

# ALGEBRA

Este material contiene resúmenes teóricos, de los contenidos mínimos necesarios que el estudiante debe asimilar, también con el rótulo de “Seminarios” se presentan ejercicios a desarrollar y de opciones múltiples, todos ellos con su respectiva respuesta, para su autoevaluación.

Los temas del Texto básico que no se consideren en este material son opcionales para el estudiante y no exigibles al momento de la evaluación.

Para su mejor orientación le presento un índice que lo ayudará a ubicar los temas en esta guía.

## Índice:

Ecuaciones.....	2
Seminario 1.....	11
Práctico complementario.....	15

## ALGEBRA

Las ecuaciones han sido tema de estudio en el ciclo primario y en el secundario, aquí hacemos un breve repaso de ellas. Se advierte que en el texto de la bibliografía básica se asume que el estudiante tiene un amplio manejo sobre el tema, es por ello que si tiene dudas deberá efectuarlas en forma virtual. El presente material contiene un **resumen teórico, ejercicios a resolver** y un **práctico complementario** que incluye distintos tipos de planteos **con solución**.

### ECUACIONES

¿Qué le sugiere esta expresión “  $x + 1 = 3$  ” ?

Posiblemente, piense... “Esta es una igualdad” ó tal vez “Es una igualdad que se satisface únicamente para  $x=2$ .”

- ❑ Así, en esta unidad lo que intentamos estudiar son, **igualdades entre expresiones algebraicas que se verifican para ciertos valores de las letras, denominaremos ecuaciones a dichas igualdades e incógnitas a las letras.**
- ❑ Los valores que satisfacen la ecuación reciben el nombre **de raíces o soluciones** de la misma.

Las ecuaciones son importantes a la hora de resolver problemas, y el éxito de nuestro trabajo dependerá, en principio, de la traducción que hagamos al lenguaje matemático de dicho problema. Veamos como hacerlo, en una situación particular.

El gerente de producción de una pequeña empresa dispone de un presupuesto de \$8000 que desea destinar totalmente a la producción mensual, sabe que los gastos fijos ascienden a \$500 por mes y que el costo de fabricación de cada producto es \$30. Se pregunta, bajo estas condiciones, ¿cuántas unidades como máximo podrá producir por mes?.

El primer paso para resolver un problema es analizar detenidamente la situación, estableciendo cuales son las incógnitas y cuales son datos.

En nuestro caso la incógnita es "la cantidad de unidades a producir por mes", la cual puede ser representada por la letra  $x$ .

$x$  : "cantidad de unidades a producir por mes"

Los valores 30 , 500 y 8000 son datos, ahora debemos traducir al lenguaje algebraico lo que ellos representan.

Como producir una unidad le cuesta \$30, el costo de producción de " $x$ " unidades será:

$30 x$

pero además existe un gasto fijo mensual de \$500, independiente de las cantidades producidas, que habrá que agregar al gasto total.

$$30x + 500$$

Si el gerente dispone de un presupuesto de \$ 8000, quiere decir que el gasto máximo que puede realizar en la producción es igual a \$8000, así la situación planteada puede ser representada algebraicamente por la ecuación:

$$30x + 500 = 8000$$

Hemos obtenido una ecuación, que debido a su estructura, se la denomina lineal.

- **Una ecuación lineal en una variable x es una ecuación donde la incógnita esta elevada a la potencia 1, y en general puede escribirse en la forma:  $ax + b = 0$  donde a y b son constantes y a es distinto de cero.**

El proceso de encontrar las raíces se denomina resolver la ecuación.

La idea es transformar la ecuación, a través de operaciones algebraicas, en otra mas simple de resolver, pero que admite las mismas raíces que la ecuación original.

- En tal sentido diremos que dos ecuaciones son **equivalentes** si y sólo si tienen las misma soluciones.

¿Cómo pasar de una ecuación a otra equivalente?

Para ello podemos valernos de las siguientes operaciones algebraicas:

- 1) Sumar algebraicamente a ambos miembros de la igualdad la misma expresión.
- 2) Multiplicar ambos miembros de la igualdad por un mismo factor no nulo.

Por ejemplo si queremos dar solución al problema planteado por el gerente de la empresa la ecuación a resolver es

$$30x + 500 = 8000$$

Como el objetivo es encontrar el valor de x, parece razonable tratar de "aislar" de algún modo la variable en cuestión. Si sumamos a ambos miembros de la igualdad (-500 )

$$30x + 500 - 500 = 8000 - 500$$

obtenemos una ecuación equivalente, más simple que la original,

$$30x = 7500$$

pero aún no hemos encontrado la incógnita. Podemos entonces simplificar más la ecuación si multiplicamos ambos miembros por 1/30

$$1/30 \cdot 30x = 1/30 \cdot 7500$$

de donde surge que  **$x = 250$**

Así el gerente de la empresa podrá producir, de acuerdo a su presupuesto, 2500 unidades mensuales.



**OBSERVACIÓN:** Por lo general el estudiante para encontrar el valor de  $x$  usa reglitas tales como:

- "Lo que esta sumando en un miembro pasa restando al otro",
- "lo que esta multiplicando pasa dividiendo".

Estas reglitas no son incorrectas, pues en cierta medida constituyen una forma abreviada de las operaciones enunciadas, **el problema está en la forma indiscriminada en que se las aplica.**  
**¡Esté atento!**

Ahora veamos si puede resolver el siguiente problema.



### Actividad 1:

El padre tiene 32 años y el hijo 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre diez veces mayor que la del hijo?

No todos los problemas involucran una sola variable, puede que en el planteo surjan dos, tres o más incógnitas, y cuanto mayor es el número de ellas, mas complicada es la búsqueda de sus soluciones.

- ❑ Dentro de la gama de posibilidades que pueden darse, tenemos el caso de una **ecuación lineal con dos variables  $x$  e  $y$ , la cual tiene la siguiente estructura:**

$$a x + b y = c$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son los parámetros de la ecuación con  $a$  y  $b$  distintos de cero.

