Université Paris-Dauphine PSL
Année 2025-2026

ANALYSE 4

Polycopié de Daniela Tonon,
version modifiée par Olivier Glass,
...et adaptée par François Simenhaus

François Simenhaus
simenhaus@ceremade.dauphine.fr
Bureau F424
Code equipe Teams : lociby2
$N = 0,4CC + 0,6E$ avec $0,4CC = 0,1cc + 0,3P$

Table des matières

1 Rappels sur les espaces métriques

Dans cette partie nous proposons des rappels sur la topologie des espaces métriques que vous avez étudiée dans le cours Analyse 3 (S3). Il est indispensable de très bien maitriser ces notions qui vous serviront bien sûr pour la suite du cours mais plus largement pour toutes vos études de mathématiques. Elles sont en effet centrales et indispensables pour de nombreux thèmes que vous aborderez cette année et les suivantes.

Le début du chapitre est organisé comme une collection des définitions et résultats principaux. De nombreuses démonstrations ont été omises : nous en verrons certaines au tableau en cours mais elles sont surtout proposées comme exercices dans la première feuille de TD. Il s'agit d'excellents exercices : en topologie, peut-être encore davantage que pour les autres cours, une maitrise approfondie du cours, et cela inclut les démonstrations, est indispensable.

L'étude des espaces métriques va nous permettre de réaliser un important procédé d'abstraction pour les notions que vous avez apprises pour les ensembles $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ (distance, norme, boule, voisinage, partie ouverte, partie fermée, etc). Notre but est de les étendre à des structures plus générales (comme des espaces de fonctions par exemple), sur lesquelles sont alors naturellement définies des notions comme celles de convergence et de continuité.

1.1 Définition et exemples

La première notion que l'on va introduire est celle d'espace métrique, c'est-à-dire un espace muni d'une distance qui permet de mesurer la distance entre deux points. Dans la suite, X sera un ensemble non vide.

Définition 1.1.1. *On appelle **distance** une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes : pour tous $x, y, z \in X$*

— $d(x, y) \geq 0$, *(positivité)*

— $d(x, y) = 0 \iff x = y$, *(séparation)*

— $d(x, y) = d(y, x)$ *pour tous* $x, y \in X$, *(symétrie)*

— $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(inégalité triangulaire).*

*Dans ce cas, on appelle **espace métrique** le couple (X, d).*

Exemple 1.1.2. L'ensemble $X = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d(x, y) := |x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ est un espace métrique.

Exemple 1.1.3. L'ensemble $X = \mathbb{C}$ muni de la distance usuelle $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$ pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ est un espace métrique. Ici $|\ |$ est le module d'un nombre complexe.

Exemple 1.1.4. Un exemple important qui fournit de nombreux contre-exemple : soit X un ensemble quelconque non vide. On pose, pour tout $x, y \in X$,

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

On peut vérifier aisément que d est une distance sur X. On appelle cette distance la **distance discrète**. Dans (X, d), deux points distincts sont à distance 1.

Sur un même ensemble X, on peut définir plusieurs distances (par exemple, $\mathbb{R}$ peut être muni de sa distance usuelle, ou de la distance discrète, ou de beaucoup d'autres). Certaines distances sont suffisamment « similaires » pour partager beaucoup de priopriétés communes (ce que nous verrons plus tard). C'est dans cet esprit que l'on introduit la notion d'équivalence de distances.

Définition 1.1.5. *Deux distances d_1 et d_2 sur X sont dites* **équivalentes** *s'il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que pour tout $x, y \in X$*

$$\alpha\ d_2(x,y) \le d_1(x,y) \le \beta\ d_2(x,y).$$

Exemple 1.1.6. On considère sur $X = \mathbb{R}$ la distance usuelle donnée par $|\ |$ et la distance discrète d définie dans l'Exemple 1.1.4 ci-dessus. Ces deux distances ne sont pas équivalentes.

Exemple 1.1.7. Soit $X = \mathbb{R}^n$ ou $X = \mathbb{C}^n$, les fonctions suivantes sont des distances sur X.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad d_p(x,y) := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} \qquad \text{pour tout } p \ge 1$$

$$d_\infty(x,y) := \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$$

La distance d_2 sur $\mathbb{R}^n$ est dite **distance euclidienne**. Les distances d_p, $1 \le p \le \infty$, sont toutes équivalentes sur X (exercice !).

Donnons encore des exemples importants de distance.

Exemple 1.1.8. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. On pose

$$\mathcal{B}(X,Y) := \{f : X \to Y \mid \exists y \in Y \text{ t.q. } x \mapsto \delta(f(x), y) \text{ est bornée}\}$$

l'ensemble des foinctions bornées de X dans Y.

La fonction

$$\sigma(f,g) := \sup_{x \in X} \delta(f(x), g(x))$$

définit une distance sur $\mathcal{B}(X,Y)$. On appelle cette distance **distance uniforme**.

Trois derniers exemples très importants et sur lesquels nous reviendrons plus loin.

Définition 1.1.9 (Distance induite)**.** Soit (X, d) un espace métrique et $Y \subset X$ une partie de X. La restriction $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$ de la distance d à $Y \times Y$, définie par $d_Y(y_1, y_2) := d(y_1, y_2), \forall y_1, y_2 \in Y$, fait de (Y, d_Y) un espace métrique. On parle alors de **distance induite**.

