Modelos Estadísticos I (Fecha: 14/04/2021)

Tarea #5

Estudiante: Roberto Vásquez Martínez *NUA:* 424662

Problema 1

Demuestre que

$$(X_{(i)}^T X_{(i)})^{-1} = (X^T X)^{-1} + \frac{(X^T X)^{-1} x_i x_i^T (X^T X)^{-1}}{1 - h_{ii}}. \tag{1.1}$$

(Solución)

Sea $A = X^T X$, suponemos que X de rango completo por lo que A es no singular.

Sea Z la matriz del lado derecho de la identidad que queremos probar reemplazando $X^T X$ por A, es decir

$$Z == A^{-1} + \frac{A^{-1} x_i x_i^T A^{-1}}{1 - h_{ii}}.$$

Sea $W = X_{(i)}^T X_{(i)}$. Queremos probar Z es la inversa de W. Veamos que $WZ = I$. Como $W = A - x_i x_i^T$ entonces simplificando el producto WZ tenemos

$$\begin{aligned} WZ =& I - x_i x_i^T A^{-1} + \frac{AA^{-1} x_i x_i^T A^{-1} - x_i x_i^T A^{-1} x_i x_i^T A^{-1}}{1 - h_i i} \\ =& I - x_i x_i^T A^{-1} + \frac{x_i x_i^T A^{-1} - x_i x_i^T A x_i x_i^T A^{-1}}{1 - h_{ii}}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Observemos que

$$x_i x_i^T A^{-1} - x_i x_i^T A x_i x_i^T A^{-1} = x_i (1 - x_i^T A^{-1} x_i) x_i^T A^{-1}.$$

Por otro lado, sabemos que

$$h_i i = x_i^T X^{-1} x_i,$$

luego

$$x_i x_i^T A^{-1} - x_i x_i^T A x_i x_i^T A^{-1} = x_i (1 - h_{ii}) x_i^T A^{-1}.$$

Sustituyendo esta última expresión en (1.2) obtenemos

$$WZ = I - x_i x_i^T A^{-1} + x_i x_i^T A^{-1} = I.$$

De manera análoga $ZW = I$, por lo que Z es la matriz inversa de W, que es lo que queríamos ver.

□

Problema 2

Use (1.1) para probar

$$y_i - x_i^T \hat{\beta}_{(i)} = \frac{e_i}{1 - h_{ii}}.$$

(Solución)

De la definición

$$\hat{\beta}_{(i)} = (X_{(i)}^T X_{(i)})^{-1} X_{(i)}^T Y_{(i)},$$

donde $Y_{(i)}$ es el vector respuesta eliminando la fila i-ésima.

De (1.1) y simplificando las expresiones matriciales correspondientes obtenemos que

$$y_i - x_i^T \hat{\beta}_{(i)} = y_i - x_i^T A^{-1} X_{(i)}^T Y_{(i)} - \frac{x_i^T A^{-1} x_i x_i^T A^{-1} X_{(i)}^T Y_{(i)}}{1 - h_{ii}},$$

como $h_i = x_i^T A^{-1} x_i$ entonces

$$\begin{aligned} y_i - x_i^T \hat{\beta}_{(i)} =& y_i - \frac{(1 - h_{ii}) x_i^T A^{-1} X_{(i)}^T Y_{(i)} + h_{ii} x_i^T A^{-1} X_{(i)}^T Y_{(i)}}{1 - h_{ii}} \\ =& y_i - \frac{x_i^T A^{-1} X_{(i)}^T Y_{(i)}}{1 - h_{ii}}. \end{aligned}$$

Incorporando el sumando y_i al numerador del segundo sumando de la expresión anterior tenemos que

$$\begin{aligned} y_i - x_i^T \hat{\beta}_{(i)} =& \frac{y_i - y_i h_{ii} - x_i^T A^{-1} X_{(i)}^T Y_{(i)}}{1 - h_{ii}} \\ =& \frac{y_i - y_i x_i^T A^{-1} x_i - x_i^T A^{-1} X_{(i)}^T Y_{(i)}}{1 - h_{ii}}. \end{aligned}$$

