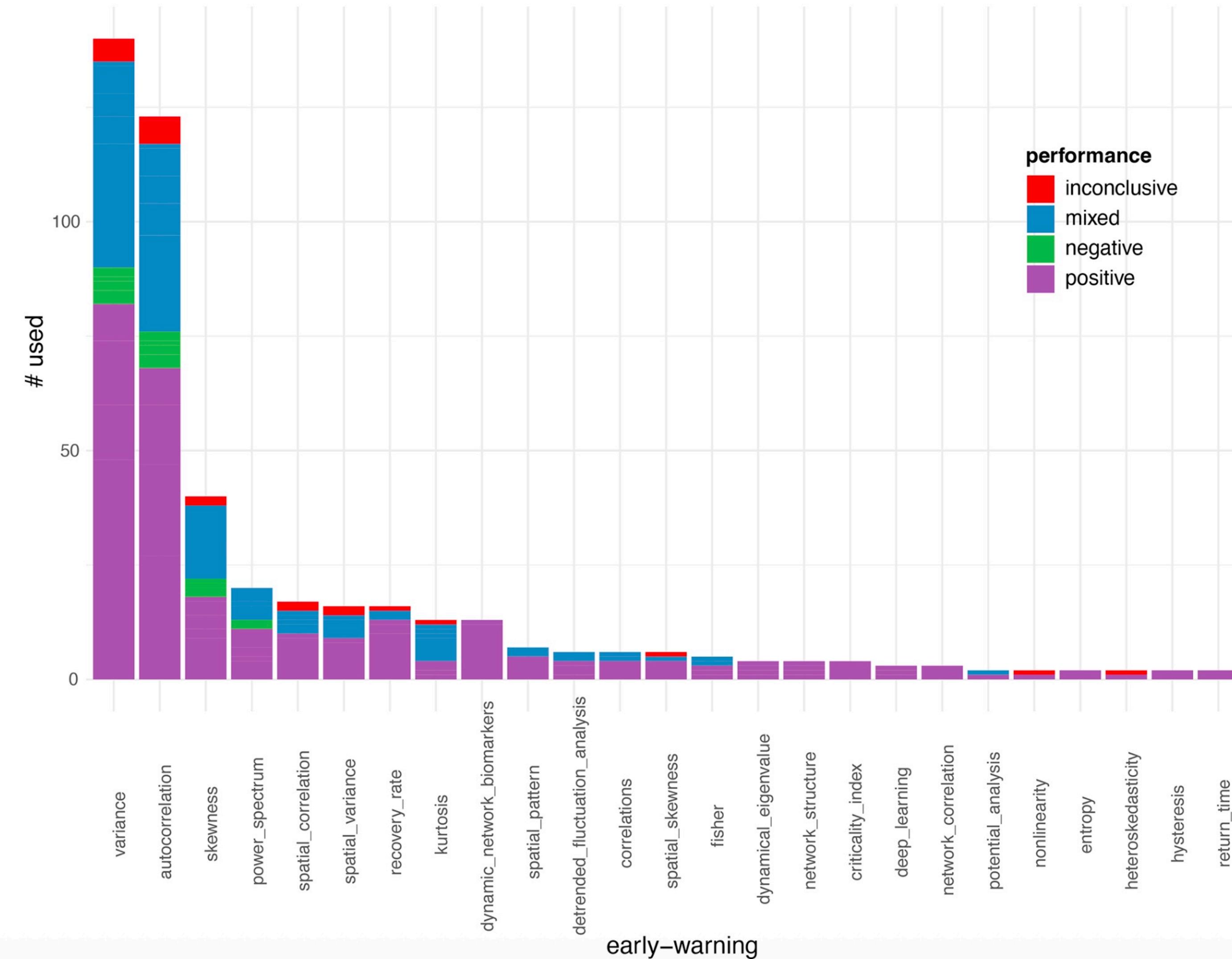
LAS SEÑALES DE ALERTA TEMPRANA PROVIENEN DE FUENTES DIVERSAS

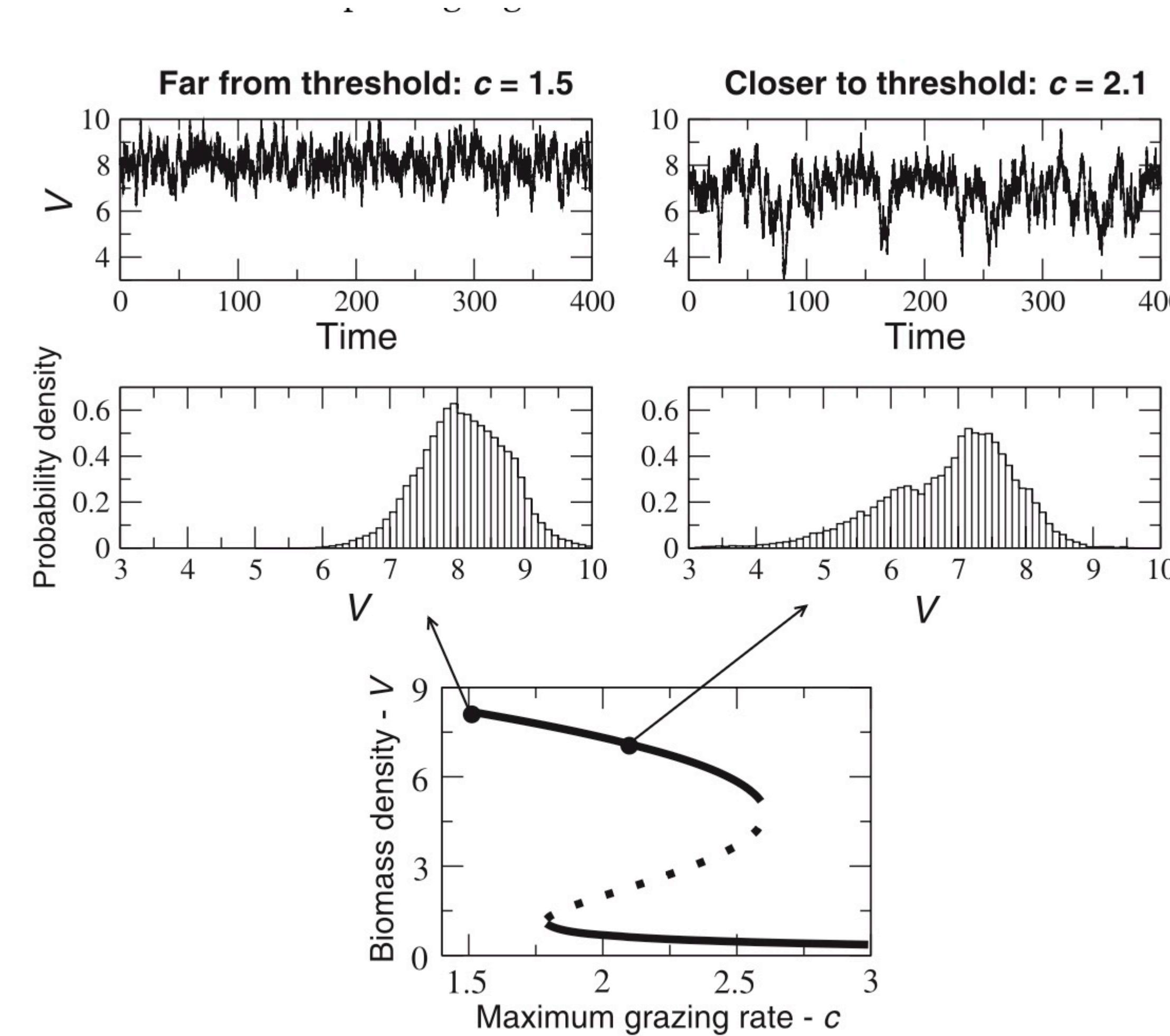


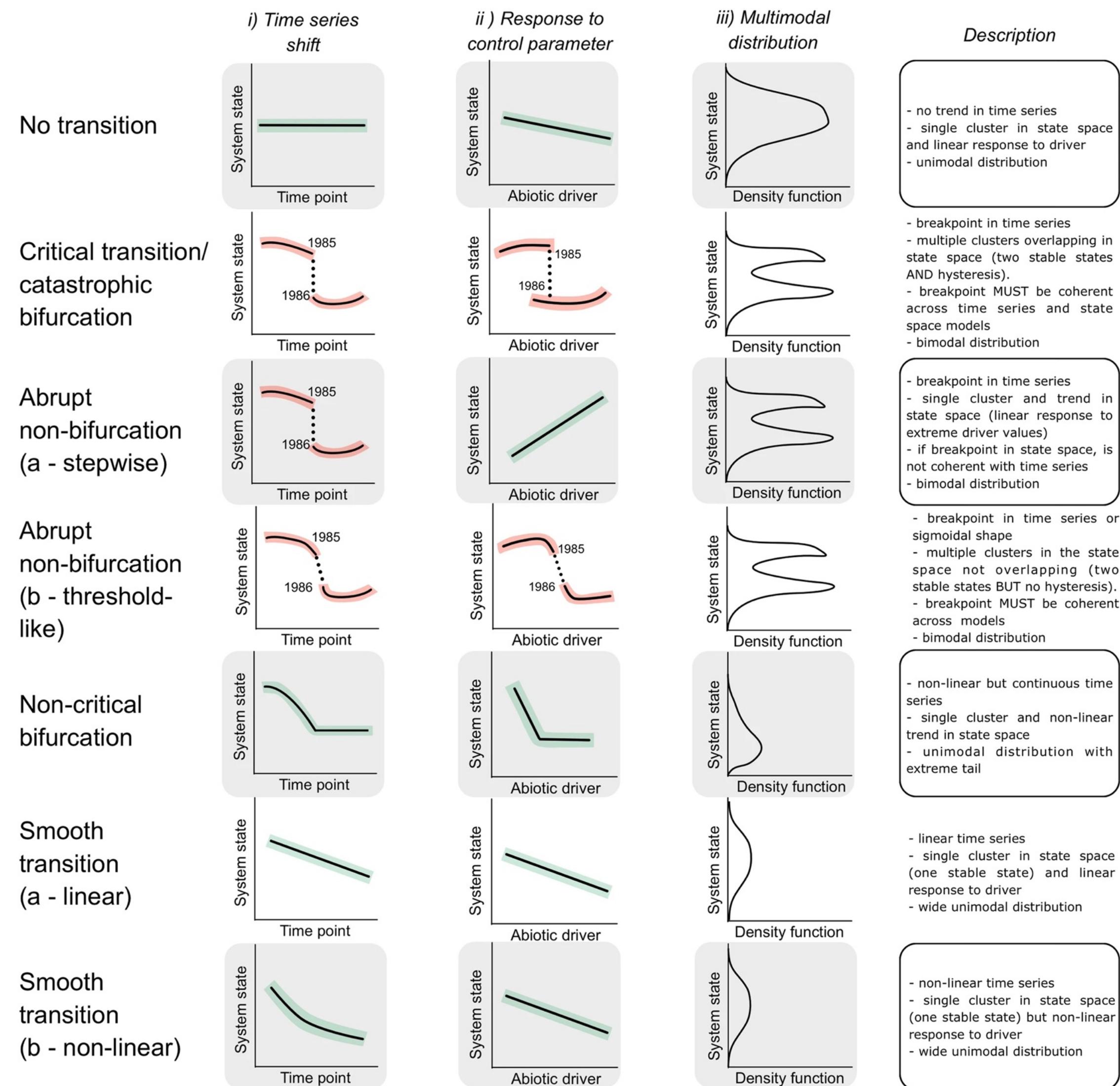
LA MAYOR PARTE SE BASAN EN DESACELERACIÓN CRÍTICA (CSD)



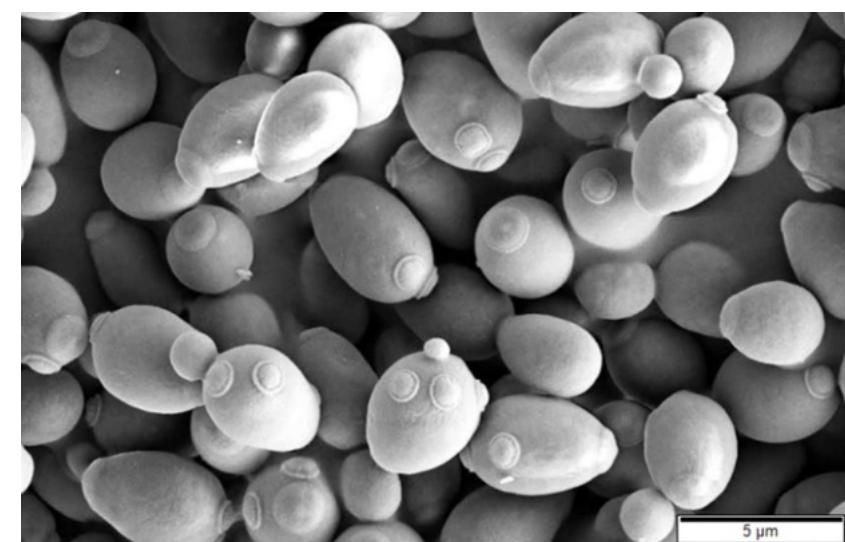
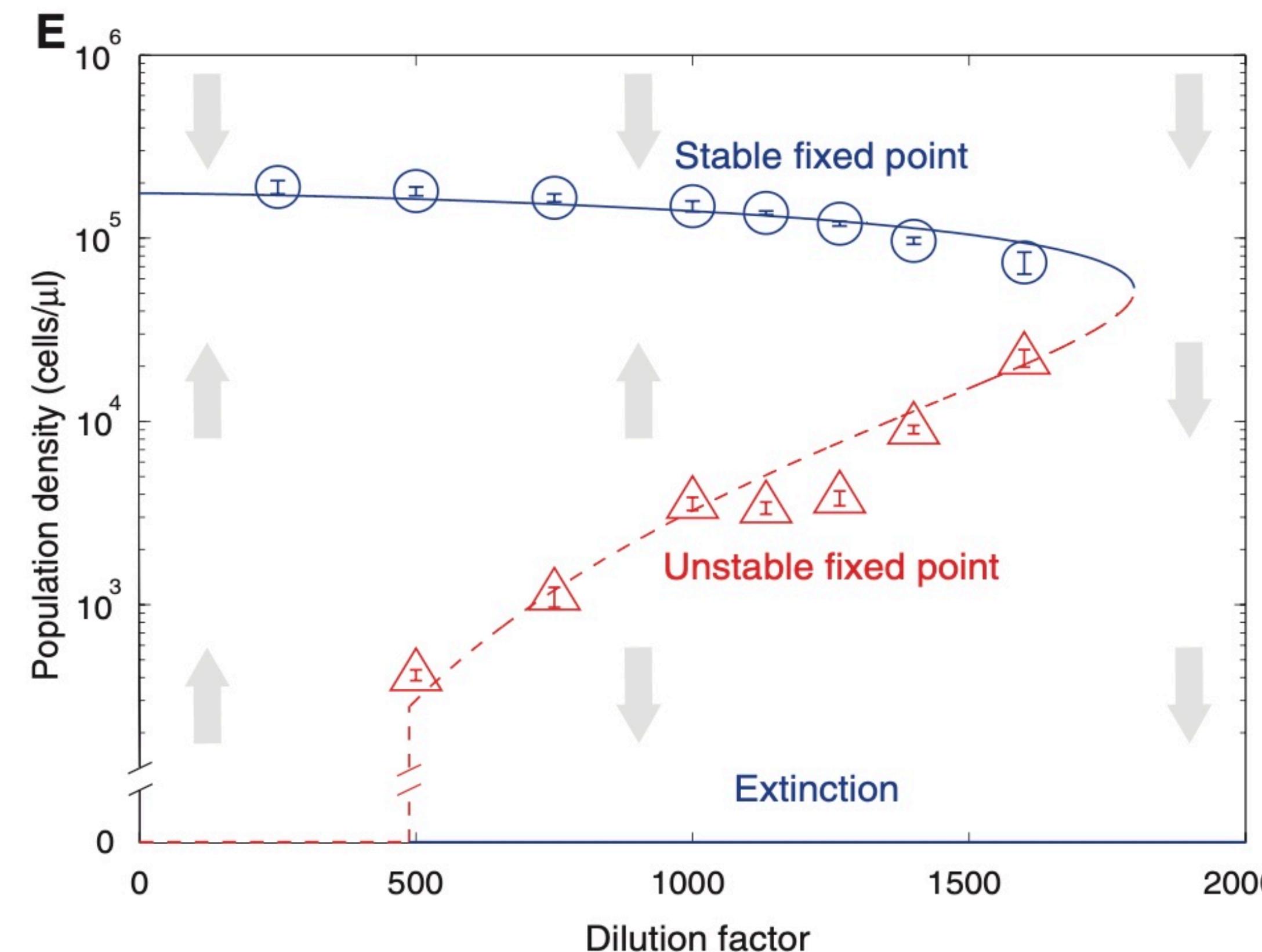
X|