Définition 1.1.10 (Distance produit)**.** Soient $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots, (X_n, d_n)$, n espaces métriques. Notons $X := X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. Pour deux éléments $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de X posons

$$d(x,y) := \max_{1 \le i \le n} d_i(x_i, y_i).$$

La fonction d est bien une distance sur X dite **distance produit** et (X, d) un espace métrique dit **espace produit**.

Enfin un exemple important est fourni par le cas des espaces vectoriels normés. On suppose que X est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ est soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.11 (Norme)**.** *On appelle* ***norme*** *une fonction $\|\ \| : X \to \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

- $\|x\| \ge 0$ *pour tout $x \in X$, (positivité)*
- $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, *(separation)*
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *pour tout $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ (homogeneité)*
- $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ *pour tout $x, y \in X$, (sous-additivité ou inégalité triangulaire).*

Dans ce cas, on appelle ***espace vectoriel normé (EVN)*** *le couple $(X, \|\ \|)$.*

La propriété suivante établit qu'un espace vectoriel normé est cas particulier d'espace métrique.

Proposition 1.1.12. *Soit $(X, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé, alors*

$$d_{\| \ \|}(x, y) := \|x - y\|$$

pour tout $x, y \in X$, définit une distance sur X, invariante par translation, non bornée si $X \neq \{0\}$.

Exemple 1.1.13. Soit $X = \mathbb{K}^n$, les fonctions suivantes sont des normes sur X.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad \text{pour tout } p \geq 1$$

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

Les distances de l'Exemple 1.1.7 sont les distances associées à ces normes.

Définition 1.1.14. *Deux normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ sur X sont dites* **équivalentes** *s'il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que pour tout $x \in X$*

$$\alpha \ \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta \ \|x\|_2.$$

Exemple 1.1.15. L'espace des matrices à n lignes et m colonnes $M_{n,m}(\mathbb{K})$ à entrées dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On peut identifier $M_{n,m}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^{nm}$. Les normes $\| \ \|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, sont donc des normes équivalentes sur $M_{n,m}(\mathbb{K})$.

1.2 Boules ouvertes, boules fermées, sphères

On se donne un espace métrique (X, d). Grâce à la notion de distance on peut définir des boules d'une manière analogue aux disques du plan ou aux boules de l'espace. Cette notion sera à la base de celle de « voisinage » d'un point et de toutes les définitions qui suivront dans ce chapitre.

Définition 1.2.1. *Soient $x \in X, r \in \mathbb{R}$.*
On appelle **boule ouverte** *de centre x et de rayon $r > 0$ l'ensemble*

$$B(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

On appelle **boule fermée** *de centre x et de rayon $r \geq 0$ l'ensemble*

$$B^{\mathrm{f}}(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

On appelle **sphère** *de centre x et de rayon $r \geq 0$ l'ensemble*

$$S(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) = r\}.$$

Remarque 1.2.2. Soit $x \in X$, et $r > 0$. On note que $x \in B(x, r)$, et donc $B(x, r) \neq \emptyset$. De plus :

$$B(x, r) \subset B^{\mathrm{f}}(x, r) \quad \text{et} \quad S(x, r) \subset B^{\mathrm{f}}(x, r),$$

et pour $x \in X$ et $0 < r_1 < r_2$:

$$B(x, r_1) \subset B(x, r_2) \quad \text{et} \quad B^{\mathrm{f}}(x, r_1) \subset B^{\mathrm{f}}(x, r_2).$$

Exemple 1.2.3. Soit (X, d) un espace métrique où X est un ensemble quelconque non vide et d est la distance discrète définie dans l'Exemple 1.1.4. Alors pour tout $x \in X$,
$B(x, r) = \{x\}$ si $0 < r \leq 1$ et $B(x, r) = X$ si $r > 1$;
$B^{\mathrm{f}}(x, r) = \{x\}$ si $0 \leq r < 1$ et $B^{\mathrm{f}}(x, r) = X$ si $r \geq 1$;
$S_d(x, 0) = \{x\}$, $S(x, r) = \emptyset$ si $0 < r < 1$ et $S(x, 1) = X \setminus \{x\}$, $S(x, r) = \emptyset$ si $r > 1$.

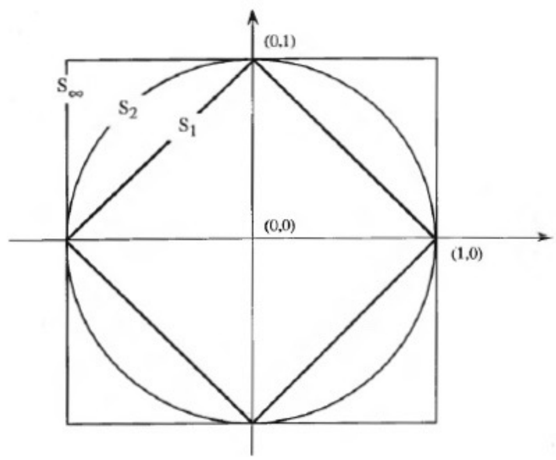

FIGURE 1 – Sphères unité dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes $\| \|_1, \| \|_2, \| \|_\infty$

On remarque que la notion de boule dépend de la distance choisie. On peut donc comparer les boules données par des distances différentes.

