Interpolación por recurrencia

María Teresa Hoyo García
Roberto Hueso Gómez
Abel José Sánchez Alba

10 de Junio de 2015

Índice

La **fórmula de Newton** es un ejemplo de métodos recurrentes para resolver un problema de interpolación. Otro procedimiento recurrente, el cual evita el cálculo explícito de diferencias divididas utilizando dos polinomios de interpolación, se basa en el lema de **Aitken**.

Lema de Aitken

Condiciones iniciales:

- Sean $N = Grado(P(x))$
- $A \in dominio(P(x))$
- Conocemos varios nodos equiespaciados $x_0, x_1, \ldots, x_n$
- Conocemos las evaluaciones $F(x_i)$

Es posible obtener el valor de la evaluación del polinomio en el punto A siguiendo el Algoritmo de Aitken

Lema de Aitken

Condiciones iniciales:

- Sean $N = Grado(P(x))$
- $A \in dominio(P(x))$
- Conocemos varios nodos equiespaciados $x_0, x_1, \ldots, x_n$
- Conocemos las evaluaciones $F(x_i)$

Es posible obtener el valor de la evaluación del polinomio en el punto A siguiendo el Algoritmo de Aitken

Lema de Aitken

Condiciones iniciales:

- Sean $N = Grado(P(x))$
- $A \in dominio(P(x))$
- Conocemos varios nodos equiespaciados $x_0, x_1, \ldots, x_n$
- Conocemos las evaluaciones $F(x_i)$

Es posible obtener el valor de la evaluación del polinomio en el punto A siguiendo el Algoritmo de Aitken

Lema de Aitken

Condiciones iniciales:

- Sean $N = Grado(P(x))$
- $A \in dominio(P(x))$
- Conocemos varios nodos equiespaciados $x_0, x_1, \ldots, x_n$
- Conocemos las evaluaciones $F(x_i)$

Es posible obtener el valor de la evaluación del polinomio en el punto A siguiendo el Algoritmo de Aitken

Lema de Aitken

Condiciones iniciales:

- Sean $N = Grado(P(x))$
- $A \in dominio(P(x))$
- Conocemos varios nodos equiespaciados $x_0, x_1, \ldots, x_n$
- Conocemos las evaluaciones $F(x_i)$

Es posible obtener el valor de la evaluación del polinomio en el punto A siguiendo el Algoritmo de Aitken

Algoritmo de Aitken

Paso 1

Sea $I = 0, 1, \ldots, N \quad \forall N > 0$ definimos

$$F(I) = P(I)$$

Paso 2

Sea $Z = 1, 2, ..., N$ tomamos $I = Z, Z+1, ..., N$ de manera que

$$P(I) = \frac{(X(I) - A) * P(Z-1) - (X(Z-1) - A) * P(I)}{X(I) - X(Z-1)} \quad (1)$$

Algoritmo de Aitken

Paso 1

Sea $I = 0, 1, \ldots, N \quad \forall N > 0$ definimos

$$F(I) = P(I)$$

Paso 2

Sea $Z = 1, 2, ..., N$ tomamos $I = Z, Z+1, ..., N$ de manera que

$$P(I) = \frac{(X(I) - A) * P(Z-1) - (X(Z-1) - A) * P(I)}{X(I) - X(Z-1)} \tag{1}$$

Paso 3

Se hace evidente, que es un método recursivo y que en el momento en el que en $I = N$ en $P(I)$ obtendremos el valor $F(A)$

Ejemplo

Queremos conocer el valor en el punto $A = 4$ sabiendo que $f(x) = \{0, -4, 0, 18\}$ en los puntos $x = \{0, 1, 2, 3\}$ respectivamente

Cuadro: Aitken

x_i	$x - (x_i)$	$f(x_i)$			
0	4	0			
1	3	-4	-16		
2	2	0	0	32	
3	1	18	24	44	56

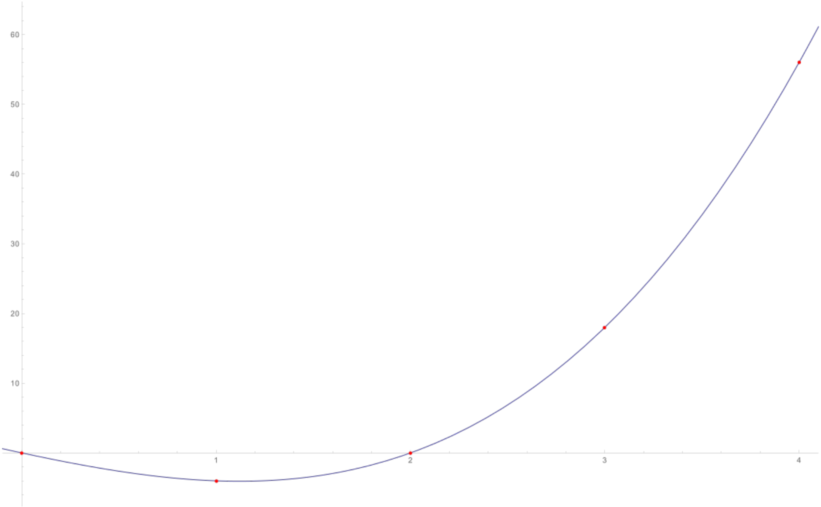
Ejemplo

Queremos conocer el valor en el punto $A = 4$ sabiendo que $f(x) = \{0, -4, 0, 18\}$ en los puntos $x = \{0, 1, 2, 3\}$ respectivamente

