Integración Monte Carlo

Roberto Vásquez Martínez

Universidad de Guanajuato

November 25, 2019

Contenidos

Antecedentes Históricos

- Los métodos Monte Carlo son técnicas numéricas las cuales se basan en muestreos aleatorios para aproximar sus resultados.

Antecedentes Históricos

- Los métodos Monte Carlo son técnicas numéricas las cuales se basan en muestreos aleatorios para aproximar sus resultados.
- El término "Monte Carlo" se origina en *Los Alamos National Laboratory* a finales de la decada de $1940'$s durante el desarrollo de la bomba atómica.

Antecedentes Históricos

- Los métodos Monte Carlo son técnicas numéricas las cuales se basan en muestreos aleatorios para aproximar sus resultados.
- El término "Monte Carlo" se origina en *Los Alamos National Laboratory* a finales de la decada de $1940'$s durante el desarrollo de la bomba atómica.
- El algoritmo VEGAS fue propuesto por Peter Lepage en 1978 como una mejora a las estimaciones del Método Monte Carlo usual

El problema

Queremos hallar

$$F = \int_a^b f(x)dx.$$

El problema

Queremos hallar

$$F = \int_a^b f(x)dx.$$

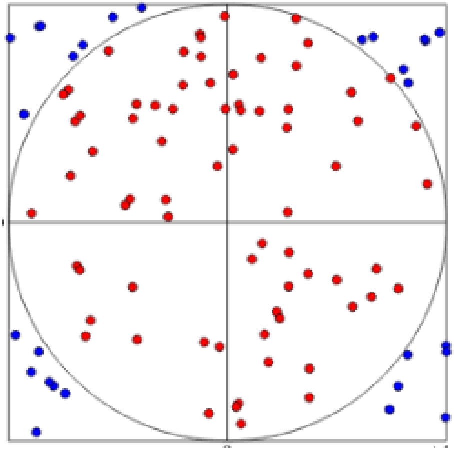
Podemos aproximar esta integral através de

$$F_n = (b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$$

En general el estimador se calcula con un muestreo uniforme en la región de integración.

Ejemplo: Estimación de π

Integramos la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ en el intervalo $[-1, 1]$.



Notemos que el valor esperado de F_n es en efecto F. De la **Ley Fuerte de los grades números** se tiene que

$$P[\lim_{n\to\infty} F_n = F] = 1,$$

por lo que en el límite podemos garantizar que tenemos el resultado correcto.

Error en la estimación

Si $\sigma^2 = \mathrm{Var}(f(X))$ entonces por el **Teorema Central del Límite** para un nivel de confianza de $\delta = n\sigma$ se tiene que

$$\lim_{N\to\infty} P\left(-n\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < F_N - F < n\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) = \int_{-n}^{n} \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Error en la estimación

Si $\sigma^2 = \mathrm{Var}(f(X))$ entonces por el **Teorema Central del Límite** para un nivel de confianza de $\delta = n\sigma$ se tiene que

$$\lim_{N\to\infty} P\left(-n\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < F_N - F < n\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) = \int_{-n}^{n} \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Considerando una desviación típica

$$|F_N - F| \approx \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

Error en la estimación

- El factor $\frac{1}{\sqrt{N}}$ no puede ser del todo satisfactorio.

Error en la estimación

- El factor $\frac{1}{\sqrt{N}}$ no puede ser del todo satisfactorio.
- Podemos realizar mejoras a este método logrando una reducción de el factor σ^2, es decir, una **reducción de varianza**

Muestreo por importancia

Consideremos el cambio de variable

$$\int f dV = \int \frac{f}{g} g dV = \int h g dV,$$

con g una densidad de probabilidad. Así podemos integrar f apartir de integrar h considerando una muestra generada a partir de la densidad g.

Muestreo por importancia

Consideremos el cambio de variable

$$\int f dV = \int \frac{f}{g} g dV = \int h g dV,$$

con g una densidad de probabilidad. Así podemos integrar f apartir de integrar h considerando una muestra generada a partir de la densidad g.

Observación.

Lo que sugerimos es en lugar de generar una colección de variables aleatorias con distribución uniforme es generar estas variables aleatorias a partir de una densidad g más apropiada.

Muestreo por importancia

El estimador en este caso es

$$H_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_i)}{g(x_i)}$$

Muestreo por importancia

El estimador en este caso es

$$H_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{f(x_i)}{g(x_i)}$$

El g ideal

Se puede probar que el g óptimo es $g(x) = \frac{|f(x)|}{\int |f(x)| dV}$, es decir, $g \propto |f|$.

Muestreo Estratificado

Este método se basa en partir la región de integración y estimar la integral en cada región con el Método Monte Carlo usual.

VEGAS para una variable

- Fue propuesto por Peter Lepage en 1978.

VEGAS para una variable

- Fue propuesto por Peter Lepage en 1978.
- Este método combina muestreo estratificado y muestro por importancia para obtener una mejor aproximación al problema original.

