

Report Progetto di Automazione

Roberto Scarponi, Matteo Soccali, Pietro Tognasca, Riccardo Vertucci

12 maggio 2025

1 Introduzione

Il presente report descrive l'analisi dei dati sperimentali e la successiva modellizzazione matematica di un sistema dinamico.

L'obiettivo specifico è determinare una funzione di trasferimento che rappresenti accuratamente la dinamica tra la tensione di ingresso e la velocità di uscita del sistema Quanser QUBE-Servo 2, catturandone il comportamento.

2 Analisi Preliminare dei Dati

I dati di test forniti sono stati inizialmente elaborati utilizzando MATLAB. Sono stati estratti i vettori di ingresso e uscita e sono stati rappresentati graficamente per una prima visualizzazione qualitativa degli andamenti del sistema.

3 Analisi della Risposta allo Scalino Unitario

Per analizzare il sistema, abbiamo inizialmente studiato la sua risposta a un segnale a scalino di ampiezza unitaria, al fine di valutarne qualitativamente le proprietà. Abbiamo quindi estratto i primi 3101 campioni dell'ingresso a scalino e della corrispondente uscita. I relativi grafici sono riportati di seguito:

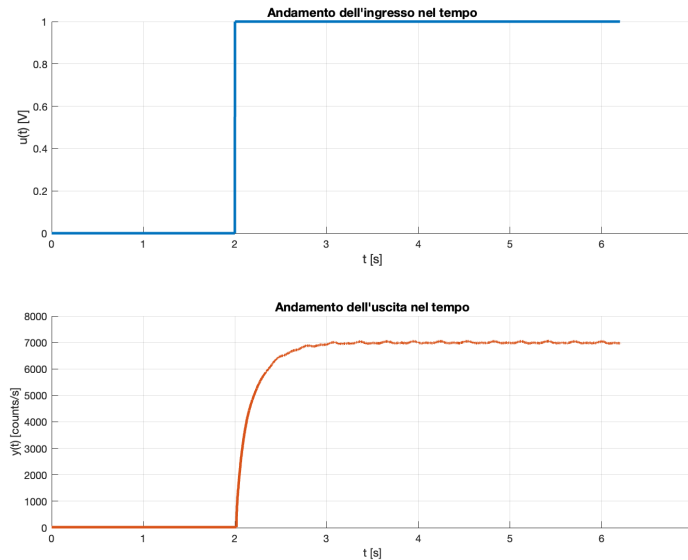


Figura 1: Risposta del sistema all'ingresso a scalino unitario.

3.1 Considerazioni Qualitative

Dall'analisi del grafico in Figura 1 siamo riusciti a trarre le seguenti considerazioni qualitative sul sistema:

- **Stabilità:** Il sistema risulta asintoticamente stabile, poiché la sua risposta converge a un valore di regime finito e costante; ciò implica che tutti i poli del sistema possiedono una parte reale negativa. Dal grafico, il valore di regime può essere approssimato a:

$$y_{\infty} = 7000 \text{ counts/s}$$

- **Tempo di Assestamento:** Dalla figura possiamo approssimare il tempo di assestamento del sistema a circa:

$$T_{\text{ass}} \approx 1\text{s}$$

- **Grado Relativo:** Dall'osservazione della risposta all'ingresso a scalino, si evince che la pendenza iniziale dell'uscita, al tempo $t=2\text{s}$ in cui l'ingresso è applicato, è maggiore di zero. Tale comportamento è indicativo di un sistema con grado relativo pari a uno, ovvero con un numero di poli che eccede di un'unità il numero degli zeri della funzione di trasferimento.
- **Zeri Non Dominanti:** L'analisi della risposta allo scalino rivela l'assenza sia di sovraelongazioni sia di sottoelongazioni. La mancanza di sottoelongazioni esclude la presenza di zeri nel semipiano destro (a parte reale positiva), indicando così che il sistema non è a fase non minima. Parallelamente, l'assenza di sovraelongazioni esclude l'esistenza di uno zero più prossimo all'asse immaginario rispetto al polo dominante.
- **Rumore:** La risposta del sistema presenta, a regime, oscillazioni persistenti di piccola ampiezza attorno al valore medio finale. Tali fluttuazioni residue sono state assimilate a rumore sovrapposto al segnale, potenzialmente derivanti da una combinazione di fattori quali effetti di quantizzazione del sensore/attuatore, disturbi esterni ad alta frequenza, o dinamiche non lineari (come attrito statico o giochi) presenti nel sistema fisico.

