Zad. 1 pkt 1

Aby narysować wykres podanego ograniczenia należy wyznaczyć dwa punkty dla każdej funkcji:

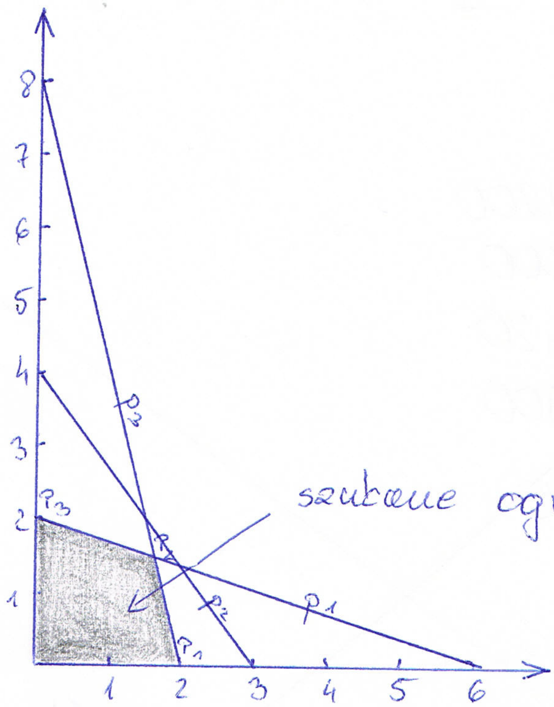
$p_1: x_1 + 3x_2 = 6 \rightarrow (0,2), (6,0)$

$p_2: 4x_1 + 3x_2 = 12 \rightarrow (0,4), (3,0)$

$p_3: 4x_1 + x_2 = 8 \rightarrow (0,8), (2,0)$

Przy rysowaniu wykresu uwzględniamy założenia:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$



Bierzemy przykładową funkcję celu: $z = 3x_1 + 2x_2$. Obliczamy jej wartość w trzech punktach (P_1, P_2 i P_3), ponieważ w jednym z nich wartość będzie największa spośród całego ograniczenia.

Z wykresu można odczytać wartość $P_1 = (2,0)$ i $P_3 = (0,2)$. Współrzędne punktu P_2 należy obliczyć - jest to punkt przecięcia prostych p_1 i p_3, więc:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6 \quad / \cdot 4 \\ 4x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 12x_2 = 24 \\ 4x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

$11x_2 = 16$

$$\begin{cases} x_2 = 16/11 \\ x_1 = 18/11 \end{cases}$$

Obliczamy wartości funkcji celu:

$z(P_1) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6$

$z(P_2) = 3 \cdot 18/11 + 2 \cdot 16/11 = 86/11 = 7\ 9/11$

$z(P_3) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4$

Jak widać największy zysk uzyskujemy dla P_2.

Zadanie 1 ćwiczenia 1 (metoda graficzna)

Tworzymy warunki:

dla energii $5x_1 + 25x_2 \leq 1200$

dla stali $5x_1 + 10x_2 \leq 600$

dla drewna $6x_1 \leq 420$

dla pracy $10x_1 + 10x_2 \leq 900$

przyjmujemy, że $x_1, x_2 \geq 0$

i funkcja celu: $z = 10x_1 + 20x_2 \nearrow_{max}$

Obliczamy punkty do narysowania wykresu:

