Sección 2.1.6

5.)

a) Tabla de multiplicación para $G_4 = \{I, R_i, R_j, X_k\}$

	I	R_i	R_j	X_k
I	I	R_i	R_j	X_k
R_i	R_i	R_j	I	X_k
R_j	R_j	I	R_i	X_k
X_k	X_k	X_k	X_k	I

b) Muestre que el conjunto forma un grupo.
Basándonos en la tabla de multiplicación podemos decir que:
① La concatenación de dos operaciones del conjunto es una operación del mismo
② La concatenación de estas operaciones es asociativa
③ Existe un elemento neutro, que en este caso es I
④ Para cada elemento existe su opuesto
- $(I, I) = I$
- $(R_i, R_j) = I$
- $(R_j, R_i) = I$
- $(X_k, X_k) = I$

⑤ La concatenación es conmutativa, por lo que se dice que el grupo G_4 es abeliano.

c) Muestre que $\{I, R_i, R_j\}$ es un subgrupo cíclico de orden 3 y que $\{I, X_k\}$ forma un subgrupo cíclico de orden 2.

- $\{I, R_i, R_j\}$

Tabla de multiplicación:

	I	R_i	R_j
I	I	R_i	R_j
R_i	R_i	R_j	I
R_j	R_j	I	R_i

① Es cerrado bajo la concatenación
② Es asociativo en la concatenación
③ Existe un elemento neutro (I)
④ Cada elemento tiene un inverso:
$(I, I) = I$
$(R_i, R_j) = I$
$(R_j, R_i) = I$

Por tanto el conjunto $\{I, R_i, R_j\}$ es un grupo, más específicamente un subgrupo cíclico de G_4 (de orden 3)

- $\{I, X_k\}$

Tabla de multiplicación

	I	X_k
I	I	X_k
X_k	X_k	I

① Es cerrado bajo la concatenación
② Es asociativo en la concatenación
③ Existe el elemento neutro (I)
④ Cada elemento tiene su inverso
$(I, I) = I$
$(X_k, X_k) = I$

Así, $\{I, X_1\}$ también forma un subgrupo de G_6 [illegible], ¿Cuál es la orden 2?

4) Considere las siguientes matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Muestre que forman un grupo con la operación multiplicación de matrices y que este grupo es isomorfo a G_6.

- Tabla de multiplicación

$\times$	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

Estas matrices sí forman un grupo:

i) Es cerrado bajo la multiplicación de matrices.
ii) La multiplicación de matrices es asociativa en este grupo.
iii) Existe un elemento identidad: I
iv) Cada elemento tiene inverso:
$I \cdot I = I$
$A \cdot B = I$
$B \cdot A = I$
$C \cdot C = I$
$D \cdot D = I$
$E \cdot E = I$
v) En este grupo la multiplicación de matrices no es conmutativa, por tanto, es un grupo abeliano.

Es isomorfo a G_6 ya que al comparar las tablas de multiplicación y ordenar los elementos apropiadamente, son iguales.

5) Considere el grupo de permutaciones de 3 objetos y la operación composición. ¿Es este grupo isomorfo a G_6?

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_0	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	P_1	P_0	P_3	P_2	P_5	P_4
P_2	P_2	P_4	P_0	P_5	P_1	P_3
P_3	P_3	P_5	P_1	P_4	P_0	P_2
P_4	P_4	P_2	P_5	P_0	P_3	P_1
P_5	P_5	P_3	P_4	P_1	P_2	P_0

Que igual que en el punto anterior las tablas debidamente ordenadas son iguales, por tanto, G_6 es isomorfo a P^3.

f.)

Las operaciones simetría que dejan invariante un triángulo isósceles es solo una, que es la que se realiza reflexión por eje, el eje de simetría del respectivo triángulo, vamos a representarlo por S. Que en conjunto con la identidad (I) forman un grupo.

	I	S
I	I	S
S	S	I

(1) Es cerrado bajo la multiplicación
(2) Es asociativo
(3) Tiene elemento identidad I
(4) Cada elemento tiene su inverso
$(I)(I) = I$
$(S)(S) = I$
(5) También es conmutativo

Si el triángulo es escaleno no posee ejes de simetría, por lo que no existe tal cosa como "operaciones simetría que dejan invariante un triángulo escaleno".