Ejemplifiquemos a través de un problema particular.

Supongamos que un criador de animales puede adquirir, para la alimentacion de los mismos, dos tipos de productos A y B, ambos del mismo costo. Si sabe que el alimento A contiene 60 gr. de grasa por kg., mientras que el alimento B contiene 30 gr. por kg. ¿cómo debe combinar los alimentos si desea que el contenido de grasa sea 600 gramos?

Llamemos

“ $x$ ” a la cantidad de alimento A en la mezcla, en kg.

“ $y$ ” a la cantidad de alimento B en la mezcla, en kg.

El aporte de grasa del alimento A es de 60 gr/kg. entonces el aporte de grasa de  $x$  kg será

$$60 x$$

Análogamente el aporte de grasa del alimento B en  $y$  kg será

$$30 y$$

Dado que el aporte total debe ser de 600 gramos, el modelo que describe la situación planteada será

$$60 x + 30 y = 600$$

Estamos en presencia de una sola ecuación con dos incógnitas, veamos cuáles son las soluciones;

Si  $x = 0$  entonces  $y = 20$

Si  $x = 5$  entonces  $y = 10$

Si  $x = 6,5$  entonces  $y = 7$

□ Cada una de ellas se denomina **solución particular**.

Así podríamos encontrar infinitas alternativas de mezcla de los alimentos que contengan un total de 600 gramos de grasa.

Podemos pensar que esta característica, de poseer múltiples soluciones se debe a que existe una única condición y dos incógnitas, de allí que una de ellas puede variar libremente.

□ La **solución general**, se obtiene despejando una de las variables en función de la otra, esto es despejando  $x$  en términos de  $y$  ó  $y$  en términos de  $x$ ,

En nuestro caso, despejemos  $y$

$$60x + 30y = 600$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{600 - 60x}{30} \quad \text{Para todo } x$$

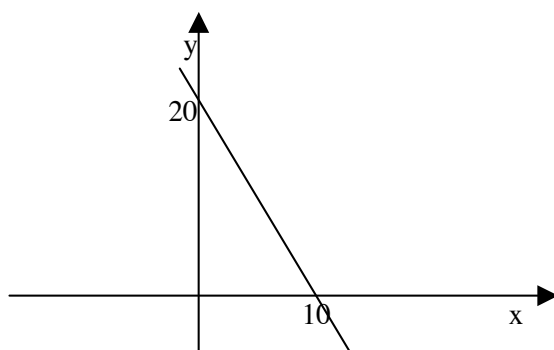
Distribuyendo denominador, la **solución general** será:

$$y = 20 - 2x \quad \text{Para todo } x$$

Es decir, cualquier **solución particular** se obtiene dando a “ $x$ ” un valor arbitrario.

Además se puede observar que si graficamos estas soluciones, o sea, los pares  $(x, y)$  que verifican la ecuación, en un sistema de coordenadas cartesianas las mismas se alínean formando una recta.

Por ejemplo en el caso anterior se obtendría la siguiente solución gráfica



¿Qué ocurriría si en el caso anterior agregamos una nueva restricción?

Por ejemplo, que el criador de animales desee que la mezcla contenga exactamente 15 kg de alimento.

Algebraicamente podemos expresar esta condición a través de la ecuación

$$x + y = 15$$

es decir la cantidad de alimento de tipo A más la cantidad de alimento de tipo B debe ser igual a 15 kg.

Tendremos pues que la solución del problema consistirá en encontrar los valores de x e y que satisfagan simultáneamente ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} 60x + 30y = 600 \\ x + y = 15 \end{cases}$$

Esto es lo que se denomina un sistema de ecuaciones lineales, en este caso de dos ecuaciones con dos incógnitas.

□ **Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** , tiene la estructura

$$\begin{cases} ax + by = f \\ cx + dy = g \end{cases}$$

donde a, b, c, d, e, f, g son constantes.

¿Cómo obtener el conjunto solución?

Para ello se han implementado numerosos métodos: por igualación, reducción, sustitución, etc.

Apliquemos el método por sustitución, el cual consiste en despejar de cualquiera de las ecuaciones, una de las incógnitas, por ejemplo de la segunda ecuación despejemos "y".

Así

$$y = 15 - x$$

verificará la segunda condición. Para que también verifique la primera deberíamos sustituir el valor de y en la primera ecuación por la expresión hallada anteriormente.

Esto es, si teníamos

$$60x + 30y = 600$$

reemplazamos y , de donde resulta

$$60x + 30(15 - x) = 600$$

la cual es una ecuación de primer grado con una incógnita, que sabemos resolver.

Apliquemos propiedad distributiva

$$60x + 30 \cdot 15 - 30x = 600$$

operemos algebraicamente

$$30x + 450 = 600$$

y despejemos.

$$30x = 600 - 450$$

$$x = 150 / 30$$

Entonces

$$x = 5$$

Pero para dar respuesta a nuestro interrogante también debemos encontrar el valor de y.

Como vimos para que se verifique la segunda ecuación "y" debía ser igual a  $15 - x$ , ahora dado que  $x = 5$ , resulta **el valor de y es 10**.

Así, la respuesta al problema planteado será: para que el criador de animales obtenga una mezcla de 15 kg. con un aporte de 600 gramos de grasa deberá usar 5 kg de alimento A y 10 kg de alimento B.

También podemos especificar la solución, de una manera más algebraica diciendo que:

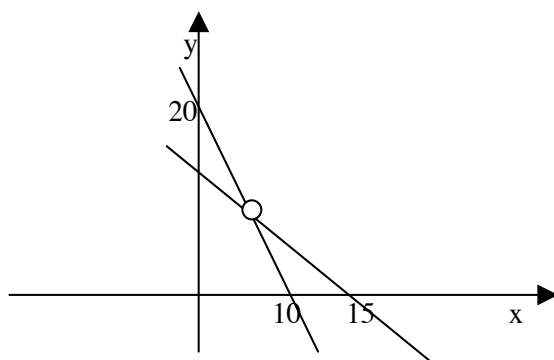
“El par  $(x, y) = (5, 10)$  es la solución del sistema.”

