Tarea #1

Alejandro Calvo-Porras, Allan Gutiérrez-Quesada, Roberto Gutiérrez-Sánchez
ale_calvo03@outlook.com allanguti@hotmail.com roberm98@outlook.com
Escuela de Ingeniería Electrónica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

ÍNDICE DE FIGURAS

I. Ejercicio 1

Un método numérico para encontrar raíces de ecuaciones de forma iterativa es el método de Newton-Raphson. Este método se puede plantear como un sistema en tiempo en tiempo discreto $y(n) = \mathcal{T}[x(n)]$. El método de Newton-Raphson se plantea de la siguiente manera:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

Si tomamos la ecuación $y = \sqrt[k]{x}$, la elevamos a la k y la igualamos a 0 se obtiene que:

$$f(y) = y^k - x = 0 \tag{2}$$

Con derivada:

$$f'(y) = ky^{k-1} \tag{3}$$

Aplicando esto al método de Newton-Raphson y planteándolo como un sistema en tiempo discreto se obtiene que:

$$y_n = y_{n-1} - \frac{y_{n-1}^k - x_{n-1}}{ky_{n-1}^{k-1}} \tag{4}$$

Simplificando la ecuación 4 se obtiene finalmente:

$$y_n = \frac{(k-1)y_{n-1}^k + x_{n-1}}{ky_{n-1}^{k-1}} \tag{5}$$

De esta manera se obtiene una función recursiva planteada como un sistema en tiempo discreto de la forma $y(n) = \mathcal{T}[x(n)]$ que encuantra la raíz k-ésima de x.

La función se llama de la manera `Raiz(a,b)` y devuelve el valor de la raíz a-ésima de b.

II. EJERCICIO 2

Lo solicitado en esta sección consta de generar una función de convolución y correlación que reciban cuatro vectores de entrada y en la salida presente la gráfica con las dos señales de entrada debidamente colocadas y el resultado de la operación correspondiente.

En la solución se parte de la operación de convolución y su forma teórica de calcularlo, la cual se basa en una inversión de alguno de los vectores, ir multiplicando y sumando los valores mientras se desplaza el vector invertido.

El código posee la capacidad de recibir vectores de entrada de distintos tamaños (entrada X y la respuesta del sistema H), también que presente su muestra cero desplazada.

Con la correlación, se recicla el código de la convolución, pero con una inversión del vector de entrada X antes de ingresar a la función de convolución.

Ambas funciones, para su correcto funcionamiento, deben recibir cuatro vectores en el siguiente orden, y de la siguiente forma:

- Entrada X: Este vector representa la señal de entrada que se ingresaría en el sistema, puede ser de cualquier tamaño. Ej: $[3, -4, 0{,}1, 0, 3]$.

- Muestra X: La funcionalidad de esta entrada, es representar dónde se encuentra la muestra cero de la señal de Entrada X, para ello se utilizan vectores de la siguiente forma: $[-1, 0, 1, 2, 3]$.

- Entrada H: La planta con la que se está trabajando, ésta sería su respuesta al impulso, al igual que la señal de entrada X, puede presentar cualquier tamaño. Ej: $[1]$.

- Muestra H: Presenta las mismas características a la Muestra X descrita anteriormente, sólo que esta representa el orden de la respuesta H del sistema.

- 1 o 0, para esta última sección, se decidió colocar esto debido a que el llamado de la función convolución se repite para los siguientes puntos, entonces limita la graficación de esta, para cuando sólo sea necesario. El 1 indica que se va a generar la gráfica, y el 0 que no.

A continuación se va a mostrar los resultados de ambas funciones, comenzando con la convolución.

