badania-operacyjne

pawelgorka

Published
with GitBook

Spis treści

1. Wstęp
2. Oznaczenia
3. Wykład
    i. slajd-001
    ii. slajd-002
    iii. slajd-003
    iv. slajd-004
    v. slajd-005
    vi. slajd-006
    vii. slajd-007
    viii. slajd-008
    ix. slajd-009
    x. slajd-010
    xi. slajd-011
    xii. slajd-012
    xiii. slajd-013
    xiv. slajd-014
    xv. slajd-015
    xvi. slajd-016
    xvii. slajd-017
    xviii. slajd-018
    xix. slajd-019
    xx. slajd-020
    xxi. slajd-021
    xxii. slajd-022
    xxiii. slajd-023
    xxiv. slajd-024
    xxv. slajd-025
    xxvi. slajd-026
    xxvii. slajd-027
    xxviii. slajd-028
    xxix. slajd-029
    xxx. slajd-030
    xxxi. slajd-030
    xxxii. slajd-031
    xxxiii. slajd-032
    xxxiv. slajd-033
    xxxv. slajd-034
    xxxvi. slajd-035
    xxxvii. slajd-036
    xxxviii. slajd-037
    xxxix. slajd-038
    xl. slajd-039
    xli. slajd-040
    xlii. slajd-041
    xliii. slajd-042
    xliv. slajd-043
    xlv. slajd-044
    xlvi. slajd-045

xlvii. slajd-046
xlviii. slajd-047
xlix. slajd-048
l. slajd-049
li. slajd-050
lii. slajd-051
liii. slajd-052
liv. slajd-053
lv. slajd-054
lvi. slajd-055
lvii. slajd-056
lviii. slajd-057
lix. Treści Zadań

4. Zadania
   i. 1.01
   ii. 1.02
   iii. 1.03
   iv. 2.01
   v. 2.02
   vi. 2.03
   vii. 3.01
   viii. 3.02
   ix. 3.03
   x. 4.01
   xi. 4.02
   xii. 5.01
   xiii. 5.02
   xiv. 5.03
   xv. 5.04
5. 2015
   i. zad1
   ii. zad2
   iii. zad3
6. 2014
   i. pierwszy-termin:zad1
   ii. pierwszy-termin:zad2
   iii. pierwszy-termin:zad3
   iv. drugi-termin:zad1
   v. drugi-termin:zad2
   vi. drugi-termin:zad3
7. 2013
   i. pierwszy-termin:zad1
   ii. pierwszy-termin:zad2
   iii. pierwszy-termin:zad3
   iv. drugi-termin:zad1
   v. drugi-termin:zad2
   vi. drugi-termin:zad3
8. 2012
   i. zad1
   ii. zad2
   iii. zad3
9. 2009
   i. zad1

    ii. zad2
    iii. zad3
10. 20XX
    i. zad1
    ii. zad2
11. Glosariusz

Badania Operacyjne

Kompendium wiedzy z przedmiotu, wszystkie kolokwia, zadania, wykłady, ćwiczenia z rozwiazaniami - opracowane i wytłumaczone.

Błędy poprawki sugestie proszę zgłaszać pod: https://github.com/pawelgorka/badania-operacyjne/issues

Otwarte Publiczne Repozytorium: https://github.com/pawelgorka/badania-operacyjne

---

Oznaczenia

a_{sr} śreni interwał przybycia zgłoszenia (zawsze dane ?) avg. time of request arrival (always given?)

b_{sr} średni rozmiar zgłoszenia avg. size of request

v $[wymiarzgloszenia/s]$ prędkość procesora [unit-of-request/s] speed of CPU

τ_{sr} średni czas obsługi zgłoszenia avg time of request handling (finish time?)

w_{sr} średni opóźnienie buforowania avg delay of buffering

d_{sr} średni czas przebywania w systemie (czas życia) avg time of staying in system (life time)

r $[bezwymiarowe]$ współczynnik obciążenie procesora | niestabilność przy $r \geq 1$ [unit-less] coef of CPU utilisation | unstability at r >=1