Considerando como factor común a $x_i^T A^{-1}$ obtenemos

$$y_i - x_i^T \hat{\beta}_{(i)} = \frac{y_i - x_i^T A^{-1} (x_i y_i + X_{(i)}^T Y_{(i)})}{1 - h_{ii}}.$$

Observamos que

$$X_{(i)}^T Y_{(i)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j y_j,$$

luego

$$x_i y_i + X_{(i)}^T Y_{(i)} = X^T Y. \tag{1.3}$$

Por lo tanto

$$y_i - x_i^T \hat{\beta}_{(i)} = \frac{y_i - x_i^T A^{-1} X^T Y}{1 - h_{ii}} \tag{1.4}$$

Si $\mathbf{e}$ es el vector de residuos entonces

$$\mathbf{e} = Y - X\hat{\beta} = Y - XA^{-1}X^T Y,$$

y la i-ésima entrada de este vector es

$$e_i = y_i - x_i^T A^{-1} X^T Y,$$

de esto y (1.4) se sigue

$$y_i - x_i^T \hat{\beta}_{(i)} = \frac{e_i}{1 - h_{ii}},$$

que es lo que queríamos probar.

$\square$

Problema 3

Use (1.1) para probar que
$$D_i = r_i^2\left(\frac{h_{ii}}{1-h_{ii}}\right)\left(\frac{1}{p'}\right).$$

(Solución)

Sabemos que
$$\hat{\beta}_{(i)} = (X_{(i)}^T X_{(i)})^{-1} X_{(i)}^T Y_{(i)},$$

de (1.1) obtenemos que
$$\hat{\beta}_{(i)} = (A^{-1})X_{(i)}^T Y_{(i)} + \frac{(A^{-1}x_i x_i^T A^{-1})X_{(i)}^T Y_{(i)}}{1-h_{ii}}.$$

En el problema anterior notamos que $X_{(i)}^T Y_{(i)} = X^T Y - x_i y_i$, sustituyendo en la expresión anterior obtenemos
$$\hat{\beta}_{(i)} = A^{-1}X^T Y - A^{-1}x_i y_i + \frac{A^{-1}x_i x_i^T A^{-1} X^T Y - A^{-1}x_i x_i^T A^{-1} x_i y_i}{1-h_{ii}}.$$

Como $\hat{\beta} = A^{-1}X^T Y$, y $h_{ii} = x_i^T A^{-1} x_i$ entonces
$$\hat{\beta}_{(i)} = \hat{\beta} - A^{-1}x_i y_i + \frac{A^{-1}x_i x_i^T \hat{\beta} - A^{-1}x_i h_{ii} y_i}{1-h_{ii}},$$

incorporando el sumando $A^{-1}x_i y_i$ al numerador del tercer sumando de la expresión anterior se tiene que
$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{(i)} =& \hat{\beta} + \frac{-A^{-1}x_i y_i + A^{-1}x_i y_i h_{ii} + A^{-1}x_i x_i^T \hat{\beta} - A^{-1}x_i h_{ii} y_i}{1-h_{ii}}\\ =& \hat{\beta} - \frac{A^{-1}x_i y_i - A^{-1}x_i x_i^T \hat{\beta}}{1-h_{ii}}.\end{aligned}$$

Y considerando como factor común $A^{-1}x_i$ en el número de la fracción además notando $e_i = y_i - x_i^T\hat{\beta}$ tenemos
$$\hat{\beta}_{(i)} = \hat{\beta} - A^{-1}x_i \frac{e_i}{1-h_{ii}}. \tag{1.5}$$

De esta identidad obtenemos que
$$\hat{\beta}_{(i)} - \hat{\beta} = -Ax_i \frac{e_i}{1-h_{ii}}. \tag{1.6}$$