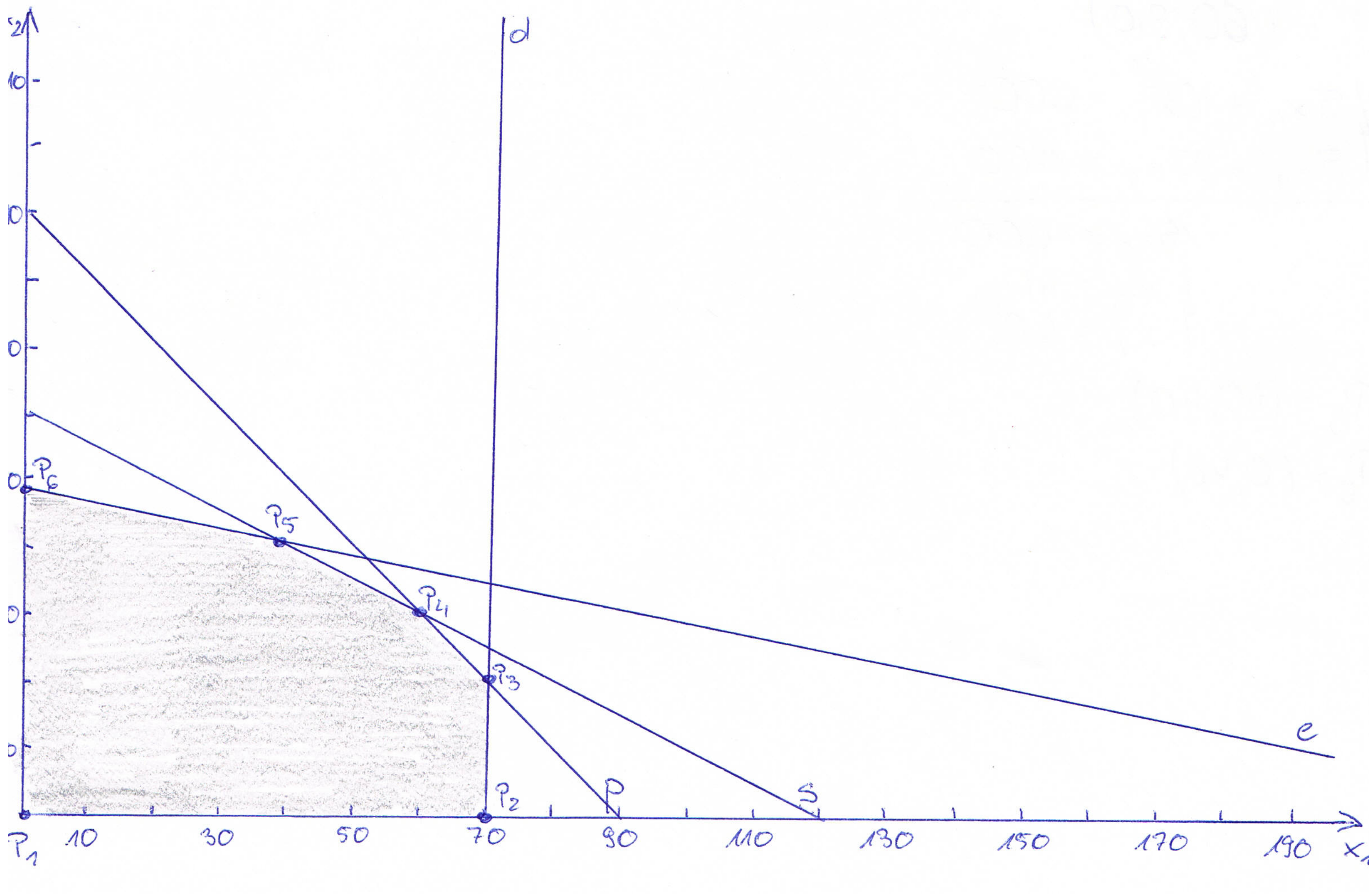
e: $5x_1 + 25x_2 = 1200$ (0,48), (240,0)

s: $5x_1 + 10x_2 = 600$ (0,60), (120,0)

d: $6x_1 = 420$ (70,0)

p: $10x_1 + 10x_2 = 900$ (0,90), (90,0)

Rysujemy wykres:



wierzchołki figury ograniczonej przez proste (zaciemniony obszar) są „kandydatami" do osięgnięcia maksimum.
Obliczamy ich współrzędne:

$P_1 = (0,0)$

$P_2 = (70,0)$

$$\begin{cases} 10x_1 + 10x_2 = 900 \quad /:5 \\ 6x_1 = 420 \quad /:3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 180 \\ 2x_1 = 140 \end{cases}$$

$$2x_2 = 40$$

$$\begin{cases} x_1 = 70 \\ x_2 = 20 \end{cases}$$

$P_3 = (70,20)$

$$\begin{cases} 10x_1 + 10x_2 = 900 \\ 5x_1 + 10x_2 = 600 \end{cases}$$

$$5x_1 = 300$$

$$\begin{cases} x_1 = 60 \\ x_2 = 30 \end{cases}$$

$P_4 = (60,30)$

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 = 600 \\ 5x_1 + 25x_2 = 1200 \end{cases}$$

$$-15x_2 = -600$$

$$\begin{cases} x_1 = 40 \\ x_2 = 40 \end{cases}$$

$P_5 = (40,40)$

$P_6 = (0,48)$

Obliczamy wartości funkcji celu w wyznaczonych punktach:

$z(P_1) = 0$
$z(P_2) = 10 \cdot 70 + 20 \cdot 0 = 700$
$z(P_3) = 10 \cdot 70 + 20 \cdot 20 = 1100$
$z(P_4) = 10 \cdot 60 + 20 \cdot 30 = 1200$
$z(P_5) = 10 \cdot 40 + 20 \cdot 40 = 1200$
$z(P_6) = 10 \cdot 0 + 20 \cdot 48 = 960$

Wartości optymalne otrzymujemy w punktach P_4 i P_5. Oznacza to, że zakład powinien wyprodukować 60 wyrobów I i 30 wyrobów II lub po 40 każdego wyrobu.

Zadanie 2 ćwiczenia 1 (metoda Simplex)

Tworzymy model ogólny.

Znaleźć maksimum funkcji $z = 17x_1 + 17x_2$

przy ograniczeniach

$$15x_1 + 15x_2 \leq 525$$
$$2x_1 + x_2 \leq 50$$
$$3x_1 + 6x_2 \leq 180$$
$$5x_2 \leq 110$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Tworzymy model standardowy.

Do każdego równania dodajemy po jednej ~~nierównos~~ zmiennej (kolejno x_3; x_4, x_5 i x_6).

Znaleźć maksimum funkcji

$$z = 17x_1 + 17x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

przy ograniczeniach

$$15x_1 + 15x_2 + x_3 = 525$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 50$$
$$3x_1 + 6x_2 + x_5 = 180$$
$$5x_2 + x_6 = 110$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Tworzymy tablicę simplexową.

BAZA	C	17 A_1	17 A_2	0 A_3	0 A_4	0 A_5	0 A_6	A_0
A_3	0	15	15	1	0	0	0	525
A_4	0	2	1	0	1	0	0	50
A_5	0	3	6	0	0	1	0	180
A_6	0	0	5	0	0	0	1	110
$z_j - c_j$		-17	-17	0	0	0	0	0

Bazę tworzą nowo dodane zmienne. Kolumnę C wypełniamy zerami. Kolejne wiersze to przepisane równania. Ostatni wiersz $(z_j - c_j)$ to odwrotność funkcji celu (dlatego -17 a nie 17). Ostatnią wartość w tym wierszu obliczamy z funkcji celu:

$$x^{(0)} = [0, 0, 525, 50, 180, 110]$$

$$z(x^{(0)}) = 0$$

Nie wszystkie $z_j - c_j$ są nieujemne dlatego wybieramy element simplexowy. Znajduje się on w kolumnie z najmniejszą wartością $z_j - c_j$. Wiersz wyszukujemy na podstawie wyrażenia $\min \frac{x_{i0}}{x_{ik}}$, gdzie x_{i0} to element z ostatniej kolumny, a x_{ik} to element z kolumny simplexowej i tego samego wiersza. Mamy:

$$\min\left\{\frac{525}{15}, \frac{50}{2}, \frac{180}{3}, \frac{110}{0}\right\} = 25$$ (zero nie bierzemy pod uwagę)

Elementem simplexowym jest 2 $(l = 2, k = 1)$.
Przekształcamy tablicę metodą Gaussa - Jordana i zamieniamy wektor bazowy (A_4 na A_1).
Dla wiersza simplexowego nowe wartości obliczamy na podstawie wyrażenia

$$x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}$$

czyli aktualna wartość podzielona przez element simplexowy:

$x_{21} = \frac{2}{2} = 1$, $x_{22} = \frac{1}{2}$, $x_{23} = \frac{0}{2} = 0$, $x_{24} = \frac{1}{2}$, $x_{25} = \frac{0}{2} = 0$

$x_{26} = \frac{0}{2} = 0$, $x_{20} = \frac{50}{2} = 25$

Dla pozostałych mamy: $x_{ij}' = x_{ij} - \frac{x_{ij} * x_{ik}}{x_{ik}}$, gdzie:

x_{ij} - aktualna wartość

x_{ij} - wartość z tej samej kolumny, ale wiersza simplexowego

x_{ik} - element simplexowy

x_{ik} - wartość z tego samego wiersza, ale kolumny simplexowej

$x_{11}' = 15 - \frac{15 \cdot 2}{2} = 0$, $x_{12}' = 15 - \frac{1 \cdot 15}{2} = 7{,}5$, $x_{13}' = 1 - \frac{0 \cdot 15}{2} = 1$

$x_{14}' = 0 - \frac{1 \cdot 15}{2} = -7{,}5$, $x_{15}' = 0 - \frac{0 \cdot 15}{2} = 0$, $x_{16}' = 0 - \frac{0 \cdot 15}{2} = 0$

$x_{10}' = 525 - \frac{50 \cdot 15}{2} = 150$, itd.