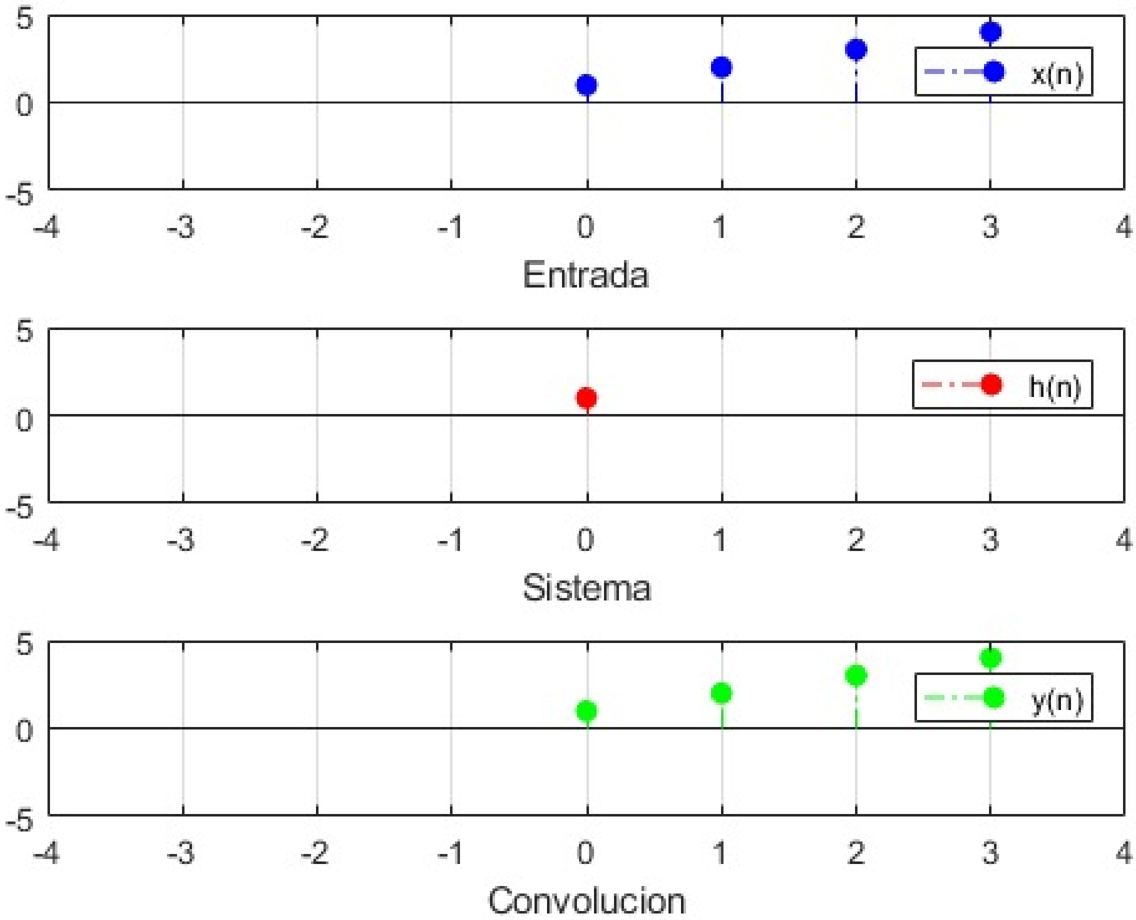

Figura 1. *Gráfica ejercicio 2 figura 1*

Y para finalizar, el resultado de la correlación.