10.) Sea P_n el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales

$|P_n\rangle \Rightarrow P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = a_i x^i$

a) Demostrar que P_n es un espacio vectorial

(1) Cerradura en la suma:

Sean $P_n(x)_a, P_n(x)_b \in P_n(x)$ donde $P_n(x)_a = a_i x^i$ y $P_n(x)_b = b_i x^i$

$P_n(x)_a + P_n(x)_b = a_i x^i + b_i x^i = (a_i + b_i) x^i$

como $a_i, b_i \in \mathbb{R} \Rightarrow (a_i + b_i) = c_i \in \mathbb{R}$

Entonces,

$P_n(x)_a + P_n(x)_b = (a_i + b_i) x^i = c_i x^i$ donde $c_i x^i \in P_n(x)$

(2) Conmutatividad

Sean $P_n(x)_a, P_n(x)_b \in P_n(x)$

$P_n(x)_a + P_n(x)_b = a_i x^i + b_i x^i = (a_i + b_i) x^i$

Como la suma de reales es conmutativa $a_i + b_i = b_i + a_i$, entonces

$P_n(x)_a + P_n(x)_b = (a_i + b_i) x^i = (b_i + a_i) x^i = b_i x^i + a_i x^i = P_n(x)_b + P_n(x)_a$

(3) Asociatividad

Sean $P_n(x)_a, P_n(x)_b, P_n(x)_c \in P_n(x)$

$(P_n(x)_a + P_n(x)_b) + P_n(x)_c = (a_i x^i + b_i x^i) + c_i x^i = (a_i + b_i) x^i + c_i x^i$

$(P_n(x)_a + P_n(x)_b) + P_n(x)_c = (a_0 + b_0)x^0 + c_0 x^0 = [(a_0 + b_0) + c_0]x^0$

Como la suma de reales es asociativa $(a_0 + b_0) + c_0 = a_0 + (b_0 + c_0)$, entonces

$(P_n(x)_a + P_n(x)_b) + P_n(x)_c = [(a_0 + b_0) + c_0]x^0 = [a_0 + (b_0 + c_0)]x^0 = a_0 x^0 + (b_0 x^0 + c_0 x^0)$

$[P_n(x)_a + P_n(x)_b] + P_n(x)_c = a_0 x^0 + (b_0 x^0 + c_0 x^0) = P_n(x)_a + (P_n(x)_b + P_n(x)_c)$

④ Elemento nulo

Sean $P_n(x)_a = a_0 x^0$ y $P_n(x)_0 = 0x^0 \in P_n(x)$

$P_n(x)_a + P_n(x)_0 = a_0 x^0 + 0x^0 = (a_0 + 0)x^0 = a_0 x^0 = P_n(x)_a$

⑤ Elemento inverso

Sean $P_n(x)_a, P_n(x)_b, P_n(x)_0 \in P_n(x)$

$P_n(x)_a + P_n(x)_b = P_n(x)_0 \Rightarrow a_0 x^0 + b_0 x^0 = 0x^0 \Rightarrow (a_0 + b_0)x^0 = 0x^0 \Rightarrow a_0 + b_0 = 0$

$\Rightarrow b_0 = -a_0 \Rightarrow P_n(x)_b = P_n(x)_a + -P_n(x)_a$

⑥ Cerrado en la multiplicación por escalar

Sean $P_n(x)_a \in P_n(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$\alpha P_n(x)_a = \alpha(a_0 x^0) = \alpha a_0 x^0$

Como $a_0, \alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha \cdot a_0 = b_0 \in \mathbb{R}$

$\alpha P_n(x)_a = \alpha a_0 x^0 = b_0 x^0 \in P_n(x)$

⑦ Producto por escalar distributivo

Sean $P_n(x)_a, P_n(x)_b \in P_n(x)$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha(P_n(x)_a + P_n(x)_b) = \alpha(a_0 x^0 + b_0 x^0) = \alpha(a_0 + b_0)x^0$

Como el producto es distributivo en los reales $\alpha(a_0 + b_0) = \alpha a_0 + \alpha b_0$, entonces

$\alpha(P_n(x)_a + P_n(x)_b) = \alpha(a_0 + b_0)x^0 = (\alpha a_0 + \alpha b_0)x^0 = \alpha a_0 x^0 + \alpha b_0 x^0 = \alpha P_n(x)_a + \alpha P_n(x)_b$

⑧ Producto por suma de escalares es distributivo

Sean $P_n(x)_a \in P_n(x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$(\alpha + \beta)P_n(x)_a = (\alpha + \beta)a_0 x^0 = (\alpha a_0 + \beta a_0)x^0 = \alpha a_0 x^0 + \beta a_0 x^0 = \alpha P_n(x)_a + \beta P_n(x)_a$

