# Medidas de Posição

São as estatísticas que representam uma série de dados orientando-nos quanto à posição da distribuição em relação ao eixo horizontal do gráfico da curva de freqüência. As medidas de posições mais importantes são as medidas de tendência central ou promédias (verifica-se uma tendência dos dados observados a se agruparem em torno dos valores centrais).

# Medidas de Tendência Central

São medidas que caracterizam uma série estatística e que quando bem interpretadas, podem fornecer-nos informações muito valiosas com respeito a série estatística. É um valor intermediário da série, ou seja, um valor compreendido entre o menor e o maior valor da série. É também um valor em torno do qual os elementos da série estão distribuídos e a posiciona em relação ao eixo horizontal.

> "As medidas de tendência central procuram estabelecer um número no eixo horizontal em torno do qual a série se concentra".

As principais medidas de tendência central são: média, mediana e moda.

## Somatório – Notação Sigma (Σ)

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- $i$ assume todos os valores inteiros consecutivos entre dois valores dados.

**Propriedades**

1. O somatório de uma soma é a soma dos somatórios.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

2. O somatório de uma diferença é a diferença dos somatórios.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i$$

3. O somatório do produto de uma constante por uma variável, é o produto da constante pelo somatório da variável.

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i) = a\sum_{i=1}^{n} x_i$$

4. O somatório da divisão de uma variável por uma constante, é a divisão do somatório da variável pela constante.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{a}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{a}$$

## 1.1 Média Aritmética Simples

Dada a sequência numérica $X : x_1, x_2, \ldots, x_n$, a média aritmética simples, que designaremos por $\overline{X}$ é definida por:

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Ex.: $X : 2, 0, 5, 3$

$$\overline{X} = \frac{2+0+5+3}{4} = 2.5$$

## 1.2 Média Aritmética Ponderada

$\overline{X} : x_1, x_2, \ldots, x_n$, afetados de pesos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ respectivamente.

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i p_i}{\sum p_i}$$

Ex.: $X : 2, 4, 5$, com pesos 1, 3 e 2.

$$\overline{X} = \frac{(2\cdot 1)+(4\cdot 3)+(5\cdot 2)}{1+3+2} = \frac{24}{6} = 4$$

## 1.3 Média Geométrica Simples

$$\overline{X}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

Ex.: $X : 2, 4, 6, 9$

$$\overline{X}_g = \sqrt[4]{2\cdot 4\cdot 6\cdot 9} = \sqrt[4]{432} = 4.559$$

## 1.4 Média Geométrica Ponderada

$$\overline{X}_g = \sqrt[\sum p_i]{x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}}$$

## 1.5 Média Harmônica Simples

Para uma dada sequência numérica de elementos não nulos $X : x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$$\overline{X}_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \qquad \text{ou} \qquad \overline{X}_h = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}$$

Ex.: $X : 2, 5, 10$

$$\overline{X}_h = \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}} = \frac{3}{\frac{5+2+1}{10}} = \frac{30}{8} = 3.75$$

## 1.6 Média Harmônica Ponderada

Para a sequência numérica de elementos não nulos, $X : x_1, x_2, \cdots, x_n$ com pesos $p_1, p_2, \cdots, p_n$, respectivamente.

$$\overline{X}_h = \frac{\sum p_i}{\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2} + \cdots + \frac{p_n}{x_n}} \qquad \textit{ou} \qquad \frac{\sum p_i}{\sum \frac{p_i}{x_i}}$$

Ex.: $X : 2, 4, 12$ e pesos 3,2,2, respectivamente.

$$\overline{X}_h = \frac{7}{\frac{3}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{12}} = \frac{7}{\frac{18+6+2}{12}} = \frac{7 \cdot 12}{26} = \frac{84}{26} = 3.23$$

Observemos que:

1. A média harmônica aplica-se naturalmente quando se quer a obtenção de uma média cuja unidade de medida seja o inverso da unidade de medida dos componentes da sequência original.
2. A média geométrica só é indicada para representar uma série de valores aproximadamente em progressão geométrica.

Estes casos não são muito frequentes nas aplicações.

## 1.7 Cálculo da Média Aritmética

### 1.7.1 Dados Brutos ou Rol

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} \qquad \text{(média aritmética simples)}$$

Ex.: $X: 3,5,8,12,7,12,15,18,20,20$

$$\overline{X} = \frac{3+5+8+12+7+12+15+18+20+20}{10} = \frac{120}{10} = 12$$

- O valor médio deste série é 12, ou seja, os valores desta série se concentram em torno do valor 12.

### 1.7.2 Variável Discreta

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i p_i}{\sum p_i} \quad \text{(média aritmética ponderada)}$$

Ex.:

| $i$ | $X_i$ | $f_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 5 | 4 |
| 3 | 6 | 3 |
| 4 | 8 | 2 |

Identificando as frequências como sendo pesos dos elementos que aparecem na série, temos:

$$p_i = f_i$$

Então:

$$\begin{aligned} \sum p_i &= \sum f_i = 1+4+3+2 = 10 \\ \sum x_i f_i &= (2\cdot 1)+(5\cdot 4)+(6\cdot 3)+(8\cdot 2) = 2+20+18+16 = 56 \\ \overline{X} &= \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{56}{10} = 5.6 \end{aligned}$$

- 5.6 é o ponto de concentração dos valores da série.