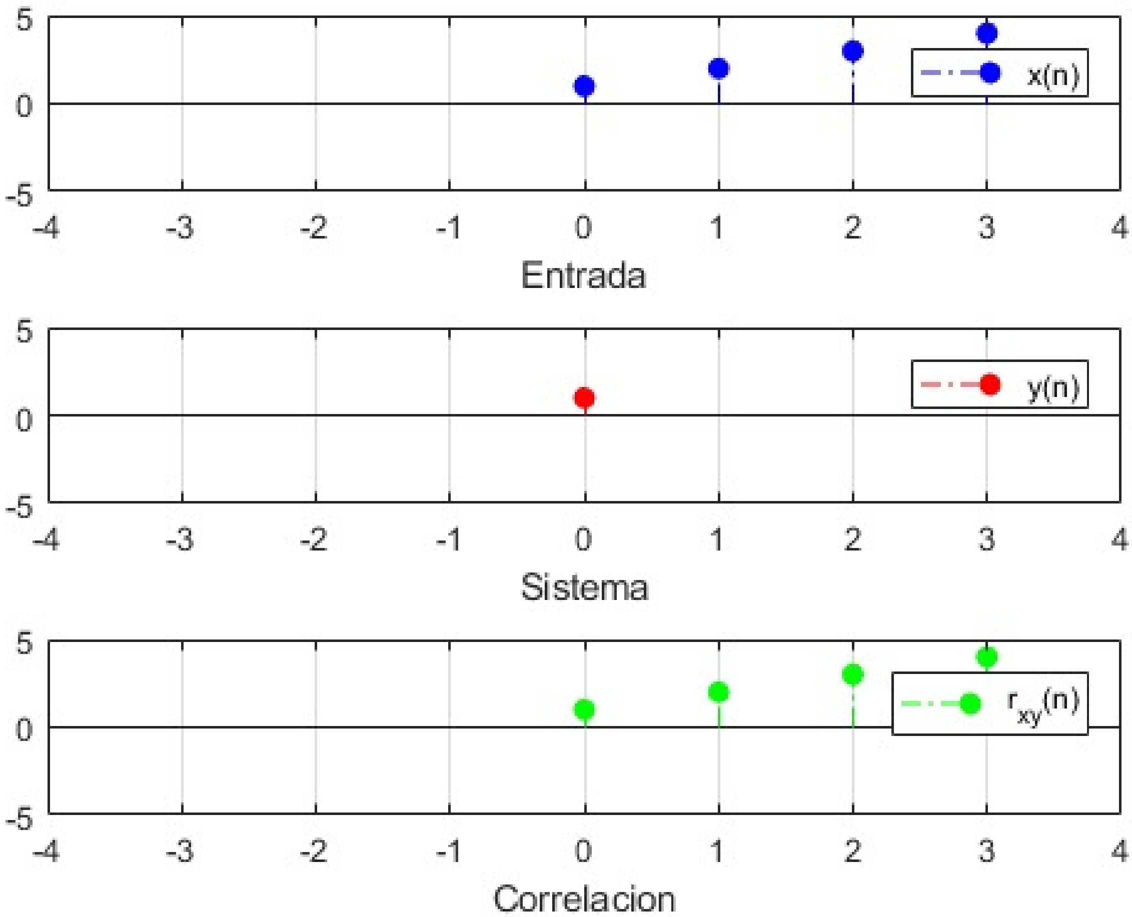

Figura 2. *Gráfica ejercicio 2 figura 2*

III. EJERCICIO 3

III-A. Punto a

Se tienen la señal

$$y(n) = ax(n - D) + v(n) \quad (6)$$

Se pide demostrar además como es posible calcular el valor de D a partir de una correlación con la señal $x(n)$

Utilizando la fórmula de la correlación de x con y

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(k-n) \quad (7)$$

Sustituyendo la respuesta de $y(n)$

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)(ax(k-n-D) + v(k-n)) \quad (8)$$

Que se puede reescribir como

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)ax(k-n-D) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)v(k-n) \tag{9}$$

Que equivale a

$$r_{xy}(n) = a \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x(k-n-D) + r_{xv}(n) \tag{10}$$

Se sabe además que

$$|r_{xx}(n)| \leq r_{xx}(0) \tag{11}$$

Y que

$$r_{xx}(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x(k) \tag{12}$$

Por tanto hay se puede despejar para obtener el mayor valor, ignorando la constante de escalamiento y el ruido

$$x(k-n-D) = x(k) \tag{13}$$

Lo cual implica que

$$n = -D \tag{14}$$

Es por tanto que se puede medir el retardo D, viendo en que punto da el mayor valor, y negándolo Si fuera el caso de que se tuviera la correlación pero de y con x, se obtiene en la parte positiva como
$n = D$

