



UNIVERSIDAD DE  
**COSTA RICA**

# MA-1004 Álgebra Lineal

Profesor:

**Dr. Oldemar Rodríguez Rojas**

**CIMPA**

[www.oldemarrodriguez.com](http://www.oldemarrodriguez.com)

[info@oldemarrodriguez.com](mailto:info@oldemarrodriguez.com)

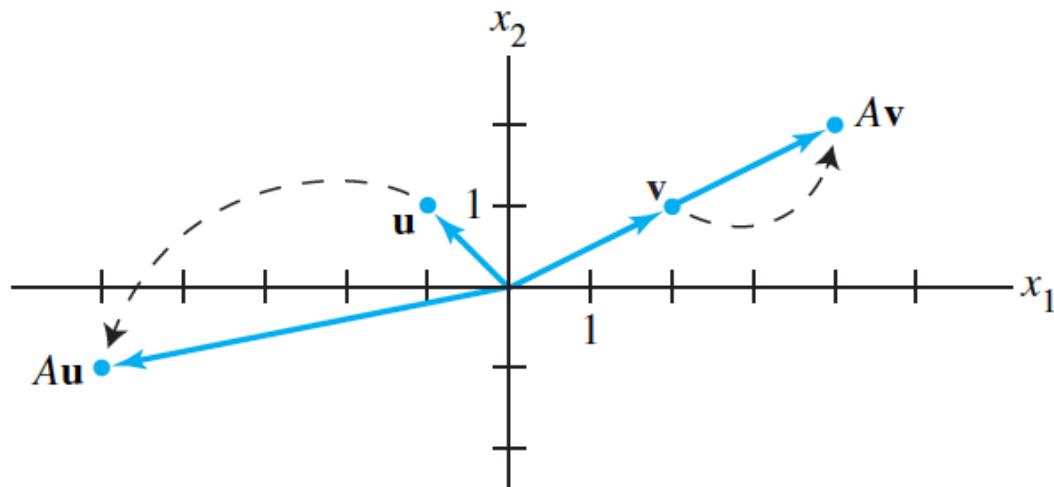


# Capítulo 8

# **VALORES Y VECTORES PROPIOS**

**EJEMPLO 1**

Sean  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , y  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Las imágenes de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  bajo la multiplicación por  $A$  se muestran en la figura 1. En realidad,  $A\mathbf{v}$  es justamente  $2\mathbf{v}$ . Así que  $A$  sólo “estira” o dilata  $\mathbf{v}$ .



**FIGURA 1** Efectos de la multiplicación por  $A$ .

## D Definición 8.1.1

### Valor característico y vector característico

Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$  con componentes reales.<sup>†</sup> El número  $\lambda$  (real o complejo) se denomina **valor característico** de  $A$  si existe un vector *diferente de cero*  $\mathbf{v}$  en  $\mathbb{C}^n$  tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{8.1.2}$$

El vector  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  se denomina **vector característico** de  $A$  correspondiente al **valor característico**  $\lambda$ .

### EJEMPLO 8.1.1

#### Valores característicos y vectores característicos de una matriz de $2 \times 2$

Sea  $A = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$ . Entonces  $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Así,  $\lambda_1 = 1$  es un valor característico de  $A$  con el correspondiente vector característico  $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . De manera similar,  $A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ , de modo que  $\lambda_2 = -2$  es un valor característico de  $A$  con el correspondiente vector característico  $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Como se verá en seguida, éstos son los únicos valores característicos de  $A$ .

## Definición 11.1 (Vector y valor propio)

---

Sea  $A$  una matriz  $n \times n$ , decimos que un número real  $\lambda$  es un **valor propio** de  $A$  si existe una columna  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ , tal que  $Ax = \lambda x$ . El vector  $x$  se llama **vector propio** de  $A$  asociado a  $\lambda$ .

---

**Ejemplo 11.2** Sea  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $x = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$   $t \in \mathbb{R}$ .