Sabemos
$$D_i = \frac{(\hat{\beta}_{(i)-\hat{\beta}})^T (X^T X)(\hat{\beta}_{(i)} - \hat{\beta})}{p's^2},$$

de (1.6) se sigue que

$$\begin{aligned} D_i =& \frac{e_i^2}{(1-h_{ii})^2} x_i^T A^{-1} A A^{-1} x_i \frac{1}{p' s^2} \\ =& \left(\frac{e_i^2}{s^2(1-h_{ii})} \right) \cdot \left(\frac{h_{ii}}{1-h_{ii}} \right) \cdot \left(\frac{1}{p'} \right), \end{aligned}$$

como

$$r_i = \frac{e_i}{s\sqrt{1-h_{ii}}},$$

entonces

$$D_i = r_i^2 \cdot \left(\frac{h_{ii}}{1-h_{ii}} \right) \cdot \left(\frac{1}{p'} \right),$$

que es la identidad que queríamos probar.

$\square$

Problema 4

Use (1.1) para probar que

$$t_i = r_i \left(\frac{n - p' - 1}{n - p' - r_i^2} \right)^{1/2} = \frac{e_i}{\hat{\sigma}_{(i)} \sqrt{1 - h_{ii}}}. \tag{1.7}$$

(Solución)

Como

$$r_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma}\sqrt{1 - h_{ii}}},$$

entonces probar (1.7) es equivalente a verificar

$$\hat{\sigma}_{(i)}^2 = \left(\frac{n - p' - r_i^2}{n - p' - 1} \right) \hat{\sigma}^2. \tag{1.8}$$

Notemos que

$$(n - p - 1)\hat{\sigma}_{(i)}^2 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (y_j - x_j^T \hat{\beta}_{(i)})^2,$$

de (1.5) se tiene que y sumando el término $y_i - x_i^T \hat{\beta}_{(i)}$ tenemos

$$(n - p - 1)\hat{\sigma}_{(i)}^2 = \sum_{j=1}^{n} y_i - x_i^T \left(\hat{\beta} - A^{-1} x_i \frac{e_i}{1 - h_{ii}} \right) - (y_i - x_i^T \hat{\beta}_{(i)})^2.$$

Notando $e_i = y_i - x_i^T \hat{\beta}$, $h_{ij} = h_{ji} = x_j^T A^{-1} x_i$ y por la expresión del problema 2 se sigue

$$(n - p - 1)\hat{\sigma}_{(i)}^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(e_j + h_{ij} \frac{e_i}{1 - h_{ii}} \right)^2 - \frac{e_i^2}{(1 - h_{ii})^2}$$

Desarrollando el binomio al cuadrado y notando que $(n - p)\hat{\sigma} = \sum_{j=1}^{n} e_j^2$ se tiene que

$$(n - p - 1)\hat{\sigma}_{(i)}^2 = (n - p)\hat{\sigma}^2 + 2 \frac{e_i}{1 - h_{ii}} \sum_{j=1}^{n} h_{ij} e_j + \frac{e_i^2}{(1 - h_{ii})^2} \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^2 - \frac{e_i^2}{1 - h_{ii}}.$$

Si $\mathbf{e}$ es el vector de residuos entonces

$$\mathbf{e} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{Y},$$

donde $\mathbf{H}$ es la matriz sombrero, luego $\mathbf{e} \in \mathrm{Col}(\mathbf{H})^{\perp}$, por lo que

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij} e_j = 0,$$

simplificando con esto tenemos

$$(n-p-1)\hat{\sigma}^2_{(i)} = (n-p)\hat{\sigma}^2 + \frac{e_i^2}{(1-h_{ii})^2}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}^2 - \frac{e_i^2}{1-h_{ii}}.$$

Sea $\mathbf{H}^2_{ii}$ la entrada en la i-ésima fila e i-ésima columna. Como $\mathbf{H}^2 = \mathbf{H}$ y al ser $\mathbf{H}$ símétrica se tiene la siguiente identidad

$$h_{ii} = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}h_{ji} = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^2.$$

