Algoritmos e Teoria dos Grafos

Primeira Prova

09 de maio de 2023

1. **(15 pontos)** É possível que um grafo e seu complemento sejam ambos desconexos? Justifique.

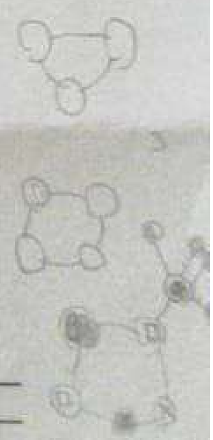
2. **(20 pontos)** Prove que todo vértice de corte em um grafo é vértice de corte em qualquer árvore geradora deste grafo.

3. **(20 pontos)** É verdade que todo grafo G com cintura estritamente maior do que 3 tem $\alpha(G) \geq \Delta(G)$? Justifique.

4. **(20 pontos)** O *fecho transitivo* de um grafo G é o menor supergrafo H de G satisfazendo

   $\{u, v\} \in E(H)$ se e somente se existe caminho de u a v em G.

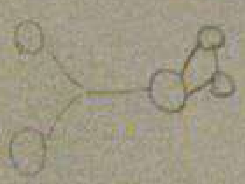
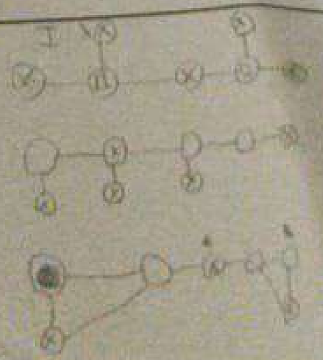
   O fecho transitivo de qualquer grafo é sempre um grafo completo? Justifique.

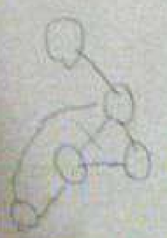


5. **(25 pontos)** Um estudante afirma que o Algoritmo abaixo encontra o maior conjunto independente do grafo de entrada G. Ele está correto? Justifique.

Independente(G)

$I \leftarrow \emptyset$
Enquanto $V(G) \neq \emptyset$
    $v \leftarrow$ vértice de grau mínimo em G
    acrescente v a I
    remova v e $\Gamma_G(v)$ de G
Devolva I




9 maio 2023

1) Não

Se um grafo é desconexo então o seu complemento é conexo

Prova

Se G é desconexo então existe $X \subseteq V(G)$ onde $X \neq V(G)$, $X \neq \emptyset$ e $\partial_G(X) = \emptyset$

Porem em $\bar{G}$ temos que:

$$\partial_{\bar{G}}(X) = \{ \{x, v\} \mid x \in X, v \in V(G) - X \}$$

Assim $\forall v_1, v_2 \in V(\bar{G}) - X$ e $x \in X$ temos o caminho $P = (v_1, x, v_2)$

E $\forall x_1, x_2 \in X$ e $v \in V(\bar{G}) - X$ temos o caminho $P = (x_1, v, x_2)$

Logo existe um caminho para qualquer dois pares de vertices em $\bar{G}$, tornando $\bar{G}$ conexo

2) Prova por Absurdo

Assumindo um grafo G onde v é vertice de corte, e uma arvore T onde v ñ é vertice de corte

Se v não é vertice de corte em T então T-v é conexo, logo entre qualquer par de vertices de T-v existe um caminho

Todo caminho existente em T-v existe em G-v logo G-v é conexo

Isso contradiz v ser vertice de corte em G. Portanto todo vertice de corte em um grafo é vertice de corte em todas as suas arvores geradoras

3) Prova

Para qualquer grafo G com cintura estritamente maior que 3 sabemos que

$$\forall v_0 \in V(G)$$

$$v_1 \notin \Gamma_G(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in \Gamma_G(v_0),$$

* Caso contrario teriamos o ciclo de tamanho 3 (v_0, v_1, v_2, v_0) que contradiz G ter uma cintura maior que 3

Assim sabemos que $\Gamma_G(v)$, $\forall v \in V(G)$ é conjunto independente

Portanto sabemos que é sempre possivel criar ao menos um conjunto independente de tamanho $\Delta(G)$

Assim

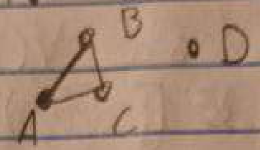
$\alpha(G) \geq \Delta(G)$ para todo G com cintura estritamente maior que 3

4) Não

Prova por contraexemplo

G:

H:



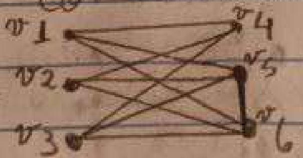
H é o menor supergrafo de G respeitando $\{u,v\} \in E(H) \iff$ existe caminho u, v em G

Porém H não é um grafo completo

5) Não

Prova por contraexemplo

Sendo G :=



Executando Algoritmo

Inicia $I = \{\}$

Iteração 1: $\delta_G(v_4) = \delta(G)$

$I = \{v_4\}$ remove v_1, v_2, v_3 de G

Iteração 2: v_5

$I = \{v_4, v_5\}$ remove v_6

$V(G) \neq \emptyset$ retorna $\{v_4, v_5\}$

Porém $\{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto independente maior