Si se efectúa el producto matricial se verifica que

$$Bx = 1x$$

luego  $\forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0$ ,  $x = (0, t, 0)^t$  es un vector propio de  $B$  asociado al valor propio  $\lambda = 1$ .

**EJEMPLO 2** Sean  $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$ , y  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ . ¿Son  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  vectores propios de  $A$ ?

**Solución**

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = -4\mathbf{u}$$

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Entonces  $\mathbf{u}$  es un vector propio correspondiente a un valor propio  $(-4)$ , pero  $\mathbf{v}$  no es un vector propio de  $A$  porque  $A\mathbf{v}$  no es un múltiplo de  $\mathbf{v}$ .

## Definición 11.2 (Subespacio propio o característico)

---

Sea  $\lambda$  un valor propio de  $A$ , el conjunto  $V_\lambda = \{x \mid Ax = \lambda x\}$  se llama **subespacio propio** o espacio característico de  $A$  asociado a  $\lambda$ . Y la dimensión de  $V_\lambda$  se denomina multiplicidad geométrica de  $\lambda$ .

---

Observe que:

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \{x \mid Ax = \lambda x\} \\ &= \{x \mid Ax - \lambda x = 0\} \\ &= \{x \mid (A - \lambda I)x = 0\} \end{aligned}$$

de manera que el subespacio propio de  $A$  asociado al valor propio  $\lambda$  corresponde al núcleo de la matriz  $A - \lambda I$ . Equivalente se muestra que también es el núcleo de  $\lambda I - A$ .

---

**Teorema 11.4** *Las proposiciones que siguen son equivalentes:*

- (a)  $\lambda$  es un valor propio de  $A$ .
  - (b)  $\det(A - \lambda I) = 0$ .
- 

La búsqueda y cálculo de valores propios para una matriz  $A$  se apoya en las equivalencias siguientes:

$$\begin{aligned} & \lambda \text{ es un valor propio de } A \\ \iff & Ax = \lambda x \text{ tiene soluciones no nulas} \\ \iff & (A - \lambda I)x = 0 \text{ tiene infinitas soluciones} \\ \iff & \det(A - \lambda I) = 0. \end{aligned}$$

Con lo que obtenemos el siguiente teorema:

### Ejemplo 11.3 Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -6 \\ -3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Para determinar posibles valores propios de  $A$  debemos resolver la ecuación en la variable  $\lambda$ :  $\det(A - \lambda I) = 0$ , denominada ecuación característica. Lo cual requiere calcular y factorizar el polinomio  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 6 & -6 \\ -3 & -4 - \lambda & 6 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= (2 - \lambda)[(5 - \lambda)(-4 - \lambda) - (-3)6] \\ &= (2 - \lambda)[\lambda^2 - \lambda - 2] \\ &= (2 - \lambda)[(\lambda - 2)(\lambda + 1)] \\ &= -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1). \end{aligned}$$

De esta manera  $\det(A - \lambda I) = 0 \iff -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1) = 0 \iff \lambda = 2 \text{ o } \lambda = -1$ . Y los únicos valores propios de  $A$  son  $-1$  y  $2$ .

## Definición 11.5 (Polinomio característico)

---

Si  $A \in M(n, \mathbb{R})$  se llama **polinomio característico** de  $A$  y se denota  $P_A$ , al polinomio de grado  $n$ :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Si  $P_A(\lambda)$  se factoriza en factores lineales y, eventualmente, algunos factores irreducibles de grado mayor igual que 2 cuyo producto denotamos  $Q(\lambda)$ :

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{n_r} Q(\lambda),$$

se dice que  $n_i$  es la **multiplicidad algebraica** del valor propio  $\lambda_i$ .

---

**T****Teorema 8.1.1**

Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$ . Entonces  $\lambda$  es un valor característico de  $A$  si y sólo si

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \quad (8.1.4)$$

**D****Definición 8.1.2****Ecuación y polinomio característicos**

La ecuación (8.1.4) se denomina la **ecuación característica** de  $A$ ;  $p(\lambda)$  se denomina el **polinomio característico** de  $A$ .