Sustituyendo en la expresión anterior

$$(n-p-1)\hat{\sigma}^2_{(i)} = (n-p)\hat{\sigma}^2 - \frac{e_i^2}{1-h_{ii}}.$$

Como

$$r_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma}\sqrt{1-h_{ii}}},$$

entonces

$$(n-p-1)\hat{\sigma}^2_{(i)} = (n-p)\hat{\sigma}^2 - r_i^2\hat{\sigma}^2, \tag{1.9}$$

luego

$$\hat{\sigma}^2_{(i)} = \left(\frac{n-p-r_i^2}{n-p-1}\right)\hat{\sigma}^2. \tag{1.10}$$

Sabemos que p es el número de columnas de X, y como suponemos X tiene rango completo entonces $\mathrm{rk}(X) = p$, por lo que $\mathrm{rk}(\mathbf{H}) = p$, pues $\mathrm{Col}(\mathbf{H}) = \mathrm{Col}(X)$.

Como $\mathbf{H}$ es una matriz de proyección entonces sus valores propios son 0 o 1, así el número diferente de valores propios distintos de 0 es el rango de la matriz $\mathbf{H}$ el cual vimos es p. De esta observación se y recordando la traza de una matriz es la suma de sus valores propios obtenemos

$$p = \mathrm{tr}(\mathbf{H}) = p',$$

y p' la habíamos definido como la traza de la matriz de $\mathbf{H}$.

De esto y (1.10) se sigue

$$\hat{\sigma}^2_{(i)} = \left(\frac{n-p'-r_i^2}{n-p'-1}\right)\hat{\sigma}^2,$$

que como vimos antes es equivalente a probar (1.7), que es lo que queríamos probar.

□

Problema 5

Probar que

$$\frac{r_i^2}{n-p} \sim \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{n-p-1}{2}\right).$$

(Solución)

En este problema utilizaremos los siguientes hechos que enunciaremos como lemas

Lema 0.1 *Si $Y \sim \chi^2_{(m)}$ y $Z \sim \chi^2_{(n)}$ además Y y Z son independientes entre si entonces*

$$\frac{Y}{Y+Z} \sim Beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right).$$

Lema 0.2 *Si $X \sim Beta(\alpha, \beta)$ entonces*

$$1 - X \sim Beta(\beta, \alpha)$$

Regresando a la solución del problema origina, de (1.9) tenemos

$$r_i^2 \hat{\sigma}^2 = (n-p)\hat{\sigma}^2 - (n-p-1)\hat{\sigma}^2_{(i)}. \tag{1.11}$$

Dividiendo la expresión anterior por $\hat{\sigma}^2$ se tiene

$$r_i^2 = (n-p) - \frac{(n-p-1)\hat{\sigma}^2_{(i)}}{\hat{\sigma}^2},$$

y dividiendo por $(n-p)$ además de dividiendo el numerador y el denominador por la varianza σ^2

$$\begin{aligned} \frac{r_i^2}{n-p} =& 1 - \frac{(n-p-1)\hat{\sigma}^2_{(i)}}{(n-p)\hat{\sigma}^2} \\ =& 1 - \frac{(n-p-1)\hat{\sigma}^2_{(i)}/\sigma^2}{(n-p)\hat{\sigma}^2/\sigma^2}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Sea $Y = (n-p-1)\hat{\sigma}^2_{(i)}/\sigma^2$ y

$$Z = r_i^2 \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{e_i^2}{\sigma^2(1-h_{ii})}.$$

Sabemos que $V(e_i) = \sigma^2(1-h_{ii})$, y por el supuesto de normalidad en los residuos en la regresión tenemos que $Z \sim \chi^2_{(1)}$.

Por otro lado, notamos que

$$\begin{aligned} Y =& (n-p-1)\hat{\sigma}^2_{(i)}/\sigma^2 \\ =& \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(y_j - x_j^T \hat{\beta}_{(i)})^2}{\sigma^2} \end{aligned}$$

y como $y_j - x_j^T\hat{\beta}_{(i)}$ es el j-ésimo de la regresión quitando la i-ésima observación este residuo tiene varianza σ^2, de igual forma por el supuesto de normalidad tenemos que $Y \sim \chi^2_{(n-p-1)}$.

