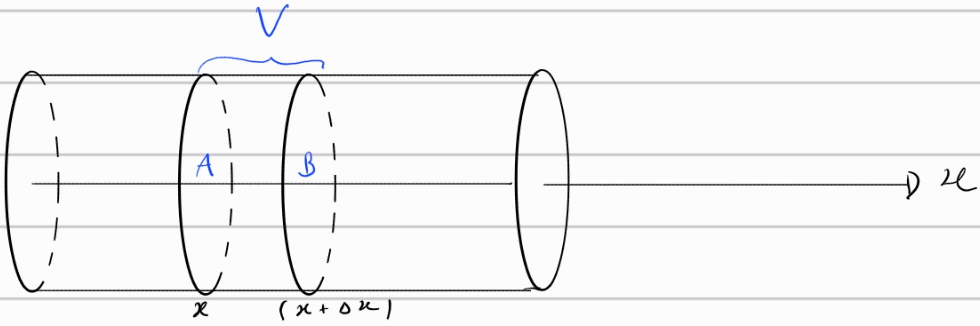
* LIVRO: Nagle

INTRODUÇÃO: MODELO PARA O FLUXO DE CALOR.



u (Temperatura)

$u_A(x, t)$; $u_B(x + \Delta x, t)$

1. CONDUÇÃO DE CALOR: $K(x) = K_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$

K_0 → CONDUTIVIDADE TÉRMICA DO MATERIAL

2. DIREÇÃO DO FLUXO DE CALOR: $+ \rightarrow -$

3. CAPACIDADE DE CALOR ESPECÍFICA: $c = c(x)$

(Calor) $\Delta E = c \cdot m \cdot \Delta u$

$H = H(x)$ → QUANTIDADE DE CALOR QUE FLUI DA ESQUERDA PARA DIREITA

$$H(x) = -K(x) \cdot a \cdot \Delta t \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \qquad (A)$$

a → Seção transversal

$$H(x + \Delta x) = -K(x + \Delta x) \cdot a \cdot \Delta t \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) \qquad (B)$$

* EQUAÇÃO UNIDIMENSIONAL DO FLUXO DE CALOR

LAPLACIANO

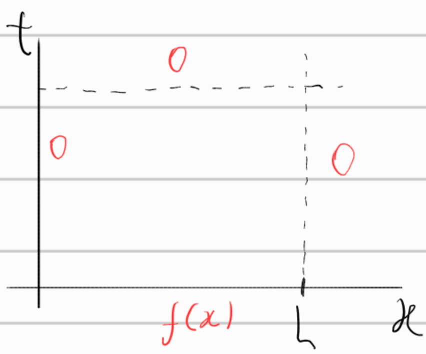
$$(4) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \beta \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + P(x,t) \quad , \quad \beta = \frac{K}{c \cdot \rho}$$

$$P = \frac{Q}{c \cdot \rho}$$

↳ Controla o fluxo de calor no fio.

* Condições de contorno: Extremidades do fio a 0 °C

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$



* CONDIÇÃO INICIAL SOBRE u

$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 < x < L$$

* LAPLACIANO:

$$\nabla U(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$$

* EQUAÇÃO DE LAPLACE:

$\nabla U = 0$, Resolver com separação de variáveis

* MODELO MATEMÁTICO PARA O FLUXO EM UM FIO UNIFORME SEM FONTES INTERNAS:

$$(7) \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad , \quad 0 < x < L \quad , \quad t > 0$$

$$(8) \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

$$(9) \qquad u(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 < x < L$$

* MÉTODO DA SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

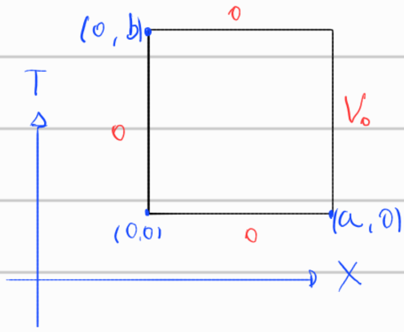
* EXEMPLO : $\nabla^2 u = 0$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \qquad u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$$

$$\nabla^2 u = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} XT + \frac{\partial^2}{\partial t^2} XT = 0 \quad \Bigg| \quad \frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} X = -\frac{1}{T} \frac{\partial^2}{\partial t^2} T$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{T''}{T} = \lambda$$

* CONDIÇÕES DE CONTORNO:



$V(0,t) = 0$

$V(a,t) = V_0$

$V(x,0) = 0$

$V(x,b) = 0$

$V = X(x)\, T(t)$

$V(a,t) = X(a) \cdot T(t) = V_0$

$V(x,0) = X(x) \cdot T(0) = 0$

① $X'' - \lambda X = 0$

EQ. CARACTERÍSTICA:

$r^2 - \lambda = 0$

Se $(\lambda > 0)$ $\quad r = \pm\sqrt{\lambda} \qquad X(x) = A \operatorname{senh}(\sqrt{\lambda}\, x) + B \cosh(\sqrt{\lambda}\, x)$

$X(0) = 0 = A \cdot 0 + B \cdot 1 \Rightarrow B = 0$

$X(x) = A \cdot \operatorname{senh}(\sqrt{\lambda}\, x)$

② $T'' + \lambda T = 0$

$r^2 - \lambda = 0 \Rightarrow r = \pm j\sqrt{\lambda}, \quad \lambda > 0$

$T(t) = K_0 \cdot \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, t) + K_1 \cdot \cos(\sqrt{\lambda}\, t)$

$T(0) = K_0 \cdot 0 + K_1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow K_1 = 0$

$T(b) = 0 = K_0 \cdot \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, b) \Rightarrow \sqrt{\lambda} \cdot b = n \cdot \pi \Rightarrow \lambda = \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2$

$$U_n(x,t) = X_n \cdot T_n = K_n \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot x\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot t\right)$$

p/ $x = a$, $\quad U_n(a,t) = V_0 = K_n \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{n \cdot \pi \cdot a}{b}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n \cdot \pi}{b} \cdot t\right)$

$n = 1, 2, 3 \ldots$

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot t\right)$$

Se V_0 é uma combinação linear de:

$$K_n \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{n \cdot \pi \cdot a}{b}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n \cdot \pi}{b} \cdot t\right)$$

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{n \cdot \pi \cdot a}{b}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n \cdot \pi}{b} \cdot t\right)$$

Série de fourier: (Soma de senos)

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} \cdot t\right) \quad \Bigg| \quad C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} \cdot t\right) dt$$

$$C_n = K_n \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi \cdot a}{b}\right) = \frac{2}{b} \cdot \int_0^b V_0 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot t\right) dt$$

$$\boxed{K_n = \frac{2}{b \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \cdot \int_0^b V_0 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot t\right) dt}$$