Do kolumny C wpisujemy wartości znad wektorów ($A_1 \to 17$, $A_2 \to 17$, $A_3 \to 0$, $A_4 \to 0$, $A_5 \to 0$, $A_6 \to 0$). Wartości bazowe to A_3, A_1, A_5 i A_6, więc odpowiednie wartości to 0, 17, 0 i 0.

Wartości $z_j - c_j$ liczymy podobnie jak wartości x_{ij}', czyli

$(z_1 - c_1)' = -17 - \frac{-17 \cdot 2}{2} = 0$, $(z_2 - c_2)' = -17 - \frac{-17 \cdot 1}{2} = -17 + 8{,}5 = -8{,}5$

$(z_3 - z_3)' = 0 - \frac{-17 \cdot 0}{2} = 0$, $(z_4 - c_4)' = 0 - \frac{-17 \cdot 1}{2} = 8{,}5$

$(z_5 - z_5)' = 0 - \frac{-17 \cdot 0}{2} = 0$, $(z_6 - z_6)' = 0 - \frac{-17 \cdot 0}{2} = 0$

$(z_0 - c_0)' = 0 - \frac{-17 \cdot 50}{2} = 425$

Otrzymujemy:

		17	17	0	0	0	0	
BAZA	C	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_0
A_3	0	0	7,5	1	-7,5	0	0	150
A_1	17	1	0,5	0	0,5	0	0	25
A_5	0	0	4,5	0	-1,5	1	0	105
A_6	0	0	5	0	0	0	1	110
$z_j - c_j$		0	-8,5	0	8,5	0	0	425

Nadal w wierszu $z_j - c_j$ mamy wartości ujemne, więc powtarzamy algorytm.

$$\min\{0; -8,5; 0; 8,5; 0,0\} = -8,5 \quad (k=2)$$

$$\min\left\{\frac{150}{7,5}; \frac{25}{0,5}; \frac{105}{4,5}; \frac{110}{5}\right\} = \min\{20; 50; 23,(3); 22\} = 20 \quad (l=1)$$

		17	17	0	0	0	0	
BAZA	C	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_0
A_2	17	0	1	0,1(3)	-1	0	0	20
A_1	17	1	0	-0,0(6)	1	0	0	15
A_5	0	0	0	-0,6	3	1	0	15
A_6	0	0	0	-0,(6)	5	0	1	10
$z_j - c_j$		0	0	1,1(3)	0	0	0	595

Wszystkie wartości $z_j - c_j$ są nieujemne, czyli osiągnęliś maksimum. Rozwiązanie optymalne to $x = [15, 20, 0, 0, 15, 10$ czyli należy wyprodukować 15 łodzi; 20 wozów, z czego uzyska się zysk równy 595.

zadanie 3 ćwiczenie 1 (metoda graficzna)

Układamy nierówności (ograniczenia)

$$\begin{cases} 0{,}02x_1 + 0{,}05x_2 \le 0{,}03(x_1+x_2) \\ 0{,}03x_1 + 0{,}05x_2 \le 0{,}04(x_1+x_2) \\ x_1 + x_2 \ge 90 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