4 Identificazione del Modello

4.1 Considerazioni sulla Scelta dell'Ordine

Per analizzare il sistema servo-rotante Quanser QUBE-Servo 2, abbiamo scelto un modello matematico del secondo ordine. Questa decisione deriva dalle proprietà fisiche osservate e dalle precedenti valutazioni qualitative. In primo luogo, l'inerzia meccanica del disco rotante, che si oppone alle variazioni della velocità di rotazione, suggerisce un modello più complesso di quello del primo ordine. Abbiamo inoltre considerato l'attrito, in particolare quello viscoso dovuto alla resistenza dell'aria, che genera una forza proporzionale alla velocità angolare del disco e si oppone al movimento. Anche le caratteristiche del motore a corrente continua – in particolare la conversione della tensione elettrica in movimento, la dinamica elettrica e meccanica e la forza contro-elettromotrice – incidono sul comportamento del sistema. Tenendo conto di inerzia, attrito viscoso e peculiarità del motore, abbiamo quindi concluso che un modello del secondo ordine, caratterizzato da due poli e uno zero (dato il grado relativo unitario osservato), sia il più adeguato.

4.2 Prima stima della Funzione di Trasferimento

Utilizzando il pacchetto System Identification Toolbox di MATLAB, abbiamo inizialmente stimato una funzione di trasferimento $G(s)$ basandoci esclusivamente sui dati relativi allo scalino di ampiezza unitaria, partendo dal vettore di ingresso precedentemente estratto e ipotizzando la presenza di due poli e uno zero coerente alle considerazioni appena fatte.

La funzione di trasferimento ottenuta è la seguente:

$$F(s) = (7.0 \times 10^3) \frac{1 + 0.1574s}{(1 + 0.0849s)(1 + 0.2503s)} \quad (1)$$

La funzione espressa esplicitando le costanti di tempo evidenzia come il guadagno e la costante di tempo dominante siano coerenti con le considerazioni qualitative riportate al paragrafo 3.1. Infatti:

$$\mu = 7.0 \times 10^3, \quad \tau_{\max} = \max\{\tau_1 = 0.0849, \tau_2 = 0.2503\} = \tau_2$$

da cui il tempo di assestamento:

$$T_{\text{ass}} = 5 \times \tau_{\max} \approx 5 \times 0.2503 \approx 1.25 \text{ s}$$

Esplicitando invece i poli, abbiamo notato come fossero complessi coniugati ma con uno smorzamento molto elevato tale per cui le oscillazioni decadono rapidamente e il sistema si assesta immediatamente a regime. Di seguito i calcoli di pulsazione naturale e smorzamento, accompagnati dalla visualizzazione grafica dei poli nel piano complesso:

$$P(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 15.71s + 63.88$$

Per confronto ricaviamo:

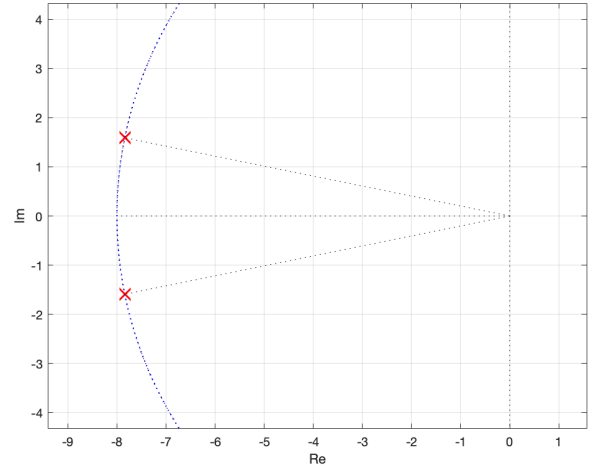
$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= 63.88 \\ 2\zeta\omega_n &= 15.71 \end{aligned}$$

Da cui:

$$\omega_n = \sqrt{63.88} \approx 8 \text{ rad/s}$$

Sostituendo:

$$\zeta \approx 0.982796$$



Tuttavia, nel simulare la risposta di questo sistema all'ingresso complessivo fornito, costituito da una serie di scalini di ampiezza crescente, abbiamo notato come l'approssimazione, ottima per il primo scalino, tende a peggiorare notevolmente con l'aumentare dell'ampiezza del segnale. In particolare, per valutare l'accuratezza del modello abbiamo utilizzato come metrica la Radice dell'Errore Quadratico Medio (Root Mean Square Error) ed abbiamo calcolato un valore pari a: $RMSE = 4,4134 \times 10^3$ che, normalizzato rispetto al range dei valori osservati, corrisponde a:

$$NRMSE = \left(\frac{RMSE}{\max(y_{\text{reale}}) - \min(y_{\text{reale}})} \right) \times 100 \approx 31.8\%$$

Di seguito riportiamo il grafico del confronto tra l'andamento dell'uscita reale e quello del sistema stimato, accompagnato dal grafico dell'errore di approssimazione calcolato come: $\text{err}(t) = |y_{\text{reale}}(t) - y_{\text{stimata}}(t)|$ che mostra chiaramente l'aumentare dell'errore nel tempo come conseguenza dell'aumentare dell'ampiezza dello scalino.