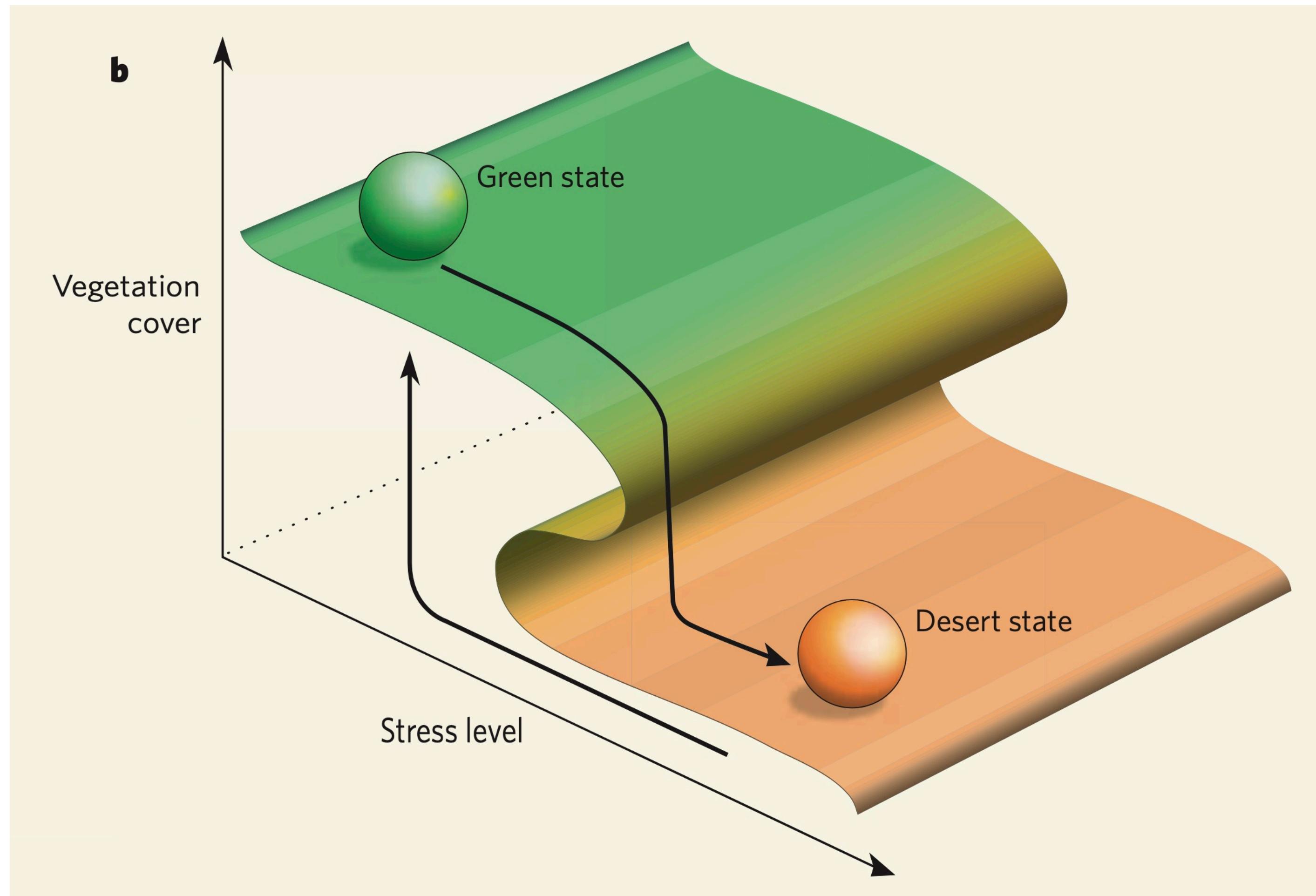


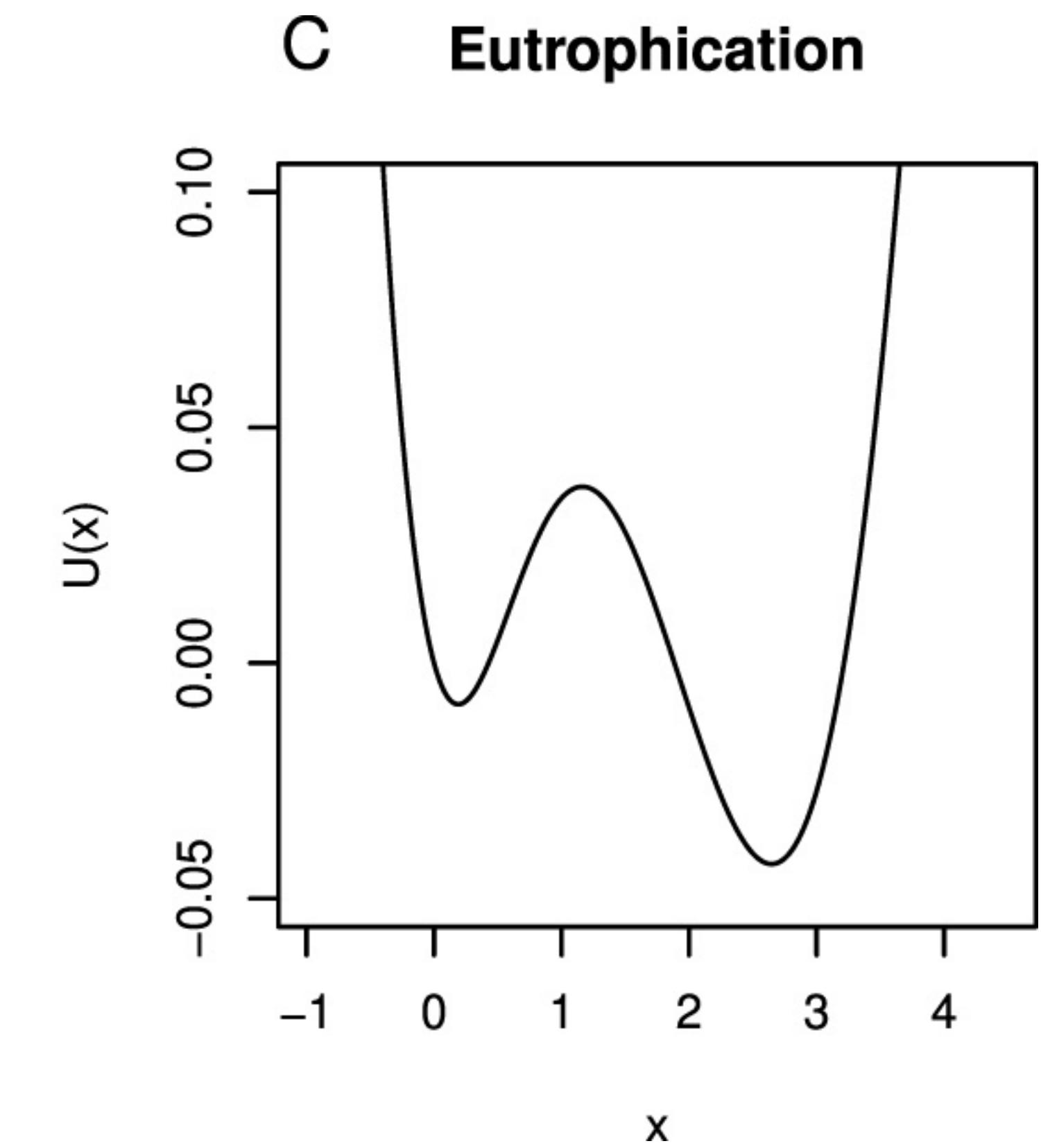
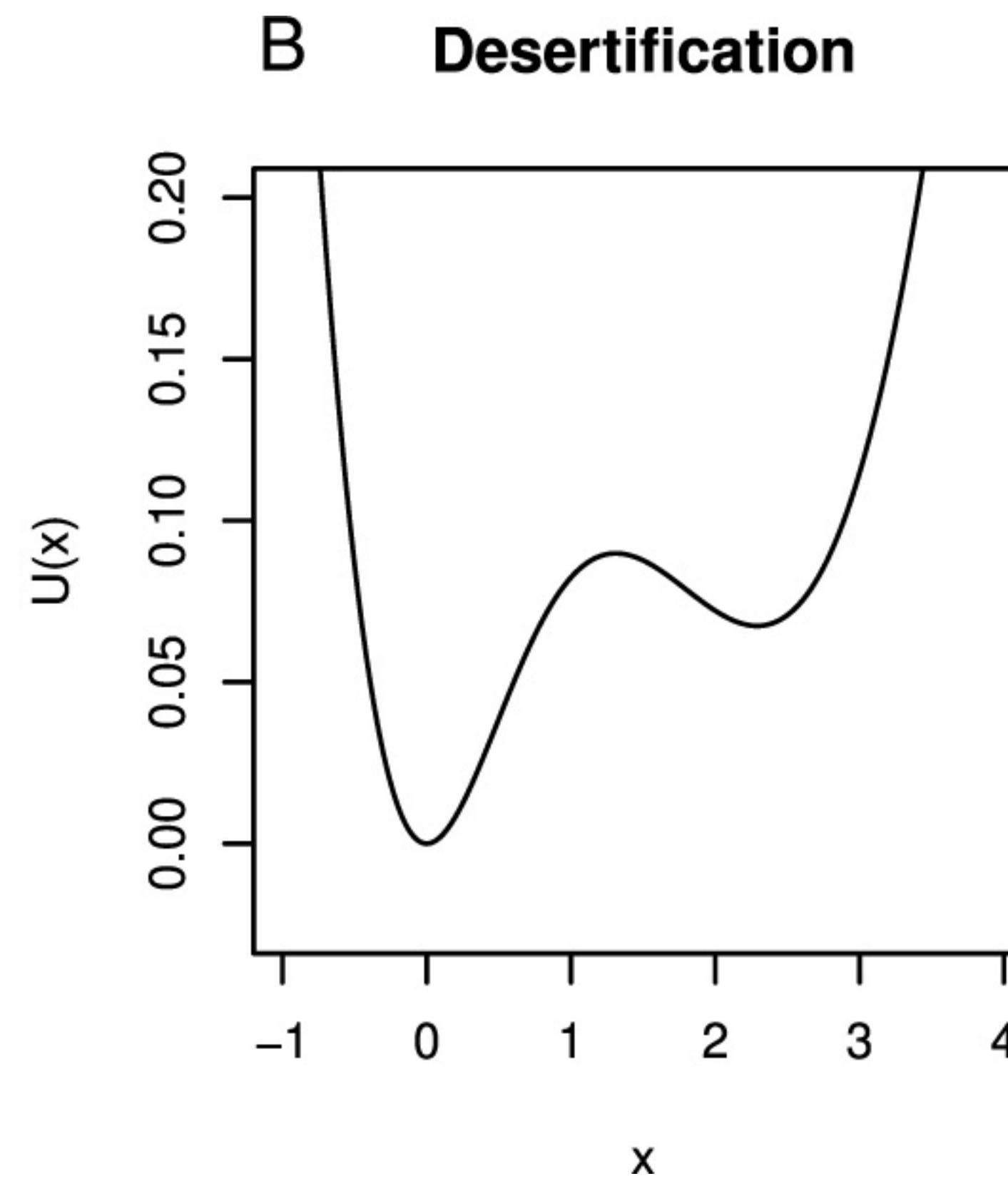
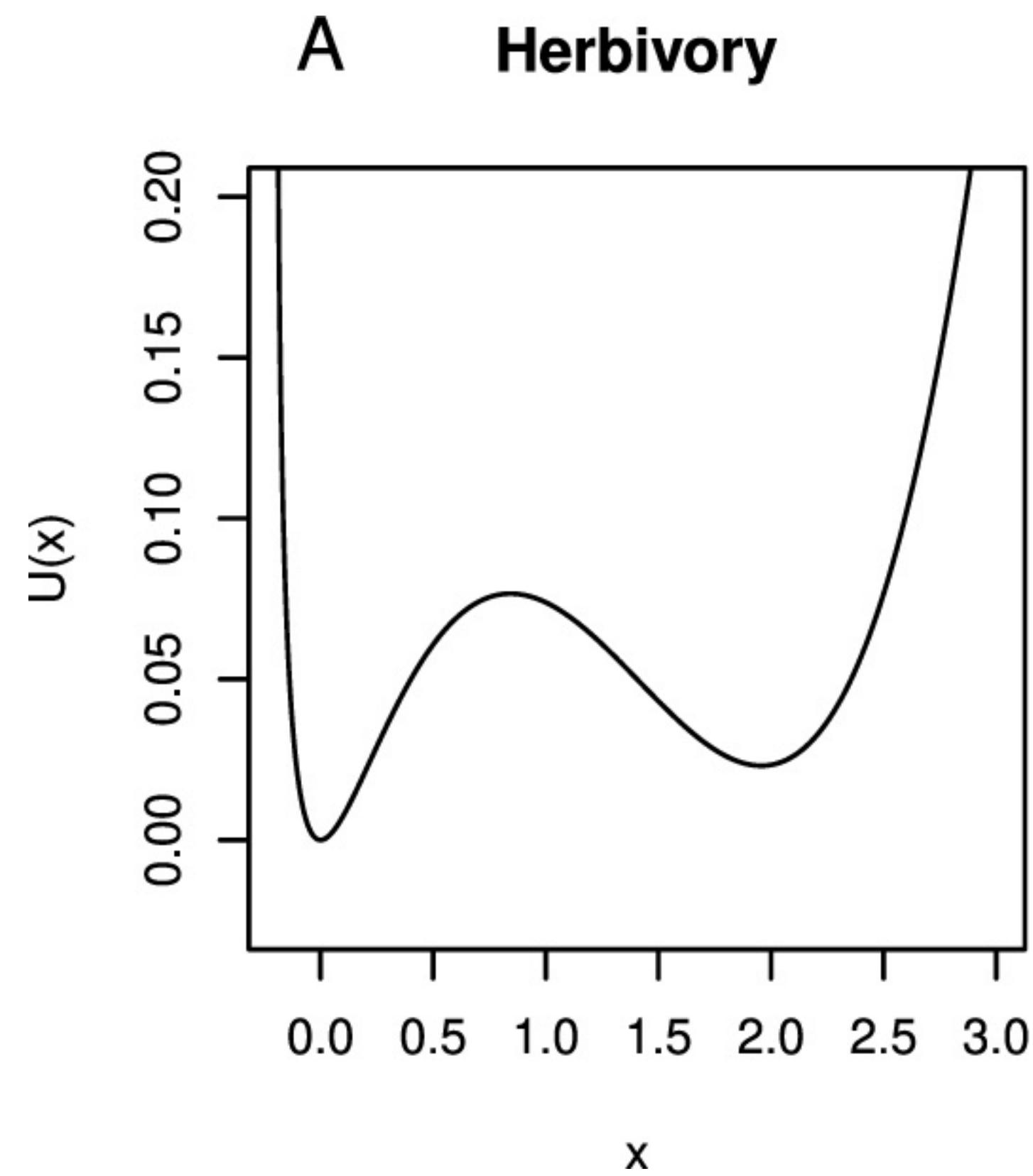