Observamos que Y y Z son independientes pues suponemos las n observaciones son independientes entre sí.

De (1.11) se sigue que

$$(n-p)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = Y + Z.$$

Del lema (0.1) se sigue

$$\frac{Y}{Y+Z} \sim \text{Beta}\left(\frac{n-p-1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

por el lema (0.2) y (1.12) concluimos

$$\frac{r_i^2}{n-p} = 1 - \frac{Y}{Y+Z} \sim \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{n-p-1}{2}\right),$$

que es lo que queríamos probar.

$\square$

Problema 6

Supongamos que tenemos el modelo de regresión

$$y_i = \beta_1 + x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

donde no hay intercepto y además las covariables x_1 y x_2 y la respuesta y están escaladas para tener longitud 1.

Hacer lo siguiente

(a) Pruebe que los estimadores MC de β_1 y β_2 son,

$$\hat{\beta}_1 = \frac{r_{1y} - r_{12}r_{2y}}{1 - r_{12}^2}, \quad \text{y} \quad \hat{\beta}_2 = \frac{r_{2y} - r_{12}r_{1y}}{1 - r_{12}^2},$$

donde r_{12} es la correlación entre x_1, x_2 y r_{jy} es la correlación entre x_j y y, para $j = 1, 2$.

(Solución)

Para evitar confusión denotaremos por $\mathbf{x}_j$ al vector de observaciones de la j-ésima variable independiente con $j = 1.2$ y por $\mathbf{y}$ al vector de valores de la variable respuesta.

Sea $\overline{\mathbf{x}}_j$ la media del vector $\mathbf{x}_j$ y $\overline{\mathbf{y}}$ la media del vector $\mathbf{y}$.

De lás hipótesis de el problema se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_j =& 1 \text{ para } j = 1, 2. \\ \mathbf{y}^T \mathbf{y} =& 1. \end{aligned}$$

Además debemos suponer que

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{x}}_j =& 0 \text{ para } j = 1, 2. \\ \overline{\mathbf{y}} =& 0 \end{aligned}$$

Si x_{kj} denota la k-ésima entrada del vector $\mathbf{x}_j$ entonces

$$\begin{aligned} r_{12} =& \frac{\sum_{k=1}^n (x_{k1} - \overline{\mathbf{x}}_1)(x_{k2} - \overline{\mathbf{x}}_2)}{\left[\sum_{k=1}^n (x_{k1} - \overline{\mathbf{x}}_1)^2 \sum_{k=1}^n (x_{k2} - \overline{\mathbf{x}}_2)\right]^{1/2}} \\ =& \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2, \end{aligned}$$

de manera análoga vemos que

$$r_{jy} = \mathbf{x}_j^T \mathbf{y} \text{ para } j = 1, 2.$$

Por otro lado, si $X = [\mathbf{x}_1 \;\; \mathbf{x}_2]$ es la matriz de diseño entonces

$$\begin{aligned} X^T X &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_2^T x_1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{12} & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

obteniendo la inversa de esta matriz se tiene

$$(X^TX)^{-1} = \frac{1}{1-r_{12}^2}\begin{bmatrix} 1 & -r_{12} \\ -r_{12} & 1 \end{bmatrix}$$

Así el estimador de mínimos cuadrados es

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} =& [\hat{\beta}_1 \quad \hat{\beta}_2]^T \\
=& \frac{1}{1-r_{12}^2}\begin{bmatrix} 1 & -r_{12} \\ -r_{12} & 1 \end{bmatrix} X^T\mathbf{y} \\
=& \frac{1}{1-r_{12}^2}\begin{bmatrix} 1 & -r_{12} \\ -r_{12} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T\mathbf{y} \\ \mathbf{x}_2^T\mathbf{y} \end{bmatrix} \\
=& \frac{1}{1-r_{12}^2}\begin{bmatrix} 1 & -r_{12} \\ -r_{12} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1y} \\ r_{2y} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Desarrollando la última igualdad podemos concluir que

$$\hat{\beta}_1 = \frac{r_{1y} - r_{12}r_{2y}}{1-r_{12}^2}, \quad \text{y} \quad \hat{\beta}_2 = \frac{r_{2y} - r_{12}r_{1y}}{1-r_{12}^2},$$

que es lo que queríamos probar.