Remarque 1.2.4. Soient (X, d) un espace métrique et Y une partie de X. On considère l'espace métrique (Y, d_Y) avec d_Y la distance induite. On a alors : $\forall x \in Y,\ r > 0$

$$B_{d_Y}(x, r) = Y \cap B_d(x, r).$$

Remarque 1.2.5. Soient d_1 et d_2 deux distances équivalentes sur X et $\alpha, \beta > 0$ telles que pour tout $x, y \in X$ deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que pour tout $x, y \in X$

$$\alpha\ d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \beta\ d_2(x, y).$$

Alors pour tout $x \in X, r > 0$, on a

$$B_{d_2}(x, r) \subset B_{d_1}(x, \beta r) \text{ et } B_{d_1}(x, r) \subset B_{d_2}(x, \frac{r}{\alpha}).$$

On en déduit alors que les boules ouvertes de même centre pour d_1 et d_2 sont emboîtées les unes dans les autres.

Toutes les définitions qui viennent utilisent la notion de boule ouverte et de distance. On pourra donc vérifier que deux distances équivalentes définissent les mêmes voisinages, points intérieurs, points adhérents, ouverts, fermés, parties bornées, suites convergentes, fonctions continues, etc.

1.3 Voisinages, points intérieurs et points adhérents

Soit (X, d) un espace métrique et E une partie de X, i.e. un sous-ensemble de X, $E \subset X$.

Définition 1.3.1. *On dit que E est un* **voisinage de** *x, s'il existe une boule ouverte centrée en x contenue dans E. Autrement dit, si*

$$\exists r > 0 \ t.q.\ B(x, r) \subset E.$$

Définition 1.3.2.

i) Un point $x \in X$ est un **point intérieur** *à E si E est un voisinage de x, i.e. si*

$$\exists r > 0 \quad t.q.\ B(x, r) \subset E.$$

ii) Un point $x \in X$ est un **point adhérent** *à E si tout voisinage de x a une intersection non vide avec E, i.e.*

$$\forall r > 0,\ \exists x \ t.q.\ x \in B(x,r) \cap E,$$

ou, de manière équivalente, $\forall r > 0,\ \exists y \in E\ t.q.\ d(x,y) < r$.

Remarque 1.3.3. Noter qu'un point x adhérent à E peut appartenir à E ou à E^c. En revanche un point intérieur appartient forcément à E. D'un autre côté, si $x \in E$, alors x est forcément un point adhérent à E, mais il n'est pas forcément intérieur à E.

Définition 1.3.4. *On appelle* **distance de** x **à** E *une partie non vide de X le nombre réel défini par*

$$d(x,E) := \inf_{y \in E} d(x,y).$$

Proposition 1.3.5. *Soit $E \neq X$ et $x \in X$. Alors*

i) x est un point intérieur à E si et seulement si $d(x,E^c) > 0$.

ii) x est un point d'adhérence à E si et seulement si $d(x,E) = 0$.

Exemple 1.3.6. Soit $X = \mathbb{R}$ avec $d(x,y) := |x-y|$, i.e. $(\mathbb{R}, |\ |)$. On considère quatre réels $a < b < c < d$ et on introduit l'ensemble

$$E =]a,b[\cup \{c\} \cup [d,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \cup \{c\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq d\}.$$

Chaque point de E (c inclus) est adhérent à E. De plus, a et b sont aussi points adhérents à E.

Remarque 1.3.7. En regardant l'Exemple 1.3.6, on s'aperçoit que le point c est différent des autres points adhérents à E car il se trouve « tout seul ». On peut donc raffiner notre définition de point adhérent de la façon suivante.

Définition 1.3.8.

i) Un point $x \in X$ est un **point isolé** *de E si*

$$\exists r > 0 \ \ t.q.\ B(x,r) \cap E = \{x\}.$$

ii) Un point $x \in X$ est un **point d'accumulation** *de E si*

$$\forall r > 0,\ \exists x \neq x \ t.q.\ x \in B(x,r) \cap E.$$

Un point isolé ou d'accumulation est un point d'adhérence. Réciproquement, un point d'adhérence est soit isolé, soit d'accumulation !

En revenant à l'Example 1.3.6, c est point isolé alors que tous les points de $E \setminus \{c\}$ sont des points d'accumulation. Les points a et b sont aussi des points d'accumulation de E.

Définition 1.3.9. *Un point $x \in X$ est un* **point de frontière** *de E si x est un point adhérent à E qui n'est pas intérieur à E, i.e.*

$$\forall r > 0,\ \exists x_1 \in B(x,r) \cap E \ \text{et}\ \exists x_2 \in B(x,r) \cap E^c.$$

Exemple 1.3.10. En revenant à l'Exemple 1.3.6, a, b, c, d sont points de frontière de E.

Exemple 1.3.11. On considère maintenant $\mathbb{Q}$ comme partie de $\mathbb{R}$. On sait que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$; il suit que chaque point de $\mathbb{R}$ est point d'accumulation et de frontière de $\mathbb{Q}$.

1.4 Parties ouvertes, parties fermées

Soit (X, d) un espace métrique et E une partie de X. Grâce aux définitions précédentes, on peut formaliser la notion de partie ouverte et partie fermée.