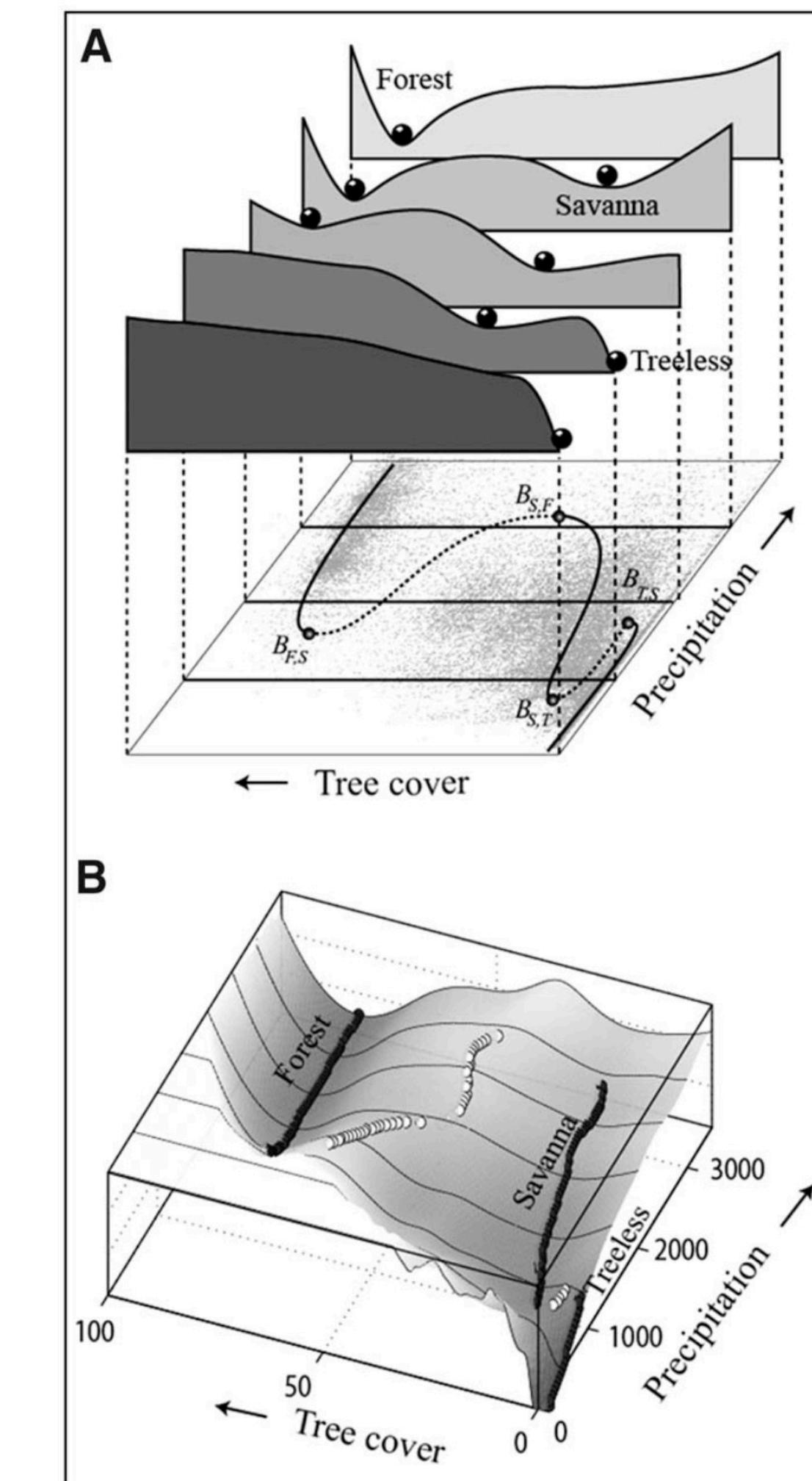
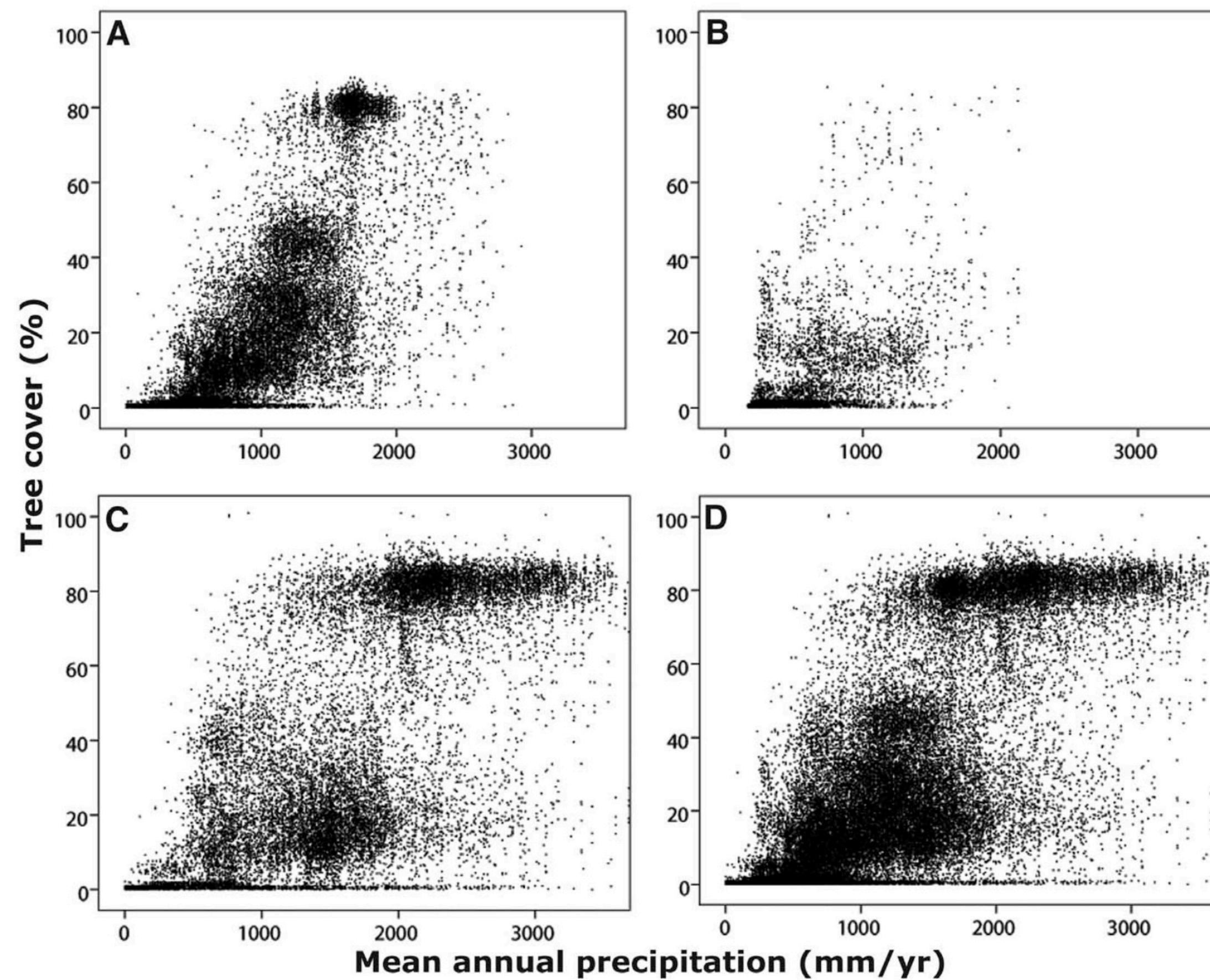
LAS LEVADURAS SOLITARIAS MUEREN



**Generic Indicators for Loss of Resilience Before a Tipping Point
Leading to Population Collapse**
Lei Dai *et al.*
Science 336, 1175 (2012);
DOI: 10.1126/science.1219805