ρ $[bezwymiarowe]$ normatywny współczynnik obciążenia - w systemach wielo procesorowych [unit-less] norm. coef of utilisation in MCPU

L frakcja zgłoszeń utraconych wskutek przepełnienia pamięci buforowej fraction of requests lost due to buffer overflow

p_k $[bezwymiarowe]$ frakcja czasu w której w systemie jest k zgłoszeń [unit-less] fraction of time at which system has k requests

$1 - p_0$ $[bezwymiarowe]$ współczynnik zajętości (wykorzystania) procesora [unit-less] coef of CPU occupancy/(un)utilisation

$N_{sr}[bezwymiarowe]$ średnia ilość zadań w systemie [unitless] - avg no of tasks in system

Wzory

$\tau_{sr} = \frac{b_{sr}}{v}$ avg time of request handling (finish time?)

$r = \frac{b_{sr}}{a_{sr} * v}$ [unit-less] coef of CPU utilisation | unstability at r >=1

$r = \frac{\tau_{sr}}{a_{sr}}$

Prawo Little'a:

[unitless] - avg no of tasks in system

$N_{sr} = \frac{1-L}{a_{sr}} * d_{sr}$

w ujęciu procesora: $1 - p_0 = \frac{(1-L)}{a_{sr}} * \tau_{sr} = (1-L) * r$

1 - [unit-less] coef of CPU occupancy/(un)utilisation =
(1 - fraction of requests lost due to buffer overflow)
= -- * (avg time of request hand.) =
(avg. time of request arrival)
= (1 - fraction of requests lost due to buffer overflow)*([unit-less] coef of CPU utilisation)

w ujęciu pamięci buforowej: $N_{sr} - (1 - p_0) = \frac{1-L}{a_{sr}} * w_{sr}$

Notacja KENDALLA

KENDALL Notation

A / B / S / Q / J

OZNACZENIA: WHERE:

- A - rozkład interwałów zgłoszeń A - distribution of requests intervals
- B - rozkład wielkości wymagań zgłoszeń. B - distribution of requests demanded sizes
- S - liczba procesorów S - no of CPU
- Q - pojemność pamięci buforowej (jeśli nie podany to zakładamy ∞) Q - size of buffer memory (if not given, assume its infinity)
- J - rozmiar populacji źródeł zgłoszeń (opcjonalny parametr) J - size of requests sources population (optional)

Typy rozkładów: Types of distributions

- M - wykładniczy M - expotential
- D - Deterministyczny D - deterministic
- G - Ogólny G - general

Systemy Typu: M/?/?/? Systems of type : M/?/?/?

- możemy rozdzielać stumień zgłoszeń w sposób losowy na inne rzadsze: we may separate stream of requests on random others less dense
- możemy agregować stumień zgłoszeń: we may aggregate stream of requests

Systemy Typu: M/M/?/? - Markowowskie: Systems of type: M/M/?/? - Markowow

Systemy Typu: M/M/1/? Systems of type: M/M/1/?

$N_{sr} = \frac{r}{1-r}$ - co w przypadku gdy r = 1 ? - what in case of r = 1?

$p_k = p_0 * r^k$

$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + ... = 1$

$p_0 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + ...) \Rightarrow p_0 = 1 - r$

Systemy Typu: M/M/1/Q Systems of type: M/M/1/Q

$p_0 = \frac{1-r}{1-r^{Q+1}}$

$L = \frac{1-r}{1-r^{Q+1}} * r^Q$, gdy $r \neq 1$ when r not 1

$L = \frac{1}{Q+1}$, gdy $r = 1$ when r is 1

$N_{sr} = \sum_{k=0}^{Q} p_k * k$

Jeśli p_k jest stałe to: $N_{sr} = p_k * \sum_{k=0}^{Q} k$ if p_k is constant then: ...

Suma skończonego ciągu arytmetycznego: $\frac{a_1 + a_n}{2} * n$ finite arithmetic sequence sum: ...

