Taller de Métodos

1. $\langle a|b\rangle \doteq Tr(A^* B)$

a) Compruebe si ésta es una buena definición de producto interno

Para las matrices $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ son matrices arbitrarias y $\lambda \in \mathbb{C}$ es un complejo arbitrario.

1. Verificamos que la función es lineal con respecto al primer arg

$$\langle \lambda(A+B), C\rangle = tr((\lambda A^{*T} + \lambda B^{*T})(C)) = tr(\lambda(A^{*T}+B^{*T})(C)) = \lambda tr((A^{*T}+B^{*T})(C))$$

$$= \lambda tr(A^{*T}C) + \lambda tr(B^{*T}C) = \lambda\langle A, C\rangle + \lambda\langle B, C\rangle$$

• Respecto al segundo argumento:

$$\langle A, \lambda(B+C)\rangle = tr((A)^{*T}(\lambda B+\lambda C)) = tr(\lambda(A)^{*T}(B+C)) = \lambda tr(A^{*T}(B+C))$$

$$= \lambda tr(A^{*T}B) + \lambda tr(A^{*T}C) = \lambda\langle A, B\rangle + \lambda\langle A, C\rangle$$

2. Verificamos que la función es hermítica:

$$\overline{\langle B, A\rangle} = \overline{tr(B^{*T}A)} = tr((B^{*T}A)^*) = tr(A^* B^T) = \langle A, B\rangle$$

b) 3. Verificamos que la función es definida positiva:

$$\langle A, A\rangle = tr(A^{*T}A) = \sum_{k=1}^{n}(A^{*T}A)_{k,k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}(A^*)_{kj}(A)_{jk}\right)$$

$\to A^{*i}_{j}\, A^{j}_{i}$

$$\langle A, A\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|A_{jk}|^2 \to \text{Norma de Frobenious}$$

c) Encuentre la distancia entre dos matrises 2x2 a partir de la definición de norma de Frobenious

$$A = \begin{bmatrix} 1+2i & 3+4i \\ 5+6i & 7+8i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2-3i & 4-5i \\ 6-7i & 8-9i \end{bmatrix}$$

$$d(|A\rangle, |B\rangle) = \|A-B\| \qquad A-B = \begin{bmatrix} -1+5i & -1+9i \\ -1+13i & -1+17i \end{bmatrix}$$

$$\|A-B\| = \cancel{sqrt}(|-1+5i|^2 + |-1+9i|^2 + |-1+13i|^2 + |-1+17i|^2)^{1/2}$$

$$\|A-B\| = (26+82+170+290)^{1/2} = (568)^{1/2} = 23{,}85$$

1. $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $\langle \sigma_0 | \sigma_1 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$$= Tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

- $\langle \sigma_0 | \sigma_2 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right)$

$$= Tr\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0$$

- $\langle \sigma_0 | \sigma_3 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$

$$= Tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

- $\langle \sigma_1 | \sigma_2 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right) = Tr\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 0$

- $\langle \sigma_1 | \sigma_3 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = Tr\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$

- $\langle \sigma_2 | \sigma_3 \rangle = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = Tr\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = 0$

→ Dado que el producto interno entre las matrices es 0 se compreba que son ortogonales bajo la definición de Frobenious.

2. Distancia entre las matrices

$$d(|\sigma_0\rangle, |\sigma_1\rangle) = \sqrt{|1-0|^2 + |0-1|^2 + |0-1|^2 + |1-0|^2}$$
$$= 2$$

$$d(|\sigma_0\rangle, |\sigma_2\rangle) = \sqrt{|1|^2 + |+i|^2 + |-i|^2 + |1|^2}$$
$$= \sqrt{4} = 2$$

$$d(|\sigma_0\rangle, |\sigma_3\rangle) = \sqrt{4} = 2$$

$$d(|\sigma_1\rangle, |\sigma_2\rangle) = \sqrt{|1+i|^2 + |1-i|^2}$$
$$= \sqrt{4} = 2$$

$$d(|\sigma_1\rangle, |\sigma_3\rangle) = \sqrt{|-1|^2 + |1|^2 + |1|^2 + |-1|^2} = 2$$

$$d(|\sigma_2\rangle, |\sigma_3\rangle) = \sqrt{|-1|^2 + |-i|^2 + |i|^2 + |1|^2} = 2$$

→ La distancia entre las matrices de Pauli es 2.

f) Muestre que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ forman una base para el espacio de las matrices 2x2 hermíticas.