Cuadro: Aitken

x_i	$x - (x_i)$	$f(x_i)$			
0	4	0			
1	3	-4	-16		
2	2	0	0	32	
3	1	18	24	44	56

Gráfico $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$



Aitken en Octave

```
function salida = aitken(t,x,y)
  n=length(y);
  Z=zeros(n);
  Z(1,:)=y;
  aux=zeros(1,length(t));
  for k=1:1:length(t)
    for j=1:n-1
      for i=j+1:n
        Z(j+1,i)=(Z(j,i)*(t(k)-x(j))-Z(j,j)*(t(k)-x(i)))/(x(i)-x(j));
      endfor
    endfor
    aux(k)=Z(n,n);
  endfor
  Z' #Para mostrar la tabla
  salida=aux
endfunction
```

Neville

Bajo las mismas condiciones iniciales que el método de Aitken:

- Sean $N = Grado(P(x))$
- $A \in dominio(P(x))$
- Conocemos varios nodos equiespaciados $x_0, x_1, \ldots, x_n$
- Conocemos las evaluaciones $F(x_i)$

Paso 1

Sea $I = 0, 1, \ldots, N \quad \forall N > 0$ definimos

$$F(I) = P(I)$$

Neville

Bajo las mismas condiciones iniciales que el método de Aitken:

- Sean $N = Grado(P(x))$
- $A \in dominio(P(x))$
- Conocemos varios nodos equiespaciados $x_0, x_1, \ldots, x_n$
- Conocemos las evaluaciones $F(x_i)$

Paso 1

Sea $I = 0, 1, \ldots, N \quad \forall N > 0$ definimos

$$F(I) = P(I)$$

Paso 2

Sea $Z = 1, 2, ..., N$ tomamos $I = Z, Z + 1, ..., N$ de manera que

$$P(I) = \frac{(X(I) - A) * P(I-1) - (X(I-Z) - A) * P(I)}{X(I) - X(I-Z)} \tag{2}$$

Paso 3

Se hace evidente, que es un método recursivo y que en el momento en el que en $I = N$ en $P(I)$ obtendremos el valor $F(A)$

Paso 2

Sea $Z = 1, 2, ..., N$ tomamos $I = Z, Z+1, ..., N$ de manera que

$$P(I) = \frac{(X(I) - A) * P(I-1) - (X(I-Z) - A) * P(I)}{X(I) - X(I-Z)} \tag{2}$$

Paso 3

Se hace evidente, que es un método recursivo y que en el momento en el que en $I = N$ en $P(I)$ obtendremos el valor $F(A)$

Ejemplo

Queremos conocer el valor en el punto $A = 5$ sabiendo que $f(x) = \{-2, -1, 0, -5\}$ en los puntos $x = \{-2, -1, 0, 1\}$ respectivamente

Cuadro: Neville

x_i	$x - (x_i)$	$f(x_i)$			
-2	7	-2			
-1	6	-1	5		
0	5	0	5	5	
1	4	-5	-25	-85	-205

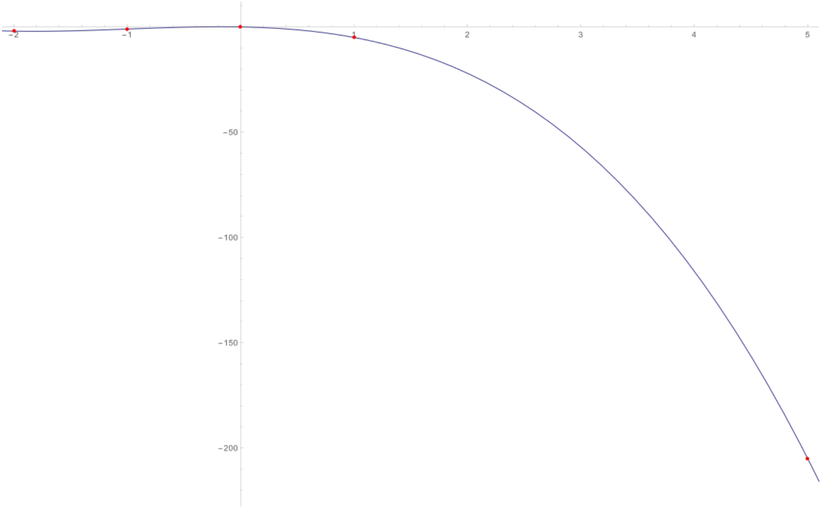
Ejemplo

Queremos conocer el valor en el punto $A = 5$ sabiendo que $f(x) = \{-2, -1, 0, -5\}$ en los puntos $x = \{-2, -1, 0, 1\}$ respectivamente

Cuadro: Neville

x_i	$x - (x_i)$	$f(x_i)$			
-2	7	-2			
-1	6	-1	5		
0	5	0	5	5	
1	4	-5	-25	-85	-205

Gráfico $f(x) = -x^3 - 3x^2 - x$



Neville en Octave

```
function salida = neville(t,x,y)
  n=length(x);
  z=zeros(n,n+1);
  z(:,1);
  z(:,1)=x';
  z(:,2)=y';
  a=0;
  for i=3:1:n+1
    for j=i-1:1:n
      z(j,i)=z(j,i-1)+((z(j,1)-t)/(z(j,1)-z(j-1-a,1)))*(z(j-1,i-1)-z(j,i-1));
    endfor
    a=a+1;
  endfor
  z #Para visualizar la tabla
  salida = z(n, n+1)
endfunction
```

Gracias

Repositorio

`https://github.com/robertohueso/interpolacion`