Modelos Estadísticos I	**(Fecha: 10/02/2021)**

Tarea #1

Estudiante: Roberto Vásquez Martínez — *NUA:* 424662

Problema 1

Muestre que:

$$t'y - \frac{(y-\mu)'\Sigma^{-1}(y-\mu)}{2} = t'\mu + \frac{t'\Sigma t}{2} - \frac{(y-\mu-\Sigma t)'\Sigma^{-1}(y-u-\Sigma t)}{2}$$

(Solución)

Notamos que

$$\begin{aligned}\frac{(y-\mu-\Sigma t)'\Sigma^{-1}(y-u-\Sigma t)}{2} =& \frac{[(y-\mu)'\Sigma^{-1}(y-\mu) - 2t'(y-\mu) + t'\Sigma^{t}]}{2}\\ =& \frac{(y-\mu)'\Sigma^{-1}(y-\mu)}{2} + \frac{t'\Sigma t}{2} - t'(y-\mu).\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned}t'\mu + \frac{t'\Sigma t}{2} - \frac{(y-\mu-\Sigma t)'\Sigma^{-1}(y-u-\Sigma t)}{2} =& t'\mu + t'(y-\mu) + \frac{t'\Sigma t}{2} - \frac{t'\Sigma t}{2} - \frac{(y-\mu)'\Sigma^{-1}(y-\mu)}{2}\\ =& t'y - \frac{(y-\mu)'\Sigma^{-1}(y-\mu)}{2},\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar.

$\square$

Problema 2

Suponiendo que y es $N_p(\mu, \sigma^2 I)$ y C es una matriz ortogonal, muestre que Cy es $N_p(C\mu, \sigma^2 I)$

(Solución)

Consideramos C una matriz de $p \times p$. Por un Teorema visto en clase se tiene que

$$Cy \sim N_p(C\mu, C(\sigma^2 I)C').$$

Notamos que

$$\begin{aligned}C(\sigma^2 I)C' =& \sigma^2 CC'\\ =& \sigma^2 I,\end{aligned}$$

pues $CC' = I$ al ser C una matriz ortogonal.
Por lo tanto

$$Cy \sim N_p(C\mu, \sigma^2 I),$$

que es lo que queríamos ver.

$\square$

Problema 3

Considere una variable aleatoria con función generadora de momentos $M(t)$. Pruebe que la segunda derivada de $\ln M(t)$ evaluada en $t = 0$, es la varianza de la variable aleatoria

(Solución)
Sea $g(t) = \ln M(t)$. Derivando obtenemos que

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{M'(t)}{M(t)},$$

y

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} = \frac{M(t)M^{(2)}(t) - (M'(t))^2}{(M(t)^2)} \tag{1.1}$$

Si X es la variable aleatoria con FGM $M(t)$ entonces

$$M(t) = \mathbb{E}[e^{Xt}],$$

luego

$$M(0) = \int_\Omega d\mathbb{P} = 1,$$

de esto y al ser M la FGM de la variable aleatoria X

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2 g(t)}{dt^2}\right|_{t=0} =& M^{(2)}(0) - (M'(0))^2\\ =&\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\\ =&\mathrm{Var}[X],\end{aligned}$$

que es lo que queríamos ver.

$\square$

Problema 4

Dado $W = Y - BX$, pruebe que $\mathrm{Cov}(W, X) = \Sigma_{XY} - B\Sigma_{XX}$

(Solución)
Observamos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(W, X) =& \mathrm{Cov}(Y - BX, X)\\ =&\mathbb{E}[(Y - BX - \mathbb{E}[Y - BX])(X - \mathbb{E}[X])']\\ =&\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y] - (BX - \mathbb{E}[BX]))(X - \mathbb{E}[X])'],\end{aligned}$$

de la linealidad de la esperanza se tiene el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(W,X) =& \mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}[Y])(X-\mathbb{E}[X])'] - \mathbb{E}[(BX-\mathbb{E}[BX])(X-\mathbb{E}[X])']\\ =& \mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}[Y])(X-\mathbb{E}[X])'] - B\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(X-\mathbb{E}[X])']\\ =& \mathrm{Cov}(Y,X) - B\mathrm{Cov}(X,X),\end{aligned}$$

y como $\mathrm{Cov}(Y,X) = \Sigma_{YX}$, $\mathrm{Cov}(X,X) = \Sigma_{XX}$ entonces

$$\mathrm{Cov}(W,X) = \Sigma_{YX} - B\Sigma_{XX},$$

que es lo que queríamos ver.