□ Resumamos el **método de sustitución** como sigue:

- Despejamos de cualquiera de las ecuaciones una de las incógnitas.
- En la ecuación restante sustituimos dicha incógnita por su expresión equivalente, obteniendo una ecuación lineal con una incógnita.
- Resolvemos la ecuación, y el valor encontrado se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones originales, buscamos entonces el valor de la incógnita restante.

Ahora agreguemos al gráfico anterior las soluciones de la segunda ecuación.

Como nos interesa los valores de x y de y que verifiquen simultáneamente ambas ecuaciones, la solución al sistema estará dado por la intersección entre ambos conjuntos de soluciones, es decir por el punto de encuentro entre las dos rectas.



En este caso hemos encontrado una única solución a nuestro problema, pero esto no siempre ocurre.

Veamos el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3x + \frac{3}{2}y = 15 \end{cases}$$

Despejemos y de la primera ecuación

$$y = 10 - 2x$$

sustituimos  $y$  en la segunda ecuación por su expresión equivalente .

$$3x + 3/2 (10 - 2x) = 15$$

aplicamos propiedad distributiva

$$3x + 3/2 \cdot 10 - 3/2 \cdot 2x = 15$$

$$3x + 15 - 3x = 15$$

Realizando las operaciones indicadas, resulta

$$0x + 15 = 15$$

**¡Hemos obtenido una identidad!** Esto significa que cualquiera sea el valor de  $x$ , verifica la ecuación propuesta. Toda vez que ello suceda diremos que **el sistema es compatible indeterminado**, compatible porque admite solución e indeterminado pues para cada valor de " $x$ ", " $y$ " asumirá el valor " $10 - 2x$ ", como lo establecía la primera ecuación.

Así la solución como par ordenado en este caso será:

$$(x, y) = (x, 10 - 2x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Finalmente consideremos el siguiente sistema,

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3x + 3/2 y = 20 \end{cases}$$

Es muy parecido al anterior, y los cálculos son bastantes similares

Despejemos  $y$  de la primera ecuación

$$y = 10 - 2x$$

sustituimos  $y$  en la segunda ecuación por su expresión equivalente .

$$3x + 3/2 (10 - 2x) = 20$$

aplicamos propiedad distributiva

$$3x + 3/2 \cdot 10 - 3/2 \cdot 2x = 20$$

$$3x + 15 - 3x = 20$$

Realizando las operaciones indicadas, resulta

$$0x + 15 = 20$$



**¡Llegamos a una proposición que es falsa!** obviamente 15 no es igual a 20, esto significa que no existen x e y que verifiquen simultáneamente las dos ecuaciones propuestas.

Toda vez que ello suceda diremos que el sistema es incompatible, es decir no posee solución.

□ Resumiendo un sistema de ecuaciones lineales será:

**Compatible determinado:** cuando el sistema posea una única solución.

**Compatible indeterminado:** cuando el sistema posea múltiples soluciones.

**Incompatible:** cuando el sistema no admita solución.



### Actividad 2:

Analice como sería la visualización gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, compatible indeterminado y de un sistema incompatible.

### Actividad 3:

Analice como sería la visualización gráfica de un sistema de **tres** ecuaciones lineales con dos incógnitas, compatible determinado, compatible indeterminado y de un sistema incompatible.

- Si tenemos **tres ecuaciones lineales con tres incógnitas** se procede de manera similar teniendo en cuenta que nuestro conjunto solución, si existe, debe estar compuesto por ternas ordenadas. La idea básica es pasar de un sistema de tres ecuaciones a un sistema de dos ecuaciones y luego resolver como antes.

Veamos cuáles son los pasos a seguir, insistiendo en el método de sustitución.

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - z = -2 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

El primer paso es despejar una de las incógnitas de cualquiera de las ecuaciones, en nuestro caso conviene despejar x de la segunda ecuación.

$$x = -2 + z$$

Una vez hecho esto, sustituimos el valor de x por la expresión anterior, en las ecuaciones restantes

$$\begin{cases} 2(-2 + z) - y + z = 3 \\ (-2 + z) + y + z = 6 \end{cases}$$

Operamos algebraicamente en cada ecuación

$$\begin{cases} -4 + 2z - y + z = 3 \\ -2 + z + y + z = 6 \end{cases}$$

obteniendo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} -y + 3z = 7 \\ y + 2z = 8 \end{cases}$$

Resolviendo como antes resulta que  $y = 2$  y  $z = 3$ , pero para encontrar el valor de la solución, falta hallar el valor de  $x$ . Como esta variable había sido despejada anteriormente:

$$x = -2 + z$$

Reemplazamos  $z$  por 3, de donde surge que

$$x = 1$$

Así nuestro sistema es compatible determinado, siendo su única solución la terna

$$(x, y, z) = (1, 2, 3)$$

Al igual que en el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas se podría haber presentado una situación de indeterminación o incompatibilidad.

En todos los casos **los resultados pueden ser verificados** a través de su reemplazo en las ecuaciones originales, este es un punto en que no nos detendremos, pero que sugerimos como forma de autoevaluación.

### Planteo de problemas: (ver casos en Práctico Complementario)

La solución de una ecuación, según vimos, puede o no ser tarea fácil, pero su planteo, en base a los datos de un problema suele ser mucho mas difícil. Seguramente algunos son mas idóneos que otros en esta tarea pero lo cierto es que la práctica puede ayudar a desarrollar una capacidad aceptable para la formulación y la resolución de las ecuaciones.