⑨ Producto escalar asociativo

Sean $P_n(x)_a \in P_n(x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha(\beta P_n(x)_a) = \alpha(\beta a_i x^i) = \alpha\beta a_i x^i$

Como el producto de escalares es asociativo $\alpha\beta a_i = \alpha(\beta a_i) = (\alpha\beta) a_i$, entonces

$\alpha(\beta P_n(x)_a) = \alpha\beta a_i x^i = (\alpha\beta) a_i x^i = (\alpha\beta) P_n(x)_a$

⑩ Elemento identidad de la multiplicación

Sean $P_n(x)_a \in P_n(x)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha P_n(x)_a = P_n(x)_a \Rightarrow \alpha a_i x^i = a_i x^i \Rightarrow \alpha a_i = a_i \Rightarrow \alpha = 1$

En conclusión $P_n(x)$ es un espacio vectorial.

b) Si los coeficientes a_i son enteros ¿P_n sería un espacio vectorial?

Si se mantiene la operación de multiplicación por un número real $P_n(x)$ con coeficientes a_i enteros no sería espacio vectorial, ya que por ejemplo

Sea $\alpha = \frac{1}{p} \in \mathbb{R}$ $\alpha P_n(x)_a$ no sería siempre un elemento de $P_n(x)$

ya que si a_i/p es racional $P_n(x)_a$ no pertenecerá a $P_n(x)$

c) ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de P_n es un subespacio vectorial?

Ⓘ Polinomio cero y $P_{n-1}(x)$: $O_p \cup P_{n-1}(x)$

- $O_p \in O_p \cup P_{n-1}(x)$
- Sean $P_{n-1}(x)_a, P_{n-1}(x)_b \in O_p \cup P_{n-1}(x)$

$P_{n-1}(x)_a + P_{n-1}(x)_b = a_i x^i + b_i x^i = (a_i + b_i) x^i = c_i x^i \in O_p \cup P_{n-1}(x)$

- Sean $P_{n-1}(x)_a \in O_p \cup P_{n-1}(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha P_{n-1}(x)_a = \alpha a_i x^i = b_i x^i = P_{n-1}(x)_b \in O_p \cup P_{n-1}(x)$

Por lo tanto $O_p \cup P_{n-1}(x)$ es un subespacio vectorial de $P_n(x)$

Ⓘ $O_p \cup P_{[illegible]}(x)$

- $O_p \in O_p \cup P_{2n}(x)$
- Sean $P_{2n}(x)_a, P_{2n}(x)_b \in P_{2n}(x)$

$P_{2n}(x)_a + P_{2n}(x)_b = a_i x^i + b_i x^i = c_i x^i = P_{2n}(x)_c \in P_{2n}(x)$

- Sean $P_{2n}(x)_a \in P_{2n}(x)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha P_{2n}(x)_a = \alpha a_i x^i = b_i x^i = P_{2n}(x)_b \in P_{2n}(x)$

Por tanto $O_p \cup P_{2n}(x)$ es un subespacio de $P_n(x)$

(III) Polinomios que tienen factor x (grado $n \geq 1$) $P_n(x) \mid n \geq 1 \,/\, a_0 = 0$

$P_n(x)_a = a_i x^i \; ; \; a_0 = 0$

- Sean $P_n(x)_a , P_n(x)_b \in P_n(x)$

$P_n(x)_a + P_n(x)_b = a_i x^i + b_i x^i \quad a_0 = b_0 = 0$

$P_n(x)_a + P_n(x)_b = (a_i + b_i) x^i = c_i x^i \quad c_0 = a_0 + b_0 = 0$

$P_n(x)_a + P_n(x)_b = P_n(x)_c \in P_n(x)$ con factor x

- Sean $P_n(x)_a \in P_n(x)$ factor x y $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha P_n(x)_a = \alpha a_i x^i \; ; \; a_0 = \alpha a_0 = b_0 = 0$

$\alpha P_n(x)_a = \alpha a_i x^i = b_i x^i \; ; \; b_0 = 0$

$\alpha P_n(x)_a = P_n(x)_b \in P_n(x)$ factor x

- También $O_p \in P_n(x)$ factor x. En conclusión $P_n(x)$ con x factor es un subespacio vectorial

(IV) Polinomios que tienen $x-1$ como factor $\Rightarrow P_n(1) = 0 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$

$\Rightarrow a_0 = -(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \rightarrow P_n(x) = -(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