□

Problema 5

Pruebe que $\mathbb{E}[Y - \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}X] = \mu_Y - \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}\mu_X$ y que

$$\mathrm{Cov}(Y - \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}X) = \Sigma_{YY} - \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}\Sigma_{XY}$$

(Solución)

Observamos que al ser la esperanza un funcional lineal

$$\mathbb{E}[Y - \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}X] = \mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[\Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}X]. \tag{1.2}$$

Supongamos X, Y son vectores aleatorios de dimensiones p y k, respectivamente, luego Σ_{YX} es una matriz de $k \times p$ mientras que Σ_{XX}^{-1} es una matriz de dimensiones $p \times p$, por lo que $\Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}$ es una matriz de dimensión $k \times p$.

Consideramos

$$\Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1} = [C_1, \ldots, C_p],$$

con $C_1, \ldots, C_p \in \mathbb{R}^k$ las columnas de esta matriz, luego si $X = (X_1, \ldots, X_p)$ entonces

$$\Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}X = C_1X_1 + \cdots + C_pX_p,$$

y por la linealidad de la esperanza tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}X] =& \mathbb{E}[C_1X_1 + \cdots + C_pX_p]\\ =& C_1\mathbb{E}[X_1] + \cdots + C_p\mathbb{E}[X_p]\\ =& \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}\mu_X.\end{aligned}$$

De esta igualdad y (1.2)

$$\mathbb{E}[Y - \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}X] = \mu_Y - \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}\mu_X,$$

que es lo que queríamos verificar.

□

Problema 6

Suponga que Y es un vector aleatorio con distribución $N_4(\theta, \Sigma)$, donde

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 5 & -4 \\ 2 & -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Encontrar lo siguiente

(a) La distribución marginal conjunta de Y_1 y Y_3

(Solución)

Consideremos $Y = (Y_1, Y_3)$, intercambiando los valores del vector de medias, y las filas y columnas apropiadas para la matriz de covarianzas tenemos que

$$\mu_Y = (1, 3),$$

y

$$\Sigma_{YY} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Del Teorema 4.4b del Rencher se tiene que la distribución marginal conjunta de (Y_1, Y_3) es $N_2(\mu_Y, \Sigma_{YY})$ como arriba

(b) La distribución marginal de Y_2.

(Solución)

Observamos que la varianza asociada a Y_2 es $\sigma_2 = 6$ mientras que la media es $\mu = 2$, por el Teorema 4.4b tenemos que $Y_2 \sim N(2, 6)$

(c) La distribución de $Z = Y_1 + 2Y_2 - Y_3 + 3Y_4$.

(Solución)

Observamos que

$$Z = a'Y,$$

con $a' = (1, 2, -1, 3)$. Por el Teorema 4.4a del Rencher tenemos que $Z \sim N(a'\theta, a'\Sigma a)$, donde

$$a'\theta = -4,$$

y

$$a'\Sigma a = 79.$$

(d) La distribución conjunta de $Z_1 = Y_1 + Y_2 - Y_3 - Y_4$ y $Z_2 = -3Y_1 + Y_2 + 2Y_3 - 2Y_4$

(Solución)

Observamos que

$$Z_1 = a_1'Y \quad \text{con } a_1' = (1, 1, -1 - 1),$$

y

$$Z_2 = a_2'Y \quad \text{con } a_2' = (-3, 1, 2, -2),$$

por lo cual si

$$A = \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = AY,$$

del Teorema 4.4a del Rencher se sigue que Z se distribuye como $N_2(A\theta, A\Sigma A')$, donde

$$A\theta = (2, 9)',$$

y

$$A\Sigma A' = \begin{bmatrix} 11 & -6 \\ -6 & 154 \end{bmatrix}.$$

(e) $f(y_1, y_2|y_3, y_4)$.

Reetiquetando consideramos $Y = (Y_1, Y_2)$ y $X = (Y_3, Y_4)$, podemos partir la matriz expresar la matriz de covarianzas Σ como

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{YY} & \Sigma_{YX} \\ \Sigma_{XY} & \Sigma_{XX}, \end{bmatrix}$$

donde

$$\Sigma_{YY} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix};\ \Sigma_{YX} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix};\ \Sigma_{XX} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix},$$

mientras que podemos considerar θ como

$$\theta = \begin{bmatrix} \mu_Y \\ \mu_X \end{bmatrix},$$

con

$$\mu_Y = (1, 2)'; \quad \mu_X = (3, -2)'.$$

Por el Teorema 4.4d del Rencher se tiene que $f(y|x)$ es la densidad normal multivariada con media

$$\mathbb{E}[Y|X] = \mu_Y + \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}(x - \mu_X),$$

y matriz de covarianzas

$$\text{Cov}(Y|X) = \Sigma_{YY} - \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}\Sigma_{XY}.$$