□ A manera de resumen podemos establecer que en general los pasos que se siguen para resolver un problema son:

- 1) Leer el problema hasta comprender su enunciado.
- 2) Identificar los datos y las incógnitas del problema. Representando estas últimas por letras.
- 3) Expresar algebraicamente la relación existente entre los datos y las incógnitas, a través de una o varias ecuaciones.
- 4) Resolver las ecuaciones planteadas.
- 5) Verificar que los resultados obtenidos satisfagan las ecuaciones planteadas y la pregunta original del problema.

## **SEMINARIO 1: ECUACIONES**

Una “ecuación” es una igualdad algebraica, que se verifica para ciertos valores de las letras, a las cuales se las denomina incógnitas.

El objetivo es entonces encontrar los valores que cumplen la igualdad y a los que denominamos “solución” de la ecuación.

En este seminario partimos de ecuaciones lineales con una sola incógnita, a modo de revisión. Luego se incorpora al análisis varias ecuaciones con dos y tres incógnitas, lo que da origen a sistemas de ecuaciones lineales.

Se pretende rescatar algunas de las técnicas de resolución, ya conocidas por el estudiante, y lograr cierta ductilidad para el planteo de problemas de distinta índole que involucran incógnitas.



Los ejercicios 1, 2 y 3 , posiblemente parezcan algo elementales, pero es necesario que antes de comenzar con actividades más complejas el estudiante haya evacuado todo tipo de dudas en la resolución de ecuaciones con una incógnita.



### **Repaso**

1) Encuentre el valor de x que verifique, en cada caso, la igualdad propuesta:

a)  $3 + x = 7$

b)  $-2 + x = 8$

c)  $x - 3 = -2$

d)  $2x - 1 = 5$

e)  $3x - 2 = -2$

f)  $2x - 2 = 2x$

g)  $3x - 3 = 3(x-1)$

h)  $4x - 1 = 3x$

i)  $20x + 50 = 300$

2) Resolver las siguientes ecuaciones lineales: (verifique el resultado obtenido)

a)  $2x - 3 = x/2$

b)  $2x - 3 = -(x + 3) + x$

c)  $x = \frac{x-1}{2} + 2$

d)  $1 + \frac{x-3}{4} = -2$

e)  $\frac{x-2}{3} + 1 = \frac{2x+1}{3} - 2$

f)  $\frac{3x-1/2}{-2} = \frac{2x-4}{-5} - (1/2)x$

3) Plantee y resuelva los siguientes problemas:

- a) Si se colocan \$ 5000.- a cierta tasa mensual se obtiene en un mes un interés, igual a la quinta parte de lo invertido, ¿cuál es la tasa a la cual se colocó el dinero?  
**(Argentina, año ....?)**
- b) Un pozo común posee \$1500 se reparte entre cierta cantidad de individuos de manera tal que cada uno de ellos obtiene \$45, y aún quedan \$5 por individuo en el fondo común, ¿cuántas personas son los beneficiarios de dicho fondo? **(y porqué no repartieron todo?)**
- c) Cierta evento escolar convoca a 1500 estudiantes, los cuales para una mejor organización se han distribuido de tal manera que cada 45 estudiantes debe existir un tutor. Si se sabe que después de la división sólo un tutor no tiene 45 estudiantes sino 15 **(acomodo)** , ¿cuántos tutores había?
- d) Se le informa a un comerciante que el precio con recargo por pago en cuotas (del 24%) de cierto producto es de \$434.- ¿Puede Ud. decirnos cuál es el precio del producto sin recargo.? **(¡ojo! Su respuesta es válida sólo por el día de hoy. Mañana deberá aplicar el índice de inflación dado por el INDEC, ó el incremento del precio del dólar, ó el del Euro, Ó.....)**
- e) Una persona recibe una herencia que utiliza de la siguiente forma:  $\frac{1}{3}$  de ella lo destina a comprar un automóvil, con el 20% del resto paga sus deudas y lo que queda, \$ 24.000, lo deposita a plazo fijo en un banco argentino **(¡pobre...!)** ¿Cuál es el monto total de la herencia?
- f) Un automovilista recorre 764 km **( es que tiene un auto con equipo de gas)** en tres etapas; en la segunda el recorrido es 124 km más que en la primera, y en la tercera el 20% más que en la primera. ¿Cuántos km recorrió en la primera etapa?
- g) Cierta automovilista ha recorrido la tercera parte de la distancia que separa dos ciudades, y sabe que si recorre  $\frac{1}{4}$  de lo que le resta le quedarán sin recorrer 120 km. ¿Cuál es la distancia que separa ambas ciudades.? **(disculpenló, el automovilista era miope...y no leyó el cartelito en la autopista)**

**Advertencia: El siguiente ítem está fuera de contexto ¿Porqué?**

- h) Se sabe que la base y la altura de un rectángulo son tales la altura mide 2 cm. más que el doble de la base. Si la superficie del rectángulo es de  $40 \text{ cm}^2$  ¿cuánto miden la base y la altura?



Actividades.

4) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones e interprete gráficamente la situación.

a) 
$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 3x = 6 - y \\ \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 5y = 1 \\ \end{cases}$$

$$2x - y = 5$$

$$6x + 2y = 10$$

$$10y - 2 = -x$$

5)

a) ¿Cuál debe ser el valor de k para que el siguiente sistema sea compatible indeterminado?

$$\begin{cases} x = 4 - k y \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

b) ¿Cuál debe ser el valor de m para que el siguiente sistema sea incompatible?

$$\begin{cases} 1/2 x + 5y = 1 \\ 30y + 3x = m \end{cases}$$

6) Plantee y resuelva los siguientes problemas:

- En una clase de Diseño el total de alumnos, varones y mujeres, es de 52. Si el número de alumnos varones es siete más que el doble de mujeres, ¿cuántas mujeres y cuántos varones hay?
- Dos Agrónomos han recorrido distintas distancias. La suma de las distancias recorridas por ambos es igual a  $11/2$  de su diferencia. Además el que recorrió la mayor de las distancias supera en 2000 km. a la recorrida por el otro. ¿Cuántos kilómetros recorrió cada uno de ellos?
- Juan tiene el doble de clientes de los que tiene Pedro, pero si Juan le cede 10 clientes a Pedro se quedará con 6 clientes menos que Pedro. ¿Cuántos clientes tiene cada uno?