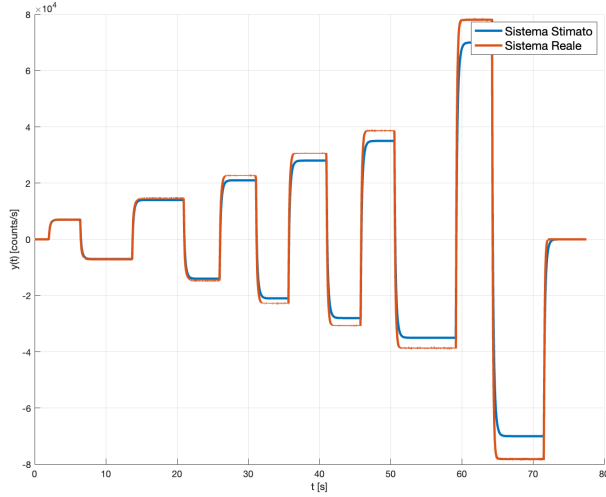


Figura 2: Confronto uscita reale e stimata

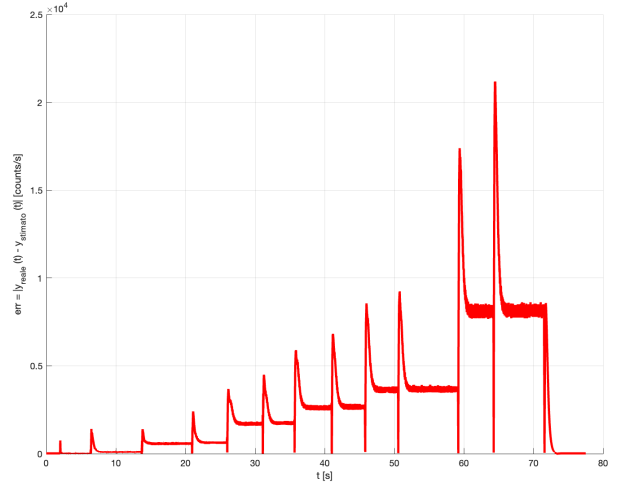


Figura 3: Errore di approssimazione. La linea rossa illustra l'evoluzione di tale errore: si osserva distintamente come i picchi transitori dell'errore, che si manifestano in corrispondenza di ciascun scalino di ampiezza crescente dell'ingresso (visibili nel confronto di Figura 2), aumentino progressivamente in magnitudine. Questo andamento sottolinea come l'accuratezza del modello stimato degradi all'aumentare dell'ampiezza del segnale di ingresso.

Quanto osservato è un forte indicatore di non linearità. Un sistema lineare, per definizione, obbedisce al principio di sovrapposizione; se il sistema fosse veramente lineare la qualità dell'approssimazione dovrebbe rimanere relativamente costante al variare dell'ampiezza dello scalino di ingresso. Il fatto che l'errore peggiori con scalini più ampi suggerisce che i parametri del sistema non sono costanti, ma cambiano in funzione del livello del segnale. Il modello che abbiamo ricavato rappresenta dunque solo una buona approssimazione locale del sistema attorno al punto di lavoro.

Abbiamo ricercato che una delle principali cause di questo comportamento non lineare nel Quanser QUBE-Servo 2 è data dalla presenza di attrito, in particolare dell'attrito coulombiano, che introduce una forza di opposizione approssimativamente costante una volta che il sistema è in moto. La nostra rappresentazione lineare fatica dunque a rappresentare correttamente questo fenomeno.

4.3 Stima Finale Migliorata tramite Validazione su Dataset Completo

Basandoci sulla prima stima della funzione di trasferimento e tenendo conto delle non linearità precedentemente analizzate, abbiamo provato a stimare il modello utilizzando nuovamente il pacchetto System Identification Toolbox e la funzione tfest. In questa seconda stima, è stato fornito come input il dataset comprendente la totalità degli ingressi e delle rispettive uscite, per fare in modo che l'approssimazione avesse un'approssimazione maggiore sui segnali nel loro insieme. Inoltre, al fine di migliorare ulteriormente l'accuratezza del

modello e incrementare la percentuale di approssimazione dei segnali meno fedelmente riprodotti, abbiamo modulato l'importanza dei diversi set di dati nel processo di stima con tfest. Per i segnali la cui approssimazione iniziale risultava inferiore, abbiamo aumentato il loro contributo alla funzione di costo duplicando i relativi dati. Questo ha guidato l'algoritmo a ottimizzare più attentamente la risposta del modello per questi specifici segnali.