Desarrollando las expresiones para la media y varianza condicional se tiene que

$$\begin{aligned} \mu_{Y|X} = \mathbb{E}[Y|X] =& (1, 2)' + \frac{1}{2}(2y_3 + 3y_4, 2y_3 + y_4 - 4)' \\ =& \frac{1}{2}(2y_3 + 3y_4 + 2, 2y_3 + y_4)', \end{aligned}$$

y

$$\Sigma_{Y|X} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Concluimos así que la distribución condicional de Y dado X es $N_2(\mu_{Y|X}, \Sigma_{Y|X})$ por lo que

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2|y_3, y_4) =& f(y|x) \\ =& \frac{1}{4\pi} \exp\left\{ -\frac{(y-\mu_{Y|X})'\Sigma_{Y|X}^{-1}(y-\mu_{Y|X})}{2} \right\}, \end{aligned}$$

con $y = (y_1, y_2)$ que es lo que buscábamos.

(*f*) $f(y_1, y_3|y_2, y_4)$

Reetiquetando consideramos $Y = (Y_1, Y_3)$ y $X = (Y_2, Y_4)$, partiendo la matriz de covarianzas en bloques podemos ver que en este caso

$$\Sigma_{YY} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix};\ \Sigma_{YX} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix};\ \Sigma_{XX} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix},$$

mientras que

$$\mu_Y = (1,3)'; \quad \mu_X = (2,-2)'.$$

Por el Teorema 4.4d del Rencher se tiene que $f(y|x)$ es la densidad normal multivariada con media

$$\mathbb{E}[Y|X] = \mu_Y + \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}(x - \mu_X),$$

y matriz de covarianzas

$$\mathrm{Cov}(Y|X) = \Sigma_{YY} - \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}\Sigma_{XY}.$$

Simplificando las expresiones anteriores

$$\begin{aligned} \mu_{Y|X} = \mathbb{E}[Y|X] =& (1,3)' + \frac{1}{5}(3y_2 + 4y_4 + 2, y_2 - 2y_4 - 6)' \\ =& \frac{1}{5}(3y_2 + 4y_4 + 7, 2y_3 + y_4 + 11)', \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Sigma_{Y|X} =& \Sigma_{YY} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 14 & -7 \\ -7 & 21 \end{bmatrix} \\ =& \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Concluimos así que la distribución condicional de Y dado X es $N_2(\mu_{Y|X}, \Sigma_{Y|X})$ por lo que

$$f(y_1, y_3|y_2, y_4) = \frac{\sqrt{5}}{4\pi} \exp\left\{ -\frac{(y-\mu_{Y|X})'\Sigma_{Y|X}^{-1}(y-\mu_{Y|X})}{2} \right\},$$

con $y = (y_1, y_3)$ que es lo que queríamos ver.

(g) ρ_{13}.

(Solución)
Consideremos $\sigma_{ij} = (\Sigma)_{ij}$, luego

$$\begin{aligned}\rho_{13} =& \frac{\sigma_{13}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{33}}}\\ =& \frac{-1}{\sqrt{4}\sqrt{5}} \approx \ -0.2236.\end{aligned}$$

(h) $\rho_{13.24}$.
Sea $\Sigma_{Y|X}$ la matriz que obtenemos en el inciso f). Considerando esta matriz tenemos que

$$\sigma_{13.24} = 2/5,\ \ \sigma_{11.24} = 6/5,\ \ \sigma_{33.24} = 4/5,$$

por lo que

$$\begin{aligned}\rho_{13.24} =& \frac{\sigma_{13.24}}{\sqrt{\sigma_{11.24}\sigma_{33.24}}}\\ =& \frac{2}{\sqrt{24}}\\ =& \frac{1}{\sqrt{6}} \approx \ 0.4082.\end{aligned}$$

(h) $f(y_1|y_2, y_3, y_4)$.

(Solución)
En este caso si $Y = (Y_1)$ y $X = (Y_1, Y_2, Y_3)$ entonces

$$\mu_Y = 1, \quad \mu_X = (2, 3, -2)',$$

y

$$\Sigma_{YY} = 4;\ \Sigma_{YX} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix};\ \Sigma_{XX} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Del Teorema 4.4d del Rencher se sigue que la distribución condicional de Y dado X es una normal multivariada con media

$$\mu_{Y|X} = \mu_Y + \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}(x - \mu_X),$$

y varianza

$$\Sigma_{Y|X} = \Sigma_{YY} - \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}\Sigma_{XY}.$$

Notamos que

$$\Sigma_{XX}^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 20 & 18 \\ -2 & 18 & 21 \end{bmatrix},$$

a partir de esto simplificamos las expresiones para la media y la varianza obteniendo

$$\begin{aligned}\mu_{Y|X} &= 1 + (1/2, 1/2, 5/4)(y_2 - 2, y_3 - 3, y_4 + 2)' \\ &= 1 + \frac{y_2 - 2}{2} + \frac{y_3 - 3}{2} + \frac{5(y_4 + 2)}{2},\end{aligned}$$

para la media y en el caso de la varianza tenemos

$$\begin{aligned}\Sigma_{Y|X} &= 4 - (1/2, 1/2, 5/4)(2, -1, 2)' \\ &= 4 - 3 = \ 1.\end{aligned}$$

Concluimos que la distribución condicional de Y dado X es $N(\mu_{Y|X}, \Sigma_{Y|X})$ por lo cual

$$f(y_1|y_2, y_3, y_4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{(y_1 - \mu_{Y|X})^2}{2}\right\},$$

que es lo que buscábamos.