Définition 1.4.1.
i) E est dite **partie ouverte** *si chaque point de E est point intérieur à E.*
ii) E est dite **partie fermée** *si elle contient tous ses points d'adhérence.*

Définition 1.4.2. *On appelle* ***topologie*** *l'ensemble des parties ouvertes.*

Remarque 1.4.3. L'ensemble X tout entier est à la fois ouvert et fermé. Il en est de même pour l'ensemble vide. Pour tout $x \in X$, le singleton $\{x\}$ est une partie fermée de X. (Ces propriétés sont vraies pour n'importe quelle distance !)

ATTENTION : Un voisinage de x n'est pas forcément une partie ouverte !

Théorème 1.4.4. *Soit (X, d) un espace métrique, $E \subset X$. Alors E est une partie fermée si et seulement si E^c est une partie ouverte.*

Ce théorème est très important. Vous trouverez dans de nombreuses références cette définition pour une partie fermée ("une partie dont le complémentaire est un ouvert").

Preuve. $\Rightarrow$ Soit E une partie fermée. On veut montrer que E^c est ouverte, i.e. que chaque point de E^c est point intérieur à E^c. Soit $x \in E^c$, alors x n'est pas un point adhérent à E car E est une partie fermée, donc elle contient tous ses points adhérents. Il existe donc $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap E = \emptyset$, i.e. $B(x,r) \subset E^c$.

$\Leftarrow$ Soit E une partie de X telle que E^c soit une partie ouverte. On veut montrer que E contient tous ses points d'adhérence. Soit x un point d'adhérence de E. Supposons que $x \in E^c$. Comme E^c est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset E^c$. Cela contredit le fait que x est un point d'adhérence de E. On en déduit que $B(x,r) \cap E \neq \emptyset$. □

Exemple 1.4.5. Dans $(\mathbb{R}, |\ |)$:

L'ensemble $E =]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ est une partie ouverte : en effet pour tout $x \in E$, il existe $r = \min\{\frac{b-x}{2}, \frac{x-a}{2}\}$ tel que $B(x,r) \subset E$, donc x est intérieur à E.

Toutes les parties de type

$$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, \quad]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

sont ouvertes, tandis que les parties

$$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}, \quad [a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad]-\infty, b] = \{x \in R \mid x \leq b\}$$

sont fermées. Les parties

$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \quad]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

ne sont ni ouvertes ni fermées. Les seules parties fermées et ouvertes de $\mathbb{R}$ sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}$.

On appelle **intervalle** de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ de la forme $]-\infty, b[$, $]-\infty, b]$, $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$, $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,+\infty[$.

Dans l'Exemple 1.3.6, $E =]a,b[\cup \{c\} \cup [d,+\infty[$ n'est pas ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.4.6. Dans $(\mathbb{R}^2, \|\ \|_2)$, soit $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ où

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$$
$$E_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 3 < x_1 < 4,\ x_2 = 1\}$$
$$E_3 = \{(2,2)\}.$$

L'ensemble des points adhérents à E est : $E \cup \{(3,1)\} \cup \{(4,1)\}$. De plus $(2,2)$ est un point isolé et les autres points sont des points d'accumulation.
L'ensemble des points intérieurs à E est : $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 < 1\}$.
L'ensemble des points de frontière de E est : $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\} \cup \{(2,2)\} \cup \{(x_1,1) \mid 3 \leq x_1 \leq 4\}$.
Tous les autres points de $\mathbb{R}^2$ sont des points intérieurs à E^c.
E n'est pas une partie ouverte car $(2,2) \in E$ n'est pas intérieur à E.
E n'est pas une partie fermée car le point d'adhérence $(3,1)$ n'appartient pas à E.

Exemple 1.4.7. L'ensemble $]0,1]$ n'est ni ouvert ni fermé dans $(\mathbb{R}, |\ |)$, est ouvert dans $(]-\infty,1], |\ |)$, fermé dans $(]0,2], |\ |)$, et ouvert et fermé dans $(]0,1], |\ |)$. Ici, avec un abus de notation, on note encore $|\ |$ la distance induite.

Proposition 1.4.8.
i) Toute union (même infinie) de parties ouvertes de (X,d) est une partie ouverte. Une intersection **finie** *de parties ouvertes de (X,d) est une partie ouverte.*
ii) Toute intersection (même infinie) de parties fermées de (X,d) est une partie fermée. Une union **finie** *de parties fermées de (X,d) est une partie fermée.*

Preuve. *i)* Soit A un ensemble quelconque (fini ou infini) et $O_\alpha,\ \alpha \in A$ une famille d'ouverts. On veut montrer que $\cup_{\alpha \in A} O_\alpha$ est ouvert. Soit $x \in \cup_{\alpha \in A} O_\alpha$. Il existe un indice $\alpha_0 \in A$ tel que $x \in O_{\alpha_0}$. Comme O_{α_0} est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O_{\alpha_0}$ et donc $B(x,r) \subset \cup_{\alpha \in A} O_\alpha$.
Soit $J = \{1, \ldots, n\}$ un ensemble fini et $(O_j)_{j \in J}$ une famille d'ouverts. On veut montrer que $\cap_{j \in J} O_j$ est ouvert. Soit $x \in \cap_{j \in J} O_j$. Pour tout $j \in J$, $x \in O_j$ et il existe donc $r_j > 0$ tel que $B(x, r_j) \subset O_j$. On définit $r = \min\{r_j\ ;\ j \in J\} > 0$ et on a bien $B(x,r) \subset \cap_{j \in J} O_j$.
ii) Les affirmations sur les fermés se démontrent par passage au complémentaire.