(b) Pruebe que cuando $|r_{12}| \to 1$, $V(\hat{\beta}_j) \to \infty$ para $j = 1, 2$ u además, se tiene que $\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \to \pm\infty$.

(Solución)
Sabemos que

$$\begin{aligned}
V(\hat{\beta}) =& \sigma^2(X^TX)^{-1} \\
=& \frac{\sigma^2}{1-r_{12}^2}\begin{bmatrix} 1 & -r_{12} \\ -r_{12} & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$V(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{1-r_{12}^2},$$

de lo que se sigue

$$V(\hat{\beta}_j) \to \infty \;\; \text{cuando} \;\; |r_{12}| \to 1,$$

pues al ser r_{12} una correlación $|r_{12}| \leq 1$.
De la expresión que tenemos para $V(\hat{\beta})$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) =& \frac{-\sigma^2 r_{12}}{1-r_{12}^2} \\
=& \frac{\sigma^2}{r_{12} - \frac{1}{r_{12}}}
\end{aligned}$$

Como $|r_{12}| \leq 1$ entonces debemos considerar el limite por la izquierda de 1 y por la derecha de -1.

Notamos que si $r_{12} \in (0,1)$ entonces

$$r_{12} - \frac{1}{r_{12}} < 0,$$

luego

$$\lim_{r_{12} \to 1^-} \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = -\infty,$$

si $r_{12} \in (-1,0)$ entonces

$$r_{12} - \frac{1}{r_{12}} > 0,$$

luego

$$\lim_{r_{12} \to 1^-} \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \infty.$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \to \pm\infty \quad \text{cuando} \quad |r_{12}| \to 1.$$

(c) Pruebe que la multicolinealidad tiene a producir estimadores MC que son muy grandes en valor absoluto. Para probar esto, considera la distancia cuadrática de $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ al vector verdadero de valores de los parámetros $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, esto es, $L^2 = (\hat{\beta} - \beta)^T(\hat{\beta} - \beta)$ y pruebe que $\mathbb{E}[L^2] \to \infty$ cuando $|r_{12}| \to 1$.

(Solución)
Notamos que

$$\begin{aligned} L^2 =& (\hat{\beta} - \beta)^T(\hat{\beta} - \beta) \\ =& \hat{\beta}^T\hat{\beta} - \hat{\beta}^T\beta - \beta^T\hat{\beta} + \beta^T\beta^T. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{E}[\hat{\beta}] = \beta$ por la linealidad de la esperanza tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L^2] =& \mathbb{E}[\hat{\beta}^T\hat{\beta}] - 2\beta^T\mathbb{E}[\hat{\beta}] + \mathbb{E}[\beta^T\beta] \\ =& \mathbb{E}[\hat{\beta}^T\hat{\beta}] - \beta^T\beta \\ =& \mathbb{E}[\hat{\beta}_1^2] + \mathbb{E}[\hat{\beta}_2^2] - \beta^T\beta \\ =& \mathbb{E}[\hat{\beta}_1^2] + \mathbb{E}[\hat{\beta}_2^2] - \beta_1^2 - \beta_2^2 \end{aligned}$$

Notamos que para $j = 1, 2$

$$\mathbb{E}[\hat{\beta}_j^2] = V[\hat{\beta}_j] + (\mathbb{E}[\hat{\beta}_j])^2,$$

luego por el inciso anterior

$$\mathbb{E}[\hat{\beta}_j^2] = \frac{\sigma^2}{1 - r_{12}^2} + \beta_j^2.$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}[L^2] = 2 \cdot \frac{\sigma^2}{1 - r_{12}^2} \to \infty,$$

cuando $|r_{12}| \to 1$, que es lo que queríamos probar.

$\square$