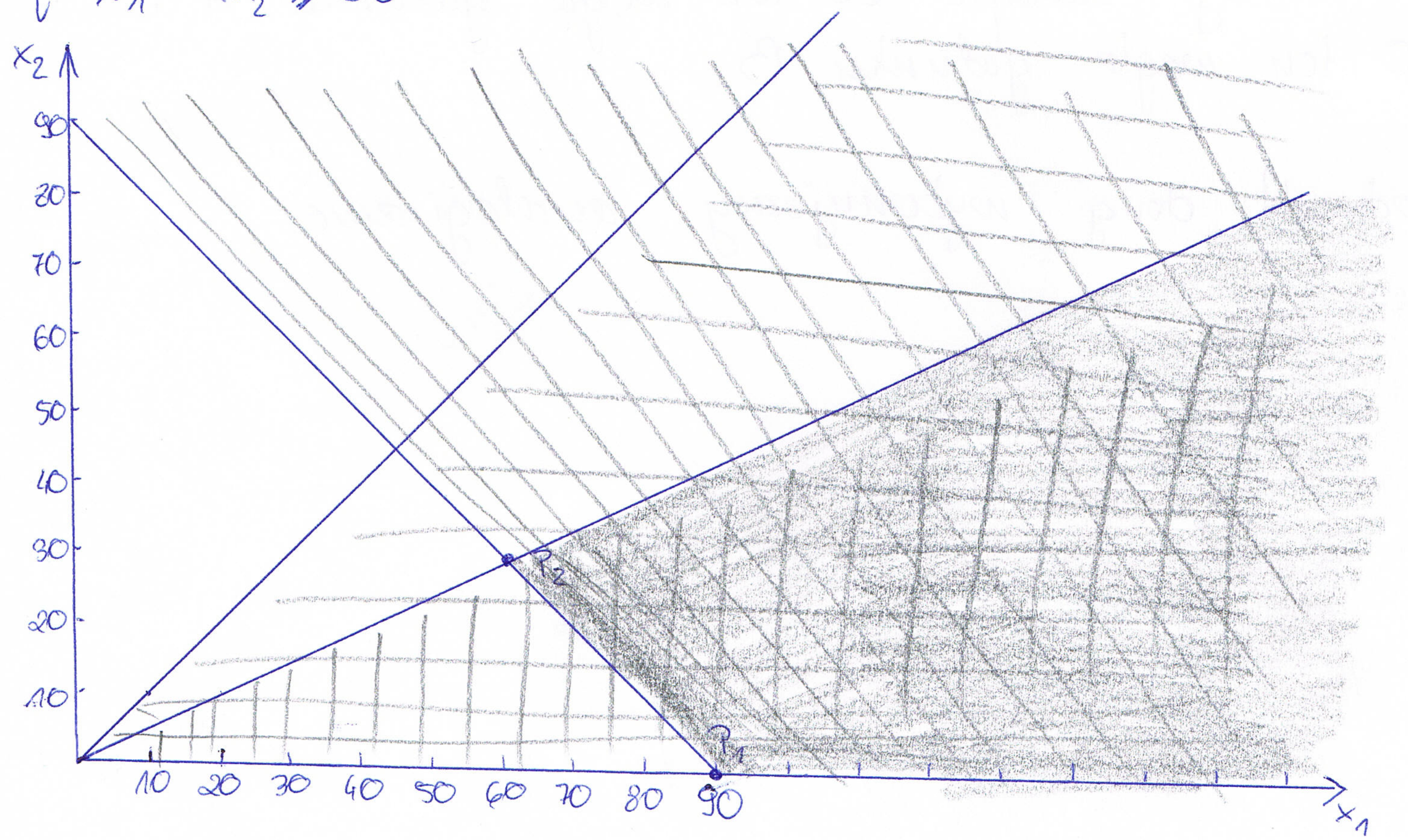
Funkcja celu:

$$z = 100x_1 + 80x_2 \searrow \min$$

Odpowiednio przekształcamy nierówności:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 3x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \le 4x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 \ge 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 0 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ x_1 + x_2 \ge 90 \end{cases}$$



Mamy dwa punkty, w których możemy osiągnąć minimum:

$P_1 = (90,0)$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 90 \\ -x_1 + 2x_2 &= 0 \\ \hline 3x_2 &= 90 \\ x_2 &= 30 \\ x_1 &= 60 \end{aligned}$$

$P_2 = (60,30)$

Obliczamy wartość funkcji zysku dla obu punktów:

$$z(P_1) = 100 \cdot 90 + 80 \cdot 0 = 9000$$
$$z(P_2) = 100 \cdot 60 + 80 \cdot 30 = 6000 + 2400 = 8400$$

Minimum osiągamy w punkcie P_2 (8400), co oznacza że należy zakupić 60 ton węgla gatunku A i 30 ton węgla gatunku B.

Podpunkt drugi wykonujemy analogicznie.

Zadanie 4 ćwiczenia 1 (metoda dużego M)

Metoda dużego M jest wersją metody Simplex wykorzystywaną, gdy występują nierówności $\geq$ (oprócz $\geq$).