$P_n(x) = a_1(x-1) + a_2(x^2-1) + \dots + a_n(x^n-1) = a_i(x^i-1) \; ; \; i > 0$

- Contiene a O_p

- Sean $P_n(x)_a , P_n(x)_b \in P_n(x)$

$P_n(x)_a + P_n(x)_b = a_i(x^i-1) + b_i(x^i-1) = (a_i+b_i)(x^i-1) = c_i(x^i-1) = P_n(x)_c \in P_n(x)$

- Sean $P_n(x)_a \in P_n(x)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha P_n(x)_a = \alpha a_i(x^i-1) = b_i(x^i-1) = P_n(x)_b \in P_n(x)$

En conclusión $P_n(x)$ con factor $x-1$ es un subespacio vectorial de $P_n(x)$

Sección 2.2.4

6.) Cuaterniones

a) Espacio vectorial de cuaterniones

① Cerrado en la suma

Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los cuaterniones y $|a\rangle, |b\rangle \in \mathbb{Q}$, entonces

$|a\rangle + |b\rangle = a^i|q_i\rangle + b^i|q_i\rangle = (a^i + b^i)|q_i\rangle = c^i|q_i\rangle = |c\rangle \in \mathbb{Q}$

② Conmutatividad de la suma

$|a\rangle + |b\rangle = a^i|q_i\rangle + b^i|q_i\rangle = (a^i + b^i)|q_i\rangle = (b^i + a^i)|q_i\rangle = b^i|q_i\rangle + a^i|q_i\rangle = |b\rangle + |a\rangle$

③ Asociatividad de la suma

$(|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle = (a^i|q_i\rangle + b^i|q_i\rangle) + c^i|q_i\rangle = (a^i + b^i)|q_i\rangle + c^i|q_i\rangle = [(a^i + b^i) + c^i]|q_i\rangle$

$= [a^i + (b^i + c^i)]|q_i\rangle = a^i|q_i\rangle + (b^i + c^i)|q_i\rangle = |a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle)$

④ Vector nulo

Si $a^i = 0 \Rightarrow a^i|q_i\rangle = |0\rangle$ tal que $b^i|q_i\rangle + 0|q_i\rangle = (b^i + 0)|q_i\rangle = b^i|q_i\rangle = |b\rangle$

⑤ Inverso aditivo

$a^i|q_i\rangle + b^i|q_i\rangle = 0|q_i\rangle \Rightarrow (a^i + b^i)|q_i\rangle = 0|q_i\rangle \Rightarrow a^i + b^i = 0 \Rightarrow b^i = -a^i$

$\Rightarrow a^i|q_i\rangle + (-a^i)|q_i\rangle = 0|q_i\rangle$ donde $b^i|q_i\rangle = -a^i|q_i\rangle = |-a\rangle \in \mathbb{Q}$

⑥ Cerrado en el producto por escalar

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $|a\rangle \in \mathbb{Q}$

$\alpha|a\rangle = \alpha a^i|q_i\rangle = b^i|q_i\rangle = |b\rangle \in \mathbb{Q}$

⑦ El producto por escalar es distributivo

$\alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \alpha(a^i|q_i\rangle + b^i|q_i\rangle) = \alpha(a^i + b^i)|q_i\rangle = (\alpha a^i + \alpha b^i)|q_i\rangle$

$= \alpha a^i|q_i\rangle + \alpha b^i|q_i\rangle = \alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle$

⑧ Multiplicación por suma de escalares

$(\alpha + \beta)|a\rangle = (\alpha + \beta)a^i|q_i\rangle = (\alpha a^i + \beta a^i)|q_i\rangle = \alpha a^i|q_i\rangle + \beta a^i|q_i\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$

⑨ Asociatividad en la multiplicación de escalares

$\alpha(\beta|a\rangle) = \alpha(\beta a^i|q_i\rangle) = \alpha\beta a^i|q_i\rangle = (\alpha\beta)a^i|q_i\rangle = (\alpha\beta)|a\rangle$

⑩ Elemento identidad de la multiplicación por escalar

$1|a\rangle = 1 \cdot a^i|q_i\rangle = a^i|q_i\rangle = |a\rangle$

b) dados dos cuaterniones cualesquiera $|b\rangle = (b^0, \mathbf{b})$ y $|r\rangle = (r^0, \mathbf{r})$, y si trata de multiplicacion muestre que el producto entre ellos $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ puede representarse como

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle \longleftrightarrow (d^0, \mathbf{d}) = (b^0 r^0 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{r},\ r^0\mathbf{b} + b^0\mathbf{r} + \mathbf{b}\times\mathbf{r})$$