III-B. Puntos del b al d

Para la obtencion de la funcion y independientemente de que secuencia se tenga de x, se utiliza la siguiente lógica:

- Se tiene el vector de la secuencia x y sus respectivas posiciones xn empezando desde 0
- Como se tiene un desplazamiento como atraso de D unidades, a los índices se les debe sumar D
- Se escala el vector x por a
- Se genera el ruido gaussiano v
- Para cada uno de los indices del resultado final, se busca si este indice se encuentra en el vector de posiciones desplazados xn. Si es así, se toma ese índice y se mapea a la posición original para obtener el valor de la secuencia.
- Si se encontró un valor de índice que está dentro de la secuencia, se le suma a la salida con el ruido

Se grafican 3 subplots

- Secuencia de Baker de 13 puntos en azul
- Transformación de la secuencia para retrasarla 20 unidades, escalarla por 0.9, y añadirle ruido en rojo
- Correlación de la señal y con la señal x, filtrada a 60 unidades en verde

La Figura 3 tiene una varianza de 0.01

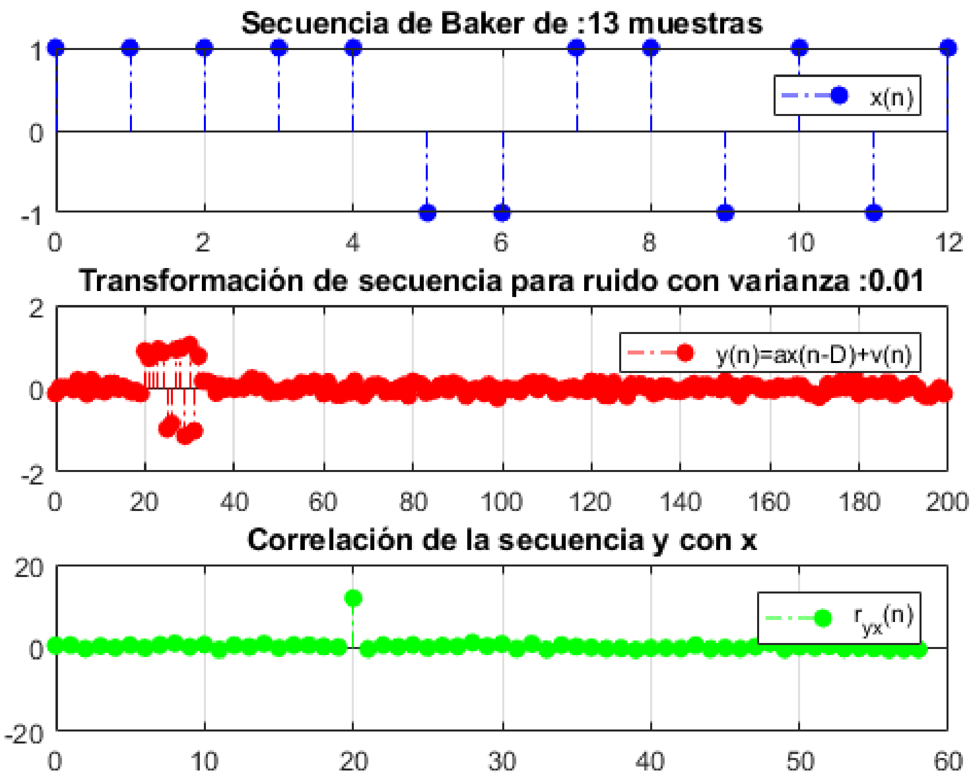

Figura 3. *Gráfica ejercicio 3 figura 1*

La Figura 4 tiene una varianza de 0.1

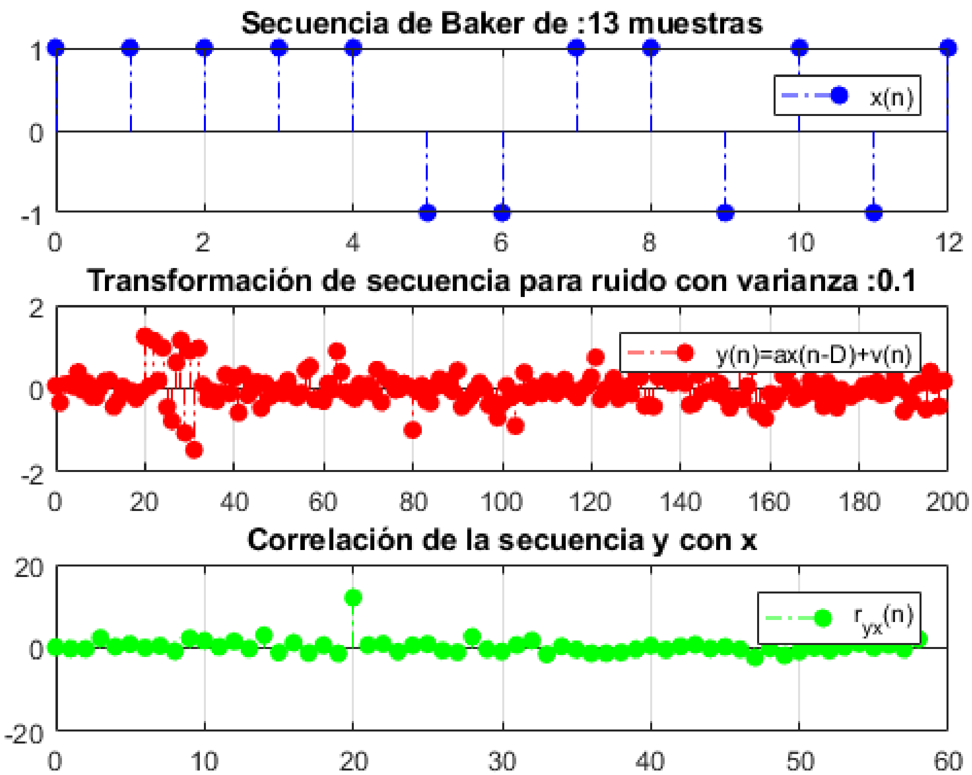

Figura 4. *Gráfica ejercicio 3 figura 2*

La Figura 4 tiene una varianza de 1

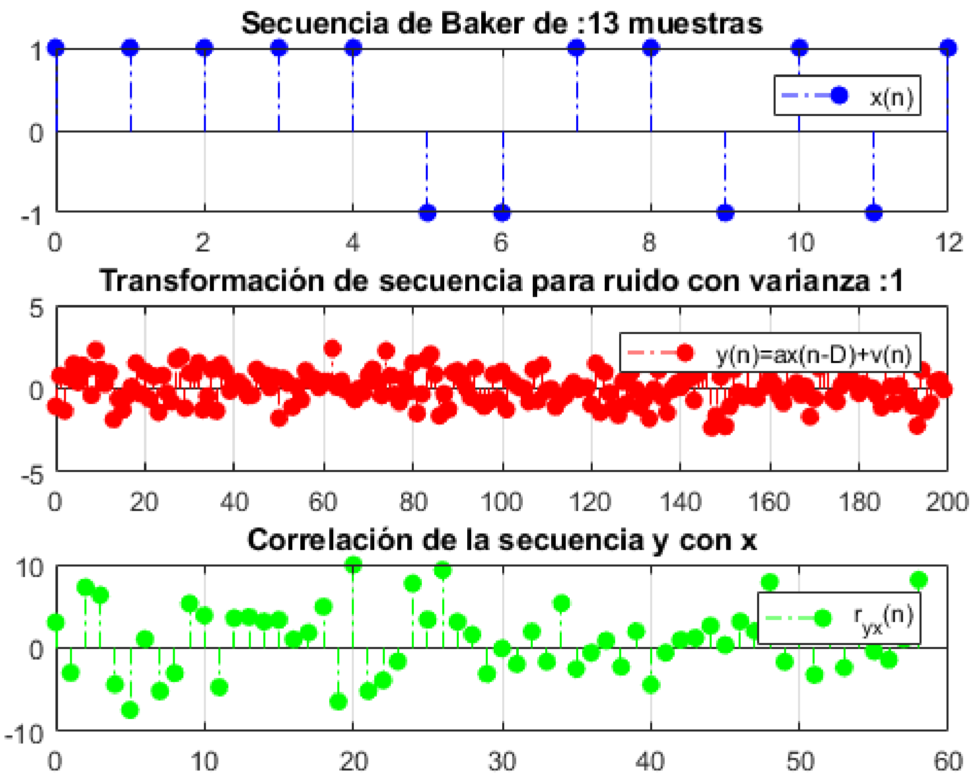

Figura 5. *Gráfica ejercicio 3 figura 3*

III-C. Punto e

En la siguiente Figura se gráfica

- Secuencia de Baker de 15 puntos en azul
- Transformación de la secuencia para retrasarla 20 unidades, escalarla por 0.9, y añadirle ruido con varianza de 0.01 en rojo
- Correlación de la señal y con la señal x, filtrada a 60 unidades en verde

