Tarea 2

Profesor: Jesús Rodríguez Viorato

IA & TC

Agosto-Diciembre 2021

Roberto Vásquez Martínez

Problema 1

Dibuja un autómata no determinista que reconozca el lenguaje $L = \{\omega \in \{0,1\}^* \ : \ \omega \text{ termina en } 00\}$ y que sólo tenga 3 estados.

Solución: Sea $M_1 = (Q, \Sigma, p_1, \delta, A)$ el autómata no determinístico donde

$$\begin{aligned} Q =& \{q_1, q_2, q_3\} \\ & p_1 \text{ es el estado inicial} \\ \Sigma =& \{0, 1\} \\ A =& \{q_3\}, \end{aligned}$$

y la función de transición viene descrita por el siguiente diagrama.

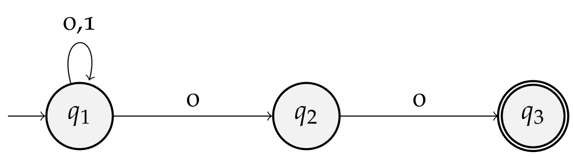

Figura 1: Diagrama que ilustra la función de transición de el autómata M_1

y este es el autómata que acepta todas las cadenas binarias que terminan en 00, que es lo que queríamos hallar □

Problema 2

Usa el método visto en clase para convertir los siguientes dos autómatas no deterministas en sus equivalentes determinísticos.

Solución:

a) Aplicando el algoritmo visto en clase, con la convención de leer la cadena vacía siempre y cuando antes se halla leído un caractér se tienen los siguiente autómata equivalente y este es el autómata

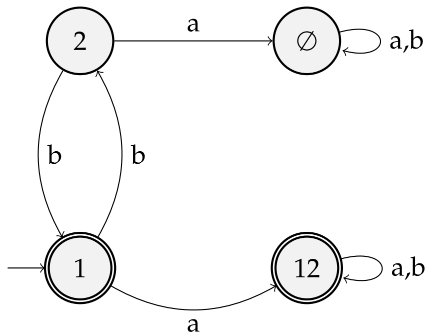

Figura 2: Diagrama que ilustra al autómata determinístico para el inciso *a*)

determinístico equivalente buscado.

b) En este caso si utilizamos la convención de antes de pasar por una cadena vacía pasar por un caracter. El diagrama del autómata determinístico equivalente, quitando ya los estados a los que no se llega a partir del estado inicial, es

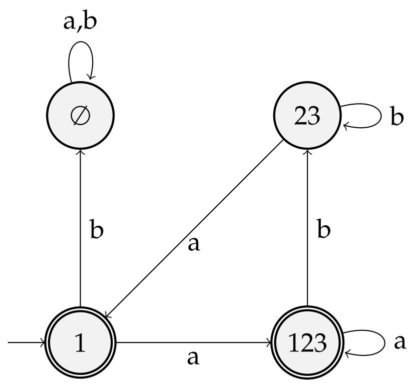

Figura 3: Diagrama que ilustra al autómata determinístico para el inciso *b*)

Cabe mencionar que en el diagrama abreviamos, por ejemplo, al conjunto $\{1, 2\}$ como 12 para etiquetar a los estados. El diagrama anterior es el diagrama determinístico equivalente buscado. $\square$

Problema 3

Pruebe que cualquier autómata no determinístico se puede cambiar a uno equivalente con un sólo estado aceptor.

Solución: Sea $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, A)$ un autómata no determinístico.

Consideremos q_ε un estado nuevo. Sea $M' = (Q \cup \{q_\varepsilon\}, \Sigma, q_0, \delta', \{q_\varepsilon\})$ un autómata no determinístico tal que $\delta' : Q \cup \{q_\varepsilon\} \times \Sigma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q \cup \{q_\varepsilon\})$ la función de transición queda definida por

$$\delta'(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & \text{si } q \in Q \backslash A \quad \text{y} \quad a \in \Sigma_\varepsilon \\ \delta(q,a) & \text{si } q \in A \quad \text{y} \quad a \in \Sigma \\ \delta(q,a) \cup \{q_\varepsilon\} & \text{si } q \in A \quad \text{y} \quad a = \varepsilon \\ \emptyset & \text{si } q = q_\varepsilon \quad \text{y} \quad a \in \Sigma_\varepsilon \end{cases}$$

Lo que nos dice la anterior función de transición es que el autómata M' se comporta igual que M, sin embargo los únicos.

Como solo de los estados en A se puede llegar a $\{q_\varepsilon\}$ en M', y por construcción q_ε es el único estado aceptor de M' entonces toda cadena aceptada en M debió iniciar en q_0 y tener cómo penúltimo estado a algún estado de A para después ser aceptada llegando a q_ε mediante la cadena vacía, luego toda cadena aceptada en M es una cadena aceptada en M'.

De manera similar, una cadena aceptada en M' debió tener como penúltimo estado a algún estado de A, luego como de cualquier estado de A sólo se puede llegar al único estado aceptor q_ε de M' mediante la cadena vacía, ignorando la cadena vacía obtenemos una cadena aceptada en M.