Systemy Typu: M/M/S Systems of type: M/M/S

$r = \frac{b_{sr}}{a_{sr} * v * S}$ - współczynnik obciążenia - load coefficient

$\rho = \frac{b_{sr}}{a_{sr} * v}$ - normatywny współczynnik obciążenia [erlangi] - normalized load coef [earlang]

Systemy Typu: M/M/∞ Systems of type: M/M/inf

$N_{sr} = \rho$

$p_k = e^{-\rho * \frac{e^k}{k!}}$

Wykład

PDF

jeśli nie daje się pobrać wykładów przez link, kliknąć "raw" w github'ie

slajd - 001

Badania operacyjne
Systemy masowej obsługi
1. Opis i działanie

Jerzy Konorski
pok. 139 EA
jekon@eti.pg.gda.pl

zaliczenie tej części: test końcowy (min 17 pkt z 34)

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 1

Literatura

- L. Kleinrock: *Queuing systems*, vol. I, II, Wiley 1975-1976
- D. Gross, C.M. Harris: *Fundamentals of Queuing Theory,* Wiley 1998
- Joti Lal Jain, W. Boehm, Sri Gopal Mohanty: *A Course on Queuing Models*, Chapman & Hall 2006
- G. Bolch, S. Greiner, H. de Meer, K. S. Trivedi: *Queueing Networks and Markov Chains. Modeling and Performance Evaluation with Computer Science Applications*, 2nd Ed., Wiley-Interscience 2006

- D. Koenig, D. Stoyan: *Metody teorii obsługi masowej*, WNT, Warszawa 1979
- G.P. Klimow: *Procesy obsługi masowej*, WNT, Warszawa 1979
- J. Błażewicz i in.: *Badania operacyjne dla informatyków*, WNT, Warszawa 1983, rozdziały 3 i 4
- B. Filipowicz: *Modele stochastyczne w badaniach operacyjnych. Analiza i synteza systemów obsługi i sieci kolejkowych*, WNT, Warszawa 1996
- T. Czachórski: *Modele kolejkowe w ocenie efektywności sieci i systemów komputerowych*, Wyd. J. Skalmierski, Gliwice 1999

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 2

1

slajd - 002

Systemy masowej obsługi

- **system informatyczny** (komputer / *call center* / baza danych / serwer WWW) : przerwania / uaktualnienia / zapytania / transakcje oczekują w kolejce na zwolnienie się operatorów / jednostek obliczeniowych / obszarów danych
- **urządzenie telekomunikacyjne** (karta sieciowa / centrala telefoniczna / koncentrator szybkiego łącza danych): ramki danych / wywołania abonenckie oczekują na zwolnienie się łącza
- **infrastruktura transportowa** (wjazd na autostradę / stacja benzynowa / nabrzeże portowe / pas startowy): pojazdy oczekują na "szczelinę obsługi" (*slot*)
- **punkt świadczenia usług** (bankomat / kasa w supermarkecie / urząd): klienci / petenci oczekują na zwolnienie się osób / urządzeń obsługujących

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 3

Systemy masowej obsługi (2)

Wszędzie kolejki!
Trzeba je uwzględniać w projektowaniu systemów.

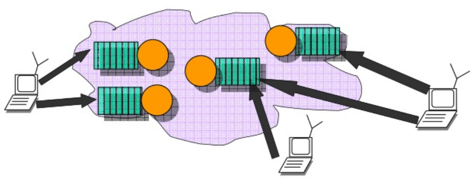
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 4

2

slajd - 003

Systemy masowej obsługi (3)

- **system** posiada **zasoby** – ograniczone, zwrotne
- reaguje na zdarzenia w postaci przybywających **zgłoszeń** = żądań dostępu do zasobów
- w odpowiedzi przydziela zgłoszeniu wybrane zasoby, umożliwiając ich konsumpcję przez pewien skończony czas = **obsługa zgłoszenia**
- zasoby systemu zdolne do świadczenia obsługi = **procesory**
- zgłoszenie może natrafić na procesory zajęte obsługą innych zgłoszeń
- w takim wypadku zostaje umieszczone w **pamięci buforowej**, gdzie oczekuje w **kolejce** na zwolnienie się procesora i rozpoczęcie obsługi



J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 5

Misja teorii kolejek

Populacja zgłoszeń / źródeł zgłoszeń jest zwykle bardzo liczna.