7) Resuelva y clasifique los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

$$\text{a) } \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ -x + 3z = 4 \\ -2x + y = -4z + 5 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 2x - 2y - z = -2 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -2x + 2y = 0 \\ 3x + y + 2z = -4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y - 3z = 5 \\ -2x + y - 5z = 2 \\ 2x + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

8) Plantear y resolver los siguientes problemas:

a) La ganancia de una empresa es de \$14.600. La misma se distribuye entre tres socios. El segundo socio recibió el 10% menos que el primero y el tercero  $\frac{3}{4}$  partes más que lo que recibió el primero. ¿Cuánto recibió cada uno.?

b) La suma de tres números es 9, el primero representa el opuesto del doble del segundo y el tercero es una unidad mayor que la suma del primero con el segundo. ¿Cuáles son estos números?

c) De 1350 alumnos que cursaron Álgebra se informó que el número de alumnos regulares supera al de libres en 100 y que la suma de ambos supera en 50 al número de promocionados. ¿Cuántos alumnos resultaron libres, cuántos regulares y cuántos promocionados?

d) En un estadio hay presentes 3.500 personas, las cuales han abonado distinto importe de acuerdo a su ubicación en tres sectores; \$10 por la Platea A, \$ 5 por la Platea B y \$2 por la Popular. Además se nos informó que en la Popular hay un 50% más de personas que en la Platea B. Si la recaudación total fue de \$18.000 ¿cuántas personas había en cada sector

9) Si  $a$  ó  $b$  son distintas de cero el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ -ax - by = d \end{cases}$$

- a) Es incompatible siempre.
- b) Es compatible indeterminado siempre.
- c) Es indeterminado para  $c = d$
- d) Es incompatible para  $c \neq -d$ .
- e) Ninguna de las alternativas anteriores es correcta.

10) El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ -x + 3z = 4 \\ -2x + y = -4z + 5 \end{cases}$$

- a) Es incompatible.
- b) Es compatible indeterminado.
- c) Es compatible determinado con  $x=-1, y=-1, z=1$ .
- d) Es compatible determinado con  $x= 1, y= 1, z=1$ .
- e) Ninguna de las alternativas anteriores es correcta.

## PRÁCTICO COMPLEMENTARIO

*Uno de los objetivos de esta asignatura, y probablemente el más importante, es aportar una técnica para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.*

*Previo a brindar este método puede ser interesante presentar casos de aplicación, que tiendan a amenizar el largo camino que implica contar con los elementos necesarios para que el método sea presentado de manera formal.*

Este práctico complementario tiene por objetivo desarrollar en el estudiante cierta ductilidad en el planteo de ecuaciones y constituye un primer desafío en cuanto a la toma de decisiones con base a herramientas formales y avaladas universalmente.

En las distintas áreas de trabajo, surgen situaciones que involucran incógnitas y que generan ecuaciones, por ello las ecuaciones son importantes a la hora de resolver problemas, y el éxito de nuestro trabajo dependerá en principio de la traducción que hagamos al lenguaje matemático de dicho problema.

Frente a un problema que involucra incógnitas ¿qué pasos habrá que seguir?

- ☐ Lea detenidamente el problema hasta comprender perfectamente la situación.
- ☐ Establezca cuáles son las incógnitas asignándole letras (la descripción de las incógnitas debe ser clara y completa).
- ☐ Rescate del enunciado los datos.
- ☐ Indague las relaciones existentes entre los datos y las incógnitas.
- ☐ Traduzca dichas relaciones al lenguaje algebraico.



Para resolver el siguiente práctico siga las instrucciones del CUADRO anterior.

- 1) Luego de 15 partidos sin perder, un equipo de fútbol tiene 25 puntos, si por cada partido ganado se le asignan 2 puntos y por empate 1 punto, ¿cuántos partidos ganó y cuántos empató?
- 2) José cobró por cierto trabajo el doble de lo que tiene su esposa María ahorrado, pero si le da \$10 a su esposa tendrá \$6 más que el total de María. ¿Cuánto cobró José y cuánto tenía ahorrado María?
- 3) Se quiere obtener 120 kg de masa para pan a partir de la mezcla de tres ingredientes (I, II y III) . Se nos informa que para que el sabor del pan sea aceptable el ingrediente I debe representar el 20% de la mezcla de los ingredientes II y III . Además se debe poner el doble del ingrediente II que del I. ¿Cuántos kg de cada ingrediente deberá contener la mezcla?
- 4) A un grupo de 22 personas se les asignan 70 tareas. Las tareas se han clasificado en dos categorías: A y B. Debido a esto se las ha repartido de modo tal que cada persona del grupo tiene asignado ó 4 tareas de categoría A ó 2 de categoría B, cubriendo así exactamente el total. ¿Cuántas tareas de cada categoría se les ha asignado al grupo?
- 5) En una playa de estacionamiento hay 135 vehículos entre autos, motos y utilitarios. El número de utilitarios supera al de motos en 10 y la suma de ambos supera a la cantidad de autos en 5. ¿Cuántos vehículos de cada tipo hay en la playa de estacionamiento?
- 6) Una aleación de oro, plata y cobre es tal que  $\frac{1}{5}$  de su peso más ocho gramos es de oro;  $\frac{2}{5}$  del total más cuatro gramos es de plata y la cantidad de cobre representa  $\frac{3}{5}$  partes de oro.  
Investigue:
  - a) ¿Cuántos gramos de cada elemento contiene la aleación?
  - b) ¿Cuál es el peso total de la misma?