• Para demostrarlo tenemos que comprobar la independecia lineal entre las matrices y que generan el espacio:

f.a) Independencia lineal

Sea $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ escalares que $\in \mathbb{C}$ y que multiplican a las matrices:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, para que las matrices de Pauli sean linealmente independientes, los escalares deben ser igual a 0:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1(1) + \alpha_2(0) + \alpha_3(0) + \alpha_4(1) = 0 \\ \alpha_1(0) + \alpha_2(1) + \alpha_3(-i) + \alpha_4(0) = 0 \\ \alpha_1(0) + \alpha_2(1) + \alpha_3(i) + \alpha_4(0) = 0 \\ \alpha_1(1) + \alpha_2(0) + \alpha_3(0) + \alpha_4(-1) = 0 \end{aligned}\right\} \text{Sistema de ecuaciones a resolver}$$

Del anterior sistema de ecuaciones lineales obtemos que:

* $-2\alpha_4 = 0 \rightarrow \alpha_4 = 0$
* $2i\alpha_3 = 0 \rightarrow \alpha_3 = 0$
* $\alpha_2 = \alpha_3 i = \rightarrow \alpha_2 = 0$
* $\alpha_1 = -\alpha_4 \rightarrow \alpha_1 = 0$

@ Esto nos da como resultado que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ y por consecuencia, las matrices de Pauli son linealmente independientes.

f.b) Generan el Espacio

Ahora debemos verificar que toda matriz 2x2 hemítica del espacio vectorial se pueda escribir en terminos de una combinación lineal de las matrices de pauli:

$$\beta_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \beta_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

Donde x, y, z, w son los elementos de la matriz que pertenecen a los números complejos:

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 + \beta_4 = x \\ \beta_2 - \beta_3 i = y \\ \beta_2 + \beta_3 i = z \\ \beta_1 - \beta_4 = w \end{aligned}\right\} \text{Sistema de Ecuaciones a Solucionar}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

$$\beta_1 = \frac{x+w}{2}, \quad \beta_2 = \frac{z+y}{2}, \quad \beta_3 = \frac{yi - zi}{2}, \quad \beta_4 = \frac{x-w}{2}$$

@ Por tanto, se compreba que los escalares existen y dependen de los elementos x, y, z, w. En consecuencia, las matrices de Pauli generan el espacio de matrices 2x2 hermíticas.

9) La base de las matrices 2x2 hermíticas son ortogonales bajo la siguiente definición de producto interno.

$$\langle A|B\rangle \doteq Tr(A^\dagger B)$$

$$\langle\sigma_0|\sigma_1\rangle = tr\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^\dagger\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = 0 = tr\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\langle\sigma_0|\sigma_2\rangle = tr\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^\dagger\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} = 0$$

$$\langle\sigma_0|\sigma_3\rangle = tr\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^\dagger\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = 0$$

$$\langle\sigma_1|\sigma_2\rangle = tr\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^\dagger\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} = 0$$

$$\langle\sigma_1|\sigma_3\rangle = tr\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^\dagger\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 0$$

$$\langle\sigma_2|\sigma_3\rangle = tr\left(\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}^\dagger\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix} = 0$$

→ Se compreba que también son ortogonales bajo la definición de este producto interno.

h) Explore si se pueden construir subespacios vectoriales de matrices reales e imaginarias puras.