Dalla funzione di trasferimento inizialmente ottenuta:

$$G(s) = (7.77 \times 10^3) \frac{1 + 0.12s}{(1 + 0.14s)(1 + 0.11s)} \quad (2)$$

abbiamo ricavato una versione ottimizzata definitiva:

$$G^*(s) = (7.62 \times 10^3) \frac{1 + 0.12s}{(1 + 0.25s)(1 + 0.02s)} \quad (3)$$

che abbiamo poi testato su diversi segnali per la validazione. Di seguito sono riportate due tabelle che confrontano le metriche di Errore Quadratico Medio (Mean Square Error) e la Percentuale di Approssimazione (Fit Percentage) delle due funzioni di trasferimento, valutate su diversi set di dati, e che mostrano come la funzione di trasferimento ottimizzata riduce l'errore ed aumenta la precisione di approssimazione:

Tabella 1: Mean Square Error (MSE)

	Mean Square Error (MSE)				
	Set Onda Quadra	Set Seno 5	Set seno no offset	Set Seno offset	Set Rampa 3
G(s)	0.59	1.77	0.33	0.98	0.55
G*(s)	0.54	1.53	0.29	0.75	0.43

Tabella 2: Fit Percentage

	Fit Percentage				
	Set Onda Quadra	Set Seno 5	Set seno no offset	Set Seno offset	Set Rampa 3
G(s)	89.10	84.62	81.31	73.85	86.20
G*(s)	95.60	90.40	82.18	75.23	87.77

5 Validazione del Modello

Per la validazione del modello ci siamo inizialmente concentrati sulle risposte che presentano una minore accuratezza di approssimazione rispetto alle altre, che si possono identificare dalle tabelle (Tabella 1, Tabella 2). Le risposte, riportate in tabella, del modello stimato relative agli ingressi dei set seni con e senza offset presentano una Fit Percentage peggiore registrata rispetto all'intero set di validazione.

Basandoci nuovamente sulle osservazioni riguardo alla non-linearità fatte al paragrafo 4.2, abbiamo immediatamente attribuito le cause di questo comportamento del sistema stimato all'ampiezza di quei segnali in

ingresso.

Di seguito sono riportati gli ingressi e le relative risposte:

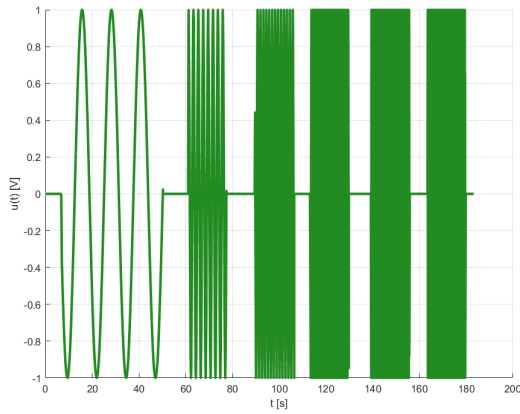


Figura 4: Ingresso sinusoidale senza offset

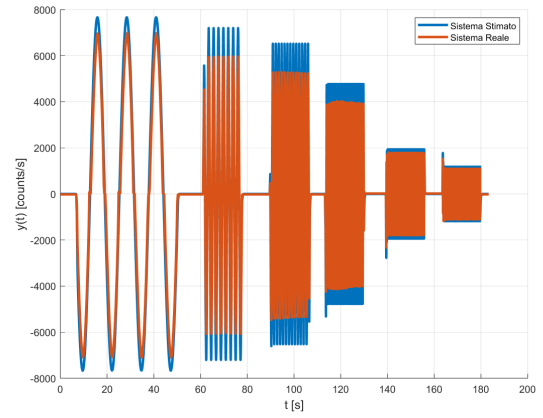


Figura 5: Confronto uscita reale e stimata all'ingresso sinusoidale senza offset

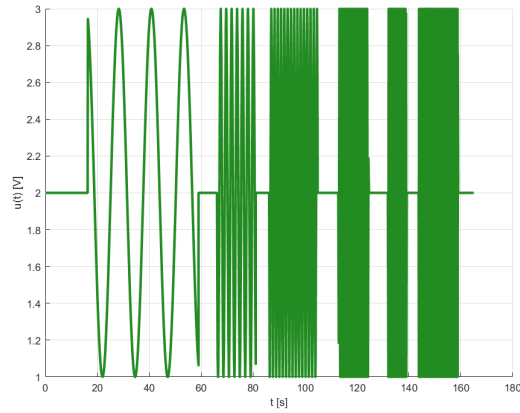


Figura 6: Ingresso sinusoidale con offset

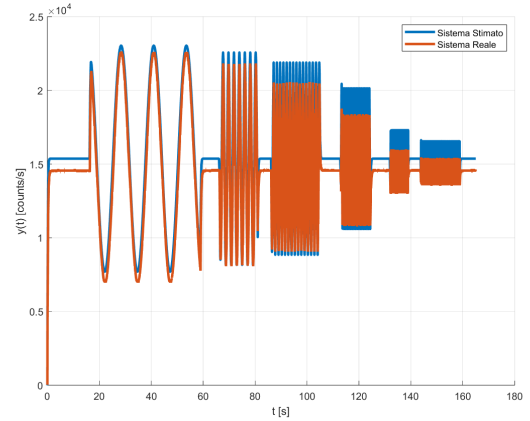


Figura 7: Confronto uscita reale e stimata all'ingresso sinusoidale con offset

Risulta evidente che a segnali di piccola ampiezza (sia in Figura 4 che in Figura 5 l'ampiezza è unitaria) è associata una risposta che non approssima accuratamente quella del sistema reale. A sostegno di questa considerazione inseriamo ulteriori prove della correlazione tra l'accuratezza del sistema stimato e l'ampiezza del segnale in ingresso.