Pozbawia to sensu optymalizację konkretnych scenariuszy przybywania zgłoszeń, np. harmonogramowanie zbioru zadań minimalizujące czas zakończenia lub liczbę wykorzystanych procesorów.

Można jedynie analizować i projektować zasady obsługi przybywających "na bieżąco" **strumieni zgłoszeń**. W tym celu studiujemy przebiegi czasowe rozmaitych charakterystyk kolejek = **procesy kolejkowe** (**procesy obsługi**)

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 6

3

slajd - 004

Misja teorii kolejek (2)

Przy licznej populacji zgłoszeń chwilowy popyt na obsługę często przekracza chwilową podaż obsługi – wtedy tworzą się kolejki.
Należy ograniczać ich negatywne skutki, np.

- niezadowolenie klientów (opóźnienia, odmowa / rezygnacja z obsługi),
- koszty buforowania i zarządzania,

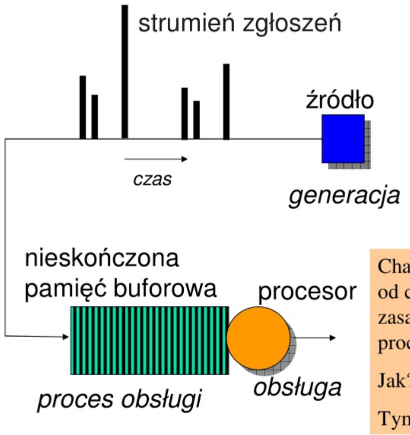
dbając jednocześnie o ekonomię wykorzystania procesorów.

Narzędzia badawcze po temu wypracowane zostały przez ważny dział badań operacyjnych – **teorię kolejek** (inaczej **teorię masowej obsługi**).

Zaczęło się podczas II wojny światowej, od bombowców krążących w kolejce do lądowania...

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 7

Najprostszy model



Elementy najprostszego modelu systemu masowej obsługi:

- pamięć buforowa
- procesor
- strumień zgłoszeń

Charakterystyki procesu obsługi zależą od charakterystyk strumienia zgłoszeń i zasad pracy systemu pamięć buforowa-procesor.

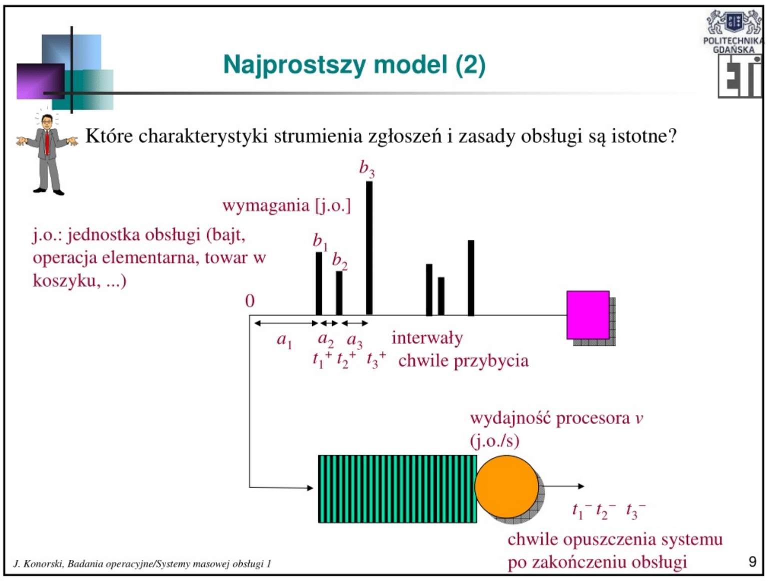
Jak?