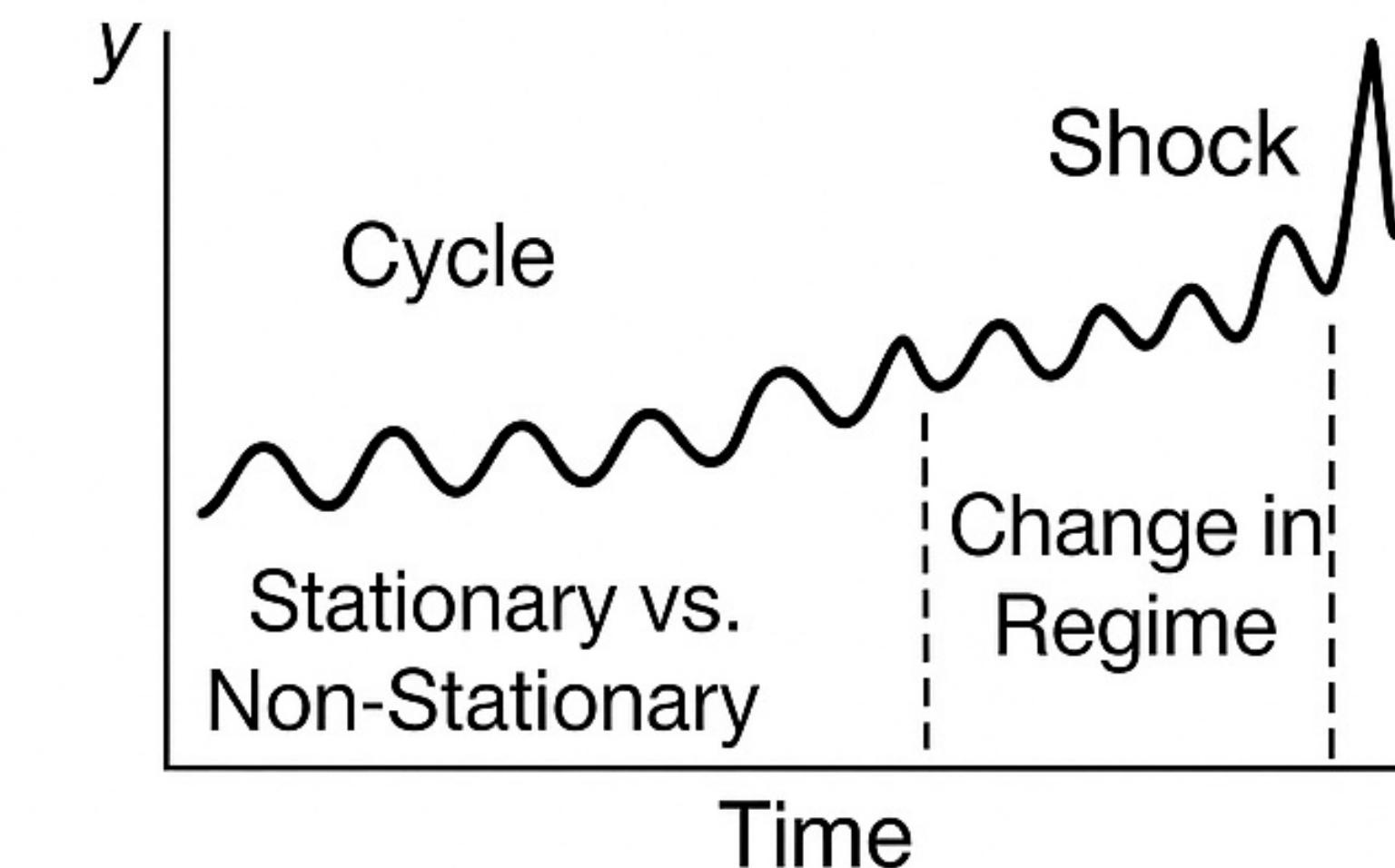
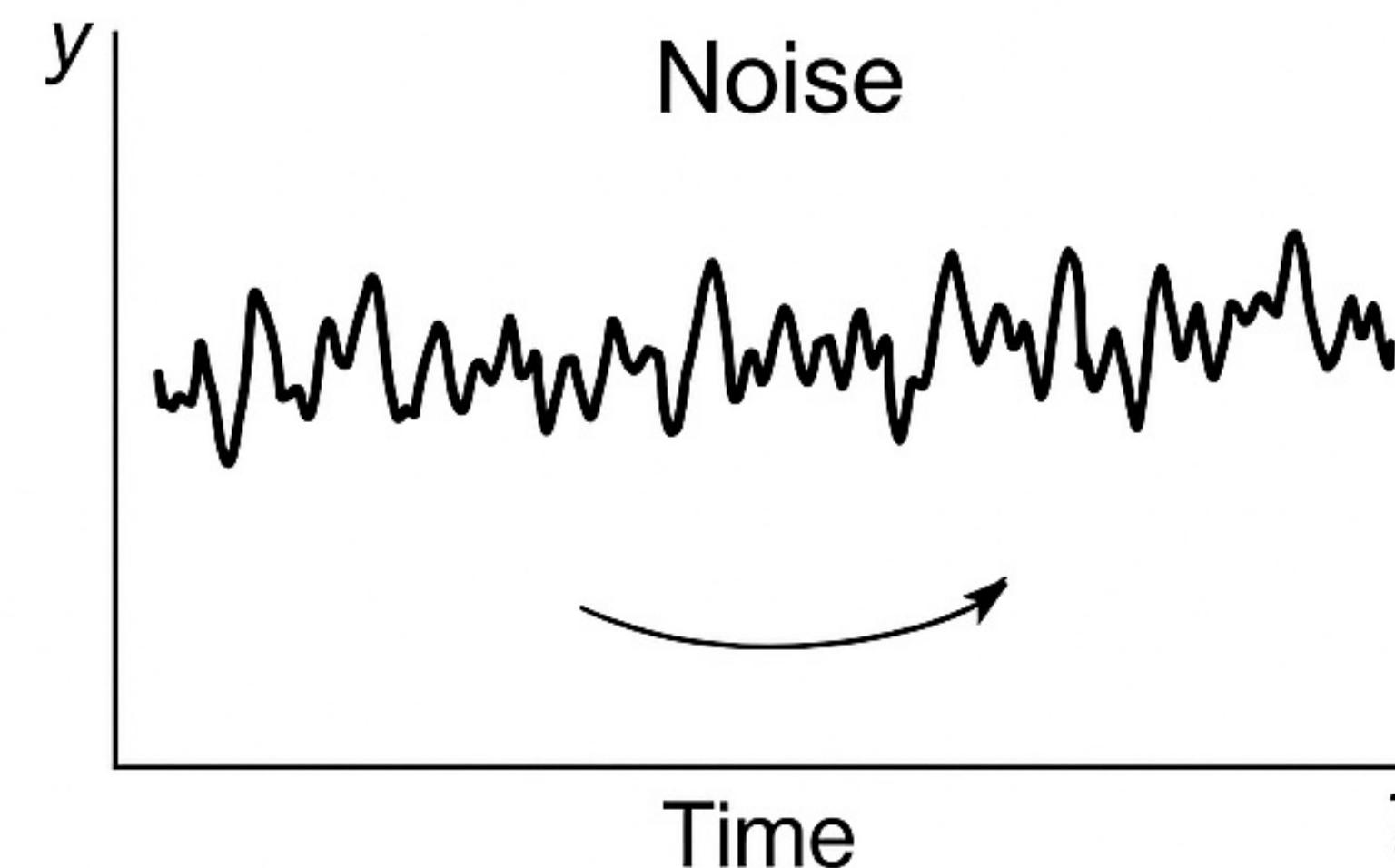
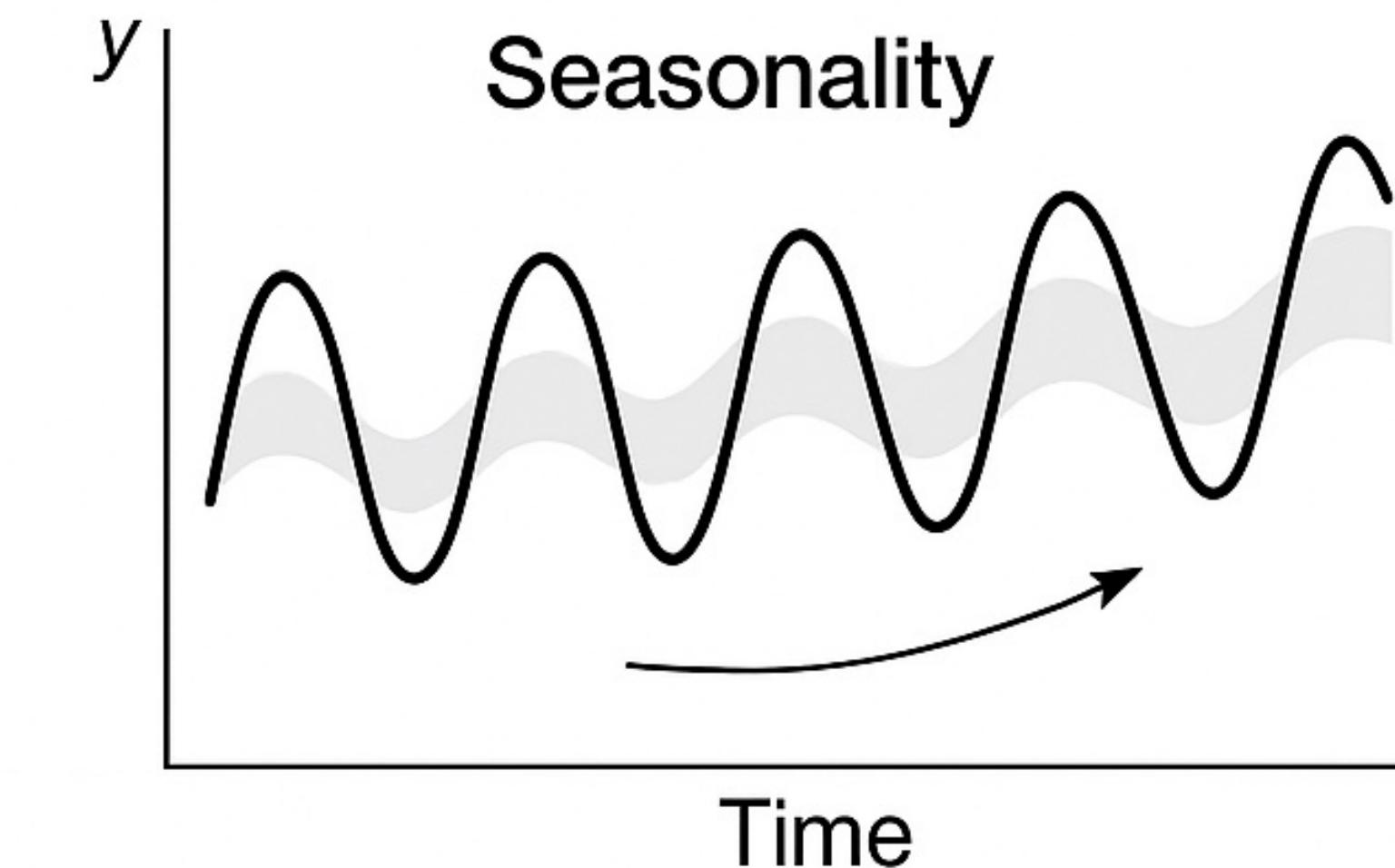
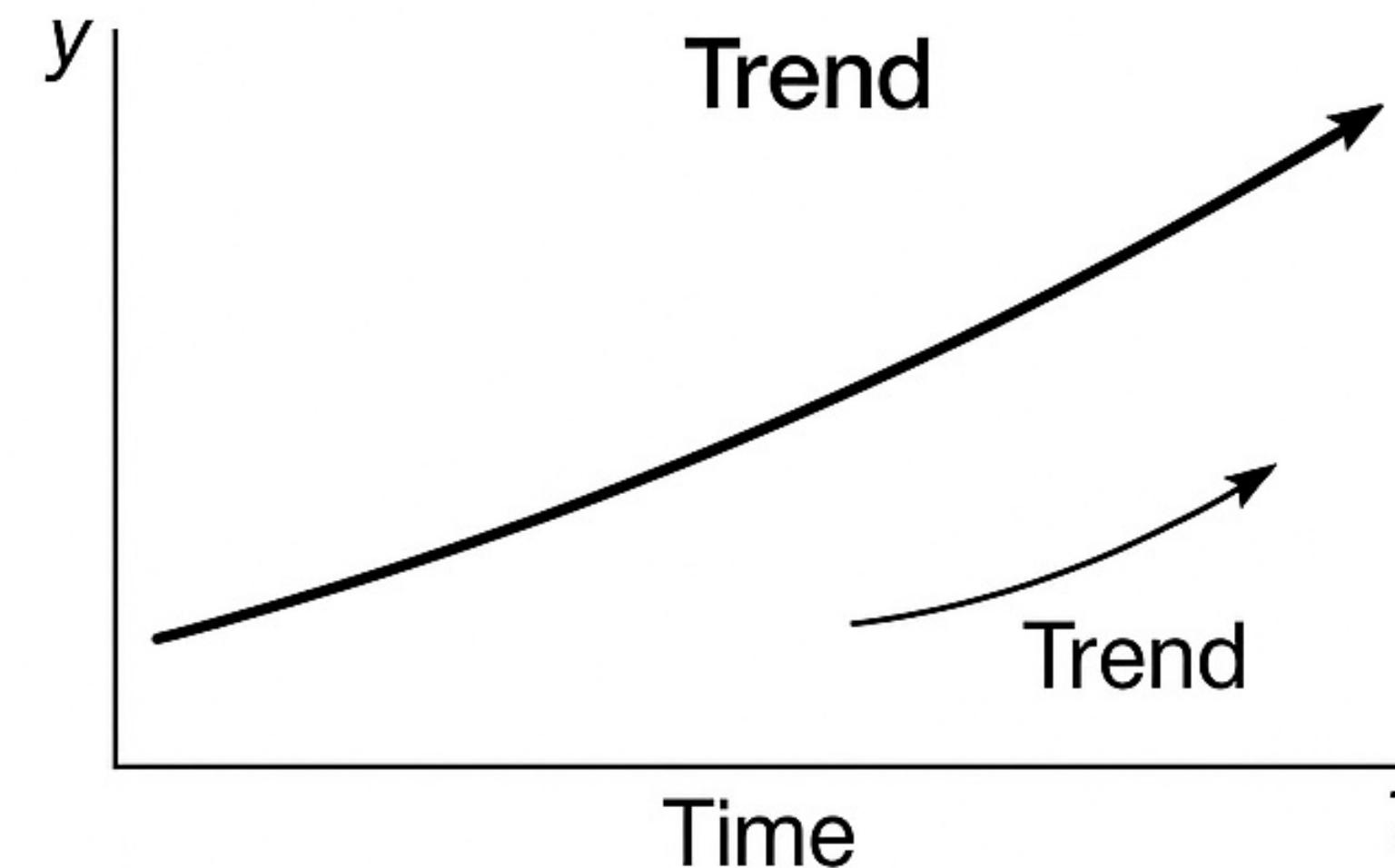