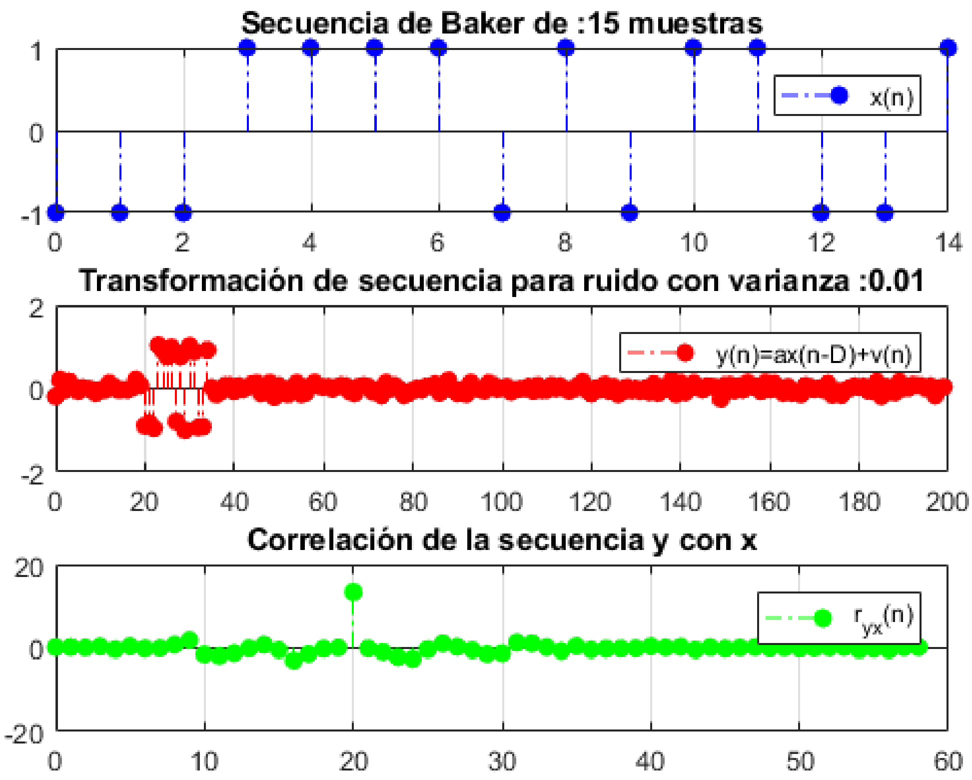

Figura 6. *Gráfica ejercicio 3 figura 4*

III-D. Punto f

En la siguiente figura se muestra

- Secuencia de Baker de 127 puntos en azul
- Transformación de la secuencia para retrasarla 20 unidades, escalarla por 0.9, y añadirle ruido con varianza de 0.01 en rojo
- Correlación de la señal y con la señal x, filtrada a 60 unidades en verde

La secuencia de Baker se genera a partir del registro de corrimiento con m = 7

En donde como se utiliza el 0 como -1 y el 1 como 1, esto se puede modelar con una ecuación lineal de la forma $y(n) = 2n - 1$