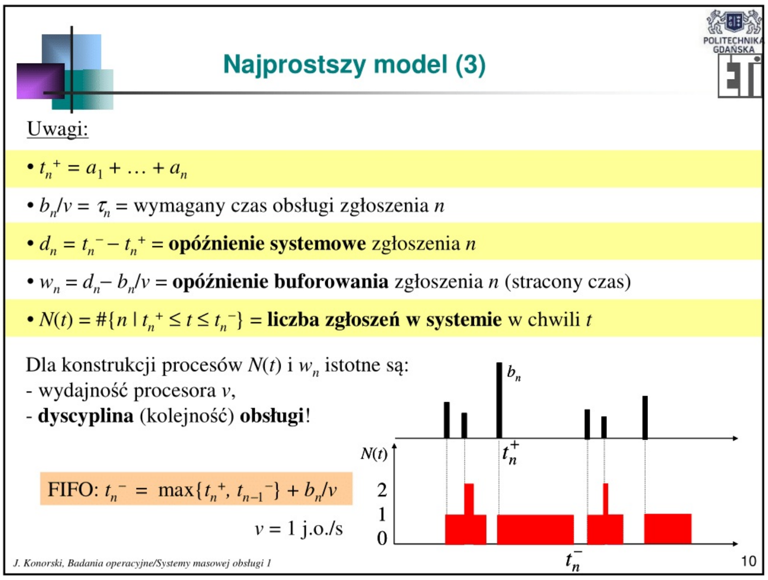
Tym właśnie zajmuje się teoria kolejek.

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 8

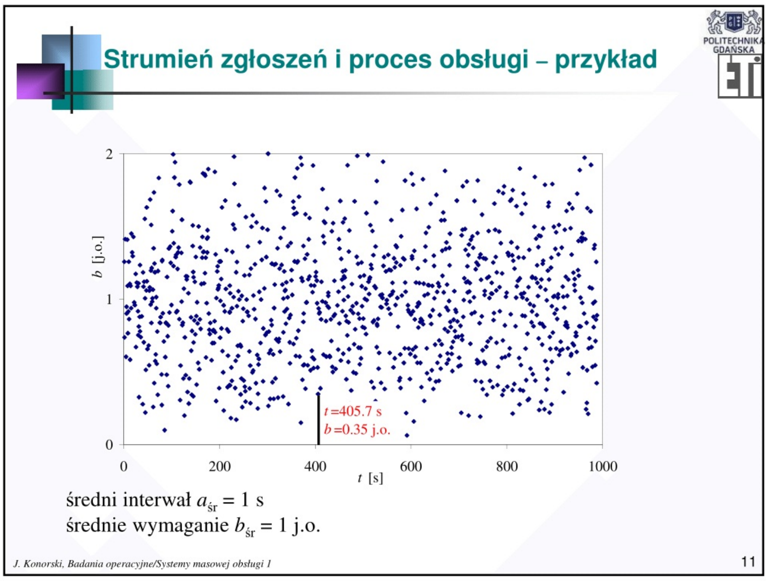
4

slajd - 005


Najprostszy model (2)
POLITECHNIKA GDAŃSKA
Które charakterystyki strumienia zgłoszeń i zasady obsługi są istotne?
b_3
wymagania [j.o.]
j.o.: jednostka obsługi (bajt, operacja elementarna, towar w koszyku, ...)
b_1
b_2
0
a_1 a_2 a_3 interwały
t_1^+ t_2^+ t_3^+ chwile przybycia
wydajność procesora v (j.o./s)
t_1^- t_2^- t_3^-
chwile opuszczenia systemu po zakończeniu obsługi
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1
9