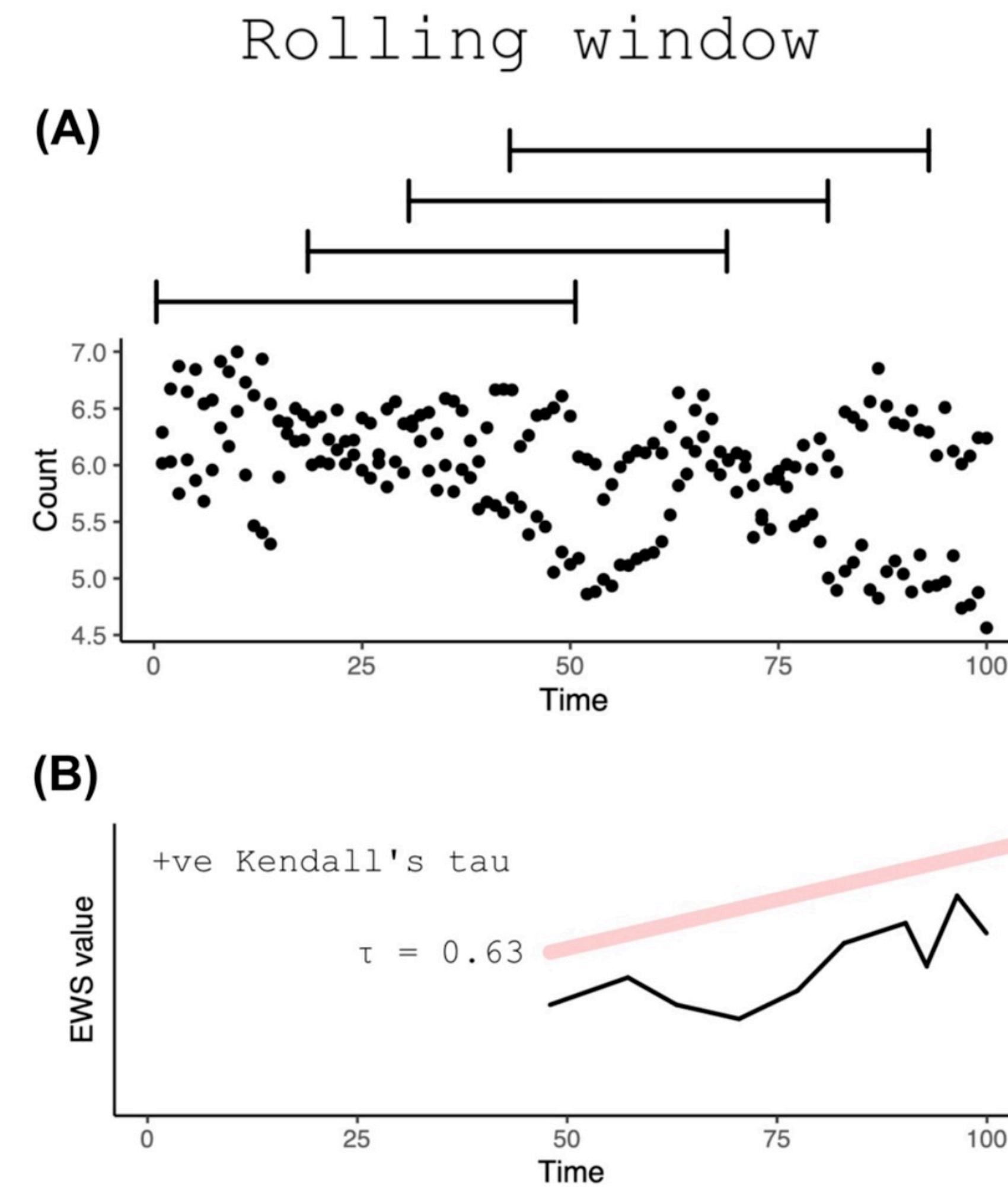




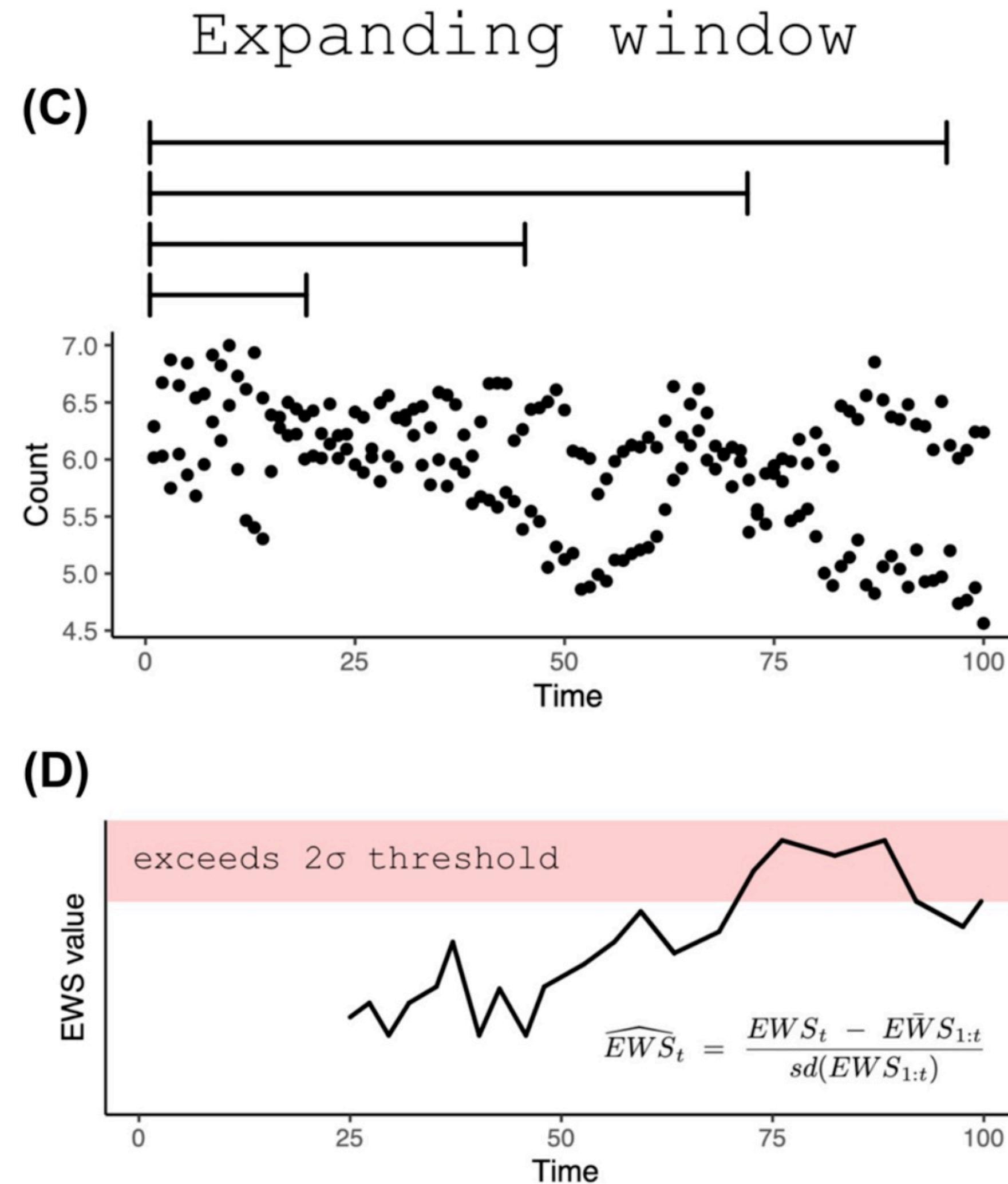
MÉTRICAS UNIVARIADAS

Illustration of Univariate Time Series

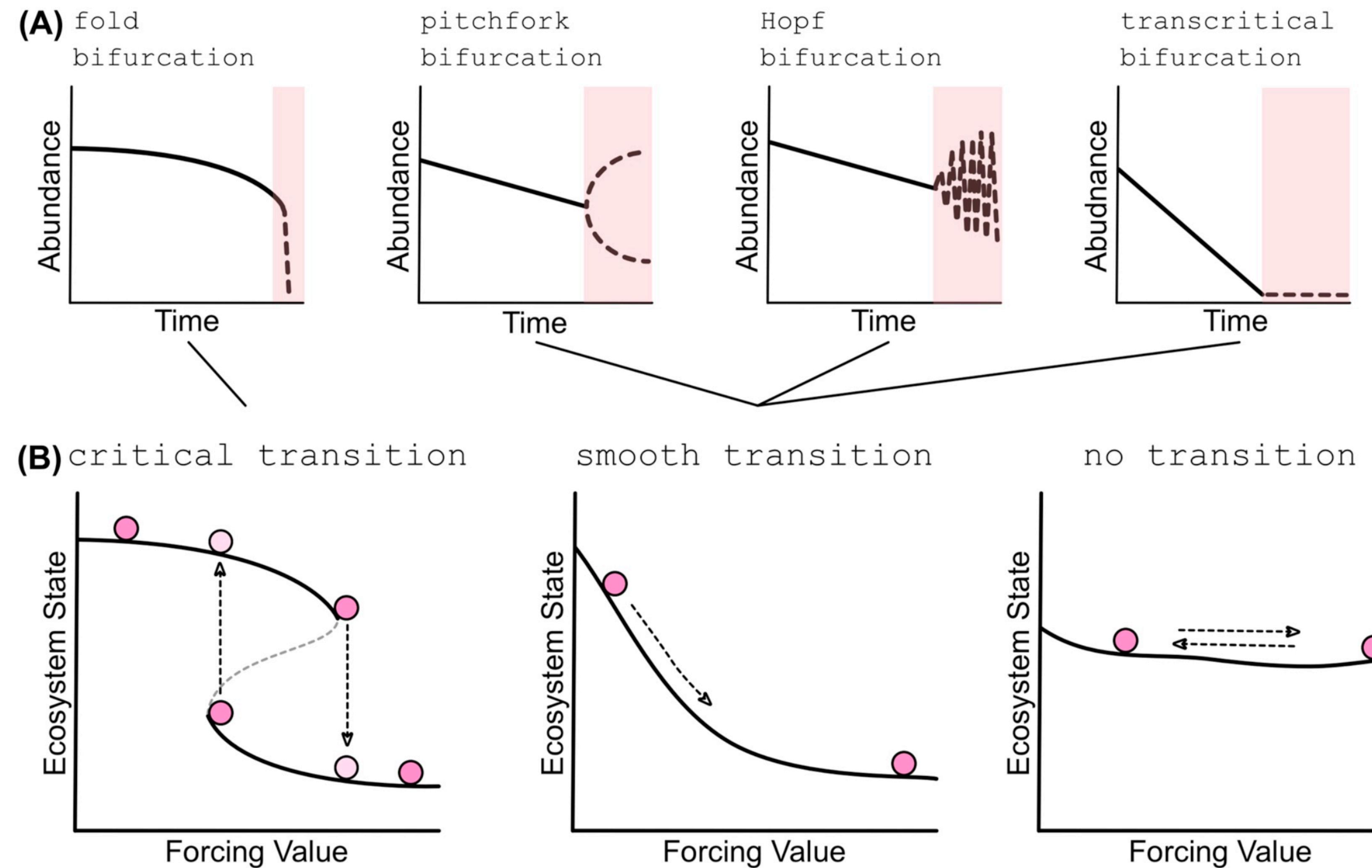




VENTANA EXPANSIVA



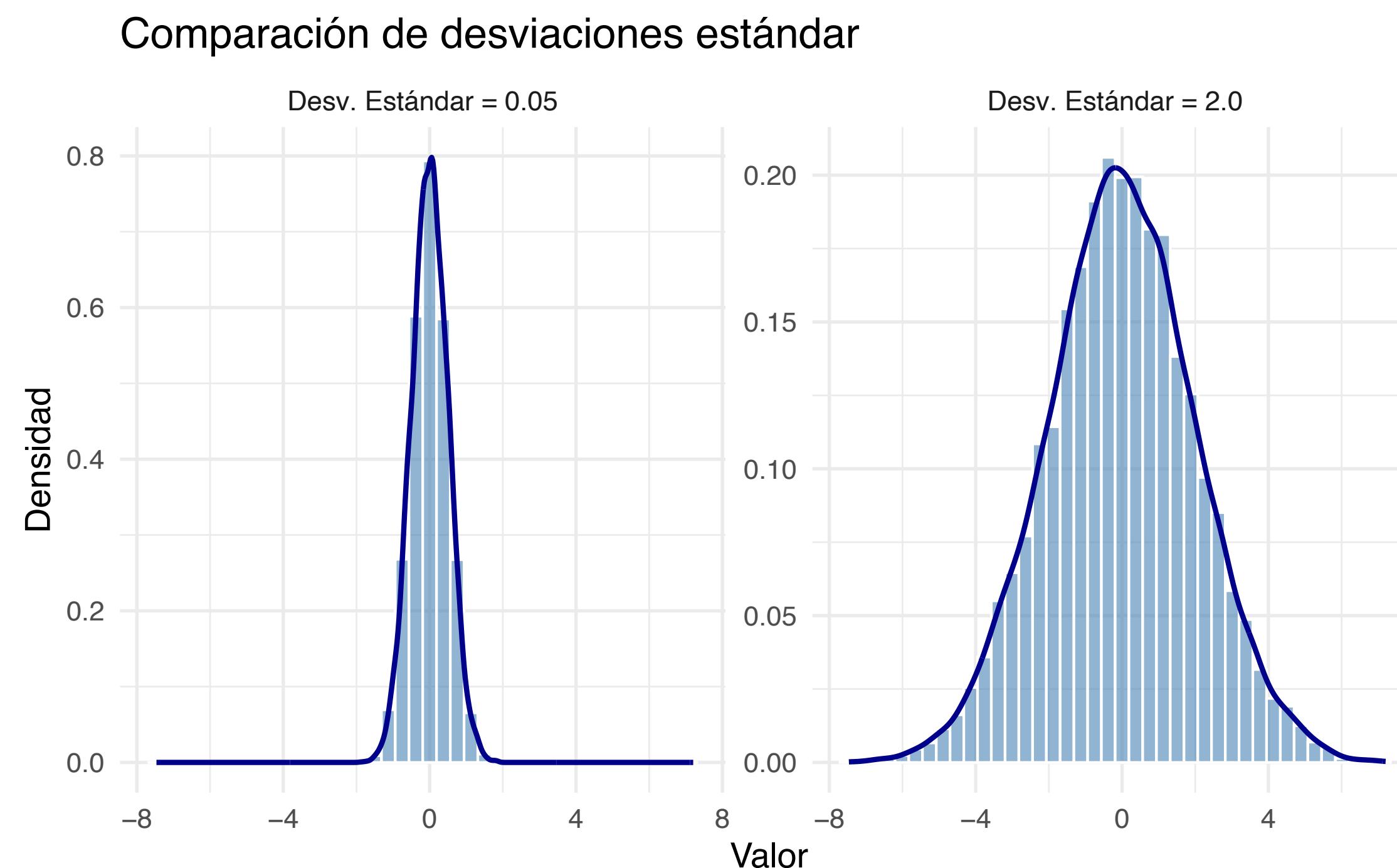
TIPOS DE (NO) TRANSICIONES



DESVIACIÓN ESTÁNDAR (SD)

$$\sigma = \sqrt{E[(X - \mu)^2]} = \sqrt{E[X^2] - (E[X])^2}$$

La desviación estándar es una medida de la cantidad de variación de los valores de una variable estocástica alrededor de su primer momento (media)

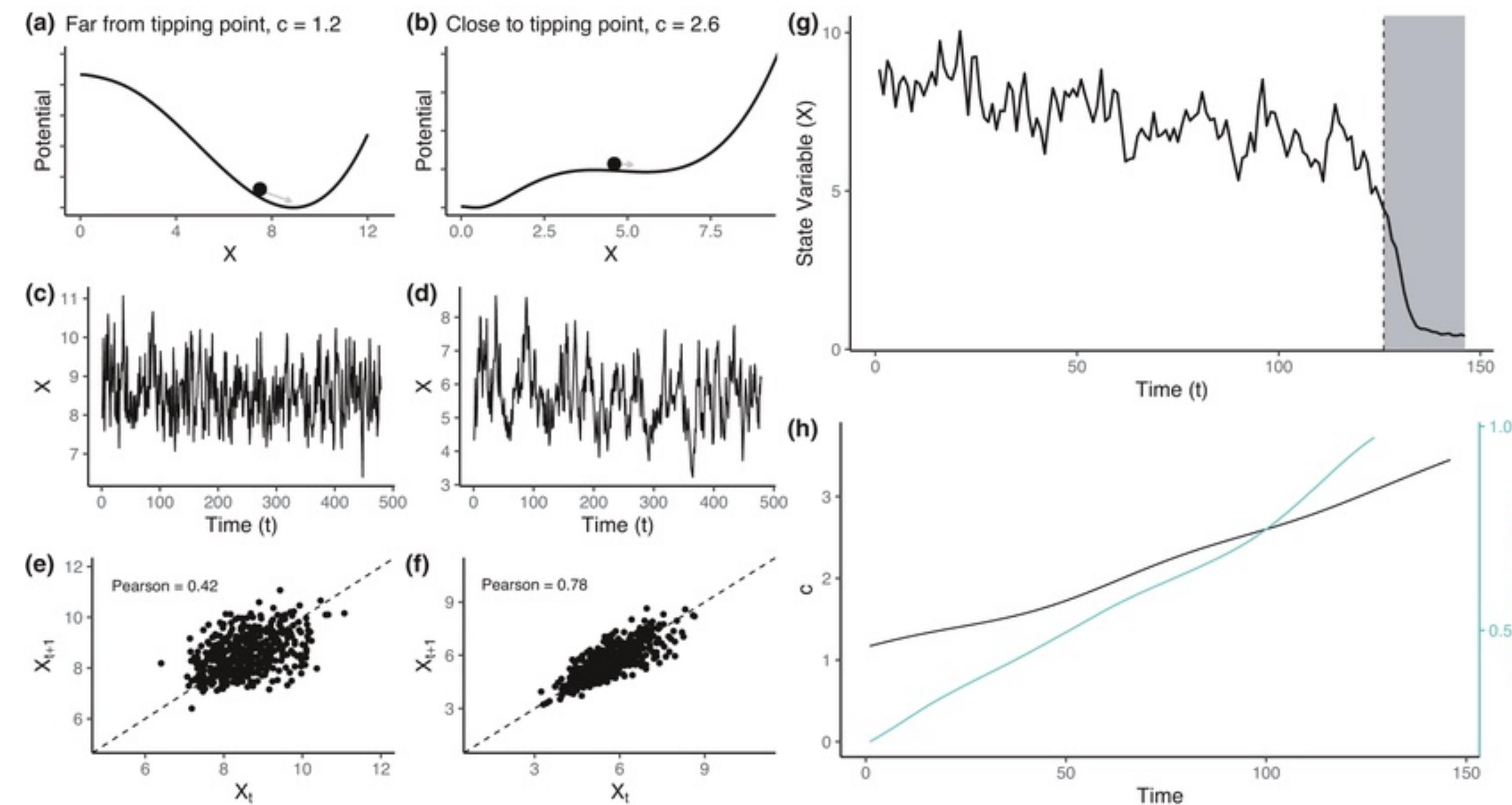


COEFICIENTE DE VARIACIÓN (CV)