## 7) Un Problema De producción.

Una compañía elabora tres productos cada una de los cuales debe ser procesado en tres departamentos. La tabla 1 resume el requerimiento de las horas de mano de obra y las unidades de materia prima de cada unidad de producto. Se dispone mensualmente de 1500 horas de mano de obra y 3800 unidades de materia prima. Si se desea una combinación de los tres productos que totalice 500 unidades, determine si existe esta combinación de manera que agote la disponibilidad de los insumos.

Tabla 1

INSUMOS	PROD. A	PROD. B	PROD. C
HORAS DE MANO DE OBRA	3	2	4



UNIDADES DE MATERIA PRIMA	10	8	6
---------------------------	----	---	---

### 8) Otro Problema De producción.

Una compañía elabora tres productos cada una de los cuales debe ser procesado en tres departamentos. La tabla 2 las horas requeridas por unidad de cada producto en cada departamento. Además, las capacidades semanales están dadas en horas por cada departamento. Se pide determinar si hay alguna combinación de los tres productos que agote la capacidad semanal de los tres departamentos.

Tabla 2

Departamento	Prod. 1	Prod. 2	Prod. 3	Hs. disponibles
1	2	3,5	3	1200
2	3	2,5	2	1150
3	4	3	2	1400

### 9) Un Problema De Mezcla.

Una nutricionista está planeando una dieta diaria que consiste en tres tipos de alimento. Conoce el aporte de vitaminas, hierro y proteínas de cada uno de los alimentos, los cuales se dan en la tabla 3. Por experiencia sabe que la dieta completa debe contener 52 unidades de vitamina, 56 unidades de hierro y 34 unidades de proteínas. Determine si existe alguna combinación de los tres alimentos que pueda satisfacer exactamente los requerimientos mínimos de vitaminas, hierro y proteínas.

Tabla 3

Tipo de alimento	Vitaminas	Hierro	Proteínas
1	4	2	1
2	6	8	6
3	3	4	2

- 10) En cierta oficina de gobierno se nos informa que existe una partida de \$400.000 que se debe destinar totalmente a tres tipos de préstamos personales de \$1000, \$2000 y \$3000, respectivamente.

Dada la finalidad social de la iniciativa, se impone que el número de préstamos de \$1000 representen un tercio de la suma del número de préstamos de \$2000 y \$3000. Finalmente se establece que es indispensable que se otorguen en total 200 préstamos personales.

- ¿cuántos préstamos de cada tipo se deberán otorgar?
- Si no existiera la imposición de que el número de préstamos de \$1000 representen un tercio de la suma del número de préstamos de \$2000 y \$3000 ¿qué puede concluir?
- ¿y si a los condicionamientos originales se le adicionara que debe haber el mismo número de préstamos de \$1000 que de \$2000, qué pasaría?

- 11) Una entidad de educación privada ha invertido en los últimos tiempos \$18000 anuales en publicidad televisiva y gráfica. Para el próximo año se considera que debe reducirse lo asignado

a T.V. un 10%. Dado que la publicidad gráfica ha tenido muy buena respuesta se piensa intensificarla, con un aumento en su costo igual al 5%. Se conoce que se gastará un monto total de \$17400. ¿de cuánto será la inversión en cada tipo de publicidad el próximo año?

- 12) Se desea obtener una mezcla de 100 litros con tres tipos de combustible (A, B y C) cuyos costos por litro son de \$2, \$1,5 y \$1,3, respectivamente. El costo total de la mezcla debe ser de \$153 y la cantidad de combustible A debe ser el doble de la del B ¿cuántos litros de cada tipo de combustible debe contener la mezcla?
- 13) El trigo disminuyó su precio desde el año pasado a este un 20%. Para comprar 6 bolsas de trigo este año gasté \$1,20 menos que el año pasado para comprar 5 bolsas ¿cuál es el precio actual del trigo y cuál es el del año anterior?
- 14) Un inversor tiene \$500.000 para invertir en tres tipos de negocios. Se espera que el primer tipo de negocio le redituará un 15% de ganancias el segundo un 10% y el tercero un 18%. La meta del inversionista es lograr un promedio del 15% entre las tres inversiones. Además la inversión en el tercer negocio debe ser del 40% del total. ¿Cuál es la alternativa que permite lograr todos estos objetivos?
- 15) Un fabricante de café está interesado en mezclar tres tipos de semillas, para obtener 10.000 toneladas de una sola clase. Los tres tipos de semillas cuestan \$2,4 ; \$2,6 y \$2 respectivamente. Un experto en el tema le informa que para que el café adopte un sabor adecuado deberá introducir en la mezcla la misma cantidad de semillas A y B , y que siguiendo las indicaciones dadas el costo total será de \$21.000. ¿Cuál deberá ser la combinación de las tres semillas que verifique las instrucciones del experto?
- 16) Se posee un presupuesto de \$ 200.- que se quiere destinar totalmente a publicidad. La misma se puede desarrollar por tres medios: TV, radio y avisos en periódicos. El costo de cada aviso en TV es de \$5, en radio de \$3 y en periódico de \$1. El número total de avisos debe ser de 64 y se quiere llegar a una audiencia de 7000 personas. Los medios de divulgación nos han proporcionado los siguientes datos: Cada aviso en TV llega a una audiencia de 200 personas, cada aviso de radio a 60 y cada aviso en periódico a una audiencia de 50 personas. Calcular el número de avisos publicitarios que debemos hacer en cada medio.
- 17) El número de habitantes de una población B es un 50% menor que la de una localidad A. Si además se sabe que el total de ambas localidades representa el triple de los habitantes de B , ¿cuál es el número de pobladores de cada localidad.?
- 18) Se quieren obtener 600 grs de cierta aleación, a partir de la mezcla de tres metales (A,B,C) para ello se establece que la cantidad de A representa dos tercios de la de B y que C representa la mitad del total de A con B. ¿Cuánto de cada metal se debe introducir en la mezcla.?
- 19) Cierta compañía fabrica tres tipos de llantas: A, B y C, para ello cada llanta debe pasar por dos secciones de trabajo. En la primera sección se dispone actualmente de 1210 horas-hombre, mientras que en la segunda se dispone de 1090 H/H. Se desea fabricar 150 llantas. Además se sabe que en la primera sección cada llanta de tipo A requiere de 9 horas-hombre, cada llanta de tipo B requiere 7 horas-hombre y las de tipo C 5 horas- hombre. Análogamente en la segunda sección los requerimientos de horas-hombre son de 8, 5 y 7 para las llantas de tipo A, B y C respectivamente. Calcule el número de llantas de cada tipo que se pueden fabricar.