Tworzymy model ogólny.

Funkcja celu:

$$z = 6x_1 + 15x_2 \downarrow_{min}$$

Ograniczenia:

$$0{,}5x_1 + 0{,}6x_2 \geq 18 \; / \cdot 10$$
$$0{,}04x_1 + 0{,}1x_2 \geq 2 \; / \cdot 50$$
$$0{,}06x_1 + 0{,}02x_2 \leq 0{,}05(x_1 + x_2) \; / \cdot 100$$

$$\Downarrow$$

$$5x_1 + 6x_2 \geq 180$$
$$2x_1 + 5x_2 \geq 100$$
$$x_1 - 3x_2 \leq 0$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Tworzymy model standardowy.

Podobnie, jak w zwykłej metodzie Simplex, do każdej nierówności dodajemy nową zmienną, której znak zależy od znaku nierówności („-" dla „$\geq$" oraz „+" dla „$\leq$"). Dodatkowo w przypadku nierówności o znaku „$\geq$" dodajemy kolejną zmienną.

Ograniczenia:

$$5x_1 + 6x_2 - x_3 + x_6 = 180$$
$$2x_1 + 5x_2 - x_4 + x_7 = 100$$
$$x_1 - 3x_2 + x_5 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Funkcja celu:

$$z = 6x_1 + 15x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7 \downarrow \min$$

$$z' = -6x_1 - 15x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 \nearrow \max$$

"M" dodajemy przed dodatkowymi zmiennymi.

		-6	-15	0	0	0	-M	-M	
BAZA	C	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0
A_6	-M	5	6	-1	0	0	1	0	180
A_7	-M	2	5	0	-1	0	0	1	100
A_5	0	1	-3	0	0	1	0	0	0
$z_j - c_j$	(-7M+6)	(-11M+15)	M	M	0	0	0	-280M

Tabelę Simplexową tworzymy, jak w przypadku zwykłej metody Simplex.
Wartości $z_j - c_j$ obliczamy:

~~[illegible]~~

$x_1 = [0,0,0,0,1,2,5]$, $z(x_1) = 0+0+0+0+1\cdot 0 - 2M - 5M + 6 = -7M$

$x_2 = [0,0,0,0,-3,6,5]$, $z(x_2) = 0+0+0+0+0\cdot(-3) - 6M - 5M + 15 = -11M + 15$

$x_3 = [0,0,0,0,0,-1,0]$, $z(x_3) = 0+0+0+0+0+M+0 = M$

$x_4 = [0,0,0,0,0,0,-1]$, $z(x_4) = 0+0+0+0+0+0+M = M$

$x_5 = [0,0,0,0,1,0,0]$, $z(x_5) = 0+0+0+0+0+0+0 = 0$

$x_6 = [0,0,0,0,0,1,0]$, $z(x_6) = 0+0+0+0+0-M+0+M = 0$

$x_7 = [0,0,0,0,0,0,1]$, $z(x_7) = 0+0+0+0+0+0-M+M = 0$

$x_0 = [0,0,0,0,0,180,100]$, $z(x_0) = 0+0+0+0+0-180M-100M = -280M$

Wartości w kółku wzięte są znad numerów wektorów (nad pierwszym wierszem).
Z tak przygotowaną tablicą Simplexową postępujemy tak samo jak w przypadku zwykłej metody Simplex.

BAZA	C	A_1 (-6)	A_2 (-15)	A_3 (0)	A_4 (0)	A_5 (0)	A_6 ($-M$)	A_7 ($-M$)	A_0
A_6	$-M$	2.6	0	-1	1.2	0	1	-1.2	60
A_2	-15	0.4	1	0	-0.2	0	0	0.2	20
A_5	0	2.2	0	0	-0.6	1	0	0.6	60
$z_j - c_j$		$-2.6M$	0	M	$3+1.2M$	0	0	$-3+2.2M$	$-300-60M$

$x_1 = [0, 0.4, 0, 0, 2.2, 2.6, 0]$, $z(x_1) = 0.4\cdot(-15) - 2.6M + 6 = -2.6M$

$x_2 = [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]$, $z(x_2) = 1\cdot(-15) + 15 = 0$