$$CV = \frac{\sigma}{\mu}$$

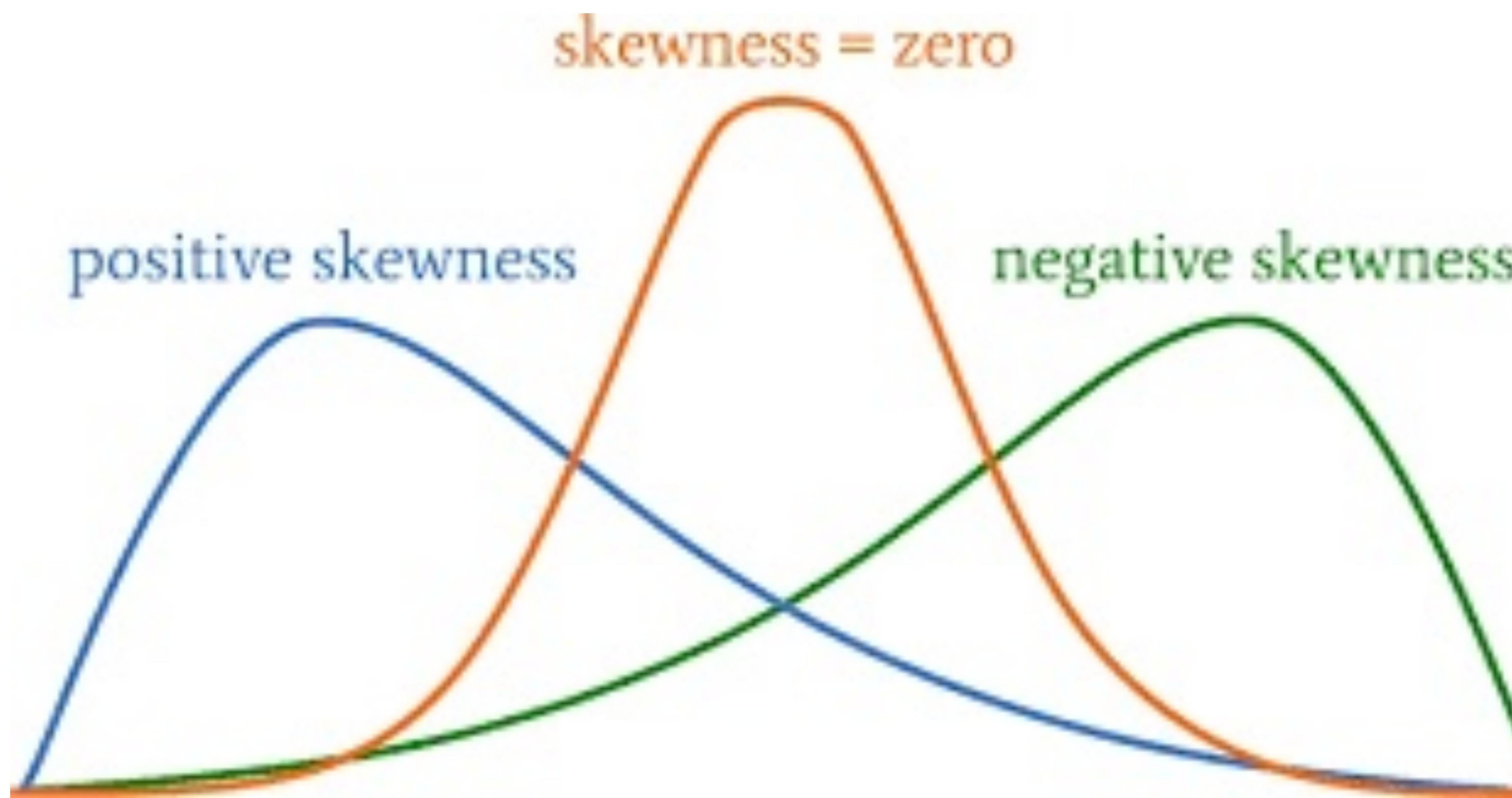
AUTO-CORRELACIÓN LAG-1 (AR-1)

$$AR1 = \text{Corr}(X_t, X_{t+1})$$



ASIMETRÍA (SKEWNESS)

$$E\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^3\right] = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$



CURTOSIS (KURTOSIS)

$$Kurt[X] = E\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^4\right] = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\left(E[X - \mu]^2\right)^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

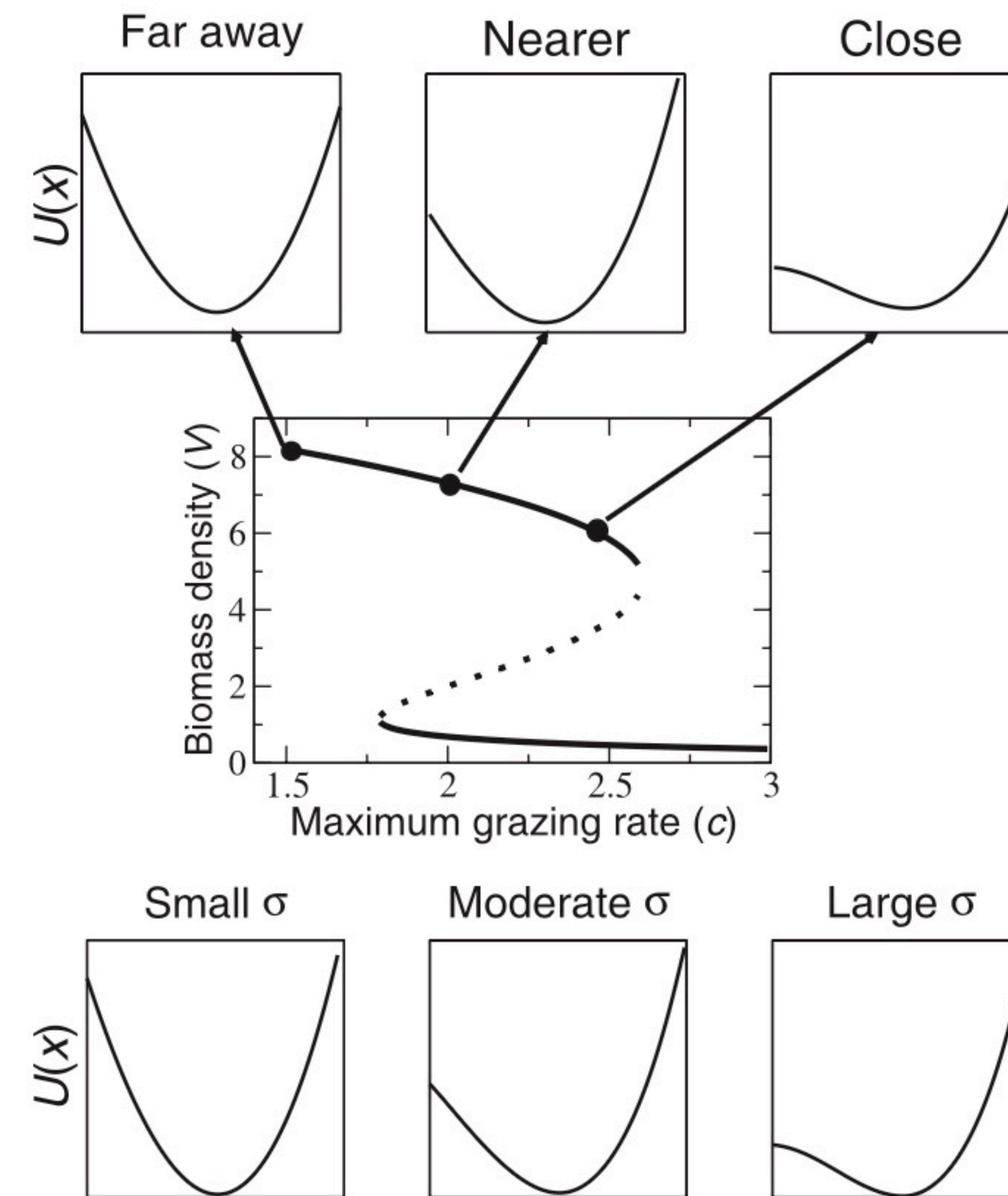
SEÑALES DE ALERTA TEMPRANA UNIVARIADAS

Table 2. Description of the univariate early warning signal indicators provided by *EWSmethods* and their origin in the literature.

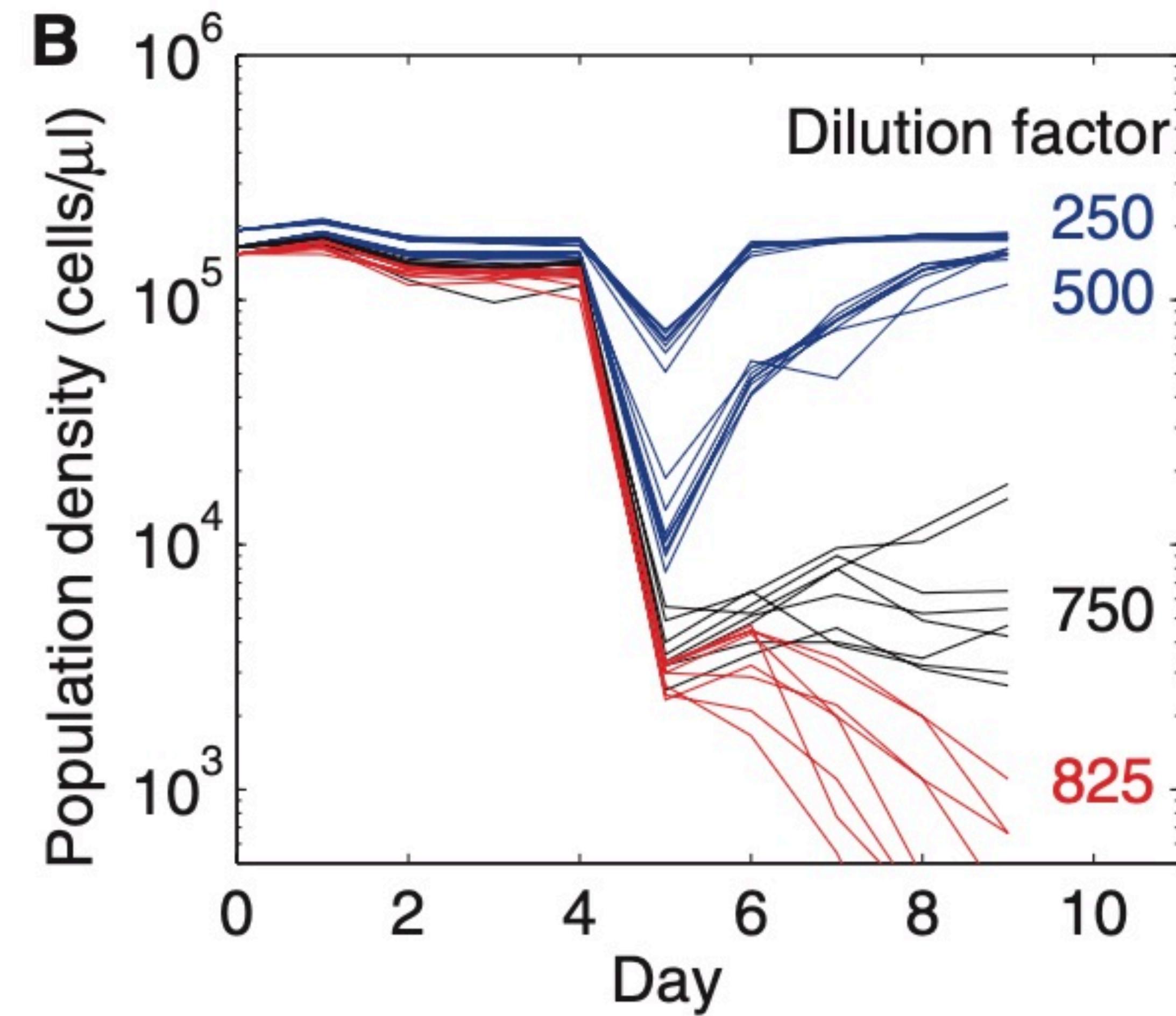
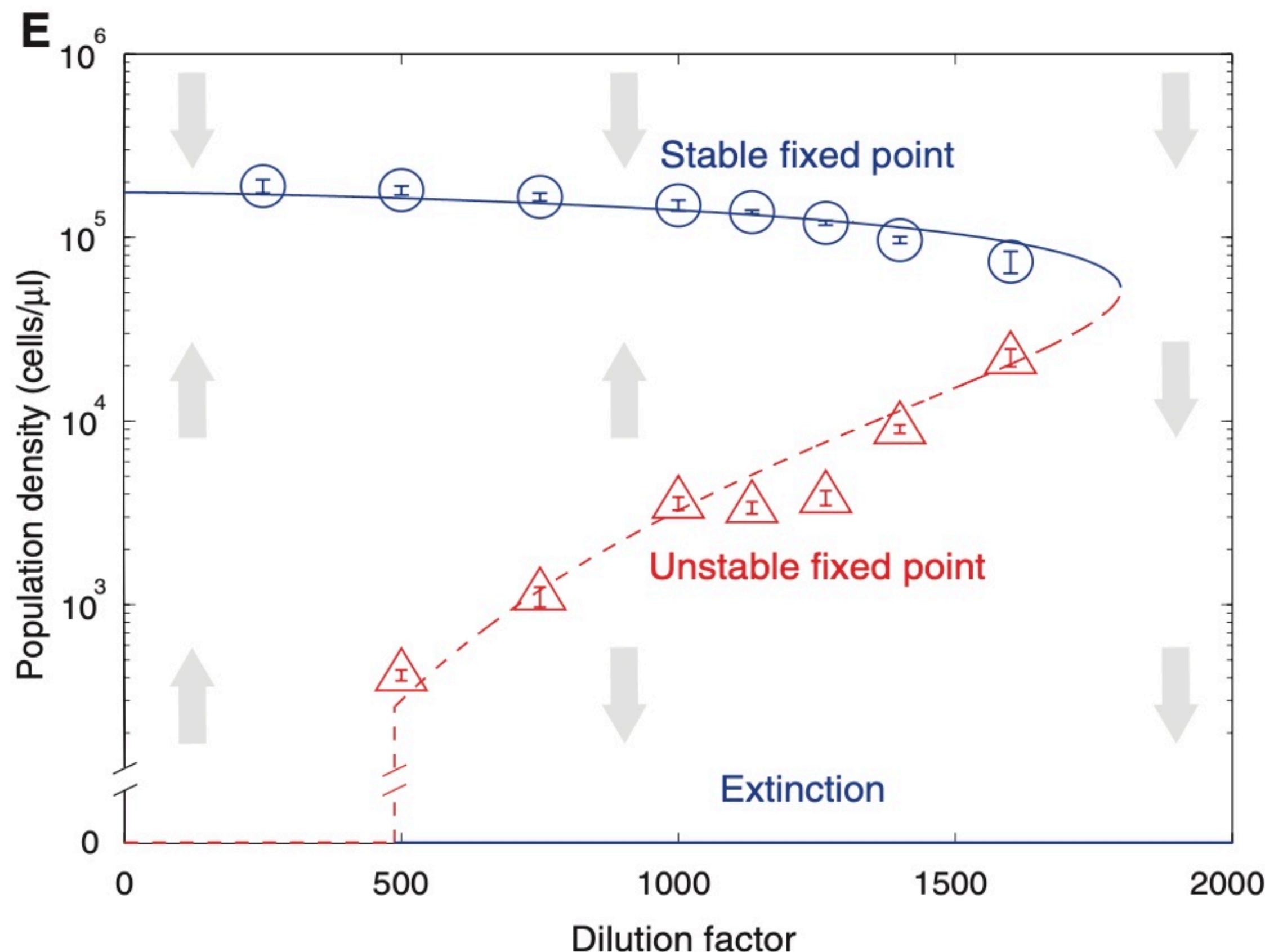
Indicator	Description	Reference
SD (Standard Deviation)	Increasing variance/standard deviation is observed approaching a transition, driven by critical slowing down (CSD)	Carpenter and Brock (2006)
CV (Coefficient of Variation)	Equivalent to SD as is simply SD at time t divided by the mean SD of the time series	Carpenter and Brock (2006)
AR1 (Autocorrelation at lag1)	Autocorrelation (similarity between successive observations) increases approaching a transition, due to CSD. The value of this indicator can be estimated as either the autocorrelation coefficient estimated from a first order autoregressive model or the estimated autocorrelation function at lag1	Held and Kleinen (2004)
Skewness	At a transition, the distribution of values in the time series can become asymmetric. This is skewness and can increase/decrease depending on the size of the alternative state	Guttal and Jayaprakash (2008)
Kurtosis	Kurtosis represents the system reaching more extreme values in the presence of a transition. Due to the increased presence of rare values in the time series, the tails of the observation distribution widen	Biggs et al. (2009)
Return rate	The inverse of the first-order term of a fitted autoregressive AR(1) model. Return rate is the primary quantity impacted by CSD – return rate decreases as a tipping point is approached	Carpenter et al. (2011)
Density ratio	Spectral reddening (high variance at low frequencies) occurs near transition. The density ratio quantifies the degree of reddening as the ratio of the spectral density at low frequency to the spectral density at high frequency	Kleinen et al. (2003)

