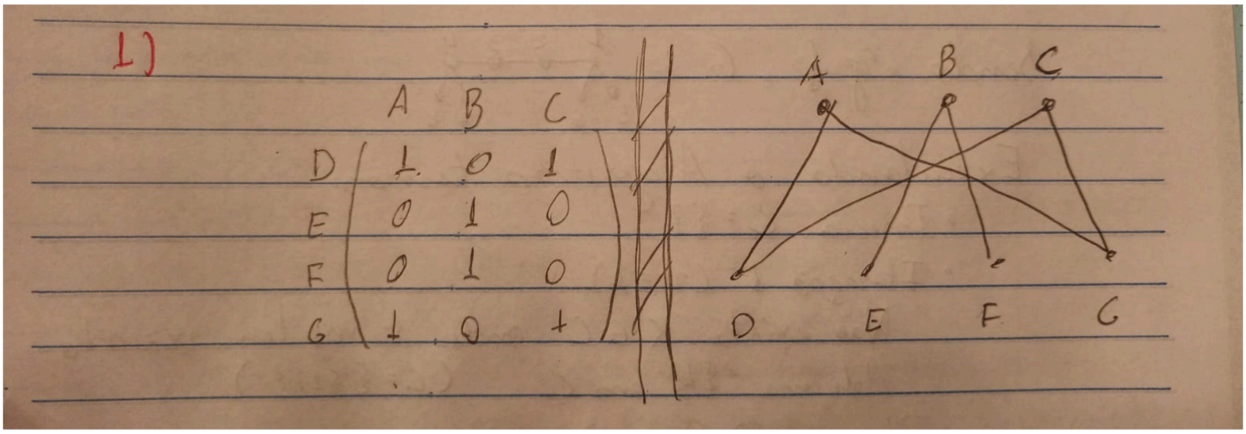
1. (10 pontos) Desenhe um grafo cuja matriz de bi-adjacência seja a seguinte.

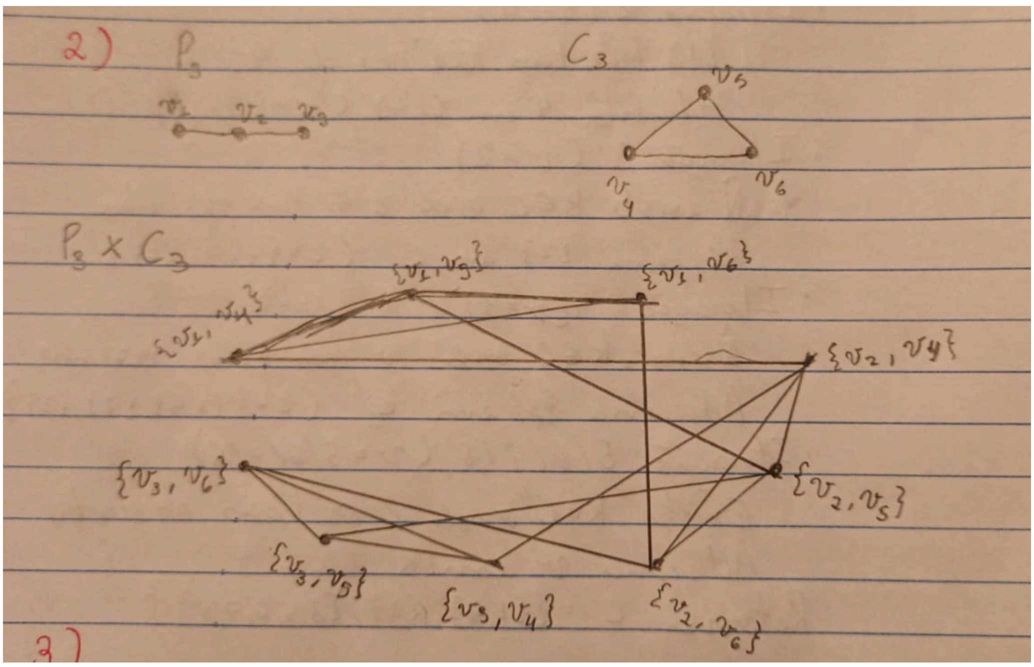
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



2. O *produto cartesiano* do grafo G pelo grafo H é o grafo $G \times H$ dado por

$$\begin{aligned} V(G \times H) &:= V(G) \times V(H), \\ E(G \times H) &:= \{\{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\} \mid (u_1 = v_1 \text{ e } \{u_2, v_2\} \in E(H)) \text{ ou } \\ &\quad\ (u_2 = v_2 \text{ e } \{u_1, v_1\} \in E(G))\} \end{aligned}$$

(a) (5 pontos) Desenhe o grafo $P_3 \times C_3$.



(b) (5 pontos) Um *prisma* é o produto cartesiano de K_2 por um ciclo. É verdade que todo prisma tem número par de vértices? Justifique.

b) Sim.