**Ejemplo 11.4** El polinomio característico de la matriz  $A$  dada en el ejemplo 11.3, es:

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$$

Luego los valores propios son:  $\lambda = 2$  y  $\lambda = -1$  con multiplicidad algebraica 2 y 1 respectivamente.

### Observaciones:

- Una matriz  $A$ , de orden  $n$ , tiene a lo sumo  $n$  valores propios ya que el polinomio característico a lo sumo tiene  $n$  ceros.
- Los valores propios de una matriz triangular son los elementos en la diagonal. Nótese que si  $A$  es triangular entonces  $A - \lambda I$  también lo es, de donde se sigue el resultado.
- Las matrices  $A$  y  $C^{-1}AC$  tienen igual polinomio característico y por tanto los mismos valores propios. En efecto:

$$\det(C^{-1}AC - \lambda I) = \det(C^{-1}(A - \lambda I)C) = \det(A - \lambda I).$$



## Procedimiento para calcular valores característicos y vectores característicos

- i) Se encuentra  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ .
- ii) Se encuentran las raíces  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  de  $p(\lambda) = 0$ .
- iii) Se resuelve el sistema homogéneo  $(A - \lambda_i I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , correspondiente a cada valor característico  $\lambda_i$ .

El procedimiento de cálculo de valores y vectores propios se resume así :

**Paso 1:** Calcular y factorizar el polinomio  $\det(A - \lambda I)$ , a efecto de obtener los valores propios de  $A$ . Es decir, resolver la ecuación característica:  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

**Paso 2:** Para cada valor propio  $\lambda$ , hallar una base de  $V_\lambda$ , resolviendo el sistema  $(A - \lambda I)x = 0$ .

**Ejemplo 11.5** Para la matriz  $A$  del ejemplo 11.3, ya conocemos el resultado del paso 1:

$$|A - \lambda I| = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1) = 0 \iff \lambda = 2 \text{ ó } \lambda = -1.$$

Ahora determinamos los espacios característicos asociados a estos valores propios:

$V_{\lambda=2}$ :  $Ax = 2x \iff (A - 2I)x = 0$  y resolviendo este sistema homogéneo:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} f_1 + f_2 \\ \frac{1}{3}f_1 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Así  $x_1 = -2x_2 + 2x_3$  y  $V_{\lambda=2} = \mathcal{C}\ell\{(-2, 1, 0)^t, (2, 0, 1)^t\}$ .

$V_{\lambda=-1}$ :  $Ax = -1x \iff (A + I)x = 0$  y resolviendo:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & -6 & 0 \\ -3 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\dots} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Así  $x_1 = -x_2$  y  $x_3 = 0$  luego  $V_{\lambda=-1} = \mathcal{C}\ell\{(-1, 1, 0)^t\}$ .

**EJEMPLO 4**

Sea  $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ . Un valor propio de  $A$  es 2. Encuentre una base para el espacio propio correspondiente.

**Solución** Forme

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

y reduzca por filas la matriz aumentada para  $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

En este punto se tiene la seguridad de que 2 sí es un valor propio de  $A$  porque la ecuación  $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tiene variables libres. La solución general es

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 \text{ y } x_3 \text{ son libres}$$

El espacio propio, mostrado en la figura 3, es un subespacio bidimensional de  $\mathbb{R}^3$ . Una base es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$



### EJEMPLO 8.1.4 Una matriz de $3 \times 3$ con valores característicos distintos

Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Entonces

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Por lo tanto, los valores característicos de  $A$  son  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -2$  y  $\lambda_3 = 3$ . Para  $\lambda_1 = 1$  se tiene

$$(A - I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Reduciendo renglones se obtiene, sucesivamente,

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Así,  $x_1 = -x_3$ ,  $x_2 = 4x_3$ , un vector característico es  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $E_1 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