SEÑALES DE ALERTA TEMPRANA UNIVARIADAS

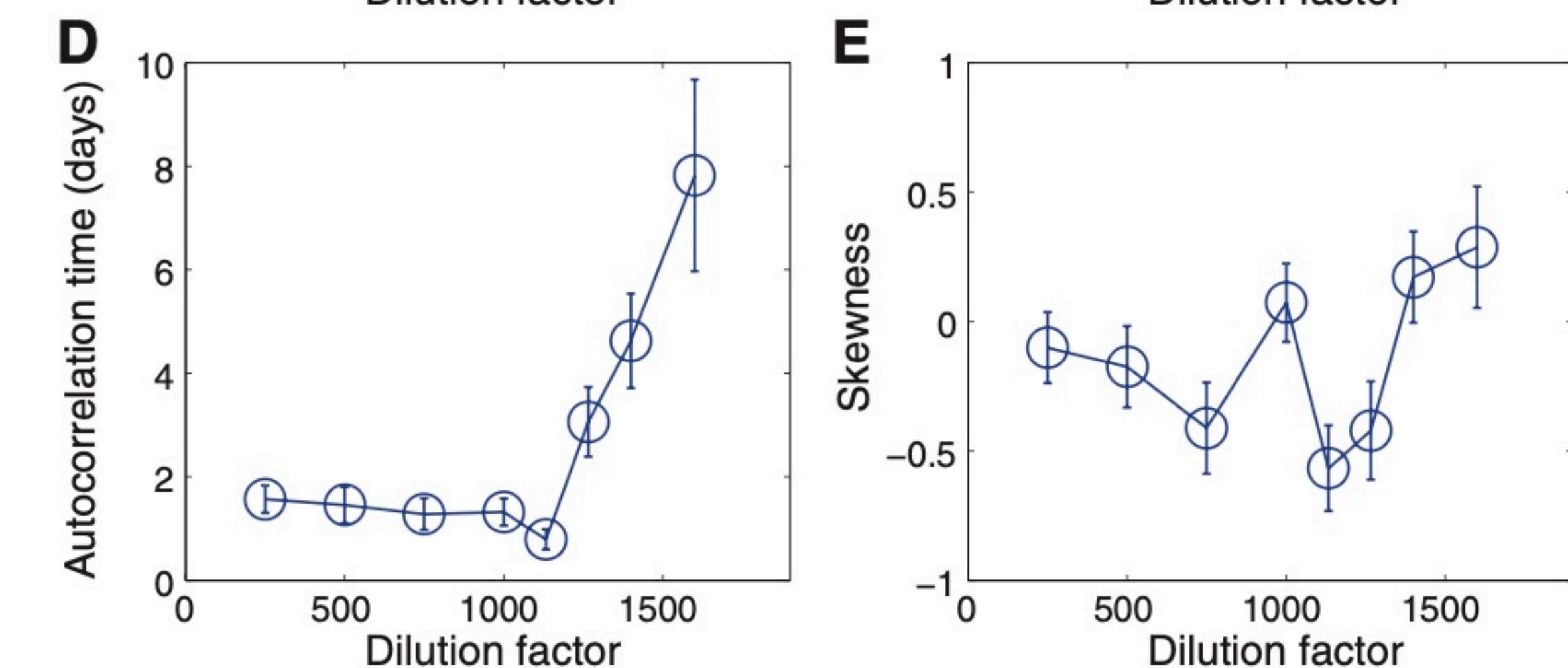
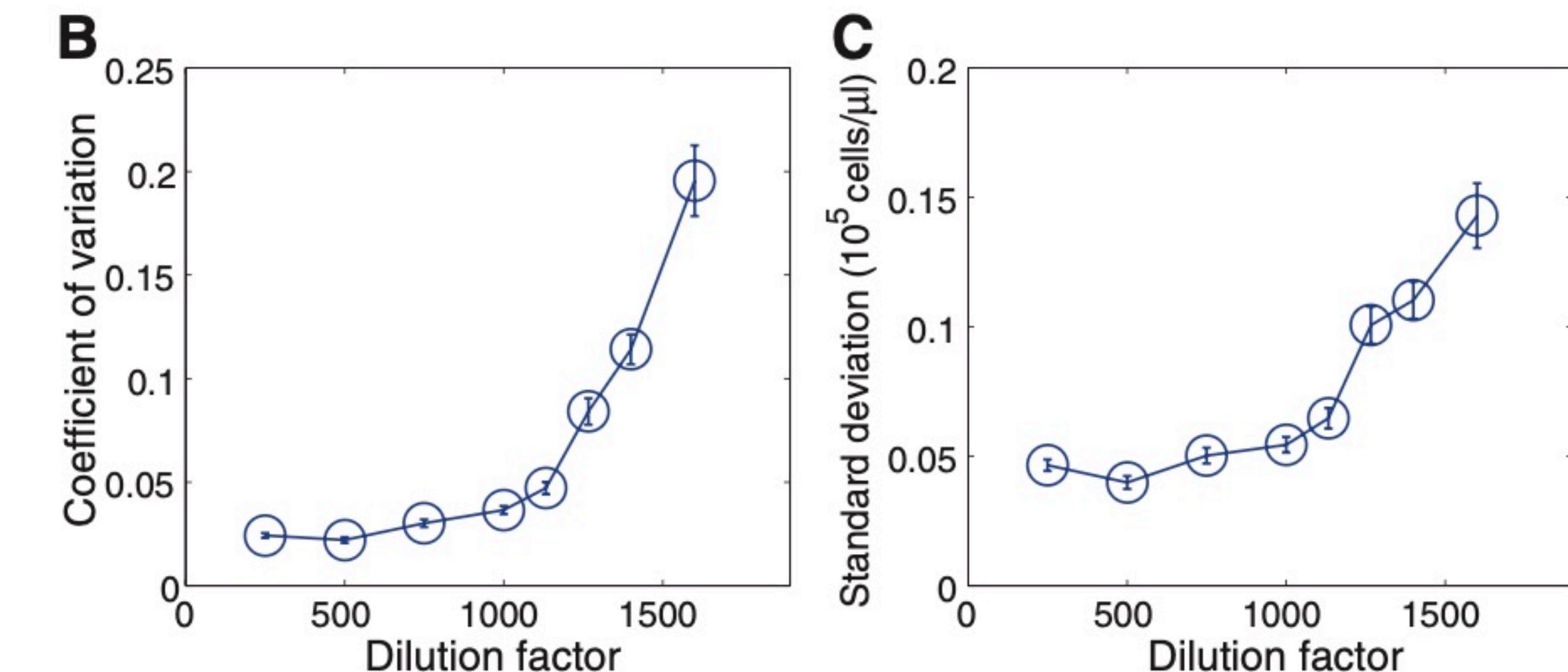
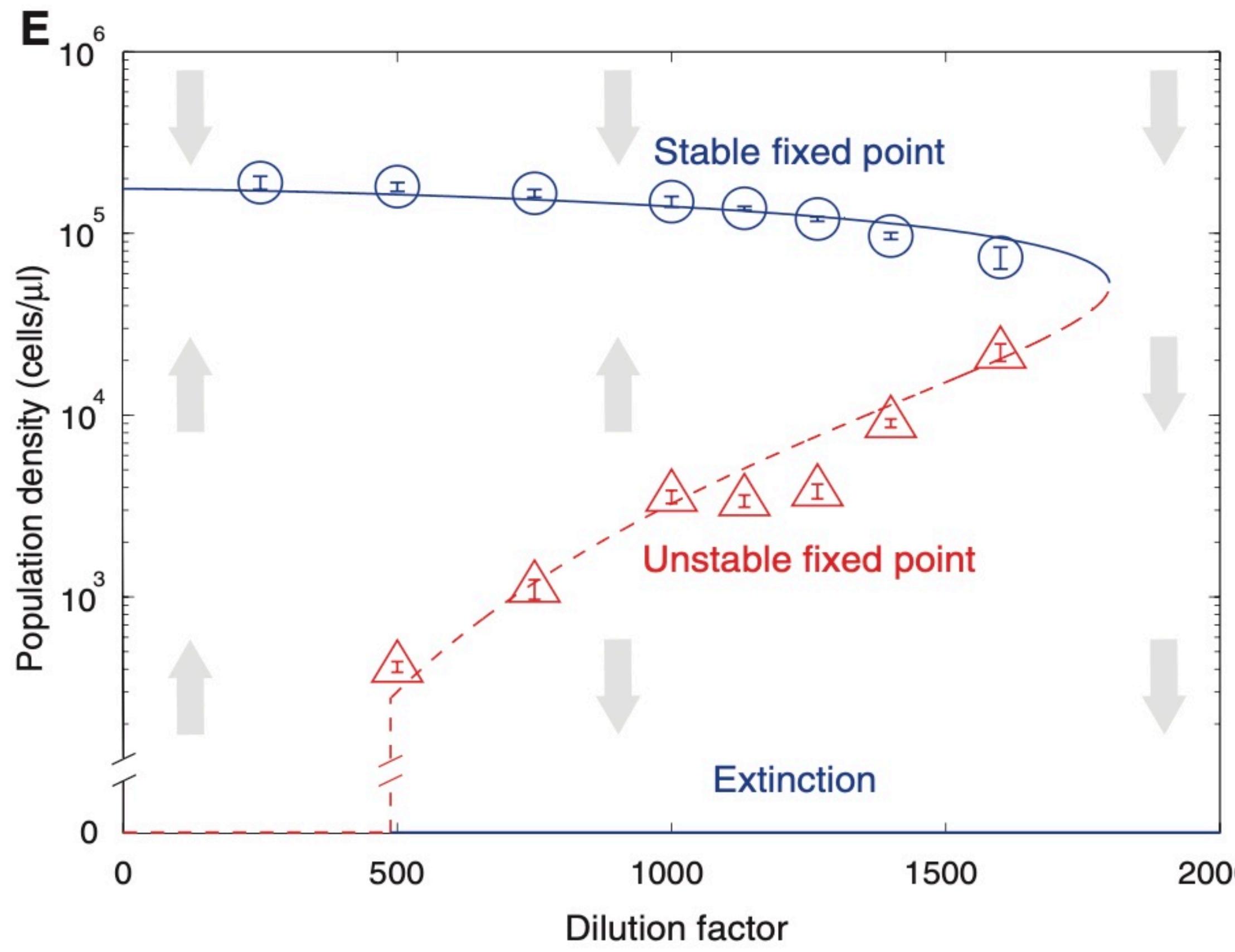
Métrica univariada (EWS)	Tendencia al acercarse a la transición	Razón simplificada
Varianza (o Desviación estándar)	↑ Sube	Al desacelerarse la recuperación (critical slowing down) las perturbaciones se “acumulan” y la serie fluctúa cada vez con mayor amplitud.
Autocorrelación lag-1 (AR1)	↑ Sube (se acerca a 1)	Un sistema lento “se parece” más a su estado anterior; los valores consecutivos se correlacionan más fuertemente.
Tiempo de retorno ($1/\lambda$) o tasa de recuperación	↑ Sube (la tasa $\lambda \downarrow$)	El eigenvalor dominante del sistema se aproxima a 0; por eso tarda más en volver al equilibrio tras una perturbación.
Coeficiente de variación ($CV = SD/\mu$)	↑ Sube	La varianza crece mientras la media suele cambiar poco; la relación SD/μ aumenta.
Skewness (asimetría)	↑ / ↓ según el lado del punto crítico	El pozo de potencial se deforma: la cola de la distribución se alarga hacia el estado alternativo, generando asimetría.
Kurtosis (exceso)	↑ (frecuente)	Colas más pesadas/“picos” más agudos por excusiones ocasionales y bruscas lejos del equilibrio.
Espectro en baja frecuencia (“reddening”)	↑ Sube (más potencia a bajas f)	Las oscilaciones lentas dominan porque el sistema filtra las altas frecuencias al volverse más lento en su recuperación.
Ratio varianza detrendida / total	↑ Sube	Aun después de quitar la tendencia, lo “ruidoso” residual aumenta, señal de resiliencia menguante.
Entropía de la señal	↓ Baja (a veces)	Con dinámicas más lentas, la serie se vuelve más predecible; la información nueva por unidad de tiempo disminuye.