Para construir un subespacio vectorial de matrices reales, voy a tomar las matrices de Pauli cuyo valor imaginario es 0, estas son σ_0, σ_1 y σ_3.
La forma general de una matriz de este subespacio es:

- Subespacio Matrices Reales

$$a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+c & b\\ b & a+(-c)\end{pmatrix}$$

Primero podemos comprobar que cuando los escalares a, b, c que $\in \mathbb{R}$, tienen valor 0 obtendremos al cero vector.

sí $a=b=c=0$ entonces $\begin{pmatrix}a+c & b\\ b & a-c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0_*$

→ Ahora procedemos a comprobar que cumple con los dos axiomas de un subespacio vectorial:

$$D = \left\{ \begin{pmatrix}a+c & b\\ b & a-c\end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

- Axioma I: $\bar{u}, \bar{v} \in D : \bar{u}+\bar{v} \in D$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_2 & \alpha_1-\alpha_3\end{pmatrix} \quad \bar{v} = \begin{pmatrix}\beta_1+\beta_3 & \beta_2\\ \beta_2 & \beta_1-\beta_3\end{pmatrix}$$

$$\bar{u}+\bar{v} = \begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_3+\beta_1+\beta_3 & \alpha_2+\beta_2\\ \alpha_2+\beta_2 & \alpha_1\mp\alpha_3+\beta_1+\beta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_3+\beta_3) & \alpha_2+\beta_2\\ \alpha_2+\beta_2 & (\alpha_1+\beta_1)-(\alpha_3+\beta_3)\end{pmatrix}$$

$\bar{u}+\bar{v} = \begin{pmatrix}\varphi_1+\varphi_3 & \varphi_2\\ \varphi_2 & \varphi_1-\varphi_3\end{pmatrix}$ donde $\varphi = \alpha+\beta$, $\varphi \in \mathbb{R}$
se cumple que $\bar{u}+\bar{v} \in D_*$

- Axioma II $\bar{u} \in D$, ~~$*$~~ $\in \mathbb{R}$: $\alpha\bar{u} \in D$

$\alpha\bar{u} = \alpha($

- Axioma II $\bar{u} \in D$, $\phi \in \mathbb{R}$: $\phi\bar{u} \in D$

$$\phi\bar{u} = \phi\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_3 & \alpha_2\\ \alpha_2 & \alpha_1-\alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\phi(\alpha_1+\alpha_3) & \phi\alpha_2\\ \phi\alpha_2 & \phi(\alpha_1-\alpha_3)\end{pmatrix}$$

$\phi\bar{u} = \begin{pmatrix}\phi\alpha_1+\phi\alpha_3 & \phi\alpha_2\\ \phi\alpha_2 & \phi\alpha_1-\phi\alpha_3\end{pmatrix}$ dode $\phi\alpha_i \in \mathbb{R}$
se cumple que $\phi\bar{u} \in D_*$

⇒ Comprobamos al cumplir los dos axiomas que D es un subespacio de matrices reales 2x2 del espacio de matrices hermíticas 2x2.

• Subespacio de matrices imaginarias puras

Para construir este subespacio voy a usar unicamente la primera y segunda matriz de Pauli.

La forma general de este subconjunto es:

$$a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a-bi \\ a+bi & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donde, } a, b \in \mathbb{C}$$

Primero podemos comprobar que los escalarea a, b tienen valor cero, obtendremos el cero vector:

$$\begin{pmatrix} 0 & a-bi \\ a+bi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_*$$

→ Ahora procedemos a verificar que cumple con los axiomas de un subespacio vectorial.