□

Remarque 1.4.9. Une intersection infinie d'ouverts n'est pas toujours un ouvert (idem pour une union infinie de fermés) ! Par exemple, dans $(\mathbb{R}, |\ |)$, on a

$$\bigcap_{k \geq 1} \left] -\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right[= \{0\} \subset \mathbb{R}.$$

Corollaire 1.4.10. *Les ouverts de X sont les réunions de boules ouvertes.*

1.5 Intérieur et adhérence d'une partie

Soit (X,d) un espace métrique E une partie de X.

Définition 1.5.1. *On appelle* **intérieur** *de E, noté $\mathring{E}$,* **le plus grand (au sens de l'inclusion) ouvert inclus dans** *E c'est-à-dire la réunion de toutes les parties ouvertes de X incluses dans E. Si on note $\mathcal{O}_E$ l'ensemble des parties ouvertes de X incluses dans E, on a ainsi*

$$\mathring{E} := \bigcup_{O \in \mathcal{O}_E} O.$$

Remarque 1.5.2. Noter que E contient toujours au moins une partie ouverte de E puisque $\emptyset \in \mathcal{O}_E$. La Proposition 1.7.15 assure que $\mathring{E}$ est une partie ouverte. On note que $E = \mathring{E}$ si et seulement si E est une partie ouverte.

Avec le théorème suivant, on montre que l'intérieur d'une partie E est bien l'ensemble de tous les points intérieurs à E.

Théorème 1.5.3. *Soit (X, d) un espace métrique, $E \subset X$. Soit $\tilde{E}$ l'ensemble de tous les points intérieurs à E. Alors*
$$\mathring{E} = \tilde{E}.$$

Preuve. Montrons d'abord que $\mathring{E} \subset \tilde{E}$. Pour tout $x \in \mathring{E}$, il existe un élement O de la famille $\mathcal{O}_E$ tel que $x \in O$. Il existe donc $r > 0$, $B(x, r) \subset O \subset E$ (car O ouvert et $O \subset E$!). Donc x est un point intérieur à E.

Montrons à présent que $\tilde{E} \subset \mathring{E}$. Soit $x \in \tilde{E}$. Il existe donc $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset E$. La boule $B(x, r)$ est ouverte et contenue dans E, donc $B(x, r) \in \mathcal{O}_E$. Donc $B(x, r) \subset \mathring{E}$ et donc $x \in \mathring{E}$. □

On a un résultat analogue pour les parties fermées.

Définition 1.5.4. *On appelle* **adhérence** *de E, notée $\overline{E}$,* **le plus petit (au sens de l'inclusion) fermé contenant** *E c'est-à-dire l'intersection de tous les fermés de X contenant E. Autrement dit, si on note $\mathcal{F}_E$ l'ensemble des parties fermées de X contenant E, on a*

$$\overline{E} := \bigcap_{F \in \mathcal{F}_E} F.$$

Remarque 1.5.5. Noter que la famille $\mathcal{F}_E$ n'est jamais vide car $X \in \mathcal{F}_E$. La Proposition 1.7.15 assure que $\overline{E}$ est une partie fermée. On note que $E = \overline{E}$ si et seulement si E est une partie fermée.

Avec le théorème suivant, on montre que l'adhérence d'une partie E est bien l'ensemble de tous les points adhérents à E.

Théorème 1.5.6. *Soit (X, d) un espace métrique, $E \subset X$. Soit E' l'ensemble de tous les points adhérents à E. Alors*
$$\overline{E} = E'.$$

Preuve. Montrons que $E' \subset \overline{E}$. Soit $x \in E'$ et $F \in \mathcal{F}_E$. Montrons que que $x \in F$ et pour cela, comme F est fermé on va montrer que x est un point adhérent à F. Comme x est un point adhérent à E, pour tout $r > 0$, il existe $y \in B(x, r) \cap E \subset B(x, r) \cap F$. Donc x est un point adhérent à F.

Montrons maintenant que $\overline{E} \subset E'$ ou plutôt puisque c'est équivalent $(E')^c \subset (\overline{E})^c$. Soit $x \in (E')^c$. Il existe donc $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap E = \emptyset$. Donc $B(x, r)^c$ est un fermé qui contient E et qui ne contient pas x. D'où $x \in (\overline{E})^c$. □

Remarque 1.5.7. En récapitulant, on a $\mathring{E} \subset E \subset \overline{E}$.

Exemple 1.5.8. Dans $(\mathbb{R}, |\ |)$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathring{\overline{[a,b]}} \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll}
\overset{\circ}{[a,b]} =]a,b[, & \overline{[a,b]} = [a,b], & \overset{\circ}{]a,b[} =]a,b[, & \overline{]a,b[} = [a,b], \\
\overset{\circ}{[a,b[} =]a,b[, & \overline{[a,b[} = [a,b], & \overset{\circ}{]a,b]} =]a,b[, & \overline{]a,b]} = [a,b].
\end{array}$$

Le même raisonnement s'applique aux intervalles non bornées.

Dans l'Exemple 1.3.6, $E =]a, b[\cup \{c\} \cup [d, +\infty[$ alors $\mathring{E} =]a, b[\cup]d, +\infty[$ et $\overline{E} = [a, b] \cup \{c\} \cup [d, +\infty[$.