LA RECUPERACIÓN DEPENDE DE LA MAGNITUD DEL ESTRESOR



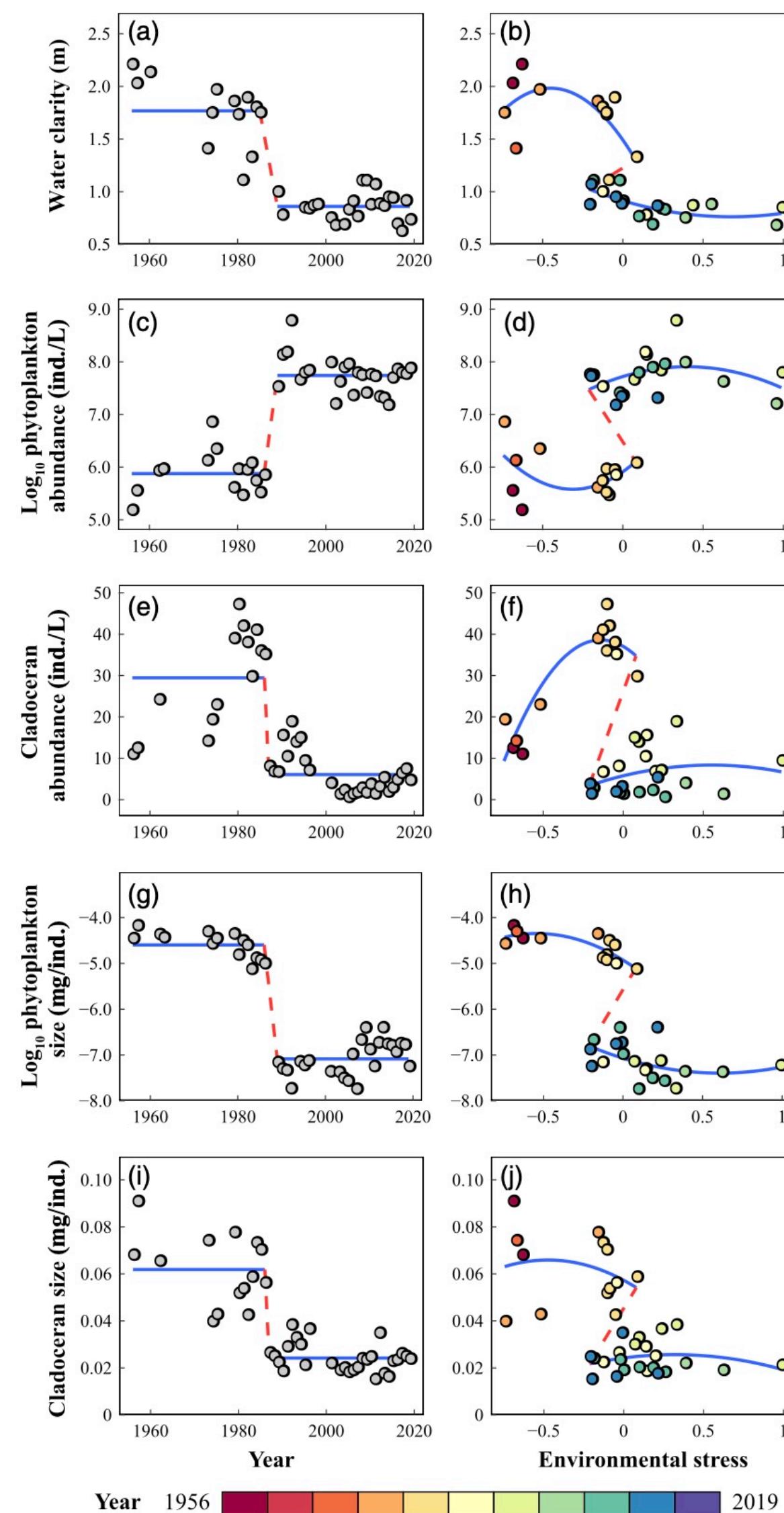
LAS ALERTAS TEMPRANAS FUNCIONAN EN EXPERIMENTOS



ESTADO DEL SISTEMA VS PARÁMETRO

	Parameter	Breakpoint	Clear-water regime	Turbid-water regime	Direction of shift	p
State variables	Water clarity, m	1985	1.77 ± 0.32	0.86 ± 0.13	Decrease	<0.001
	Cladoceran, ind./L	1986	29.46 ± 12.03	6.07 ± 4.88	Decrease	<0.001
	Copepods, ind./L	1996	61.24 ± 35.52	14.60 ± 14.83	Decrease	<0.001
	Rotifer, ind./L	1982	$842.17 \pm 7,499.13$	$2,406.23 \pm 945.06$	Increase	<0.001
	Log10 total phytoplankton, ind./L	1986	5.88 ± 0.40	7.74 ± 0.34	Increase	<0.001
	Log10 Cyanophyta, ind./L	1986	5.32 ± 0.56	7.52 ± 0.30	Increase	<0.001
	PC1 of the phytoplankton assemblages	1985	-0.51 ± 0.33	0.34 ± 0.19	Increase	<0.001
	Cyanophyta, %	1985	30.13 ± 17.95	72.24 ± 14.10	Increase	<0.001
	Body size of cladoceran, mg/ind.	1986	0.06 ± 0.02	0.02 ± 0.01	Decrease	<0.001
	Log10 body size of phytoplankton, mg/ind.	1986	-4.60 ± 0.28	-7.08 ± 0.37	Decrease	<0.001
Stressors	Total nitrogen, mg/L	—	1.32 ± 0.53	1.90 ± 0.91	Increase	0.015
	Total phosphorus, mg/L	—	0.12 ± 0.08	0.15 ± 0.07	Increase	0.245
	Temperature, °C	—	16.70 ± 0.41	17.30 ± 0.49	Increase	<0.001
	Fish, kg/ha	—	263.09 ± 210.10	917.54 ± 185.82	Increase	<0.001

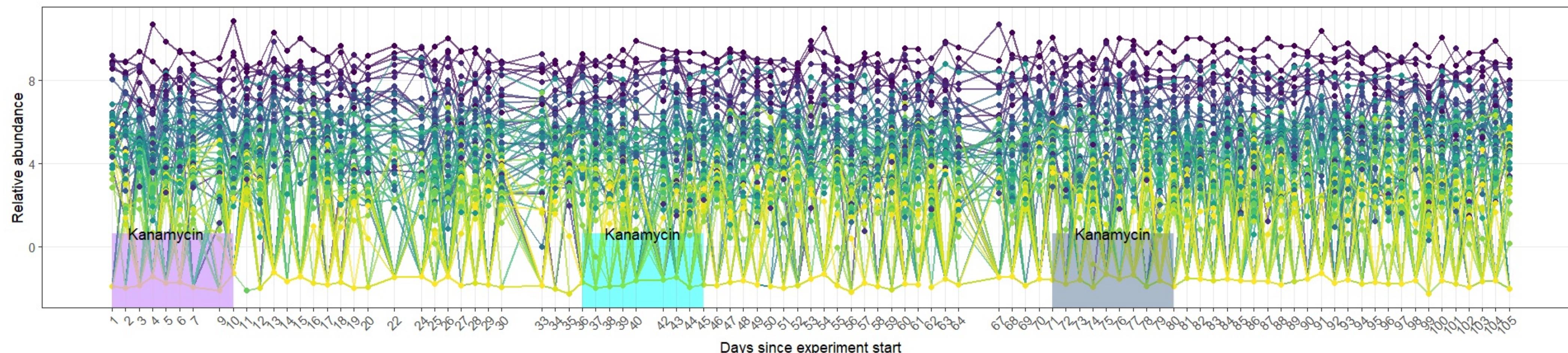
CAMBIOS ABRUPTOS E HISTÉRESIS EN EL LAGO DONGHU



MULTIVARIADAS

Trayectorias temporales de géneros (K1)

ASV_001-Dysgonomonas	ASV_014-NA	ASV_029-NA	ASV_048-NA	ASV_079-NA
ASV_002-Fusobacterium	ASV_015-NA	ASV_030-NA	ASV_049-Desulfatiferula	ASV_118-Papillibacter
ASV_003-Bacteroides	ASV_016-Mucispirillum	ASV_031-Hydrogenoanaerobacterium	ASV_050-Butyricicoccus	ASV_140-Harryflintia
ASV_004-NA	ASV_017-NA	ASV_032-Akkermansia	ASV_051-Tyzzerella	ASV_148-Erysipelothrix
ASV_005-Desulfovibrio	ASV_019-Paludibacter	ASV_033-Odoribacter	ASV_052-Oxalobacter	ASV_150-Elusimicrobium
ASV_006-Candidatus Soleaferrea	ASV_020-NA	ASV_035-NA	ASV_053-Nitrosomonas	ASV_160-Candidatus Tammella
Core ASVs				
ASV_007-Alistipes	ASV_021-NA	ASV_036-Raoultibacter	ASV_055-Anaerotruncus	ASV_161-Candidatus Saccharimonas
ASV_008-NA	ASV_022-Parabacteroides	ASV_037-NA	ASV_056-Sanguibacteroides	ASV_162-Endomicrobium
ASV_009-Blattabacterium	ASV_023-NA	ASV_038-NA	ASV_058-Blattella	ASV_169-NA
ASV_010-Thomasclavelia	ASV_024-Enterococcus	ASV_040-NA	ASV_059-NA	ASV_186-NA
ASV_011-NA	ASV_025-NA	ASV_042-Intestinimonas	ASV_060-NA	
ASV_012-NA	ASV_026-Lachnoclostridium	ASV_044-NA	ASV_065-NA	
ASV_013-Breznakia	ASV_028-NA	ASV_046-NA	ASV_077-NA	



TIPOS DE TRANSICIÓN EN SISTEMAS DINÁMICOS

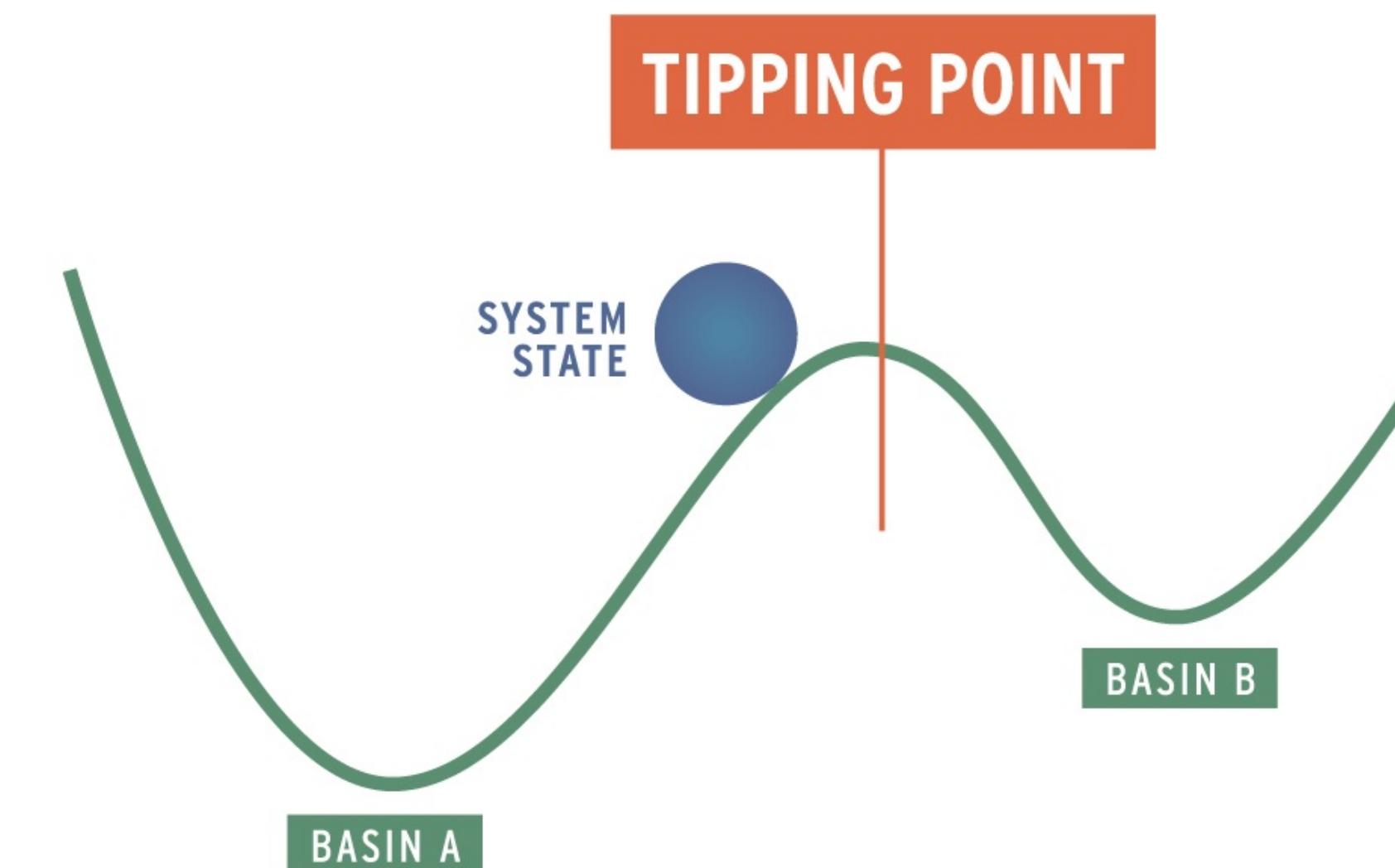
- ▶ Transición **discontinua (de primer orden)**: Ocurre cuando un pequeño cambio en un parámetro de control provoca un **cambio abrupto y cualitativo** en el estado del sistema. El sistema **salta bruscamente** de un equilibrio a otro (por ejemplo, de sano a colapsado) y a menudo exhibe **histéresis**: revertir el cambio requiere deshacer mucho más el parámetro que lo provocó. Ejemplo: bifurcación *saddle-node*.
- ▶ Transición **continua (de segundo orden)**: El sistema cambia de forma **suave y progresiva** conforme se modifica el parámetro de control. Aunque el comportamiento cualitativo se modifica (como pasar de equilibrio estable a oscilaciones), el cambio no es brusco ni presenta histéresis. Ejemplo: bifurcación *supercrítica de Hopf*.
- ▶ Transición inducida por ruido: En presencia de **alta intensidad de ruido externo o interno**, el sistema puede **cambiar de estado cualitativo incluso sin cruzar un umbral determinista**. Estas transiciones no se deben al cambio del parámetro, sino a que las **fluctuaciones estocásticas permiten saltos** entre atractores o estados metaestables.

UMBRAL

- ▶ Un **umbral** es un valor crítico de una o más variables de control (por ejemplo, temperatura, concentración de nutrientes, abundancia de una especie, tasa de interacción), a partir del cual el sistema experimenta **un cambio cualitativo en su estructura, dinámica o estado estable.**
- ▶ No todos los umbrales implican una transición abrupta, pero muchos están asociados con **no linealidades, bifurcaciones y cambios de régimen**. El cruce de un umbral puede modificar:
 - ▶ La estabilidad de equilibrio (por ejemplo, cambiar de estable a inestable)
 - ▶ La existencia de ciertas soluciones (cómo ganar o perder un atractor)

TIPPING-POINT

- ▶ Un **tipping-point** (o punto de inflexión) es un umbral crítico en un sistema complejo, a partir del cual un pequeño cambio en una variable de control puede provocar una transformación abrupta, rápida e irreversible en el estado del sistema.



ESTADOS ESTABLES ALTERNATIVOS

- ▶ Un tipping point (o punto de inflexión) es un umbral crítico en un sistema complejo, a partir del cual un pequeño cambio en una variable de control puede provocar una transformación abrupta, rápida e irreversible en el estado del sistema.

redmexbiomate@gmail.com

redmexbiomate.org.mx

 RedMexBioMate

SEGUNDO encuentro de la

Red Mexicana de Biología & Matemáticas

Un espacio para personas interesadas en el estudio de las matemáticas, la biología y todas sus intersecciones.

¡Te esperamos en Querétaro!

3-7 de noviembre 2025



LIIGH-UNAM
INTERNATIONAL LABORATORY FOR
HUMAN GENOME RESEARCH



Instituto de
Matemáticas

**CCG**
Centro de Ciencias Genómicas