$\lvert q_a\rangle \odot \lvert q_b\rangle$	1	$\lvert q_1\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$\lvert q_3\rangle$
1	1	$\lvert q_1\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$\lvert q_3\rangle$
$\lvert q_1\rangle$	$\lvert q_1\rangle$	-1	$\lvert q_3\rangle$	$-\lvert q_2\rangle$
$\lvert q_2\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$-\lvert q_3\rangle$	-1	$\lvert q_1\rangle$
$\lvert q_3\rangle$	$\lvert q_3\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$-\lvert q_1\rangle$	-1

$\Longrightarrow$

$\lvert b\rangle \odot \lvert r\rangle$	b^0	$b^1\lvert q_1\rangle$	$b^2\lvert q_2\rangle$	$b^3\lvert q_3\rangle$
r^0	$r^0 b^0$	$r^0 b^1\lvert q_1\rangle$	$r^0 b^2\lvert q_2\rangle$	$r^0 b^3\lvert q_3\rangle$
$r^1\lvert q_1\rangle$	$r^1 b^0\lvert q_1\rangle$	$-r^1 b^1$	$r^1 b^2\lvert q_3\rangle$	$-r^1 b^3\lvert q_2\rangle$
$r^2\lvert q_2\rangle$	$r^2 b^0\lvert q_2\rangle$	$-r^2 b^1\lvert q_3\rangle$	$-r^2 b^2$	$r^2 b^3\lvert q_1\rangle$
$r^3\lvert q_3\rangle$	$r^3 b^0\lvert q_3\rangle$	$r^3 b^1\lvert q_2\rangle$	$-r^3 b^2\lvert q_1\rangle$	$-r^3 b^3$

$|d\rangle = r^0 b^0 - r^1 b^1 - r^2 b^2 - r^3 b^3 + r^0 b^1 |q_1\rangle + r^0 b^2 |q_2\rangle + r^0 b^3 |q_3\rangle + b^0 r^1 |q_1\rangle + b^0 r^2 |q_2\rangle + b^0 r^3 |q_3\rangle + r^1 b^2 |q_3\rangle + r^2 b^3 |q_1\rangle$
$+ r^3 b^1 |q_2\rangle - r^1 b^3 |q_2\rangle - r^2 b^1 |q_3\rangle - r^3 b^2 |q_1\rangle$

$|d\rangle = r^0 b^0 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{b}) + r^0 \mathbf{b} + b^0 \mathbf{r} + [illegible]$

$|d\rangle = (r^0 b^0 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{b}),\ r^0\mathbf{b} + b^0\mathbf{r} + \mathbf{b}\times\mathbf{r})$ ✓

c) Ahora considere $|b\rangle = b^\alpha |q_\alpha\rangle$ y $|r\rangle = r^\alpha |q_\alpha\rangle$ compruebe si el producto $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ puede ser siempre escrito de la forma

$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = a|q_0\rangle + S^{(0j)} \delta^0_j |q_j\rangle + A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle$

donde $S^{(0j)} \delta^0_j |q_j\rangle = (S^{0j} \delta^0_j + S^{j0} \delta^0_j) |q_j\rangle$

y $A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle = (A^{jki} b_j r_k - A^{kji} b_j r_k) |q_i\rangle$

Entonces, del punto anterior

$|d\rangle = r^0 b^0 - r^1 b^1 - r^2 b^2 - r^3 b^3 + r^0 b^1 |q_1\rangle + r^0 b^2 |q_2\rangle + r^0 b^3 |q_3\rangle + b^0 r^1 |q_1\rangle + b^0 r^2 |q_2\rangle + b^0 r^3 |q_3\rangle + r^1 b^2 |q_3\rangle + r^2 b^3 |q_1\rangle +$
$r^3 b^1 |q_2\rangle - r^1 b^3 |q_2\rangle - r^2 b^1 |q_3\rangle - r^3 b^2 |q_1\rangle$

- $r^0 b^0 - r^1 b^1 - r^2 b^2 - r^3 b^3 = a \rightarrow a|q_0\rangle$
- $r^0 b^1 |q_1\rangle + r^0 b^2 |q_2\rangle + r^0 b^3 |q_3\rangle + r^1 b^0 |q_1\rangle + r^2 b^0 |q_2\rangle + r^3 b^0 |q_3\rangle = S^{(0j)} |q_j\rangle$
- $r^1 b^2 |q_3\rangle + r^2 b^3 |q_1\rangle + r^3 b^1 |q_2\rangle - r^1 b^3 |q_2\rangle - r^2 b^1 |q_3\rangle - r^3 b^2 |q_1\rangle = [illegible] |q_i\rangle\ \varepsilon_{ijk}$
$= A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle$