En utilisant les notions d'intérieur et d'adhérence à une partie, on peut définir la notion suivante.

Définition 1.5.9. *On appelle* **frontière** *de E la partie ∂E définie par*

$$\partial E := \overline{E} \setminus \mathring{E}.$$

Avec la proposition suivante, on montre que la frontière d'une partie E est bien l'ensemble de tous les points de frontière de E.

Proposition 1.5.10. *Soit (X,d) un espace métrique, $E \subset X$. Soit E^* l'ensemble de tous les points de frontière de E. Alors*
$$\partial E = E^*.$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la Définition 1.3.9. $\square$

Exemple 1.5.11. Dans $(\mathbb{R}, |\ |)$, on a
$$\partial[a,b] = \partial]a,b] = \partial[a,b[= \partial]a,b[= \{a,b\}.$$

Dans l'Exemple 1.3.6, $E =]a,b[\cup \{c\} \cup [d,+\infty[$ et alors $\partial E = \{a,b,c,d\}$.

Définition 1.5.12.
- *Soit $E \subset X$ une partie de X. On dit que E est* **dense dans** X *(ou dans (X,d)) lorsque l'adhérence de E est X , $\overline{E} = X$.*
- *Soient $E \subset V \subset X$ deux parties de X, on dit que E est* **dense dans** V *lorsque E est dense dans (V, d_V) où d_V est la distance induite.*

Remarque 1.5.13. $E \subset X$ est dense dans $\overline{E}$.

Exemple 1.5.14. Dans $(\mathbb{R}, |\ |)$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont parties denses dans $\mathbb{R}$, mais $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque 1.5.15. Soient $E \subset V \subset X$ deux parties de X, alors E est dense dans V si et seulement si $\overline{E} \cap V = V$, i.e. $V \subset \overline{E}$, i.e.
$$\forall x \in V,\ \forall r > 0,\ \exists y \in B(x,r) \cap E.$$

Définition 1.5.16. *On dit qu'une partie E est* **d'intérieur vide** *lorsqu'elle ne contient pas de partie ouverte non vide, c'est-à-dire lorsque $\mathring{E} = \emptyset$.*

Proposition 1.5.17. *Une partie E est d'intérieur vide si et seulement si E^c est dense dans X.*

Preuve. On a $\mathring{E} = \emptyset \Longleftrightarrow X \setminus \mathring{E} = X$. Comme $X \setminus \mathring{E} = \overline{X \setminus E}$ (Exercice !) on conclut facilement. $\square$

On notera bien que les notions d'intérieurs, d'adhérence et de densité dépendent de la métrique choisie. Par exemple pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ est d'intérieur vide dans l'espace $(\mathbb{R}, |\ |)$ mais pas si $\mathbb{R}$ est muni de la distance discrète.

1.6 Parties bornées et diamètre d'une partie

Soit (X,d) un espace métrique et E une partie de X.

Définition 1.6.1. *La partie E est dite* **bornée** *si elle est contenue dans une boule, i.e.*
$$\exists x \in X, r > 0 \quad t.q.\ E \subset B(x,r).$$

Définition 1.6.2. *Si E est une partie non vide de (X,d), on appelle* **diamètre** *de E*
$$\operatorname{diam}(E) := \sup\{d(x,y) \mid x,y \in E\} \in [0,+\infty].$$

Théorème 1.6.3. *Soit (X,d) un espace métrique, $E \subset X$, $E \neq \emptyset$. Alors*
i) $\operatorname{diam}(E) = 0$ *si et seulement si $E = \{x\}$ pour un certain $x \in X$;*
ii) $\operatorname{diam}(E) < +\infty$ *si et seulement si E est une partie bornée ;*
iii) si $E \subset F$, alors $\operatorname{diam}(E) \leq \operatorname{diam}(F)$ *;*
iv) $\operatorname{diam}(\mathring{E}) \leq \operatorname{diam}(E) = \operatorname{diam}(\overline{E})$.

Exemple 1.6.4. Dans l'Exemple 1.3.6, E n'est pas borné donc $\operatorname{diam} E = +\infty$.

Dans l'Exemple 1.4.5, $[a,b[,]a,b[,]a,b], [a,b]$ sont des parties bornées de diamètre égal à $b-a$.

Dans l'Exemple 1.4.6, E est une partie bornée (E est contenue dans $B_d((0,0),5)$). Calculez son diamètre !

1.7 Suites

1.7.1 Convergence, unicité de la limite, etc.

Soit (X, d) un espace métrique non vide.

Définition 1.7.1. *Une* **suite à valeurs dans** X *est une application* $x : \mathbb{N} \to X$. *On note* $x_n := x(n)$ *un terme de la suite et* $(x_n)_{n\geq 0}$ *la suite , parfois* (x_n).

Définition 1.7.2. *On dit qu'une suite* $(x_n)_{n\geq 0}$ *est* **bornée** *si l'ensemble de ses valeurs* $E := \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\ldots\}$ *est une partie bornée de* X.