$x_3 = [0, 0, 0, 0, 0, -1, 0]$, $z(x_3) = (-1)\cdot(-M) = M$

$x_4 = [0, -0.2, 0, 0, -0.6, 1.2, 0]$, $z(x_4) = (-0.2)\cdot(-15) + 1.2\cdot(-M) = 3 + 1.2M$

$x_5 = [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]$, $z(x_5) = 0$

$x_6 = [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]$, $z(x_6) = -M + M = 0$

$x_0 = [0, 20, 0, 0, 60, 60, 0]$, $z(x_0) = 20\cdot(-15) - 60M = -300 - 60M$

$x_7 = [0, 0.2, 0, 0, 0.6, -1.2, 0]$, $z(x_7) = 0.2\cdot(-15) + 1{,}2M + M = -3 + 2{,}2M$

BAZA	C	A_1 (-6)	A_2 (-15)	A_3 (0)	A_4 (0)	A_5 (0)	A_6 ($-M$)	A_7 ($-M$)	A_0
A_1	-6	1	0	-0.38	0.46	0	0.38	-0.46	23.08
A_2	-15	0	1	0.15	-0.38	0	-0.15	0.38	10.77
A_5	0	0	0	0.85	-1.61	1	-0.85	1.61	9.23
$z_j - c_j$		0	0	-0.03	2.94	0	$0.03+M$	$2.94+M$	-300.03

W tabeli podane są przybliżenia do drugiego miejsca po przecinku w celu uproszczenia obliczeń.

		-6	-15	0	0	0	-M	-M	
BAZA	C	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0
A_1	-6	1	0	0	-0.27	0.45			27.27
A_2	-15	0	1	0	-0.09	-0.18			9.09
A_3	0	0	0	1	-1.90	1.18			10.90
$z_j - c_j$		0	0	0	~~3.00~~ 2.97	0			-299,(9)

Rozwiązaniem optymalnym jest 299,(9) - jest to minimalny koszt utrzymania koni. Koszt ten jest osiągany dla 27,27 kg paszy I i 9.09 paszy II.

Zadanie 5 ćwiczenia 1 (algorytm Gomory)

Dłużycę o długości 5,2m możemy pociąć na trzy sposoby:

(1 sposób) x_1: $2 \cdot 2{,}5m + 0 \cdot 0{,}7m + 0{,}2m = 5{,}2m$

(2 sposób) x_2: $1 \cdot 2{,}5m + 3 \cdot 0{,}7m + 0{,}6m = 5{,}2m$

(3 sposób) x_3: $0 \cdot 2{,}5m + 7 \cdot 0{,}7m + 0{,}3m = 5{,}2m$

Chcemy zminimalizować ilość odpadu, stąd funkcja celu:

$$z = 0{,}2x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}3x_3 \downarrow \min$$

odpad przy każdym ze sposobów cięcia

Ograniczenia:

$2x_1 + x_2 \geq 1200$ (300 kompletów po 4 belki 2,5m)

$3x_2 + 7x_3 \geq 2100$ (300 kompletów po 7 belek 7m)

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

x_1, x_2, x_3 - liczby całkowite

Zapiszmy powyższe zagadnienie w postaci nieujemnych form liniowych:

$$y_1 = -2(-x_1) - 1(-x_2) - 1200 \geq 0$$
$$y_2 = -3(-x_2) - 7(-x_3) - 2100 \geq 0$$
$$z = 0{,}2x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}3x_3$$

Elementy form liniowych umieszczamy w tablicy obliczeń:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
y_1	-2	-1	0	-1200
y_2	0	-3	-7	-2100
z	$0{,}2$	$0{,}6$	$0{,}3$	0

$$x^{(0)} = [\overset{x_1}{0}, \overset{x_2}{0}, \overset{x_3}{0}, \overset{y_1}{-1200}, \overset{y_2}{-210}$$

$$z(x^{(0)}) = 0$$

Wykonujemy iterację przekształceń Jordana względem elementu $a_{11} = -2$

	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
x_1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	600
y_2	0	-3	-7	-2100
z	$-0{,}1$	$0{,}5$	$0{,}3$	-120

Podobnie, jak w metodzie Simplex wybieramy kolumnę z najmniejszą wartością z oraz wiersz z najmniejszym ilorazem elementu z ostatniej i wybranej kolumny. Wybrany wiersz, a właściwie kolejne elementy, dzielimy przez wybrany element. Elementy z wybranej kolumny dzielimy przez przeciwność ~~przeciwność~~ wybranego ~~wybranego~~ elementu ~~elementu.~~ (zmieniamy ~~zmieniamy~~ znak). ~~znak).~~ Wybrany element jest, tak jakby dzielony przez swój kwadrat. Pozostałe elementy wyznaczamy, jak w zwykłej metodzie Simplex.