Najprostszy model (3)
POLITECHNIKA GDAŃSKA
Uwagi:
• $t_n^+ = a_1 + \ldots + a_n$
• $b_n/v = \tau_n$ = wymagany czas obsługi zgłoszenia n
• $d_n = t_n^- - t_n^+$ = **opóźnienie systemowe** zgłoszenia n
• $w_n = d_n - b_n/v$ = **opóźnienie buforowania** zgłoszenia n (stracony czas)
• $N(t) = \#\{n \mid t_n^+ \le t \le t_n^-\}$ = **liczba zgłoszeń w systemie** w chwili t
Dla konstrukcji procesów $N(t)$ i w_n istotne są:
- wydajność procesora v,
- **dyscyplina** (kolejność) **obsługi**!
FIFO: $t_n^- = \max\{t_n^+, t_{n-1}^-\} + b_n/v$
v = 1 j.o./s
b_n
$N(t)$
t_n^+
2
1
0
t_n^-
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1
10

slajd - 006



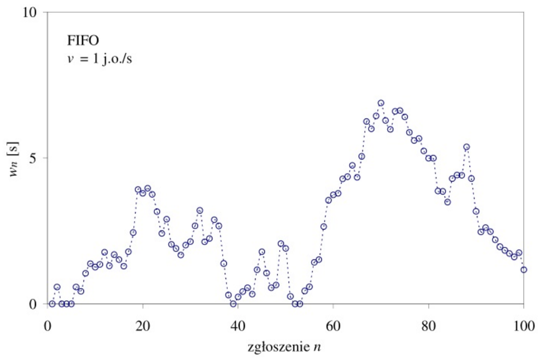
Strumień zgłoszeń i proces obsługi – przykład
POLITECHNIKA GDAŃSKA
2
1
0
b [j.o.]
t =405.7 s
b =0.35 j.o.
0
200
400
600
800
1000
t [s]
średni interwał $a_{śr}$ = 1 s
średnie wymaganie $b_{śr}$ = 1 j.o.
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1
11

Strumień zgłoszeń i proces obsługi – przykład (2)
POLITECHNIKA GDAŃSKA
10
5
0
N
FIFO
v = 1 j.o./s
0
20
40
60
80
100
t [s]
okresy bezczynności i zajętości procesora
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1
12

6

slajd - 007

Strumień zgłoszeń i proces obsługi – przykład (3)



J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 13

Jakie własności ma "dobry" proces obsługi?

- z punktu widzenia zgłoszeń: niewielkie opóźnienia buforowania, rzadkie odmowy przyjęcia zgłoszenia wskutek zbyt długiej kolejki
- z punktu widzenia operatora systemu: wysokie wykorzystanie procesora (rzadkie okresy bezczynności)

Sprzeczne oczekiwania! Coraz rzadszym okresom bezczynności towarzyszy:

- występowanie kolejek
- wzrost długości kolejek
- systematyczne narastanie kolejki / lawina odmów przyjęcia – procesor "nie wyrabia się z obsługą" w czasie rzeczywistym!

Relacja pomiędzy charakterystykami strumienia zgłoszeń a wydajnością procesora określa **obciążenie systemu**.
Jak je ilościowo zdefiniować?
Jaką to daje informację o działaniu systemu?
Przy jakim obciążeniu procesor przestaje "wyrabiać się z obsługą"?

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 14

7

slajd - 008

Współczynnik obciążenia – ruch oferowany

Rozpatrzmy długi okres obserwacji T.

W tym czasie przybędzie w przybliżeniu $T/a_{śr}$ zgłoszeń,
łącznie reprezentują one średni **popyt na obsługę** = $b_{śr}(T/a_{śr})$ j.o.

Podaż obsługi w tym czasie wyniesie vT.

Współczynnik obciążenia systemu = stosunek średniego popytu do podaży:

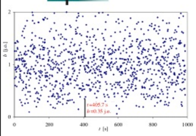
$$r = \frac{b_{śr}(T/a_{śr})}{vT} = \frac{b_{śr}/v}{a_{śr}} = \frac{b_{śr}/a_{śr}}{v}$$ (bezwymiarowy)

= średni czas obsługi zgłoszenia ($b_{śr}/v$) / średni interwał między zgłoszeniami ($a_{śr}$),
= intensywność popytu ($b_{śr}/a_{śr}$) / wydajność procesora (v).