El algoritmo se encuentra en la función sequence, la cual recibe el limite de muestras que se requieren, inicializando la secuencia de igual forma que la de m = 4

Para cada punto se guarda el valor final del vector de los registros, usando la ecuación anterior.

Seguidamente se suman el primero y el final y se saca el modulo, que debe ir al inicio, y además se le concatena el vector anterior menos el último.

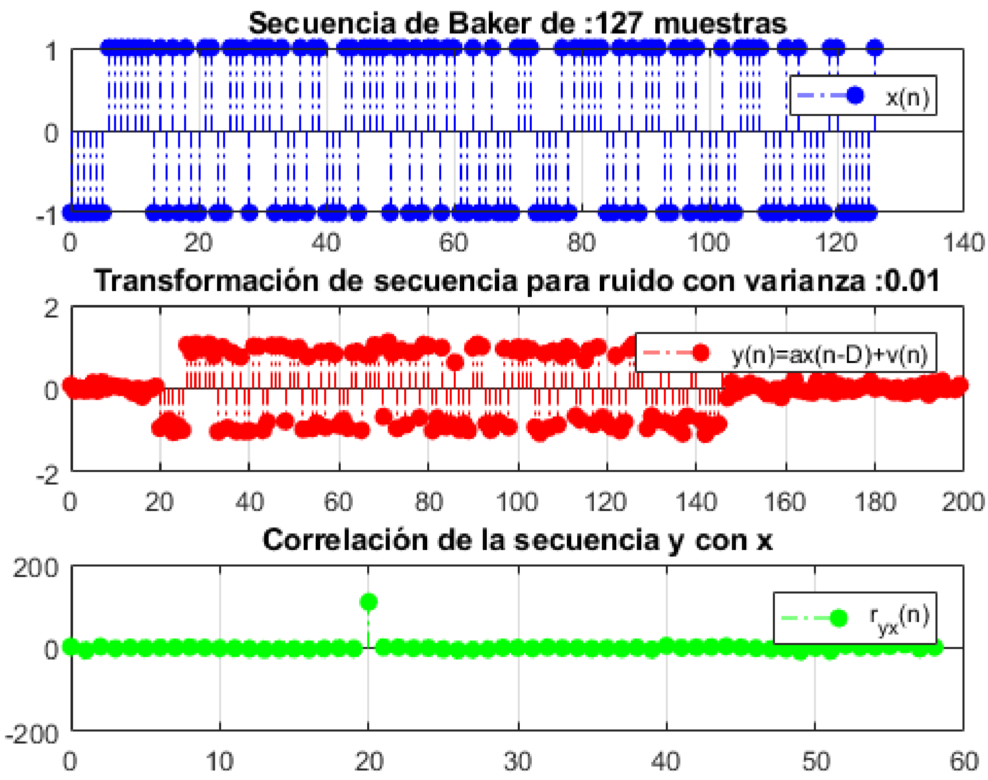

Figura 7. *Gráfica ejercicio 3 figura 5*

REFERENCIAS

[1] https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/fix.html