$\Rightarrow |d\rangle = a|q_0\rangle + S^{(0j)} |q_j\rangle + A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle = a|q_0\rangle + S^{(0j)} |q_j\rangle + A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle$

d) Identifique a, $S^{(\mu\nu)}$ y $A^{[\mu\nu]}$

$a = r^0 b^0 - r^1 b^1 - r^2 b^2 - r^3 b^3$

$S^{(\mu\nu)} = r^0 b^1 + r^0 b^2 + r^0 b^3 + b^0 r^1 + b^0 r^2 + b^0 r^3$

$A^{[\mu\nu]} = \varepsilon_{ijk}$

Para que $|d\rangle$ sea un cuadrivector no se debe transformar en sí mismo bajo transformaciones de inversión

$|d\rangle$ bajo inversión es $|d\rangle' = (-d^0, -\vec{d}) = (-b^0 r^0 + \vec{b} \cdot \vec{r}, -r^0 \vec{b} - b^0 \vec{r} - \vec{b} \times \vec{r})$

$|d\rangle + |d\rangle' = (d^0, \vec{d}) + (-d^0, -\vec{d}) = (d^0 - d^0, \vec{d} - \vec{d}) = (0, \vec{0}) = 0_e$

En conclusión $|d\rangle = |b\rangle \circledast |r\rangle$ es un vector

e) Compruebe si las matrices de Pauli y la identidad pueden representar la base de los cuaterniones $\{|q_0\rangle, |q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle\}$

$I = \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Estas matrices cumplen la relación general

$\sigma_a \sigma_b = \sigma_0 \delta_{ab} + i \sigma_c \varepsilon_{abc}$

Con i la unidad imaginaria y $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$

Mientras que los cuaterniones siguen la relación general

$q_a q_b = -\delta_{ab} + q_c \varepsilon_{abc}$

A pesar de que las expresiones son similares, no son completamente análogas y por tanto no reproducen una multiplicación análoga

Ahora, consideremos cada matriz de Pauli multiplicada por i y con su índice invertido, es decir, $1 \to 3$, $2 \to 2$, $3 \to 1$. Esto, haciendo $a \mapsto 4-a$, $b \mapsto 4-b$ así:

$i\sigma_{4-a} i\sigma_{4-b} = i^2 (\delta_{4-a,4-b} \sigma_0 + i\sigma_c \varepsilon_{4-a,4-b,c}) = -\sigma_0 \delta_{ab} - i\sigma_c \varepsilon_{4-a,4-b,c}$

Nótese que $\delta_{4-a,4-b} = \delta_{ab}$. Ahora reescribiendo la suma con $c' = 4-c$, entonces

$i\sigma_c \varepsilon_{4-a,4-b,c} = i\sigma_{4-c'} \varepsilon_{4-a,4-b,4-c'}$

donde

$\varepsilon_{4-a,4-b,4-c} = -\varepsilon_{a,b,c'}$

y como c' es un índice mudo, hacemos $c' = c$ para obtener

$i\sigma_{4-a}\, i\sigma_{4-b} = -\sigma_0 \delta_{a,b} + i\sigma_c \varepsilon_{ab,c}$

Esta expresión es totalmente análoga a la del producto de los cuaterniones, donde se puede realizar la respectiva asignación

$1 \leftrightarrow \sigma_0 \quad , \quad |q_a\rangle \leftrightarrow i\sigma_{4-a}$

Por tanto, podemos identificar cualquier cuaternión $|q\rangle = a^0|q_0\rangle + a^1|q_1\rangle + a^2|q_2\rangle + a^3|q_3\rangle$ con una matriz de la forma

$$|q\rangle = a^0\sigma_0 + a^1 i\sigma_3 + a^2 i\sigma_2 + a^3 i\sigma_1$$

- Muestre que las matrices complejas 2×2 del tipo

$$|h\rangle = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$$

pueden ser consideradas como cuaterniones, donde $z = x+iy$ y $w = a+ib$.

$$|h\rangle = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$|h\rangle = x\sigma_0 + iy\sigma_3 + ia\sigma_2 + ib\sigma_1$$

es un cuaternión, porque puede ser expresado como combinación lineal de las matrices de Pauli y la identidad, que ya mencionamos, son análogas a la base de los cuaterniones.