Para  $\lambda_2 = -2$

se tiene  $[A - (-2I)]\mathbf{v} = (A + 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , o sea

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto lleva a

$$\begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 15 & 0 & 15 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\quad} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Entonces  $x_2 = -x_1$ ,  $x_3 = -x_1$  y un vector característico es  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Entonces

$$E_{-2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por último, para  $\lambda_3 = 3$  se tiene

$$(A - 3I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 & | & 0 \\ 3 & -1 & -1 & | & 0 \\ 2 & -1 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 & | & 0 \\ 5 & 0 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,  $x_3 = x_1$ ,  $x_2 = 2x_1$  y  $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , de manera que  $E_3 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

## TEOREMA

Los valores propios de una matriz triangular son las entradas de su diagonal principal.

**DEMOSTRACIÓN** En aras de la simplicidad, considere el caso de  $3 \times 3$ . Si  $A$  es triangular superior, entonces  $A - \lambda I$  es de la forma

$$\begin{aligned} A - \lambda I &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**EJEMPLO 8.1.7** Valores característicos de una matriz triangular

Sea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ . Entonces  $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 5 & 6 \\ 0 & -3 - \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(-3 - \lambda)(5 - \lambda)$

con ceros (y valores característicos) 2, -3 y 5.

## Teorema

Si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  son  $k$  valores propios de  $A$ , diferentes entre sí y asociados resp. a los vectores propios  $v_1, v_2, \dots, v_k$  son linealmente independientes.

## Ejemplo

Para  $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ -3 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , encuentre sus autovalores y autovectores, y las correspondientes multiplicidades.



## Definición 8.1.4

### Multiplicidad geométrica

Sea  $\lambda$  un valor característico de la matriz  $A$ ; entonces la **multiplicidad geométrica** de  $\lambda$  es la dimensión del espacio característico correspondiente a  $\lambda$  (que es la nulidad de la matriz  $A - \lambda I$ ). Esto es,

$$\text{Multiplicidad geométrica de } \lambda = \dim E_\lambda = \mu(A - \lambda I)$$



## Teorema 8.1.5

Sea  $\lambda$  un valor característico de  $A$ . Entonces

Multiplicidad geométrica de  $\lambda \leq$  multiplicidad algebraica de  $\lambda$ .

**EJEMPLO 8.1.11 Una matriz de  $3 \times 3$  con un valor característico y sólo un vector característico linealmente independiente**

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix}; \text{ entonces } \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & -5 & -9 \\ 8 & 9 - \lambda & 18 \\ -2 & -3 & -7 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda$$

$-1 = -(\lambda + 1)^3 = 0$ . Así,  $\lambda = -1$  es un valor característico de multiplicidad algebraica 3. Para

$$\text{calcular } E_{-1} \text{ se establece } (A + I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -9 \\ 8 & 10 & 18 \\ -2 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y se reduce por renglones para}$$

obtener, sucesivamente,

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -4 & -5 & -9 & 0 \\ 8 & 10 & 18 & 0 \\ -2 & -3 & -6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ -2 & -3 & -6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

Esto conduce a  $x_2 = -3x_3$  y  $2x_1 = 3x_3$ . Estableciendo  $x_3 = 2$  se obtiene sólo un vector caracte-

rístico linealmente independiente:  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Por lo tanto,  $E_{-1} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ .



## Teorema 8.1.6

Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$ ; entonces  $A$  tiene  $n$  vectores característicos linealmente independientes si y sólo si la multiplicidad geométrica de cada valor característico es igual a su multiplicidad algebraica. En particular,  $A$  tiene  $n$  vectores característicos linealmente independientes si todos los valores característicos son distintos (ya que entonces la multiplicidad algebraica de cada valor característico es 1).