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a-bi \\ a+bi & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

• Axioma I: $\bar{u}, \bar{v} \in F$: $\bar{u} + \bar{v} \in F$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 - \alpha_2 i \\ \alpha_1 + \alpha_2 i & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 - \beta_2 i \\ \beta_1 + \beta_2 i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u} + \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 - \alpha_2 i + \beta_1 - \beta_2 i \\ \alpha_1 + \alpha_2 i + \beta_1 + \beta_2 i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (\alpha_1+\beta_1) - (\alpha_2+\beta_2)i \\ (\alpha_1+\beta_1) + (\alpha_2+\beta_2)i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u} + \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 - \gamma_2 i \\ \gamma_1 + \gamma_2 i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donde } \gamma = \alpha + \beta, \; \gamma \in \mathbb{C}$$

Se cumple que $\bar{u} + \bar{v} \in F_*$

• Axioma II: $\bar{u} \in F$, $\phi \in \mathbb{C}$: $\phi\bar{u} \in F$

$$\phi\bar{u} = \phi\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 - \alpha_2 i \\ \alpha_1 + \alpha_2 i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \phi(\alpha_1 - \alpha_2 i) \\ \phi(\alpha_1 + \alpha_2 i) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi\bar{u} = \begin{pmatrix} 0 & \phi\alpha_1 - \phi\alpha_2 i \\ \phi\alpha_1 + \phi\alpha_2 i & 0 \end{pmatrix}$$ Se cumple que $\phi\bar{u} \in F$

⇒ Al cumplir los dos axiomas comprobamos que F es un subespacio de matrices imaginarias puras 2x2 que pertenece al espacio de matrices hermíticas 2x2.

2. Se construye un espacio tensorial a partir de dos espacios vectoriales de polinomios $T_2(x,y) = P_2(x) \oplus G_2(y)$.

$T_2(x,y) = c^{ij}|e_i^P, e_j^G>$ donde, $|e_i^P>$ y $|e_j^G>$ son las bases ortogonales de $P_2(x)$ y $G_2(y)$.

a) Considere el polinomio $p^P(x) = x^2+x+3$ y expreselo en terminos de la base de polinomios de Legendre:

$\{|e_i^P>\} \leftrightarrow \{|P_i(x)>\}$

$\rightarrow p^P(x) = x^2+x+3 = a^1|e_1^P> + a^2|e_2^P> + a^3|e_3^P> = b^1|P_1> + b^2|P_2> + b^3|P_3> + \ldots$

Abora escribimos el vector (sus componentes en la base de Legendre) en terminos de las dos bases y sus componentes en la base ortogonal $|e_i^P>$.

$$b^1 = \frac{a^1<P_1|e_1^P> + a^2<P_1|e_2^P> + a^3<P_1|e_3^P>}{<P_1|P_1>}$$

Partiendo de:

$<P_1|p^P> = a^1<P_1|e_1^P> + a^2<P_1|e_2^P> + a^3<P_1|e_3^P> = b^1<P_1|P_1>$

Hallamos las otras dos componentes respectivamente:

$$b^2 = \frac{a^1<P_2|e_1^P> + a^2<P_2|e_2^P> + a^3<P_2|e_3^P>}{<P_2|P_2>}$$

$$b^3 = \frac{a^1<P_3|e_1^P> + a^2<P_3|e_1^P> + a^3<P_3|e_3^P>}{<P_3|P_3>}$$

b) Dados $p^P(x) = x^2+x+3$ y $p^G(y) = y+1$. Construya el tensor, $p^{P\otimes G}(x,y) = p^P(x) \otimes p^G(y)$.

$p^P(x) = a^i|e_i^P>$

$p^G(y) = g^j|e_j^G>$

$$p^{P\otimes G} = \begin{pmatrix} a^1|e_1^P> \\ a^2|e_2^P> \\ a^3|e_3^P> \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} g^1|e_1^G> \\ g^2|e_2^G> \\ g^3|e_3^G> \end{pmatrix}$$

$$p^{P\otimes G} = a^i g^j |e_i^P>|e_j^G> = a^i g^j |e_i^P, e_j^G> = c^{ij}|e_i^P, e_j^G>$$

c) Dadas las bases $|M_i^P> = \{1, x, x^2\}$ y $|M_j^G> = \{1, y, y^2\}$

$\rightarrow p^{P\otimes G}(x,y) = c^{ij}|e_i^P, e_j^G> = d^{ij}|M_i^P, M_j^G>$

$$c^{ij} = \frac{d^{ij}<e_i^P, e_j^G|M_i^P, M_j^G>}{<e_i^P, e_j^G|e_i^P, e_j^G>}$$

d) Ahora suponiendo que las bases ortogonales son las de polinomios de Legendre:

$\{|e_i^P>\} \leftrightarrow \{|P_i^P(x)>\}$ y $\{|e_j^G>\} \leftrightarrow \{|P_j^G(y)>\}$

$$P^{P\otimes 6}(x,y) = c^{ij}\,|e_i^P, e_j^6\rangle = \hat{c}^{ij}\,|p_i^P, p_j^6\rangle$$

$$\hat{c}^{ij} = c^{ij}\,\frac{\langle p_i^P, p_j^6 \,|\, e_i^P, e_j^6\rangle}{\langle p_i^P, p_j^6 \,|\, p_i^P, p_j^6\rangle}$$

3.a.)

$$-\tilde{V}_\alpha \tilde{V}^\alpha = 1 \Rightarrow -(-1,0,0,0)\begin{pmatrix} V^0 \\ V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow V^0 + 0V^1 + 0V^2 + 0V^3 = 1 \Rightarrow V^0 = 1$$

$$\tilde{K}_\alpha \tilde{V}^\alpha = 0 \Rightarrow (0,1,0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix} = V^1 = 0$$

$$\tilde{L}_\alpha \tilde{V}^\alpha = 0 \Rightarrow (0,0,r,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix} = rV^2 = 0 \Rightarrow V^2 = 0$$

$$\tilde{S}_\alpha \tilde{V}^\alpha = 0 \Rightarrow (0,0,0,r\operatorname{sen}\theta)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ V^3 \end{pmatrix} = r\operatorname{sen}\theta\, V^3 = 0 \Rightarrow V^3 = 0$$

$$\tilde{V}^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{V}_\alpha \tilde{K}^\alpha = (-1,0,0,0)\begin{pmatrix} K^0 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = -K^0 = 0$$

$$\tilde{K}_\alpha \tilde{K}^\alpha = (0,1,0,0)\begin{pmatrix} 0 \\ K^1 \\ K^2 \\ K^3 \end{pmatrix} = K^1 = 1$$

$$\tilde{L}_\alpha \tilde{K}^\alpha = (0,0,r,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ K^2 \\ K^3 \end{pmatrix} = rK^2 = 0 \Rightarrow K^2 = 0$$

$$\tilde{S}_\alpha \tilde{K}^\alpha = (0,0,0,r\operatorname{sen}\theta)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ K^3 \end{pmatrix} = K^3 r\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow K^3 = 0$$

$$\tilde{K}^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_\alpha l^\alpha = (-1,0,0,0)\begin{pmatrix} l^0 \\ l^1 \\ l^2 \\ l^3 \end{pmatrix} = -l^0 = 0$$

$$\tilde{r}_\alpha \tilde{l}^\alpha = (0,1,0,0)\begin{pmatrix} 0 \\ l^1 \\ l^2 \\ l^3 \end{pmatrix} = l^1 = 0$$

$$\tilde{l}_\alpha \tilde{l}^\alpha = (0,0,r,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l^2 \\ l^3 \end{pmatrix} = r l^2 = 1 \Rightarrow l^2 = r^{-1}$$

$$\tilde{s}_\alpha \tilde{l}^\alpha = (0,0,0,r\sin\theta)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/r \\ l^3 \end{pmatrix} = r\sin\theta\, l^3 = 0 \Rightarrow l^3 = 0$$

$$\tilde{l}^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_\alpha \tilde{s}^\alpha = (-1,0,0,0)\begin{pmatrix} s^0 \\ s^1 \\ s^2 \\ s^3 \end{pmatrix} = -s^0 = 0$$

$$\tilde{r}_\alpha \tilde{s}^\alpha = (0,1,0,0)\begin{pmatrix} 0 \\ s^1 \\ s^2 \\ s^3 \end{pmatrix} = s^1 = 0$$