- 20) Se desea producir tres tipos de artículos, el I requiere 2 unidades de insumo A, 4 de B y ninguna unidad de C. El II requiere: 6, 10 y 2 unidades de insumo A, B y C respectivamente, y el III requiere: 4, 6 y 2 unidades de insumo A, B y C respectivamente. Se disponen de 24 unidades de insumo A, 42 de B y 6 de C.
- a) Hallar todas las cantidades posibles de los tres productos que requieran exactamente esas cantidades de insumos.
- b) Si el producto I cuesta \$60 y los otros \$10 cada unidad ¿existe una solución consistente en un costo total de \$270?

### Respuestas: SEMINARIO 1

1)

- |                  |           |                       |
|------------------|-----------|-----------------------|
| a) $x=4$         | b) $x=10$ | c) $x=1$              |
| d) $x=3$         | e) $x=0$  | f) no tiene solución. |
| g) cualquier $x$ | h) $x=1$  | i) $x=12,5$           |

2)

- |           |          |             |
|-----------|----------|-------------|
| a) $x=2$  | b) $x=0$ | c) $x=3$    |
| d) $x=-9$ | e) $x=6$ | f) $-11/12$ |

3)

- a) La tasa es “ $i = 0,2$ ”
- b) Hay 30 beneficiarios.
- c) Había 34 tutores
- d) El precio del producto sin recargo es de \$350.
- e) La herencia era de \$45.000
- f) Recorrió en la primera etapa 200 km
- g) 240 km es la distancia entre ambas ciudades
- h) La base mide 4 cm y la altura es de 10 cm.

4)

- a)  $x=2$  ;  $y=-1$  “Las rectas tienen distinta inclinación, es decir se cortan en un punto”
- b) Sistema Incompatible. “Las rectas son paralelas”
- c) Sistema compatible Indeterminado. Solución :  $x=2-10y$  ;  $y$  que pertenece a los Reales.  
“Se trata de dos rectas coincidentes”

5) a)  $k=1$       b)  $m$  distinto de 6

6) a)  $M=15$     $V=37$

b)  $x=6500$ ;  $y=4500$

c)  $x=28$ ;  $y=14$

7)a) Sistema compatible Indeterminado  $x=3z-4$ ;  $y=-3+2z$ ;  $z \in \mathbb{R}$

b) Sistema compatible Determinado  $x=1$ ;  $y=1$ ;  $z=2$

c) Sistema incompatible

d) Sistema compatible Indeterminado  $x=-z/3$ ;  $y=1-z$ ;  $z \in \mathbb{R}$

e) Sistema compatible Determinado  $x=-1$ ;  $y=-1$ ;  $z=0$

f) Sistema incompatible

8)a)  $x=4000$ ;  $y=3600$ ;  $z=7000$

b)  $x=8$ ;  $y=-4$ ;  $z=5$

c)  $X=400$ ;  $y=300$ ;  $z=650$

d)  $A=1000$ ;  $B=1000$ ;  $C=1500$

9) Opción d)

10) Opción b)

## Respuestas Práctico complementario:

- 1)  $x$ : cantidad de partidos ganados  
 $y$ : cantidad de partidos empatados

**Planteo:**

**Respuesta:**  $x=10$ ;  $y=5$

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 2x + y = 25 \end{cases}$$

- 2)  $x$  = Dinero cobrado por José  
 $y$  = Dinero que tiene María ahorrado

**Planteo:**

**Respuesta:**  $x=52$ ;  $y=26$

$$\begin{cases} x = 2y \\ x - 10 = y + 10 + 6 \end{cases}$$

- 3)  $x$  = cantidad de ingrediente I a introducir en la mezcla.  
 $y$  = cantidad de ingrediente II a introducir en la mezcla.  
 $z$  = cantidad de ingrediente III a introducir en la mezcla.

**Planteo:**

**Respuesta:**  $x=20$ ;  $y=40$ ;  $z=60$

$$\begin{cases} x + y + z = 120 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}x &= 0,2 (y + z) \\ y &= 2 x\end{aligned}$$

- 4)  $x$ = cantidad de tareas de categoría A  
 $y$ = cantidad de tareas de categoría B

**Planteo:**

**Respuesta:**  $x = 52$  ;  $y = 18$

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ x/4 + y/2 = 22 \end{cases}$$

- 5)  $x$ = cantidad de autos en la playa de estacionamiento.  
 $y$ = cantidad de motos en la playa de estacionamiento.  
 $z$ = cantidad de utilitarios en la playa de estacionamiento.

**Planteo:**

**Respuesta:**  $x = 65$  ;  $y = 40$  ;  $z = 30$

$$\begin{cases} x + y + z = 135 \\ z = y + 10 \\ z + y = x + 5 \end{cases}$$

- 6)  $x$ = cantidad de oro en la aleación  
 $y$ = cantidad de plata en la aleación  
 $z$ = cantidad de cobre en la aleación

**Planteo:**

**Respuesta:** a)  $x = 20$ ;  $y = 28$  ;  $z = 12$   
b) peso total = 60 grs

$$\begin{cases} x = \frac{x + y + z}{5} + 8 \\ y = 2 \frac{x + y + z}{5} + 4 \\ z = \frac{3}{5} x \end{cases}$$

- 7)  $x$  = cantidad de producto A a fabricar.  
 $y$  = cantidad de producto B a fabricar.  
 $z$  = cantidad de producto C a fabricar.