Définition 1.7.3. *On dit qu'une suite* $(x_n)_{n\geq 0}$ **converge vers** $y \in X$ *lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ t.q.\ \forall n \geq N,\ x_n \in B(y, \varepsilon),$$

ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ t.q.\ \forall n \geq N,\ d(x_n, y) < \varepsilon.$$

ou encore : pour tout voisinage V *de* y,

$$\exists N \in \mathbb{N},\ t.q.\ \forall n \geq N,\ x_n \in V.$$

L'élément y *est appelé* **limite** *de la suite et on écrit*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = y,$$

ou encore :

$$x_n \to y \text{ pour } n \to +\infty,$$

ou encore :

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, y) = 0.$$

Exemple 1.7.4. Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang N, i.e.

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ x_n = x_N.$$

Toute suite stationnaire est convergente, dans tout espace métrique.

On voit dans l'exemple ci-dessus que la notion de convergence d'une suite dépend de manière essentielle de la distance que l'on utilise. Cependant, deux distances équivalentes définissent les mêmes suites convergentes.

Théorème 1.7.5 (Unicité de la limite)**.** *Soit* $(x_n)_{n\geq 0}$ *une suite dans* (X, d). *Si*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = y_1 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = y_2,$$

alors $y_1 = y_2$.

Théorème 1.7.6. *Une suite* $(x_n)_{n\geq 0}$ *convergente dans* (X, d) *est une suite bornée.*

Remarque 1.7.7. Une suite bornée n'est pas forcément convergente ! Par exemple la suite de terme général $x_n = (-1)^n$ dans $(\mathbb{R}, |\ |)$ n'est pas bornée.

1.7.2 Caractérisation séquentielle d'une partie ouverte, fermée ou dense

Théorème 1.7.8. *Soit (X,d) un espace métrique et E une partie non vide de X.*

i) Soit $y \in X$. Alors $y \in \overline{E}$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de E telle que $x_n \to y$ lorsque $n \to +\infty$.

ii) E est une partie fermée si et seulement si toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de E qui converge dans (X,d) a sa limite dans E.

iii) E est une partie ouverte si et seulement si pour tout $y \in E$, toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans X qui converge vers y est à valeurs dans E à partir d'un certain rang.

Proposition 1.7.9. *Soient $E \subset V \subset X$ deux parties de X. Alors E est dense dans V si et seulement si tout point $x \in V$ est limite d'une suite de E.*

Fin Analyse 3 : résumé

Voici une fiche mémoire des définitions les plus importantes :

$\boxed{\text{Distance}}$ Soit (X,d) un **espace métrique** i.e. un ensemble E muni d'une **métrique** ou **distance** d, c'est-à-dire une fonction vérifiant :

Définition 1.7.10. *On appelle **distance** une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes : pour tous $x, y \in X$*
- *$d(x,y) \geq 0$, (positivité)*
- *$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$, (séparation)*
- *$d(x,y) = d(y,x)$ pour tous $x, y \in X$, (symétrie)*
- *$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ pour tous $x, y, z \in X$, (inégalité triangulaire).*

$\boxed{\text{Boules}}$ On peut alors définir la notion de *boule* : pour tout $x \in X$ et $r > 0$ la **boule ouverte** de centre x et de rayon r est l'ensemble des points de X qui sont à distance strictement inférieure à r de x :

$$B(x,r) = \{y \in X,\ d(x,y) < r\};$$

pour tout $x \in X$ et $r \geq 0$ la **boule fermée** de centre x et de rayon r est l'ensemble des points de X qui sont à distance inférieure ou égale à r de x :

$$B^{\mathrm{f}}(x,r) = \{y \in X,\ d(x,y) \leq r\}.$$

$\boxed{\text{Ouverts}}$ On appelle alors **ouvert** tout ensemble $O \subset X$ vérifiant :

$$\text{pour tout } x \in O \text{ il existe } r > 0 \text{ tel que } B(x,r) \subset O.$$

Cette définition signifie qu'en tout point de X on peut mettre une boule ouverte centrée en ce point incluse dans X (à condition de choisir le rayon assez petit). On dit parfois aussi que tout point de O est un **point intérieur** à O. On appelle **fermé** tout ensemble dont le complémentaire est un ouvert. L'ensemble des ouverts s'appelle la **topologie**.

$\boxed{\text{Voisinage}}$ Un ensemble V est un **voisinage** du point $x \in X$ si on peut mettre une boule ouverte centrée en x incluse dans X (à condition de choisir le rayon assez petit) :

$$\text{il existe } r > 0 \text{ tel que } B(x,r) \subset V.$$

On notera donc qu'un ensemble est ouvert s'il est un voisinage de chacun de ses points.

$\boxed{\text{Intérieur}}$ L'**intérieur** $\mathring{U}$ d'une partie $U \subset X$ est l'ensemble des **points intérieurs** de U c'est à dire les points en lesquels il est possible de centrer une boule ouverte incluse dans U

$$\mathring{U} = \{x \in U,\ \exists r > 0 \text{ t.q. } B(x,r) \subset U\}.$$

$\boxed{\text{Adhérence}}$ L'adhérence $\bar{U}$ d'une partie $U \subset X$ est l'ensemble des **points adhérents** à U i.e. les $x \in U$ tels que toute boule ouverte centrée en x intersecte U

$$\bar{U} = \{x \in U,\ \forall r > 0 \text{ t.q. } B(x,r) \cap U \neq \emptyset\}.$$

$\boxed{\text{Partie dense}}$ On dit qu'une partie $U \subset X$ est **dense** dans X quand $\bar{U} = X$. Autrement dit U est dense dans X quand toute boule ouverte de X contient au moins un point de U.