## Definición 11.6 (Matriz diagonalizable)

---

*Una matriz  $A$  es diagonalizable si existe una matriz  $C$  invertible y una matriz  $D$  diagonal tales que*

$$C^{-1}AC = D.$$

---

Esto también significa que  $A$  se factoriza como

$$A = CDC^{-1}.$$



## TEOREMA

### El teorema de la diagonalización

Una matriz  $A$  de  $n \times n$  es diagonalizable si, y sólo si,  $A$  tiene  $n$  vectores propios linealmente independientes.

De hecho,  $A = PDP^{-1}$ , con  $D$  como una matriz diagonal, si, y sólo si, las columnas de  $P$  son  $n$  vectores propios de  $A$  linealmente independientes. En este caso, las entradas diagonales de  $D$  son valores propios de  $A$  que corresponden, respectivamente, a los vectores propios de  $P$ .

**EJEMPLO 3** Diagonalice la siguiente matriz, si es posible.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto es, encuentre una matriz invertible  $P$  y una matriz diagonal  $D$  tales que  $A = PDP^{-1}$ .

**Solución** Se requieren cuatro pasos para implementar la descripción del teorema 5.

**Paso 1. Encontrar los valores propios de  $A$ .** Como se mencionó en la sección 5.2, las mecánicas a seguir en este paso son apropiadas para una computadora cuando la matriz es mayor de  $2 \times 2$ . Para evitar distracciones inútiles, por lo general, el texto proporcionará la información necesaria para cubrir este paso.

En el presente caso, resulta que la ecuación característica contiene un polinomio cúbico al cual se puede factorizar:

$$\begin{aligned}0 &= \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 \\&= -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2\end{aligned}$$

Los valores propios son  $\lambda = 1$  y  $\lambda = -2$ .

**Paso 2. Encontrar tres vectores propios de  $A$  linealmente independientes.** Se necesitan tres vectores porque  $A$  es una matriz de  $3 \times 3$ . Éste es el paso crítico. Si falla, entonces el teorema 5 postula que  $A$  no puede diagonalizarse. El método de la sección 5.1 produce una base para cada espacio propio:

$$\text{Base para } \lambda = 1: \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Base para } \lambda = -2: \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Puede comprobarse que  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  es un conjunto linealmente independiente.

**Paso 3. Estructurar  $P$  a partir de los vectores del paso 2.** El orden de los vectores no tiene importancia. Al usar el orden elegido en el paso 2, forma

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Paso 4. Estructurar  $D$  a partir de los valores propios correspondientes.** En este paso, resulta esencial que el orden de los valores propios corresponda al orden elegido para las columnas de  $P$ . Utilice el valor propio  $\lambda = -2$  dos veces, una para cada uno de los vectores propios correspondientes a  $\lambda = -2$ :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Es recomendable comprobar que  $P$  y  $D$  realmente funcionen. Para evitar calcular  $P^{-1}$ , simplemente verifique si  $AP = PD$ . Esto equivale a  $A = PDP^{-1}$  cuando  $P$  es invertible. (Sin embargo, ¡compruebe que  $P$  sea invertible!) Se calcula

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$PD = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$



---

**Teorema 11.7** Sea  $A \in M(n, \mathbb{IR})$  tal que el polinomio característico se puede factorizar como:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$$

donde  $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  son todos los valores propios distintos de  $A$ , y  $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_r}$  los espacios propios correspondientes. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

- (a) La matriz  $A$  es diagonalizable.
  - (b) Existe una base  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ , para  $\mathbb{IR}^n$ , de vectores propios de  $A$ .
  - (c) Para cada  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , su multiplicidad geométrica es igual a su multiplicidad algebraica. Es decir,  $\dim(V_{\lambda_i}) = n_i$ , para todo  $i = 1, \dots, r$ .
  - (d)  $\dim(V_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(V_{\lambda_r}) = n$ .
  - (e) Todo vector  $x \in \mathbb{IR}^n$  se puede escribir de manera única en la forma  $x = x_1 + \cdots + x_r$ , con  $x_i \in V_{\lambda_i}$ .
-

**Ejemplo 11.6** Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)[(1 - \lambda)(1 - \lambda) - 1] \\ &= -\lambda(\lambda - 2)^2. \end{aligned}$$

Así los valores propios son 2 y 0, y determinando los correspondientes espacios propios (o característicos)  $V_2$  y  $V_0$  tenemos:

$V_2: Ax = 2x \iff (A - 2I)x = 0$  y resolviendo:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\dots} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Luego  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 0$ , de manera que  $V_2 = \mathcal{C}\ell\{(0, 0, 1)^t\}$ .