**Planteo:**

**Respuesta:**  $x = 100$ ;  $y = 200$  ;  $z = 200$

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 1500 \\ 10x + 8y + 6z = 3800 \\ x + y + z = 500 \end{cases}$$

- 8)  $x$  = cantidad de producto 1 a fabricar.  
 $y$  = cantidad de producto 2 a fabricar.  
 $z$  = cantidad de producto 3 a fabricar.

**Planteo:**

**Respuesta:**  $x = 200$ ;  $y = 100$  ;  $z = 150$

$$\begin{cases} 2x + 3,5y + 3z = 1200 \\ 3x + 2,5y + 2z = 1150 \\ 4x + 3y + 2z = 1400 \end{cases}$$

- 9)  $x$  = cantidad de alimento 1 a introducir en la mezcla.  
 $y$  = cantidad de alimento 2 a introducir en la mezcla.  
 $z$  = cantidad de alimento 3 a introducir en la mezcla.

**Planteo:**

**Respuesta:**  $x = 4$ ;  $y = 3$  ;  $z = 6$

$$\begin{cases} 4x + 6y + 3z = 52 \\ 2x + 8y + 4z = 56 \\ x + 6y + 2z = 34 \end{cases}$$

- 10)  $x$  = cantidad de préstamos de \$1000 a otorgar.  
 $y$  = cantidad de préstamos de \$2000 a otorgar.  
 $z$  = cantidad de préstamos de \$3000 a otorgar.

**a) Planteo:**

**Respuesta:**  $x = 50$ ;  $y = 100$  ;  $z = 50$

$$\begin{cases} 1000x + 2000y + 3000z = 400.000 \\ x = (y + z) / 3 \\ x + y + z = 200 \end{cases}$$

**b) Planteo:**

**Respuesta:** El problema admite infinitas soluciones

$$\begin{cases} 1000x + 2000y + 3000z = 400.000 \\ x + y + z = 200 \end{cases}$$

**c) Planteo:**

**Respuesta:** El problema no admite solución

$$\begin{cases} 1000x + 2000y + 3000z = 400.000 \\ x = (y + z) / 3 \\ x + y + z = 200 \\ x = y \end{cases}$$

- 11) variables auxiliares:  
 $x$  = inversión en publicidad televisiva el año anterior →  $X$  = idem **este año**  
 $y$  = inversión en publicidad gráfica el año anterior. →  $Y$  = idem **este año**

**Planteo:**

**Respuesta:**  $x = 10000$  ;  $y = 8.000$   
→  $X = 9.000$   $Y = 8.400$

$$\begin{cases} x + y = 18.000 \\ x - 0,1x + y + 0,05y = 17.400 \end{cases}$$

- 12)  $x$  = cantidad de litros de combustible A a mezclar  
 $y$  = cantidad de litros de combustible B a mezclar

z= cantidad de litros de combustible C a mezclar

**Planteo:**

**Respuesta:** x= ; y= ; z=

$$\begin{cases} 2x + 1,5y + 1,3z = 153 \\ x = 2y \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

- 13) x = precio del trigo el año pasado.  
y = precio actual del trigo

**Planteo:**

**Respuesta:** x= 6 ; y= 4,8

$$\begin{cases} x - 0,2x = y \\ 6y = 5y - 1,2 \end{cases}$$

- 14) x= cantidad de dinero a invertir en la opción 1  
y= cantidad de dinero a invertir en la opción 2  
z= cantidad de dinero a invertir en la opción 3

**Planteo:**

**Respuesta:** x= 180.000 ; y= 120.000 ; z=200.000

$$\begin{cases} 0,15x + 0,1y + 0,18z = 75.000 \\ z = 0,4(x + y + z) \quad \Leftrightarrow \quad z = 200.000 \\ x + y + z = 500.000 \end{cases}$$

- 15) x= cantidad de toneladas de semilla A a mezclar  
y= cantidad de toneladas de semilla B a mezclar  
z= cantidad de toneladas de semilla C a mezclar

**Planteo:**

**Respuesta:** x= 1000 ; y= 1000 ; z=8000

$$\begin{cases} 2,4x + 2,6y + 2z = 21.000 \\ x = y \\ x + y + z = 10.000 \end{cases}$$

- 16) x= cantidad de avisos a realizar por T.V.  
y= cantidad de avisos a realizar por radio  
z= cantidad de avisos a realizar en periódicos

**Planteo:**

**Respuesta:** x= 24 ; y= 20 ; z= 20

$$\begin{cases} 5x + 3y + z = 200 \\ x + y + z = 64 \\ 200x + 60y + 50z = 7.000 \end{cases}$$

- 19) x= cantidad de llantas de tipo A a fabricar  
y= cantidad de llantas de tipo B a fabricar  
z= cantidad de llantas de tipo C a fabricar

**Planteo:**

**Respuesta:** x= 100 ; y= 30 ; z= 20

$$\begin{cases} 9x + 7y + 5z = 1.210 \\ 8x + 5y + 7z = 1.090 \\ x + y + z = 150 \end{cases}$$

- 20)  $x$  = cantidad de artículos de tipo I a producir  
 $y$  = cantidad de artículos de tipo II a producir  
 $z$  = cantidad de artículos de tipo III a producir

**a) Planteo:**

**Respuesta:** algebraicamente existen infinitas soluciones

$$\begin{cases} 2x + 6y + 4z = 24 \\ 4x + 10y + 6z = 42 \\ 2y + 2z = 6 \end{cases}$$

**b) Planteo:**

**Respuesta:**  $x=4$   $y=2$   $z=1$

$$\begin{cases} 2x + 6y + 4z = 24 \\ 4x + 10y + 6z = 42 \\ 2y + 2z = 6 \\ 60x + 10y + 10z = 270 \end{cases}$$