Por lo tanto M es equivalente a M' con M' un autómata no determinístico con un sólo estado aceptor. $\square$

Problema 4

Para una cadena $\omega = a_1 a_2 \ldots a_n$ el reverso de ω se define como $\omega^R = a_n a_{n-1} \ldots a_1$. Para todo lenguaje L sea $L^R = \{\omega^R \ : \ \omega \in L\}$. Demuestra que si L es regular entonces L^R también lo es.

Solución: Como L es regular sea $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta_M, A)$ el autómata finito que reconoce al lenguaje L. Como los autómatas finitos determinísticos.

De manera análoga al *Problema 3*, agregando el estado q_ε construimos un autómata no determinístico $N = (Q \cup \{q_\varepsilon\}, \Sigma, q_0, \delta_N, \{q_\varepsilon\})$ equivalente a M y con un sólo estado aceptor.

Sea el autómata no determinista $N_R = (Q \cup \{q_\varepsilon\}, \Sigma, q_\varepsilon, \delta_{N_R}, \{q_0\})$ con función de transición definida de la siguiente forma

$$\delta_{N_R}(q, a) = \begin{cases} \delta_M^{-1}(q, a) & \text{si } q \in Q \quad \text{y} \quad a \in \Sigma \\ A & \text{si } q = q_\varepsilon \quad \text{y} \quad a = \varepsilon \\ \emptyset & \text{si } q = q_\varepsilon \quad \text{y} \quad a \in \Sigma \end{cases}$$

cabe mencionar que $\delta_M^{-1}(q, a)$ está bien definida porque M es un autómata determinístico, es decir, para $q \in Q$ existe un único $p \in Q$ tal que de p se puede llegar a q mediante a, es decir, $p = \delta_M^{-1}(q, a)$ pues $\delta_M(p, a) = q$ con $p \in Q$ y $a \in \Sigma$.

Utilizaremos la función de transición extendida[1], probaremos que existe un camino de p a q en N codificado por la cadena ω si y sólo si existe un camino de q a p codificado por la cadena ω^R con $p, q \in Q$.

Procederemos por inducción sobre la longitud de la cadena ω. Para $|\omega| = 1$ el resultado se sigue de la definición de δ_{N_R}.

Supongamos que el resultado se cumple para $|\omega| < n$. Sea $|\omega| = n$ y $\omega = xa$ con $a \in \Sigma$.

Sea $p \in \delta_N^*(q, xa)$. Sabemos que

$$\delta_N^*(q, xa) = \delta_N(\delta_N^*(q, x), a).$$

Observamos que todo $p' \in \delta_N^*(q, x)$ esta conectado con q a través de la expresión x, como $|x| < n$ por hipótesis de inducción se tiene que $p' \in \delta_N^*(q, x)$ si y sólo si $q \in \delta_{N_R}^*(p', x^R)$.

De lo anterior tenemos que $p \in \delta_N^*(q, xa)$ si y sólo si $q \in \delta_{N_R}^*(p, ax^R)$, lo que concluye la inducción.

Con lo probado en la inducción anterior si consideramos $q = q_0$ y $p = r \in A$ tenemos que $\omega \in L(N)$, es decir, q_0 está conectado con r para algún $r \in A$ por el camino ω si y sólo si $q_0 \in \delta_{N_R}^*(r, \omega^R)$.

Por como defininimos δ_{N_R} se tiene que $\delta_{N_R}(q_\varepsilon, \varepsilon) = A$, por lo tanto $\omega \in L(M)$ si y sólo si $\varepsilon\omega^R \in L(N_R)$.

Concluimos así que $L^R = L(N_R)$ y por el Teorema de Kleene se tiene que L^R es regular. $\square$

[1] Ver Definición 2.12 John Martin, Introduction to Languages and Theory of Computation, *2010*

Problema 5

Demuestre que el lenguaje de $L = \{0^n 1^m \ : \ n \neq m\}$ no es regular.

Solución: Procederemos por contradicción. Supongamos que L es regular, entonces por el *Pumping Lemma* existe p natural tal que si $s \in L$ con $|s| \geq p$ entonces $s = xyz$ y se satisfacen las siguientes condiciones

1. Para todo $i \geq 0$, $xy^iz \in L$
2. $|y| > 0$
3. $|xy| \leq p$.

Consideremos $s = 0^p 1^{p+p!}$, por la tercer condición se tiene que xy consta de puros 0 en este caso, luego $y = 0^a$ con $a = 1, 2, \ldots, p$, observamos que $a \neq 0$ por la segunda condición.

Notamos que por la primer condición

$$xy^iz = 0^{p-a}0^{ia}1^{p+p!}$$

Sabemos que $a \mid p!$ pues $a = 1, 2, \ldots, p$, luego si $i = \frac{p!}{a} + 1 \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} xy^iz =& 0^{p-a}0^{a(\frac{p!}{a}+1)}1^{p+p!} \\ =& 0^{p-a}0^{p!+a}1^{p+p!} \\ =& 0^{p+p!}1^{p+p!} \in L, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción a la definición de L.

Concluimos así que L no es regular. $\square$