Przy $r > 1$ procesor "nie wyrabia się" – **niestabilność**. Przy $r < 1$ "wyrabia się".
Co się dzieje przy $r = 1$?

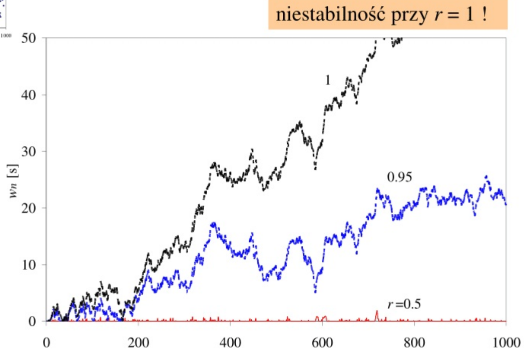
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 15

Współczynnik obciążenia – ruch oferowany (2)



ten sam strumień zgłoszeń ($a_{śr}$ = 1 s, $b_{śr}$ = 1 j.o.)
zmniejszanie v

niestabilność przy r = 1 !



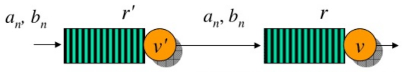
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 16

8

slajd - 009

Wpływ prędkości transferu źródło-system

Dotąd zakładaliśmy natychmiastowy transfer zgłoszeń ze źródła do systemu (dowolnie małe a_n). W praktyce prędkość transferu jest ograniczona.



zgłoszenie uważa się za przybyłe w chwili rozpoczęcia "wirtualnej obsługi"

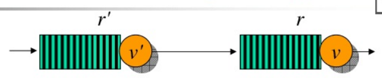
Można to modelować jako "wirtualny" wejściowy system kolejkowy z procesorem o wydajności $v' < \infty$ oraz strumieniem zgłoszeń z (b_n) i (a_n).

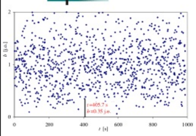
W rzeczywistym systemie $a_n \geq b_n/v'$.
Niech $r' = (b_{śr}/a'_{śr})/v'$, $r = (b_{śr}/a_{śr})/v$. Oczywiście $r' = (v/v')r$.

$$\left.\begin{array}{l} r' = 0 \\ r' = 0.5r \\ r' = r \end{array}\right\} \text{odpowiada} \left\{\begin{array}{l} v' = \infty \text{ (transfer natychmiastowy)}, \\ v' = 2v \\ v' = v \text{ (brak kolejek w rzeczywistym systemie).} \end{array}\right.$$

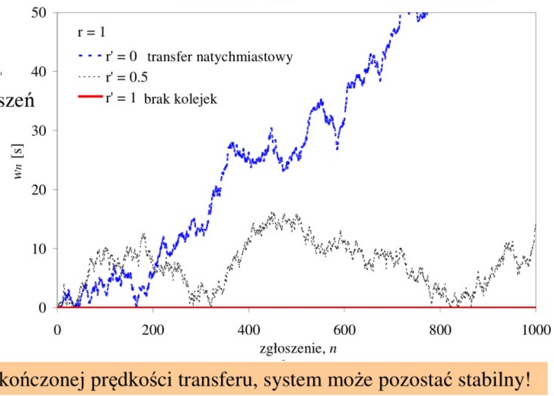
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 17

Wpływ prędkości transferu źródło-system (2)





ten sam strumień zgłoszeń ($a_{śr}$ = 1 s, $b_{śr}$ = 1 j.o.)



Przy r = 1 lecz skończonej prędkości transferu, system może pozostać stabilny!

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 18

9

slajd - 010

W stronę realistycznych modeli

Jaki wpływ na procesy obsługi mają inne charakterystyki strumienia zgłoszeń, zachowanie się zgłoszeń w systemie i zasady obsługi?