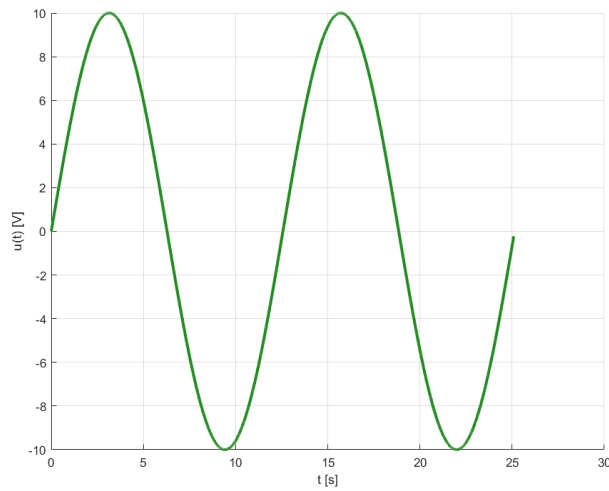


Figura 8: Ingresso sinusoidale 1

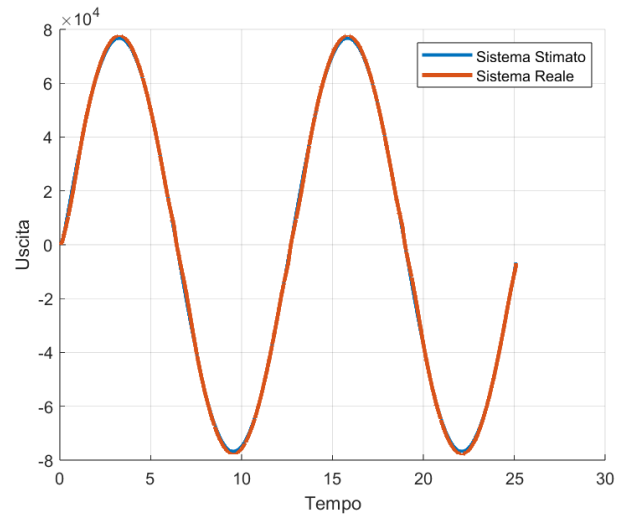


Figura 9: Confronto uscita reale e stimata all'ingresso sinusoidale 1

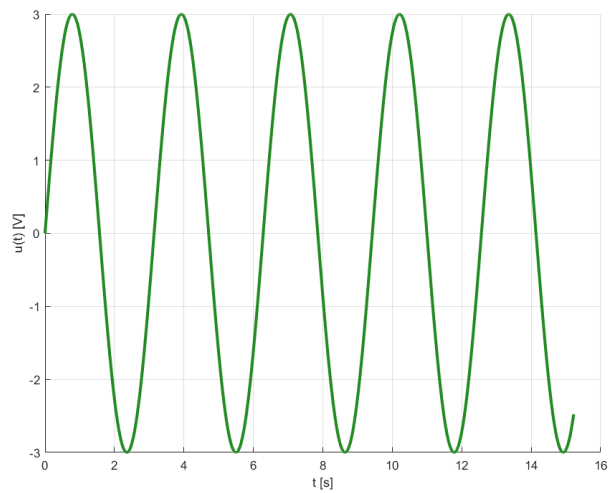


Figura 10: Ingresso sinusoidale 3

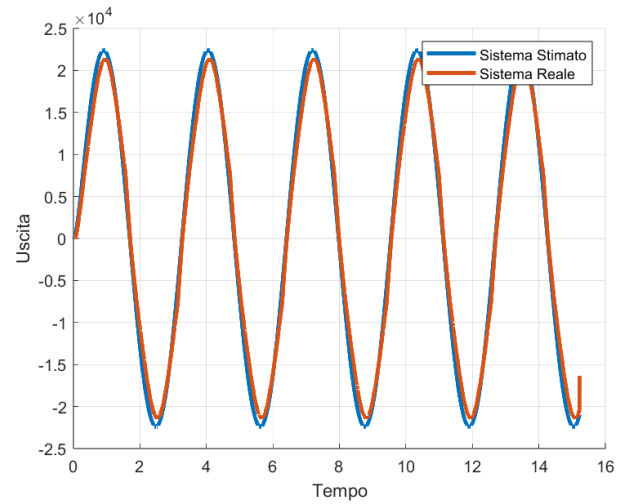


Figura 11: Confronto uscita reale e stimata all'ingresso sinusoidale 3

In conclusione, questa nuova stima del modello risulta essere molto più accurata della precedente, ma risente inevitabilmente delle non linearità presenti nel sistema. In questo caso, il punto di lavoro attorno al quale il sistema è stato linearizzato risulta essere spostato verso ampiezze più elevate, in modo da ridurre globalmente su tutti i segnali l'errore di approssimazione. Nel complesso, il sistema definitivo che abbiamo stimato ha una Fit Percentage complessiva pari al 95.2332% che abbiamo ritenuto più che soddisfacente.

5.1 Cenni Teorici con Diagrammi di Bode

Terminiamo la validazione del modello con un'analisi qualitativa dei Diagrammi di Bode del modulo e della fase. Di seguito sono riportati i grafici e le considerazioni teoriche:

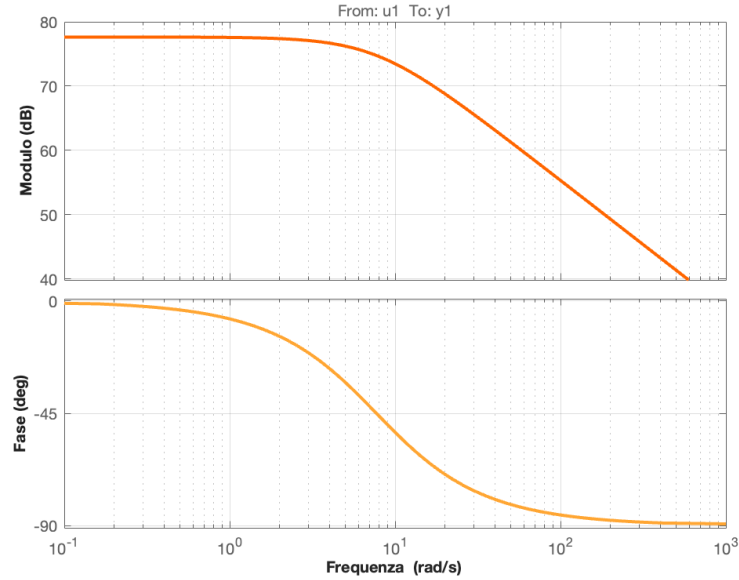


Figura 12: Diagrammi di Bode

L'analisi dei diagrammi di Bode rivela che il sistema in esame è assimilabile a un filtro passa-basso. Come previsto, essendo la funzione di trasferimento di tipo zero (priva di poli e zeri nell'origine), il diagramma di Bode del modulo presenta un tratto iniziale orizzontale, con pendenza nulla, e una fase iniziale anch'essa nulla. A basse frequenze, il comportamento è quindi dominato dal guadagno statico della funzione di trasferimento $G^*(s)$, che risulta pari a circa 78 dB. Successivamente, all'aumentare della pulsazione, il modulo comincia a decrescere per effetto dei poli del sistema. Per pulsazioni ω tendenti all'infinito, la pendenza asintotica finale del diagramma del modulo si attesta a -20 dB/decade, mentre la fase tende a -90° . Questo comportamento ad alte frequenze è coerente con il fatto che la funzione di trasferimento presenta un grado relativo pari a uno.

Il comportamento del sistema, già identificato come passa-basso, trova ulteriore riscontro nelle risposte mostrate nella figura 5 e 7, ottenute applicando gli ingressi sinusoidali riportati rispettivamente nella figura 4 e 6. Questi segnali di ingresso sono entrambi caratterizzati da una pulsazione ω crescente nel tempo, come si evince dalla progressiva diminuzione del loro periodo. In accordo con il teorema della risposta in frequenza e la natura intrinsecamente passa-basso del sistema (per cui il modulo della risposta in frequenza $|G^*(j\omega)|$ si riduce all'aumentare della pulsazione), si osserva che l'ampiezza dei segnali di uscita (figure 5 e 7) viene progressivamente attenuata. Tale attenuazione risulta più marcata per le sezioni dei segnali di ingresso a pulsazione più elevata, illustrando come il sistema filtri in maniera differente le diverse componenti frequenziali, attenuando maggiormente quelle a frequenza superiore.