Para todo Prisma $K_2 \times C_m$

$|V(K_2 \times C_m)| = |V(K_2) \times V(C_m)|$
$|V(K_2 \times C_m)| = |V(K_2)| \cdot |V(C_m)|$
$|V(K_2 \times C_m)| = 2 \cdot |V(C_m)|$

Logo para qualquer prisma

$\dfrac{|V(K_2 \times C_m)|}{2} = \dfrac{\cancel{2}\,|V(C_m)|}{\cancel{2}}$:= é um numero inteiro

e $|V(K_2 \times C_m)|$ é par

(c) (15 pontos) É verdade que $G \times H$ e $H \times G$ são sempre isomorfos? Justifique.

c) Sim

$$(u_1, v_1) \in V(G \times H) \Leftrightarrow (v_1, u_1) \in V(H \times G)$$

Os produtos cartesianos de $G \times H$ e $H \times G$ resultam no mesmo numero de vértices com ordens invertidas.
Já as arestas de $G \times H$ e $H \times G$ se mantem já que o operador ~~ou~~ irá funcionar independente da ordem

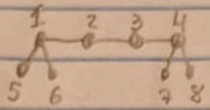
3. (30 pontos) Prove que o algoritmo abaixo nem sempre devolve uma coloração do grafo G com número mínimo de cores.

Colore(G)

$\mathcal{C} \leftarrow \emptyset$
Enquanto *existe vértice de G que não pertence a nenhum conjunto de $\mathcal{C}$*
    $v \leftarrow$ vértice de grau máximo em G que não pertence a nenhum conjunto de $\mathcal{C}$
    Se *v não tem vizinho em algum conjunto $K \in \mathcal{C}$*
        acrescente v ao conjunto K
    Senão
        acrescente o conjunto $\{v\}$ a $\mathcal{C}$
Devolva $\mathcal{C}$

3) Prova Por Contra exemplo

Sendo o grafo G :



Executando o Algoritmo temos

- Inicia $C = \{\}$
- Iteração 1 ($v = 1$)
  Não existe $K \in C$ onde v não tem vizinho
  Adiciona $\{1\}$ em C ($C = \{\{1\}\}$)
- Iteração 2 ($v = 4$)
  $\{1\}$ não tem vizinho de 4
  Adiciona 4 em $\{1,4\}$ ($C = \{\{1,4\}\}$)
- Iteração 3 ($v = 2$)
  Ñ existe $K \in C$ onde 2 ñ tem vizinho
  Adiciona $\{2\}$ em C ($C = \{\{1,4\},\{2\}\}$)
- Iteração 4 ($v = 3$)
  Ñ existe $K \in C$ onde v não tem vizinho
  Adiciona $\{3\}$ em C ($C = \{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}$)
- Iteração 5/6/7/8 ($v = 5/6/7/8$)
  Existe $K \in C$ onde 2 ñ tem vizinho
  Adiciona v em K
  Retorna $C := \{\{1,4\},\{2\},\{3,5,6,7,8\}\}$

Podemos ver porem que existe uma coloração com menos cores em $\{\{1,3,7,8\},\{2,4,5,6\}\}$,

Logo o Algoritmo não garante a coloração com menos cores

4. (25 pontos) Prove que toda árvore T tem (pelo menos) $\Delta(T)$ folhas.

4) Prova por Absurdo.

Assumindo uma árvore T com f folhas e $f < \Delta(T)$

Sendo r um vertice de T com $\delta_T(r) = \Delta(T)$

Sabemos que para cada folha de T existe um único caminho até r, como $f < \delta_T(r)$ então existe ao menos um vizinho v_0 que não faz parte de um caminho de r até uma folha qualquer

Considerando o maior caminho possível P em T que inicia com o segmento (r, v_0) temos

$$P := (r, v_0, \dots, v_m)$$

Como v_m ñ pode ser uma folha então $\delta_T(v_m) \geq 2$
Como v_m é ponta de P, e P é maximal, todos os vizinhos de v_m estão em P. Logo existe pelo menos 1 ciclo em T, formado por $v_j P v_m (v_m, v_j)$ sendo v_j um vizinho de v_m e $\{v_m, v_j\}$ não faz parte de P

Isso contradiz T ser árvore, logo não existe T onde $f < \Delta(T)$

Portanto $\forall T$ $f \geq \Delta(T)$

5. (25 pontos) Prove que $\lambda(G) \geq 2$ se e somente se toda aresta de G faz parte de algum ciclo em G.

Prova: $\lambda(G) \geq 2 \Rightarrow$ toda aresta de G faz parte de um ciclo

Sendo G um grafo onde $\lambda(G) \geq 2$, para qualquer aresta $\{u,v\} \in E(G)$ sabemos que $G-\{u,v\}$ tem o mesmo numero de componentes que G, ou seja existe um caminho P de u a v sem $\{u,v\}$.

Logo $\{u,v\}$ faz parte de um ciclo $P(v,u)$

Prova: Toda aresta de G faz parte de um ciclo $\Rightarrow \lambda(G) \geq 2$

Sendo G um grafo onde todas as arestas fazem parte de um ciclo. Em todos os componentes não triviais, entre qualquer 2 pares de vertices existem no minimo 2 caminhos, logo é impossivel desconectar um componente com um corte de tamanho 1, portanto $\lambda(G) \leq 2$

Logo $\lambda(G) \geq 2 \Leftrightarrow$ Toda aresta de G faz parte de um ciclo