$$\tilde{l}_\alpha \tilde{s}^\alpha = (0,0,r,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s^2 \\ s^3 \end{pmatrix} = r s^2 = 0 \Rightarrow s^2 = 0$$

$$\tilde{s}_\alpha \tilde{s}^\alpha = (0,0,0,r\sin\theta)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s^2 \\ s^3 \end{pmatrix} \Rightarrow s^3 = 1/r\sin\theta$$

$$\tilde{s}^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r\sin\theta} \end{pmatrix}$$

Powered by CamScanner

3.b.) $a^{\alpha} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{a}_0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{a}_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{a}_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/r \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{a}_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2/r \\ \tilde{a}_3/r\,\text{sen}\,\theta \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\hat{a}_0 = 5$ $\quad \hat{a}_2 = 2r$

$\hat{a}_1 = 3$ $\quad \tilde{a}_3 = r\,\text{sen}\,\theta$

3.c.)

$v^{\alpha} = (v^0, v^1, v^2, v^3) = (1, 0, 0, 0)$

Entonces,

$F_{\mu\alpha} v^{\mu} v^{\alpha} = F_{00} v^0 v^0 = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$

$k^{\alpha} = (k^0, k^1, k^2, k^3) = (0, 1, 0, 0)$

Entonces,

$F_{\mu\alpha} k^{\mu} k^{\alpha} = F_{11} k^1 k^1 = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$

$l^{\alpha} = (l^0, l^1, l^2, l^3) = (0, 0, 1, 0)$

Entonces,

$F_{\mu\alpha} l^{\mu} l^{\alpha} = F_{22} l^2 l^2 = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$

$s^{\alpha} = (s^0, s^1, s^2, s^3) = (0, 0, 0, 1)$

Entonces,

$F_{\mu\alpha} s^{\mu} s^{\alpha} = F_{33} s^3 s^3 = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$

Así mismo,

$F_{\mu\alpha} v^{\mu} k^{\alpha} = F_{01} v^0 k^1 = E^x \cdot 1 \cdot 1 = E^x$

$F_{\mu\alpha} v^{\mu} l^{\alpha} = F_{02} v^0 l^2 = E^y \cdot 1 \cdot 1 = E^y$

$F_{\mu\alpha} v^{\mu} s^{\alpha} = F_{03} v^0 s^3 = E^z \cdot 1 \cdot 1 = E^z$

$F_{\mu\alpha} k^{\mu} v^{\alpha} = F_{10} k^1 v^0 = -E^x \cdot 1 \cdot 1 = -E^x$

$F_{\mu\alpha} k^{\mu} l^{\alpha} = F_{12} k^1 l^2 = -B^z \cdot 1 \cdot 1 = -B^z$

$F_{\mu\alpha} k^{\mu} s^{\alpha} = F_{13} k^1 s^3 = B^y \cdot 1 \cdot 1 = B^y$

$F_{\mu\alpha} l^{\mu} v^{\alpha} = F_{20} l^2 v^0 = -E^y \cdot 1 \cdot 1 = -E^y$

$F_{\mu\alpha} l^{\mu} k^{\alpha} = F_{21} l^2 k^1 = B^z \cdot 1 \cdot 1 = B^z$

$F_{\mu\alpha} l^{\mu} s^{\alpha} = F_{23} l^2 s^3 = -B^x \cdot 1 \cdot 1 = -B^x$

$F_{\mu\alpha} s^{\mu} v^{\alpha} = F_{30} s^3 v^0 = -E^z \cdot 1 \cdot 1 = -E^z$

$F_{\mu\alpha} s^{\mu} k^{\alpha} = F_{31} s^3 k^1 = B^y \cdot 1 \cdot 1 = B^y$

$F_{\mu\alpha} s^{\mu} l^{\alpha} = F_{32} s^3 l^2 = B^x \cdot 1 \cdot 1 = B^x$