6 Analisi del Modello in Spazio di Stato

6.1 Simulazione della Risposta a Condizioni Iniziali non nulle

Per esplorare ulteriormente il comportamento del sistema e per analizzare scenari non direttamente osservabili nel legame ingresso-uscita, come la risposta a condizioni iniziali diverse da zero, utilizziamo la funzione ss

(sempre fornita dal pacchetto System Identification) per passare alla rappresentazione del modello in spazio di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -15.71x_1(t) - 7.985x_2(t) + 256u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 8x_1(t) \\ y(t) = 229.1x_1(t) + 237.6x_2(t) \end{cases}$$

Dove:

$$A = \begin{bmatrix} -15.71 & -7.985 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 256 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 229.1 & 237.6 \end{bmatrix} \quad D = [0]$$

Per le successive simulazioni ci siamo inizialmente concentrati sulla risposta del sistema a scalino di ampiezza unitaria; in particolare, abbiamo calcolato il movimento complessivo dell'uscita, variando le condizioni iniziali e verificando il risultato sulla base delle nostre aspettative teoriche. Come ci aspettavamo, infatti, esaurito il transitorio iniziale dovuto al movimento dello stato, la risposta complessiva tende allo stesso valore di regime dell'uscita forzata.

Negli esperimenti riportati sotto, il sistema è stato inizializzato a una prima condizione iniziale

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (1) \text{ e ad una successiva } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -15 \end{bmatrix} \quad (2).$$

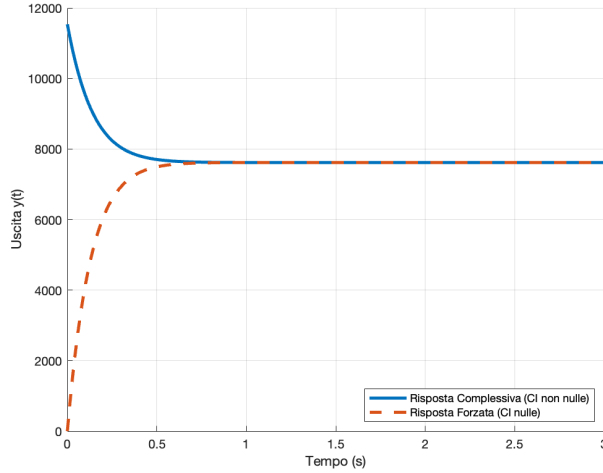


Figura 13: Confronto tra movimento complessivo con C.I. (1) e movimento forzato.

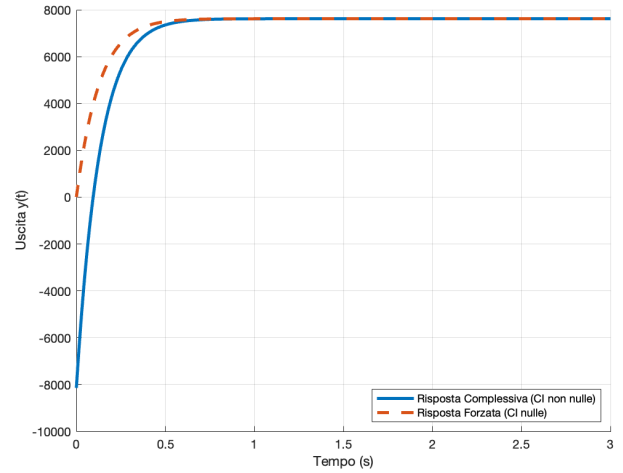


Figura 14: Confronto tra movimento complessivo con C.I. (2) e movimento forzato.

Inoltre, con le stesse perturbazioni delle condizioni iniziali abbiamo simulato la risposta in frequenza del sistema all'ingresso sinusoidale "seno1" fornito tra i dati di test, la cui frequenza è: $f_1 = 12,6$ Hz.

