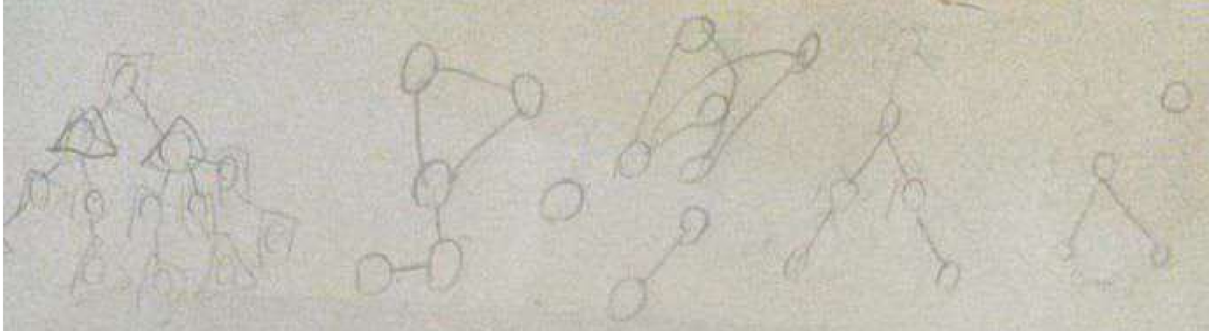
Seja G um grafo e sejam M_1 e M_2 dois emparelhamentos em G. É ver[...]
grafo $G[M_1 \cup M_2]$ é bipartido? Justifique.



Algoritmos e Teoria dos Grafos

Primeira Prova

2 de agosto de 2022

1. (20 pontos) Preencha a seguinte tabela[1].

	$\Delta(G)$	$\alpha(G)$	$\gamma(G)$	$\text{diam}(G)$	$\chi(G)$	$\lambda(G)$
P_n	2	$\lceil n/2 \rceil$	[illegible]	$n-1$	2	1
C_n	2	$\lfloor n/2 \rfloor$	[illegible]	$\lfloor n/2 \rfloor$	2 [illegible]	2
K_n	$n-1$	1	3	1	n	$n-1$
$K_{n,m}$	max{n,m}	max{n,m}	4	2	2	min{n,m}

2. (15 pontos) Um grafo e seu complemento podem ser ambos desconexos? Justifique.

3. (15 pontos) Seja T uma árvore não trivial com n vértices. Prove que se $\alpha(T) = n - 1$ então $\Delta(T) = n - 1$.

4. (25 pontos) Um estudante afirma que não é possível que um grafo k-aresta conexo de n vértices tenha menos de $nk/2$ arestas. Ele está correto? Justifique.

5. (25 pontos) Prove que o algoritmo abaixo nem sempre devolve uma coloração mínima do grafo G.

```
Colore(G)
    C ← ∅
    Enquanto existe vértice de G que não pertence a nenhum conjunto em C
        v ← vértice de grau mínimo em G que não pertence a nenhum conjunto em C
        Se v não tem vizinho em algum conjunto K ∈ C
            acrescente v ao conjunto K
        Senão
            acrescente o conjunto {v} a C
    Devolva C
```

[1] P_n, C_n, K_n e $K_{n,m}$ denotam, respectivamente, o caminho, o ciclo, o grafo completo de n vértices e o grafo bipartido completo com partes de n e m vértices; $\Delta(G)$, $\alpha(G)$, $\gamma(G)$, $\text{diam}(G)$, $\chi(G)$ e $\lambda(G)$ denotam, respectivamente, grau máximo, tamanho do maior conjunto independente, cintura, diametro, numero cromático e aresta conexidade de G.

Agosto 2022

1)

	$\Delta(G)$	$\alpha(G)$	$\gamma(G)$	$diam(G)$	$\chi(G$	$\chi(G)$
P_n	2	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	∞	$n-1$	2	1
C_n	2	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	n	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	③ $2+Impar(n)$	2
K_n	$n-1$	1	3 ①	1	n	$n-1$
$K_{n,m}$	$max(n,m)$	$max(n,m)$	4 ②	2	2	$min(n,m)$

① Se $n < 3$ $\gamma(G) = \infty$

② Se $n=1$ ou $m=1$ então $\gamma(G) = \infty$

③ $Impar(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 1 & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases}$

2) Sendo T uma arvore ñ trivial de n vertices e $\alpha(T) = n-1$

Sabemos que T é conexo, portanto para todo $v_i, v_j \in X$ (sendo X o conjunto independente de tamanho $\alpha(T)$) existe um caminho $P(v_i, \dots, v_j)$

Como a arvore tem n vertices e $\alpha(T) = n-1$ existe um unico vertice $v \in V(T)$ que $v \notin X$

Logo Podemos escrever todos os caminhos entre v_i e v_j como $P = (v_i, v, v_j)$

Portanto v é vizinho de todos os vertices de X assim $\delta_T(v) = \alpha(T) = n-1$ e $\Delta(T) = n-1$

~~9 maio 2023~~

2) Não

Se um grafo é desconexo então o seu complemento é conexo

Prova

Se G é desconexo então existe $X \subset V(G)$ onde $X \neq V(G)$, $X \neq \emptyset$ e $\partial_G(X) = \emptyset$

Porem em $\bar{G}$ temos que:

$$\partial_{\bar{G}}(X) = \{ \{x, v\} \mid x \in X, v \in V(G) - X \}$$

Assim $\forall v_1, v_2 \in V(\bar{G}) - X$ e $x \in X$ temos o caminho $P = (v_1, x, v_2)$

E $\forall x_1, x_2 \in X$ e $v \in V(\bar{G}) - X$ temos o caminho $P = (x_1, v, x_2)$

Logo existe um caminho para quaisquer dois pares de vertices em $\bar{G}$, tornando $\bar{G}$ conexo

4) Ele está correto

Em um grafo k-arestas conexo sabemos que $\delta(G) \geq k$ ①

logo

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|E(G)|$$

$$\sum_{v \in V(G)} k \leq 2|E(G)|$$

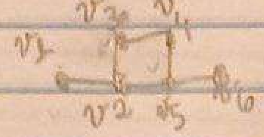
$$nk \leq 2|E(G)|$$

$$\frac{nk}{2} \leq |E(G)|$$

① Sabemos isso pois se existisse $v \in V(G)$, $\delta_G(v) < k$ $\partial_G(v)$ seria um corte menor que k o que é uma contradição.

Achei que era óbvio, mas pensando 2 vezes, talvez não seja

5) Prova por contra exemplo

Sendo G: 

Inicio $C = \{\}$

Iteração 1: v_1

Adiciona $\{v_1\}$ em C ($C = \{\{v_1\}\}$)

Iteração 2: v_6

Adiciona v_6 em $\{v_1\}$ ($C = \{\{v_1, v_6\}\}$

Iteração 3: v_3

Adiciona $\{v_3\}$ em C ($C = \{\{v_1, v_6\}, \{v_3\}\}$)

Iter 4: v_4

Adiciona v_4 em $\{v_1, v_6\}$ ($C = \{\{v_1, v_6, v_4\}, \{v_3\}\}$).

Iter 5: v_2

Adiciona $\{v_2\}$ em $\{v_2\}$ ($C = \{\{v_1, v_6, v_4\}, \{v_3\}, \{v_2\}\}$)

Iter 6: v_5

Adiciona v_5 ; em ($C = \{\{v_1, v_6, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_2\}\}$)

Retorna C

A coloração retornada tem tamanho 3 mas existe a coloração $\{\{v_1, v_3, v_5\} \{v_2, v_4, v_6\}\}$ que tem tamanho 2