$V_0: Ax = 0x \iff Ax = 0$  y resolviendo:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\dots} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Entonces  $x_1 = 2x_3$  y  $x_2 = -2x_3$ , luego  $V_0 = \mathcal{C}\ell\{(2, -2, 1)^t\}$ .

De esto tenemos que  $\dim(V_2) = 1$  y  $\dim(V_0) = 1$ , luego por la parte (c) del teorema 11.7, la matriz  $A$  no es diagonalizable.

**Ejemplo 11.7** Para la matriz  $A$  del ejemplo 11.3, en página 330,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -6 \\ -3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

se obtuvo que

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1).$$

Además, en el ejemplo 11.5 se calculó:

$$V_{\lambda=2} = \mathcal{C}\ell\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{y} \quad V_{\lambda=-1} = \mathcal{C}\ell\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Luego es posible elegir una base  $\mathcal{B}$  para  $\mathbb{R}^3$  de vectores propios de  $A$ . Específicamente:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Así se tiene que  $A$  es diagonalizable, es decir, que  $A = CDC^{-1}$  donde

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observe que el orden de las columnas  $C$  se eligió arbitrariamente. Si se cambia este orden, otra elección para  $C$  y  $D$  puede ser:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En ambos casos se comprueba que  $A = CDC^{-1}$  verificando que  $AC = CD$ .



## Ejemplo

Encuentre los autovectores de  $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -6 \\ -3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , los subespacios correspondientes y su dimensión.

---

**Corolario 11.8** *Si una matriz  $A$ ,  $n \times n$ , tiene  $n$  valores propios distintos entonces es diagonalizable.*

---

**Ejemplo 11.8** La matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  tiene como polinomio característico a:

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 1).$$

Por lo tanto  $A$  tiene dos valores propios distintos cuyos espacios característicos tienen dimensión 1, necesariamente. Y por lo tanto  $A$  es diagonalizable.

**EJEMPLO 5** Determine si la siguiente matriz es diagonalizable.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

**Solución** ¡Esto es fácil! Dado que la matriz es triangular, sus valores propios son, evidentemente, 5, 0 y  $-2$ . Puesto que  $A$  es una matriz de  $3 \times 3$  con tres valores propios distintos,  $A$  es diagonalizable.

## Ejemplo

Deduzca que  $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  es diagonalizable.

## Ejercicio

Determine si se pueden diagonalizar, usando solamente el corolario anterior,  $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , y la identidad de orden 3.

## 8.3 Matrices semejantes y diagonalización

En esta sección se describe una relación interesante y útil que se puede cumplir entre dos matrices.

### D Definición 8.3.1

#### Matrices semejantes

Se dice que dos matrices  $A$  y  $B$  de  $n \times n$  son **semejantes** si existe una matriz invertible  $C$  de  $n \times n$  tal que

$$B = C^{-1} AC \tag{8.3.1}$$

### D Definición 8.3.2

#### Matriz diagonalizable

Una matriz  $A$  de  $n \times n$  es **diagonalizable** si existe una matriz diagonal  $D$  tal que  $A$  es semejante a  $D$ .