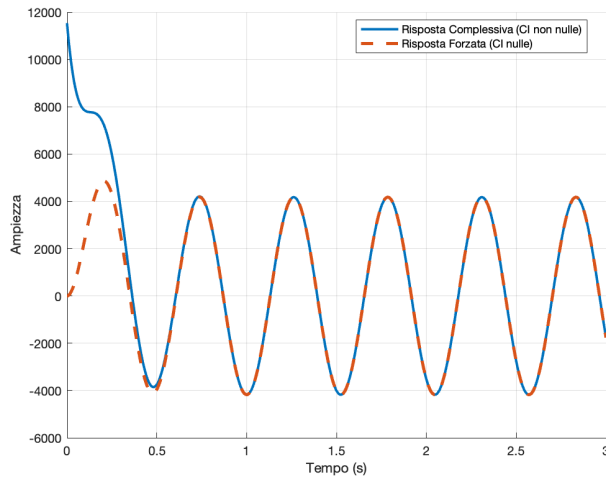


Figura 15: Confronto tra movimento complessivo con C.I. (1) e movimento forzato.

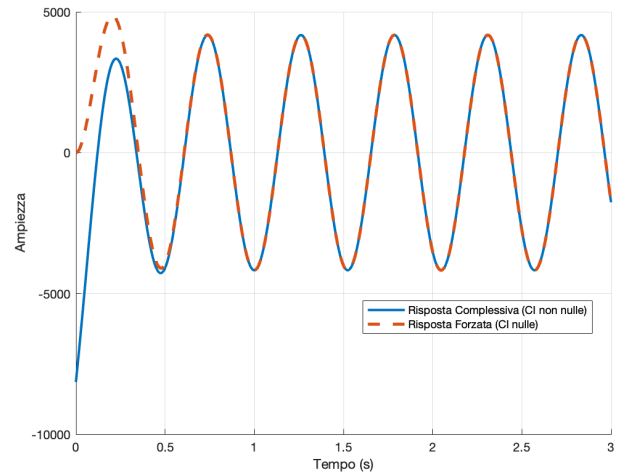


Figura 16: Confronto tra movimento complessivo con C.I. (2) e movimento forzato.

Per finire, abbiamo anche verificato matematicamente che il movimento complessivo dell'uscita può essere calcolato per sovrapposizione come somma del contributo legato al movimento libero del sistema e quello del movimento forzato, utilizzando nuovamente come segnale d'ingresso lo scalino di ampiezza unitaria.

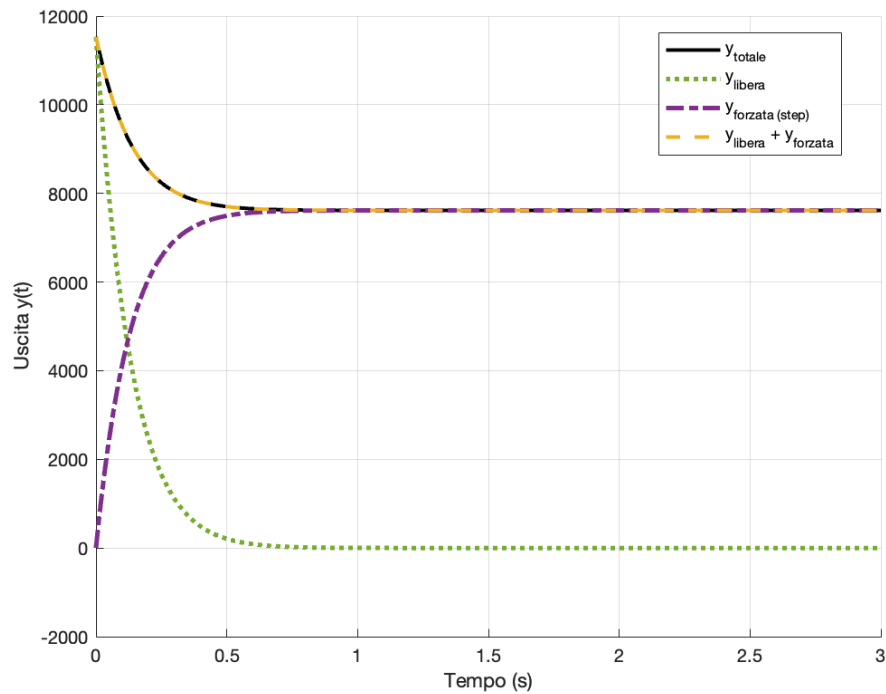


Figura 17: Verifica del Principio di Sovrapposizione degli Effetti.

7 Conclusioni

In conclusione, il processo di modellizzazione del sistema dinamico del Quanser QUBE-Servo 2 ha permesso di identificare con efficacia un modello matematico che rispecchia accuratamente il comportamento osservato sperimentalmente. La strategia di affinamento del modello tramite validazione su dataset estesi e diversificati ha permesso di evidenziare e mitigare le criticità dovute alle intrinseche non linearità del sistema, migliorando significativamente la percentuale di approssimazione. Sebbene permangano delle limitazioni legate alla linearizzazione intorno al punto di lavoro, il modello proposto rappresenta uno strumento affidabile e sufficientemente accurato per future analisi di controllo.