Pruebas de Hipótesis.

Una prueba de hipótesis es una v.a. $T(X)$ que toma valores en $[0,1]$
estadístico

Cuando $X = x$ (valor observado). Rechazamos H_0 con probabilidad $T(x)$ y aceptamos H_0 con probabilidad $1 - T(x)$

Obs. Si $T(X) = 0$ ó 1 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \dot{\cup} \mathcal{P}_1$ casi seguramente donde $\mathcal{P}_0$ son las medidas de probabilidad correspondientes a H_0 (hipótesis nula) y $\mathcal{P}_1$ las que conforman a la hipótesis alternativa. Decimos que $T(X)$ es una prueba de hipótesis no aleatoria

Def (Función Poder)
La función poder de la prueba T se define como

$$\beta_T(P) = \mathbb{E}_P(T(X)) \quad \text{para} \quad P \in \mathcal{P}$$

Obs.

Para $P \in \mathcal{P}_0$, $\beta_T(P) = \alpha \leftarrow$ Error Tipo I (α)

probabilidad de rechazar H_0 dado que es cierta

Para $P \in \mathcal{P}_1$, $\beta_T(P) = 1 - \beta \leftarrow$ donde β es la probabilidad de Error Tipo II

Lo anterior es la definición general de la función poder. Cuando $T(X) \in \{0,1\}$, es decir es un test no aleatorio lo anterior equivale a

$$\beta_T(P) = \mathbb{E}_P(T(X)) = P(T(X) = 1)$$

que es el riesgo asociado a la función de pérdida 0-1.

De la última observación notamos lo siguiente

$$\alpha = \mathbb{P}[\text{Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ cierta}] = \beta_T(P) \quad \text{con } P \in \mathcal{P}_0$$

$$1 - \beta = \mathbb{P}[\text{Rechazar } H_0 \mid H_1 \text{ cierta}] = \beta_T(P) \quad \text{con } P \in \mathcal{P}_1$$

Obs Si $\mathcal{P}$ es una familia paramétrica, es decir,

$$\mathcal{P} = \{ P_\theta \mid \theta \in \Theta \}$$

entonces las pruebas de hipótesis se definen respecto a los parametros $\theta \in \Theta$.

El problema al momento de plantear una prueba de hipótesis es minimizar α y β, sin embargo esto no se puede hacer simultaneamente con un tamaño de muestra fijo.

Ejemplo: Supongamos X es muestra aleatoria de una distribución Binomial(θ, n) con $\theta \in (0,1)$ desconocido y $n > 1$ fijo. Consideremos la prueba de hipótesis

$$H_0 : \theta \in (0, \theta_0] \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \in (\theta_0, 1].$$

con $\theta_0 \in (0,1)$ fijo.

Supongamos solo estamos interesados en la siguiente clase de pruebas no aleatorias

$$\mathcal{F} = \{ T_j : j = 0, 1, \dots, n-1 \} \quad \text{con}$$

$$T_j(X) = \mathbb{1}_{\{j+1, \dots, n\}}(X).$$

Observamos que el riesgo respecto a la función de pérdida 0-1

$$R_{T_j}(\theta) = P_\theta[T_j(X) = 1]\, \mathbb{1}_{(0,\theta_0]}(\theta) + P_\theta[T_j(X)=0]\, \mathbb{1}_{(\theta_0,1]}(\theta)$$

$$= \underbrace{P_\theta[X > j]}_{\alpha}\, \mathbb{1}_{(0,\theta_0]}(\theta) + \underbrace{P_\theta[X \leq j]}_{\beta}\, \mathbb{1}_{(\theta_0,1)}(\theta)$$

Notemos que para $0 \leq k < j \leq n-1$

$$R_{T_j}(\theta) - R_{T_k}(\theta) = \begin{cases} -\mathbb{P}_\theta[k < X \leq j] < 0 & \theta \in (0, \theta_0] \\ \mathbb{P}_\theta[k < X \leq j] > 0 & \theta \in (\theta_0, 1) \end{cases}$$

luego no existe regla admisible en $\mathcal{F}$.

Por lo tanto el enfoque es

$$\underbrace{\max_{P \in \mathcal{P}_1} \beta_T(P)}_{\text{minimizar error tipo II}} \quad \text{sujeto a} \quad \overbrace{\sup_{P \in \mathcal{P}_0} \beta_T(P)}^{\text{Tamaño de la prueba}} \leq \underbrace{\alpha}_{\text{nivel de significancia}}$$

Ejemplo 2: $U_1, \dots, U_n \sim \mathcal{U}(0, \theta)$

Sea $W = \max\{U_1, \dots, U_n\}$ y consideremos

$$H_0: \theta = 1 \quad \text{vs} \quad \theta > 10.$$

Observamos

$$\mathbb{P}_\theta[W \leq w] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta[U_i \leq w] = \left(\frac{w}{\theta}\right)^n$$

Consideramos la región de rechazo.

$$\{ w \in \mathbb{R}^+ \mid w > q_{1-\alpha} \}$$

donde $q_{1-\alpha}$ es el cuantil de probabilidad $1-\alpha$ de W bajo H_0.

$$q_{1-\alpha} = \sqrt[n]{1-\alpha}$$