E.) Muestre que una representación posible para la base de cuaterniones son: la matriz identidad, y las matrices 4×4 de la forma:

$$|q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |q_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Realizando la tabla de multiplicación

$|q_1\rangle \times |q_1\rangle = -I \qquad |q_1\rangle \times |q_2\rangle = |q_3\rangle \qquad |q_3\rangle \times |q_1\rangle = |q_2\rangle$

$|q_2\rangle \times |q_2\rangle = -I \qquad |q_1\rangle \times |q_3\rangle = -|q_2\rangle \qquad |q_3\rangle \times |q_2\rangle = -|q_1\rangle$

$|q_3\rangle \times |q_3\rangle = -I \qquad |q_2\rangle \times |q_1\rangle = -|q_3\rangle$

$|I\rangle \times |I\rangle = I \qquad |q_2\rangle \times |q_3\rangle = |q_1\rangle$

Entonces, sintetizando

$\times$	I	$\vert q_1\rangle$	$\vert q_2\rangle$	$\vert q_3\rangle$
I	I	$\vert q_1\rangle$	$\vert q_2\rangle$	$\vert q_3\rangle$
$\vert q_1\rangle$	$\vert q_1\rangle$	$-I$	$-\vert q_3\rangle$	$\vert q_2\rangle$
$\vert q_2\rangle$	$\vert q_2\rangle$	$\vert q_3\rangle$	$-I$	$-\vert q_1\rangle$
$\vert q_3\rangle$	$\vert q_3\rangle$	$-\vert q_2\rangle$	$\vert q_1\rangle$	$-I$

Que es análoga a la tabla de multiplicación de la base de los cuaterniones, por tanto son isomorfos y se puede realizar la siguiente asignación:

$$1 \leftrightarrow I, \quad \hat{i} \leftrightarrow |q_1\rangle, \quad \hat{j} \leftrightarrow |q_2\rangle, \quad \hat{k} \leftrightarrow |q_3\rangle$$

donde $\{1, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ son la base de los cuaterniones, y $\{I, |q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle\}$ las respectivas matrices 4×4.

6.g) $\langle a|b\rangle = |a\rangle^{+} \odot |b\rangle$

* $\langle \bar{a}|a\rangle = |a\rangle^{+} \odot |a\rangle = a^0 q_0 - a^i q_i\rangle \odot a^0 q_0 + a^i q_i\rangle$

$a^0 q_0 - a^i q_i\rangle \odot a^0 q_0 + a^i q_i\rangle = a^0 a^0 + (a^i - a^i q_i) + (a^0\, a^i q_i) - (a^0 a^i q_i\rangle)$

$= a^0 a^0 = (a^0)^2 \geq 0$

* $\langle a|\bar{a}\rangle > 0$ si $|a\rangle \neq 0$

Por tanto, si $\langle a|\bar{a}\rangle = 0$ entonces $|a\rangle = 0$

Esto es falso porque $|a\rangle = 0 + a^i q_i$ cumple a $\langle a|\bar{a}\rangle = 0$ por lo que no es una buena defincíon de producto interno.

6. h) $\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}[\langle \bar{a}|b\rangle - |q_1\rangle \odot \langle \bar{a}|b\rangle \odot |q_1\rangle]$

Al igual que el punto anterior si $|f\rangle = f^0 + f^i|q_i\rangle$ tal que $f^0 \neq 0$. Por tanto, $\langle f|f\rangle = \frac{1}{2}(f^0)^2 \neq 0.$

En conclusión, esta definición del producto interno tampoco es una buena definición.

6 i) $n(|a\rangle) = \||a\rangle\| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^{+} \odot |a\rangle}$

Para un $|b\rangle$:

$n(|b\rangle) = \sqrt{|b\rangle^{+} \odot |b\rangle} = \sqrt{(b^0)^2} = |b^0| \geq 0$

Esta resulta ser una buena definición de norma, equivalente a la norma euclideana.