Wykonujemy drugą iterację przekształceń Jordana względem elementu $a_{23} = -7$

	$-y_1$	~~y~~ $-x_2$	$-y_3$	1
x_1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	600
x_3	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	300
z	$0{,}1$	$\frac{26}{70}$	$\frac{3}{70}$	-210

Gdy w pierwszej kolumnie zamiast „y" znajdą się „x" kończymy wykonywanie algorytmu.
Wynik odczytujemy oczywiście z ostatniej kolumny

$$x^{(2)} = [600, 0, 300, 0, 0]$$
$$z(x^{(2)}) = -210$$

Oznacza to, że należy wykonać 600 cięć pierwszego i 300 ~~do~~ trzeciego sposobu. Odpad w takim przypadku wyniesie 210 m.

Zadanie 4 ćwiczenie 2 (algorytm węgierski)

Żeby zastosować algorytm węgierski potrzebujemy tyle maszyn, ile jest zadań. Możemy to uzyskać wprowadzając nową, wirtualną maszynę.

	O_1	O_2	O_3	O_4
C_1	5	1	6	4
C_2	4	8	5	3
C_3	7	2	5	6
C_4	0	0	0	0

1) W każdym wierszu wybieramy element minimalny i odejmujemy go od wszystkich elementów w wierszu

	O_1	O_2	O_3	O_4
C_1	4	0	5	3
C_2	1	5	2	0
C_3	5	0	3	4
C_4	0	0	0	0

2) W każdej kolumnie wybieramy element minimalny i odejmujemy go od wszystkich elementów w kolumnie. W naszym przypadku macierz nie zmienia się ponieważ każda kolumna zawiera 0.

3) Macierz należy przekształcić tak, aby w każdym wierszu i w każdej kolumnie występowało co najmniej jedno zero.

4) W przekształconej macierzy należy skreślić wiersze i kolumny zawierające zera najmniejszą liczbą linii. Jeżeli liczba linii niezbędnych do pokrycia zer macierzy jest

równa n, to otrzymaliśmy rozwiązanie optymalne (skocz do punktu 6).

	O_1	O_2	O_3	O_4
C_1	4	0	5	3
C_2	1	5	2	0
C_3	5	0	3	4
C_4	0	0	0	0

5) Szukamy najmniejszego nieskreślonego elementu odejmujemy go od elementów nie skreślonych i dodajemy do elementów podwójnie skreślonych. Wracamy do punktu 4.

	O_1	O_2	O_3	O_4
C_1	3	0	4	3
C_2	0	5	1	0
C_3	4	0	2	4
C_4	0	1	0	1

	O_1	O_2	O_3	O_4
C_1	1	0	2	1
C_2	0	7	1	0
C_3	2	0	0	2
C_4	0	3	0	1

6) Konstruujemy macierz rozwiązania $X = [x_{ij}]$ $(i,j = 1,2,\dots,n)$ biorąc pod uwagę, że:

- jedynki w macierzy X mogą ~~się~~ znaleźć się tylko na tych pozycjach, na których występują

zero w macierzy C,
- w każdym wierszu macierzy X powinna wystąpić dokładnie jedna jedynka,
- w każdej kolumnie macierzy X powinna wystąpić dokładnie jedna jedynka.

	O_1	O_2	O_3	O_4
C_1	5	1	6	4
C_2	4	8	5	3
C_3	7	2	5	6
C_4	0	0	0	0

Wybieramy spośród podkreślonych. W pierwszym wierszu musimy wybrać 1. W ostatniej kolumnie musimy wybrać 3. W pierwszej kolumnie nie możemy wybrać 4, ponieważ w tym samym wierszu wybraliśmy 3, więc zaznaczamy 0. W trzeciej kolumnie musimy wybrać 5, ponieważ 0 znajduje się w tym samym wierszu co już wybrana liczba.

Oznacza to, że czynność C_1 powinna być wykonana na obrabiarce 2, C_2 na O_4 a C_3 na O_3 (O_1 nie jest wykorzystywana).