$\boxed{\text{Bornée}}$ Une partie $U \subset X$ est **bornée** si elle est incluse dans une boule.

$\boxed{\text{Convergence de suite}}$ On dit qu'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans X converge vers une limite $y \in X$ si, pour toute boule B ouverte centrée en y, $(x_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans B à partir d'un certain rang :

$$\text{pour tout } r > 0 \text{ il existe un rang } N \geq 0 \text{ tel que pour tout } n \geq N,\ x_n \in B(y,r).$$

Il y a différentes façons de définir les principales notions en topologie et donc différentes façons d'exposer cette théorie. Il faut donc avoir en tête les **différentes caractérisations possibles des notions** et être capable de jongler avec au gré des ouvrages ou exercices. Quelques exemples incluant aussi de simples reformulations :

<u>Ouvert</u> L'ensemble $O \subset X$ est ouvert si et seulement si

(a) tous ses points sont des points intérieurs

(b) O est un voisinage de chacun de ses points

(c) son complémentaire est fermé

(d) toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans X convergeant vers un point $y \in O$ est à valeurs dans O à partir d'un certain rang

<u>Fermé</u> L'ensemble $F \subset X$ est fermé si et seulement si

(a) F contient tous ses points d'adhérence i.e. $\bar{F} = F$.

(b) pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans F convergeant vers un point $y \in X$ on a $y \in F$

<u>Intérieur</u> L'intérieur de $U \subset X$ peut aussi être défini comme

(a) le plus grand (pour l'inclusion) ouvert inclus dans U.

(b) l'ensemble des points y vérifiant : toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans X convergeant vers y est à valeurs dans U à partir d'un certain rang (c'est la caractérisation séquentielle des points intérieurs)

<u>Adhérence</u> L'adhérence de $U \subset X$ peut aussi être défini comme

(a) le plus petit (pour l'inclusion) fermé contenant U.

(b) l'ensemble des points x vérifiant : il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans U convergeant vers y (c'est la caractérisation séquentielle des points adhérents qui donne aussi une caractérisation séquentielle de la densité)

<u>Limite</u> La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans X converge vers une limite $y \in X$ si, pour toute voisinage V de y, $(x_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans V à partir d'un certain rang.

Autres définitions et propriétés vues au S3 :

$\boxed{\text{uivalence de distance}}$

Définition 1.7.11. *Deux distances d_1 et d_2 sur X sont dites* **équivalentes** *s'il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que pour tout $x, y \in X$*

$$\alpha\ d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq \beta\ d_2(x,y).$$

Cette notion est importante car deux distances équivalentes définissent les mêmes voisinages, ouverts, fermés, parties bornées, partie intérieure, partie adhérente, suites convergentes ou encore fonctions continues comme nous le verrons plus loin.

Norme Une classe importante d'espaces métriques sont les espaces vectoriels normés.

Définition 1.7.12 (Norme)**.** *On appelle* ***norme*** *une fonction* $\| \; \| : X \to \mathbb{R}$ *satisfaisant les propriétés suivantes :*

— $\|x\| \geq 0$ *pour tout* $x \in X$*, (positivité)*
— $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$*, (separation)*
— $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *pour tout* $x \in X$*,* $\lambda \in \mathbb{K}$ *(homogeneité)*
— $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *pour tout* $x, y \in X$*, (sous-additivité ou inégalité triangulaire).*

Dans ce cas, on appelle ***espace vectoriel normé (EVN)*** *le couple* $(X, \| \; \|)$*.*

La propriété suivante établit qu'un espace vectoriel normé est un cas particulier d'espace métrique.

Proposition 1.7.13. *Soit* $(X, \| \; \|)$ *un espace vectoriel normé, alors*

$$d_{\| \; \|}(x, y) := \|x - y\|$$

pour tout $x, y \in X$*, définit une distance sur* X*, invariante par translation, non bornée si* $X \neq \{0\}$*.*

Il existe aussi une notion d'équivalence de normes :

Définition 1.7.14. *Deux distances* $\| \cdot \|_1$ *et* $\| \cdot \|_2$ *sur* X *sont dites* **équivalentes** *s'il existe deux constantes* $\alpha, \beta > 0$ *telles que pour tout* $x \in X$

$$\alpha \; \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta \; \|x\|_2.$$

Deux normes équivalentes produisent deux distances équivalentes.

on d'ouverts et fermés

Proposition 1.7.15.

i) Toute union (même infinie) de parties ouvertes de (X, d) *est une partie ouverte. Une intersection* **finie** *de parties ouvertes de* (X, d) *est une partie ouverte.*
ii) Toute intersection (même infinie) de parties fermées de (X, d) *est une partie fermée. Une union* **finie** *de parties fermées de* (X, d) *est une partie fermée.*

Unicité de la limite

Théorème 1.7.16 (Unicité de la limite)**.** *Soit* $(x_n)_{n \geq 0}$ *une suite dans* (X, d)*. Si*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = y_1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} x_n = y_2,$$

alors $y_1 = y_2$*.*

Théorème 1.7.17. *Une suite* $(x_n)_{n \geq 0}$ *convergente dans* (X, d) *est une suite bornée.*