$\square$

$\boxed{\textbf{Problema 7}}$

Dado el vector aleatorio $Y \sim N_3(\theta, \Sigma)$, donde

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 \\ \rho & 1 & 0 \\ 0 & \rho & 1 \end{pmatrix},$$

¿para qué valor de ρ se tiene que $Y_1 + Y_2 + Y_3$ y $Y_1 - Y_2 - Y_3$ son estadísticamente independientes?

(Solución)

Sea $Z_1 = Y_1 + Y_2 + Y_3$ y $Z_2 = Y_1 - Y_2 - Y_3$. Notamos que

$$Z_1 = a_1' Y \quad \text{con } a_1' = (1, 1, 1),$$

y

$$Z_2 = a_2' Y \quad \text{con } a_2' = (1, -1, -1).$$

Si tomamos

$$A = \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \end{bmatrix},$$

entonces

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = AY.$$

Por el teorema 4.4a del Rencher se tiene que $Z \sim N_2(A\theta, A\Sigma A')$, donde

$$A\Sigma A' = \begin{bmatrix} 3\rho + 3 & -\rho - 1 \\ -\rho - 1 & 3 - \rho \end{bmatrix},$$

luego Z_1 y Z_2 son independientes si y sólo si

$$\Sigma_{YX} = -\rho - 1 = 0.$$

Por lo tanto Z_1 y Z_2 son estadísticamente independientes si $\rho = -1$.

□

Problema 8

Si Y_1, Y_2 son variables aleatorias tales que Y_1+Y_2 y Y_1-Y_2 son variables aleatorias normal estándar independientes, diga como se distribuyen Y_1 y Y_2.

(Solución)

Sea $Z_1 = Y_1 + Y_2$ y $Z_2 = Y_1 - Y_2$. De la independencia de Z_1, Z_2 se sigue que $Z = (Z_1, Z_2)'$ se distribuye como $N_2(\mathbf{0}, I)$ donde $\mathbf{0}$ es el vector de 0's y I es la matriz identidad de 2×2.

Sea

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Notemos que si $Y = (Y_1, Y_2)$ entonces

$$Y = AZ.$$

Por lo tanto $Y \sim N_2(\mathbf{0}, AIA')$ donde

$$AIA' = AA' = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

De lo que concluimos que Y_1 y Y_2 se distribuyen como una normal de media 0 y varianza $\frac{1}{4}$.

□

Problema 9

Sean $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ una muestra aleatoria de una distribución $N_2(\theta, \Sigma)$. Encuentre la función de densidad conjunta de las medias muestrales $\overline{X}$ y $\overline{Y}$.

(Solución)

Sea $Z_i = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix}$. Sabemos que $Z_i \sim N_2(\theta, \Sigma)$, por lo que si M_i es la FGM de Z_i entonces

$$M_i(t) = \exp\left\{ t'\theta + \frac{t'\Sigma t}{2} \right\}$$

Sea $W = (\overline{X}, \overline{Y})$ notamos que

$$W = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i.$$

Considerando $Z_1, \ldots, Z_n$ variables independientes se tiene que la FGM M_W de W viene dada por

$$\begin{aligned} M(t) =& \mathbb{E}[e^{Wt}] \\ =& \mathbb{E}[e^{\frac{Z_1}{n}t} e^{\frac{Z_2}{n}t} \ldots e^{\frac{Z_n}{n}t}] \\ =& M_1(t/n) M_2(t/n) \ldots M_n(t/n) \\ =& \prod_{i=1}^{n} \exp\left\{ \frac{t'}{n}\theta + \frac{t'\Sigma t}{2n^2} \right\} \\ =& \exp\left\{ t'\theta + t'(\Sigma/n)t \right\}. \end{aligned}$$

Como la FGM caracteriza a la distribución tenemos que $W \sim N_2(\theta, \Sigma/n)$.

Por lo tanto la densidad conjunta f de las medias muestrales es

$$f(w) = \frac{n}{2\pi|\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{n(w-\theta)'\Sigma^{-1}(w-\theta)}{2} \right\}.$$

$\square$