### 1.7.3 Variável Contínua

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} \quad \text{(média aritmética ponderada)}$$

com $f_i$ (frequência simples) das classes, sendo as *ponderações dos pontos médios* destas classes.

$$C_m = \frac{l+L}{2}$$

Ex.:

| Classe | Int. Classe | $f_i$ | $x_i$ | $x_i f_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 \|— 5 | 1 | 3.5 | 3.6 |
| 2 | 5 \|— 8 | 10 | 6.5 | 65 |
| 3 | 8 \|— 11 | 8 | 9.5 | 76 |
| 4 | 11\|— 14 | 1 | 12.5 | 12.5 |

$$\begin{aligned} \sum f_i &= 20 \\ \sum x_i f_i &= 3.5+65+76+12.5=157 \\ \overline{X} &= \frac{157}{20}=7.85 \end{aligned}$$

- 7.85 é o valor em torno do qual a série se concentra.

Importante salientar que o trabalho com variável contínua é um trabalho sem conhecimento dos valores individuais da série, nos impondo limitações.

Com variável contínua, somo levados a trabalhar com os valores médios das classes.

# Exercícios Propostos

1. Escreva na notação Sigma, as somas:

   a) $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$

   b) $x_3+x_4+x_5+x_6$

   c) $(x_1+2)+(x_2+2)+(x_3+2)$

   d) $(x_1-10)+(x_2-10)+(x_3-10)+(x_4-10)+(x_5-10)$

   e) $(x_1-3)^2+(x_2-3)^2+(x_3-3)^2$

   f) $(x_1-15)^2f_1+(x_2-15)^2f_2+(x_3-15)^2f_3$

2. Escreva as parcelas da soma indicada.

   a) $\sum_{i=2}^{7} x_i$

   b) $\sum_{i=3}^{6} x_i^2$

   c) $\sum_{i=1}^{4} (x_i-a)^2 f_i$

3. Calcule para a tebela abaixo, o valor numérico das somas indicadas:

| $i$ | $x_i$ | $f_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 |
| 2 | 4 | 5 |
| 3 | 6 | 3 |
| 4 | 8 | 2 |

   a) $\sum i$

   b) $\sum x_i$

   c) $\sum f_i$

   d) $\sum x_i f_i$

   e) $\sum i x_i$

   f) $\sum x_i^2 f_i$

   g) $\sum (x_i-10)^2 f_i$

   h) $\sum \left(\frac{x_i f_i}{i}\right)$

4. Calcule a média aritmética da série:

   a) X: 1, 2, 8, 10, 12, 16, 21, 30.

   b) Y: 5, 6, 6, 10, 11, 11, 20.

   c) Z: 3.4, 7.8, 9.23, 12.15.

5. Um produto é acondicionado em lotes contendo cada um deles 10 unidades. O lote só é aprovado se apresentar um peso superior a 40 quilos.

   Se as unidades que compõem determinado lote pesam: 3; 4; 3,5; 5,0; 3,5; 4; 5; 5,5; 4; 5, este lote será aprovado? Qual o peso médio do produto?

6. Calcule a média geométrica para as séries:

   X: 1, 2, 4, 7, 16

   Y: 81, 26, 10, 3, 1

7. Calcule a média harmônica da série:

   X: 5, 10, 15, 20

   Y: 2, 7, 4.

8. Um produto é vendido em três supermercados por $ 13,00/kg, $ 13,20/kg e $ 13,50/kg. Determine quantos $/kg se paga em média pelo produto.

9. Um produto é vendido em três supermercados por $ 130/kg, $ 132/kg e $ 135/kg. Determine, em média quantos quilos do produto se compra com $ 1,00.

10. Calcule a média harmônica da série 130, 132, 135.

11. Calcule a média aritmética da série:

| $x_i$ | $f_i$ |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 3 | 4 |
| 4 | 3 |
| 5 | 2 |

12. Calcule a média geométrica da série anterior.

13. Calcule a média harmônica da série anterior.

14. Uma loja vende cinco produtos básicos A, B, C, D, E. O lucro por unidade comercializada destes produtos vale respectivamente $ 200,0; $ 300,00; $ 500,00; $ 1000,00; $ 5000,00. A loja vendeu em determinado mês 20; 30; 20; 10; 5 unidades resperctivamente. Qual foi o lucro médio por unidade comercializada por esta loja?

15. Calcule o número médio de acidentes por dia em uma determinada esquina.

| N° de acidentes por dia: $x_i$ | N° de dias $f_i$ |
|---|---|
| 0 | 30 |
| 1 | 5 |
| 2 | 3 |
| 3 | 1 |
| 4 | 1 |

16. Uma imobiliária gerencia o aluguel de residências particulares, segundo o quadro abaixo. Calcule o aluguel médio para estas residências.

| Classe | Aluguel $ | N○ de casas: $f_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 \|— 200,00 | 30 |
| 2 | 200,00 \|— 400,00 | 52 |
| 3 | 400,00 \|— 600,00 | 28 |
| 4 | 600,00 \|— 800,00 | 7 |
| 5 | 800,00 \|— 1000,00 | 3 |

# *Referências Bibliográficas*

[1] Silva, E. M.; Gonçalves, V.; Silva, E. M.; Murolo, A. C., *Estatística*, Editora Atlas S.A., 1995.