6. j) $|\bar{a}\rangle = \dfrac{|a\rangle^{+}}{\||a\rangle\|^2} = \dfrac{a^0|q_0\rangle - a^i|q_i\rangle}{(a^0)^2}$ donde $|q_0\rangle = 1$

• del inciso g sabemos que $|a\rangle = a^0 + a^i q_i\rangle$

$\rightarrow |a\rangle \odot |\bar{a}\rangle = 1$ *

$(a^0 + a^i q_i) \odot \left(\dfrac{a^0 - a^i|q_i\rangle}{(a^0)^2}\right) = 1 - \dfrac{a^i}{a^0}|q_i\rangle + \dfrac{a^i}{a_0}|q_i\rangle + \dfrac{(a^i)^2}{(a^0)^2} = 1 + \left(\dfrac{a^i}{a^0}\right)^2 \neq 1$

$|b\rangle = |a\rangle^{+}$

$\rightarrow |\bar{a}\rangle = \dfrac{|a\rangle^{+}}{\||a\rangle\|^2} = \dfrac{1}{a_\alpha^2}|a\rangle^{+}$

$|a\rangle \odot |\bar{a}\rangle = \dfrac{|a\rangle \odot |a\rangle^{+}}{a_\alpha^2} = \dfrac{|b\rangle^{+} \odot |b\rangle}{a_\alpha^2} = \dfrac{b_\alpha^2}{a_\alpha^2} = 1 \rightarrow$ Identidad

5) a. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\sigma_0 \equiv I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a.1) Independencia Lineal

• Supongamos que existe una combinación lineal $a\sigma_0 + b\sigma_1 + c\sigma_2 + d\sigma_3 = 0$ donde a, b, c, d son escalares.

Por tanto, para que $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sean linealmente independientes a, b, c, d deben ser igual a 0.

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al igualar la combinación lineal a cero obtemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a + d = 0 \qquad b - ci = 0$$
$$a - d = 0 \qquad b + ci = 0$$

Despejando a y b:

$$a = -d \qquad b = ci$$
$$a = d \qquad b = -ci$$

Al igualar $a=a$ y $b=b$ nos daremos cuenta que esa igualación es cierta solo si $d = c = 0$.

$$\begin{matrix} a = a \\ d = -d \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b = b \\ ci = -ci \end{matrix} \iff d = c = 0 \Rightarrow a = b = 0$$

Entonces, las matrices de Pauli y la identidad son linealmente independientes porque $a = b = c = d = 0$.

a.2) Generan el espacio

Teniendo en cuenta la forma general de las matrices hermíticas 2x2:

$$\begin{bmatrix} a+d & b-ci \\ b+ci & a-d \end{bmatrix}$$

Podemos asegurar que puede ser escrita en terminos de las matrices de Pauli:

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a+d & b-ci \\ b+ci & a-d \end{bmatrix}$$

Concluimos que cualquier matriz hermítica puede ser expresada por una combinación lineal de las matrices de Pauli.

5.b)

- Ahora vamos a hallar el producto interno para todos los pares de matrices para comprobar que son ortogonales.

$\sigma_0 = \sigma_0^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\sigma_1 = \sigma_1^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \sigma_2^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_3 = \sigma_3^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Notese que las matrices son hermíticas.

- $\langle \sigma_0 | \sigma_1 \rangle \rightleftharpoons Tr(\sigma_0^\dagger | \sigma_1) = Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = Tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$
- $\langle \sigma_0 | \sigma_2 \rangle \rightleftharpoons Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right) = Tr\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0$
- $\langle \sigma_0 | \sigma_3 \rangle \rightleftharpoons Tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$ • $\langle \sigma_1 | \sigma_2 \rangle \rightleftharpoons Tr\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 0$
- $\langle \sigma_1 | \sigma_3 \rangle \rightleftharpoons Tr\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$ • $\langle \sigma_2 | \sigma_3 \rangle \rightleftharpoons Tr\begin{pmatrix} 0 & +i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0$

→ Dado que el producto interno entre todos los pares de matrices, se comprueba que son todos ortogonales.

5.c) Explora si se pueden construir subespacios vectoriales de matrices reales e imaginarias puras.

- Teniendo en cuenta que las matrices de Pauli e identidad son ortogonales, podemos usar diferente combinaciones de ellas para generar subespacios vectoriales.

(son ortogonales y LI)

→ Matrices Reales: Para estos subespacios el valor del escalar c que acompaña la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ será 0.

Podemos generar tres subespacios vectoriales generados solo por una matrix que genera el espacio y es real ($\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3$)

También podemos generar subespacios con combinaciones de estos tres: $\sigma_0 + \sigma_1$, $\sigma_0 + \sigma_3$, $\sigma_1 + \sigma_3$ y $\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_3$.

→ Matrices Imaginarias Puras: Dado que el 0 se puede considerar como un imaginario puro ($b=0$, $bi \to 0$), entonces la matriz nula del espacio vectorial será la misma para los subespacios expuestos a continuación:

Para generar un subespacio de matrices imaginarias puras los escalares a, b y d deben ser 0. Por tanto, el unico subespacio de matrices imaginarias puras es el forma do por la matriz σ_2.