VEGAS vs PLANE Monte Carlo

Compararemos el desempeño de VEGAS y Plane Monte Carlo al calcular la integral de las siguientes funciones

$$
\begin{aligned}
f_1(x) =& \sqrt{1-x^2}, \\
f_2(x) =& \frac{1}{x}, \\
f_3(x) =& \tan x,
\end{aligned}
$$

en los intervalos $[-1,1]$, $[1,e]$ y $[0,\frac{\pi}{4}]$, respectivamente.

Valores reales

Sabemos que los valores reales en cada caso son

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f_1(x) =& \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \approx 1.57079, \\
\int_{1}^{e} f_2(x) =& 1, \\
\int_{0}^{\pi/4} f_3(x) =& \frac{\log(2)}{2} \approx 0.346573,
\end{aligned}
$$

Resultados PLANE Monte Carlo

Los resultados que obtuvimos a partir del método PLANE Monte Carlo fueron:

```
El valor de pi/2 es: 1.56965
El error en la estimacion es: 0.00115055
El valor de ln(e) es: 1.00264
El error en la estimacion es: 0.00263956
El valor de ln(2)/2 es: 0.346916
El error en la estimacion fue de: 0.000342268
```

Resultados VEGAS

Los resultados que obtuvimos a partir de nuestra implementación del algoritmo VEGAS fueron:

```
El valor de pi/2: 1.5708
El error en la estimación fue:1.0673e-06
El valor de ln(e) es: 0.99999
El error en la estimación fue: 5.2191e-06
El valor de ln(2)/2 es: 0.34658
El error en la estimación fue: 5.291e-06
```

Observaciones

- VEGAS obtiene mejores estimaciones que PLANE Monte Carlo con menos evaluaciones.

Observaciones

- VEGAS obtiene mejores estimaciones que PLANE Monte Carlo con menos evaluaciones.
- PLANE Monte Carlo necesita un gran número de muestras para obtener una aproximación aceptable.

Observaciones

- VEGAS obtiene mejores estimaciones que PLANE Monte Carlo con menos evaluaciones.
- PLANE Monte Carlo necesita un gran número de muestras para obtener una aproximación aceptable.
- Cada uno de estos métodos se puede generalizar a más variables y el error en la estimación no depende de la dimensión del integrando.

Monte Carlo en varias variables

Implementamos PLANE Monte Carlo para calcular la integral de una función en varias variables.
A manera de ejemplo calculamos el volumen de la esfera unitaria y el toro de radio mayor 2 y radio menor 1.

```
El volumen de la esfera unitaria es: 4.19437
El error es: 0.00399527
El volumen del toro de radio mayor 2 y radio menor 1 e
El error es: 0.0834826.
```

Puntos a favor

- El valor del error siempre se puede calcular.

Puntos a favor

- El valor del error siempre se puede calcular.
- La función a integrar no necesita ser continua.

Puntos a favor

- El valor del error siempre se puede calcular.
- La función a integrar no necesita ser continua.
- La tasa de convergencia no depende de la dimensión del integrando.

Puntos a favor

- El valor del error siempre se puede calcular.
- La función a integrar no necesita ser continua.
- La tasa de convergencia no depende de la dimensión del integrando.
- EL algoritmo VEGAS es adaptativo, es decir, concentra su atención en las regiones de mayora aporte a la integral.

Puntos en contra

- PLANE Monte Carlo necesita de muchas evaluaciones para obtener un buen resultado.

Puntos en contra

- PLANE Monte Carlo necesita de muchas evaluaciones para obtener un buen resultado.
- VEGAS en varias dimensiones supone que la la densidad óptima se puede factorizar en las densidades marginales lo que puede provocar un gran error en la estimación para algunas funciones.

Puntos en contra

- PLANE Monte Carlo necesita de muchas evaluaciones para obtener un buen resultado.
- VEGAS en varias dimensiones supone que la la densidad óptima se puede factorizar en las densidades marginales lo que puede provocar un gran error en la estimación para algunas funciones.
- Hay mejore algoritmos para una variable.

Puntos en contra

- PLANE Monte Carlo necesita de muchas evaluaciones para obtener un buen resultado.
- VEGAS en varias dimensiones supone que la la densidad óptima se puede factorizar en las densidades marginales lo que puede provocar un gran error en la estimación para algunas funciones.
- Hay mejore algoritmos para una variable.
- Los métodos Monte Carlo suponen que la esperanza respectiva es finita, lo que no siempre es válido.

Referencias

Lepage, G. (1978).
"New Algorithm for Adaptive Multidimensional Integration".
Journal of Computational Physics, vol.27:pp 192–203.

Owen, A. B. (2013).
Monte Carlo theory, methods and examples.

Press W., T. S. (2007).
Numerical Recipes in C.
Cambridge Press.

The End