## Definición 11.9 (Diagonalización ortogonal)

---

*Una matriz  $A$ ,  $n \times n$ , es ortogonalmente diagonalizable si existe una matriz  $C$  orthogonal y una matriz  $D$  diagonal, tales que*

$$C^t AC = D$$

---

---

**Teorema 11.10** *Si  $A \in M(n, \mathbb{R})$  es simétrica, su polinomio característico sólo tiene raíces reales.*

---

---

**Teorema 11.11** *Sea  $A \in M(n, \mathbb{R})$  simétrica y  $\lambda_1, \lambda_2$  valores propios distintos de  $A$  con vectores propios asociados  $v$  y  $u$  respectivamente, entonces  $v$  y  $u$  son ortogonales.*

---

---

**Teorema 11.12** *Sea  $A$  una matriz simétrica, es decir  $A^t = A$ . Entonces existe una base  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$ , ortonormal, formada por vectores propios de  $A$ .*

---

---

**Teorema 11.13**  *$A$  es simétrica si y solo si  $A$  es ortogonalmente diagonalizable.*

---

**EJEMPLO 3**

Diagonalice ortogonalmente la matriz  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ , cuya ecuación característica es

$$0 = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98 = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 2)$$

**Solución** Los cálculos usuales producen bases para los espacios propios:

$$\lambda = 7: \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \lambda = -2: \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aunque  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  son linealmente independientes, no son ortogonales. Recuerde, de la sección 6.2, que la proyección de  $\mathbf{v}_2$  sobre  $\mathbf{v}_1$  es  $\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1$ , y la componente de  $\mathbf{v}_2$  ortogonal a  $\mathbf{v}_1$  es

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-1/2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

Entonces  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{z}_2\}$  es un conjunto ortogonal en el espacio propio para  $\lambda = 7$ . (Observe que  $\mathbf{z}_2$  es una combinación lineal de los vectores propios  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , así que  $\mathbf{z}_2$  está en el espacio propio. Esta estructuración de  $\mathbf{z}_2$  es precisamente el proceso Gram-Schmidt de la sección 6.4.) Puesto que el espacio propio es bidimensional (con bases  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ ), El conjunto ortogonal  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{z}_2\}$  es una *base ortogonal* para el espacio propio, de acuerdo con el teorema de la base. (Vea la sección 2.9 o la 4.5.)

Al normalizar  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{z}_2$  se obtiene la siguiente base ortonormal para el espacio propio con  $\lambda = 7$ :

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \end{bmatrix}$$

Una base ortonormal para el espacio propio con  $\lambda = -2$  es

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\|2\mathbf{v}_3\|} 2\mathbf{v}_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

De acuerdo con el teorema 1,  $\mathbf{u}_3$  es ortogonal a los otros vectores propios  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$ . Por lo tanto  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  es un conjunto ortonormal. Sean

$$P = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} & -2/3 \\ 0 & 4/\sqrt{18} & -1/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Entonces  $P$  diagonaliza ortogonalmente a  $A$ , y  $A = PDP^{-1}$ .



**Ejemplo 11.9** Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Como  $A$  es simétrica,

conocemos que es diagonalizable ortogonalmente. El proceso para determinar la matriz  $C$  ortogonal y la matriz  $D$  diagonal tales que  $A = CDC^t$ , es el mismo que en la diagonalización general, pero ahora con el cuidado de elegir las columnas de  $C$  como una base ortonormal de vectores propios de  $A$ :

Polinomio característico de  $A$ :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & -4 \\ 2 & 4 - \lambda & 2 \\ -4 & 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda + 4)(\lambda - 5)^2 \end{aligned}$$

Los espacios propios  $V_{-4}$  y  $V_5$ :

$V_{-4}$ :  $Ax = -4x \iff (A + 4I)x = 0$  y resolviendo:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\dots} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Entonces  $V_{-4} = \mathcal{C}\ell\{(2, -1, 2)^t\}$ .

$V_5$ : Resolviendo  $(A - 5I)x = 0$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\dots} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Así  $V_5 = \mathcal{C}\ell\{(-1, 0, 1)^t, (1, 2, 0)^t\}$ .

Para la elección de una base de vectores propios ortonormales como columnas de la matriz  $C$  que se busca, se requiere ortonormalizar las bases obtenidas para cada espacio característico. El teorema 11.11 garantiza que la unión de las bases resultantes es una base ortonormal.

Así, una base ortonormal para  $V_{-4}$  es  $\mathcal{B}_1 = \{(2/3, -1/3, 2/3)^t\}$  y para  $V_5$  es  $\mathcal{B}_2 = \{(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})^t, (\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3\sqrt{2}})^t\}$  con lo que obtenemos las siguientes posibles elecciones para  $C$  y  $D$ :

$$C = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Fácilmente se verifica que  $A = CDC^t$  comprobando que  $AC = CD$ .

## Ejemplo

*Diagonalice ortogonalmente, si se puede, la matriz*  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

# Diagonalización de transformaciones lineales

## Definición

Sea  $T$  un operador en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\lambda$  es un valor propio de  $T$  si existe  $v \in \mathbb{R}^n$ , no nulo, tal que  $T(v) = \lambda v$ , y  $v$  es entonces el vector propio de  $T$  asociado a  $\lambda$ .

## Teorema

Para  $\mathcal{B}$  una base de  $\mathbb{R}^n$  y  $T$  un operador de dicho espacio,  $\lambda$  es un autovalor de  $T$  asociado a  $v$  si y solo si  $\lambda$  es un valor propio de  $[T]_{\mathcal{B}}$  asociado a  $x = [v]_{\mathcal{B}}$ .

Sea  $A \in M(n, \mathbb{R})$  una matriz diagonalizable,  $T(v) = Av$ , y  $\mathcal{B}_1$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces claramente  $[T]_{\mathcal{B}_1} = A$ .

Como  $A$  es diagonalizable, se puede escribir como  $C^{-1}AC = D$ , donde ya vimos antes como encontrar  $C$  y  $D$ .

Ahora bien sea  $\mathcal{B}_2$  una base que consiste de autovectores de  $A$ , o sea, la base formada por las columnas de  $C$  en orden. Entonces,

$$[T]_{\mathcal{B}_2} = D.$$

Y la matriz de cambio de base de  $\mathcal{B}_2$  a  $\mathcal{B}_1$  es

$$[I]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = C.$$

Por consiguiente,  $[I]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = C^{-1}$ .

## Definición

*El operador  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diagonalizable si existe una base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $[T]_{\mathcal{B}}$  es diagonal.*

## Teorema

*$T$  es diagonalizable si y solo si existen matrices  $D$ , diagonal, y  $C$  invertible cuyas columnas son base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$  tales que*

$$C^{-1}[T]_{\mathcal{B}_C}C = [T]_{\mathcal{B}} = D,$$

*donde  $\mathcal{B}_C$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .*



## Definición

*Un operador  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es ortogonalmente diagonalizable si existe una base ortonormal  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $[T]_{\mathcal{B}}$  es diagonal,*

Por lo visto en el tema anterior, podremos diagonalizar ortogonalmente un operador si y solo si su representación matricial es simétrica en alguna base.

## Ejemplo

*Diagonalice ortogonalmente, si puede, el siguiente operador de  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^3$  y encuentre la matriz de cambio de base involucrada:*

$$T(x,y,z) = (x-z, y+z, -x+y+2z)$$

## Ejercicio

Para los siguientes operadores analice si se pueden diagonalizar, o diagonalizar ortogonalmente, y realice dicha operación, indicando también la matriz de cambio de base involucrada.

1)  $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  tal que  $T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y)^t$

2)  $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  tal que  $T(x, y) = (x - y, -x)^t$

3)  $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  tal que

$$T(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)^t$$

4)  $T \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$  tal que  $T(x, y, z, w) = (-x, y, -z, -w)^t$

5)  $T \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$  tal que  $T(v) = 0, \forall v \in \mathbb{R}^4$



UNIVERSIDAD DE  
**COSTA RICA**

[www.oldemarrodriguez.com](http://www.oldemarrodriguez.com)

Gracias...