- **strumień zgłoszeń**
  jaki jest mechanizm generacji (a_n) i (b_n)?
  zmienność w czasie? zależność od procesu obsługi? grupowość?
  wymagania b_n – znane/nieznane w chwili przybycia?
- **pamięć buforowa**
  skończona pojemność Q?
  ograniczenia dostępności? kiedy odmowa przyjęcia – *drop-tail*?

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 19

W stronę realistycznych modeli (2)

- **zachowanie się zgłoszenia w obliczu odmowy przyjęcia / długiej kolejki**
  przepadek?
  ponowienie po odczekaniu (*timeout*)?
  eliminacja innych zgłoszeń (*pushout*)?
  niecierpliwość – I, II rodzaju
- **zachowanie się zgłoszenia po rozpoczęciu / zakończeniu obsługi**
  warunki opuszczenia kolejki – blokowanie?
  warunki zwolnienia procesora – obsługa także przez inne procesory?
  powrót do kolejki? kiedy? z jakimi zmianami (kreacja zgłoszeń potomnych)?

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 20

10

slajd - 011

W stronę realistycznych modeli (3)

- **dyscyplina obsługi – co decyduje o kolejności obsługi**
  chwila przybycia (FIFO, LIFO)?
  przypadek (RANDOM)?
  wielkość wymagania / bieżące zaawansowanie obsługi (SJF, LASF)?
  karuzela (RR)?
  dodatkowe wymagania zgłoszeń – progi niecierpliwości?
  zewnętrzna klasyfikacja zgłoszeń – priorytety, sprawiedliwość (HOL, WFQ)?
- **procesor – tryb obsługi**
  zachowawczy (okres zajętości trwa dokładnie $\Sigma b_n/v$)
  czy niezachowawczy (awarie / strumień tła / "wakacje", obsługa porcjami, zaniechania / wznowienia obsług)?
  bez przeplotu czy z przeplotem?
  wiele procesorów – dostępność? wymagania zgłoszeń?
  obsługa umiejscowiona czy zrównoleglona?

Czy uda się stworzyć uniwersalny symulator systemów masowej obsługi?

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 21

Stan ustalony

W **stacjonarnym** systemie masowej obsługi:

- mechanizm generujący strumień zgłoszeń pozostaje niezmienny w czasie (charakterystyki strumienia zgłoszeń uśredniane za długi okres obserwacji nie zależą od długości okresu obserwacji)
- wydajność procesora v pozostaje stała.

W *dobrze zaprojektowanym* systemie stacjonarnym ($r < 1$) występuje **stan ustalony**
(charakterystyki procesu obsługi uśredniane za coraz dłuższy okres obserwacji ustalają się).

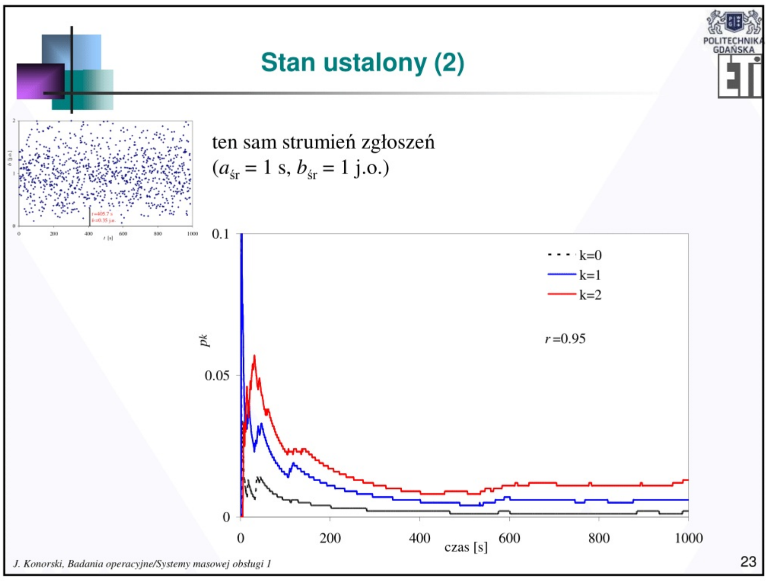
W szczególności

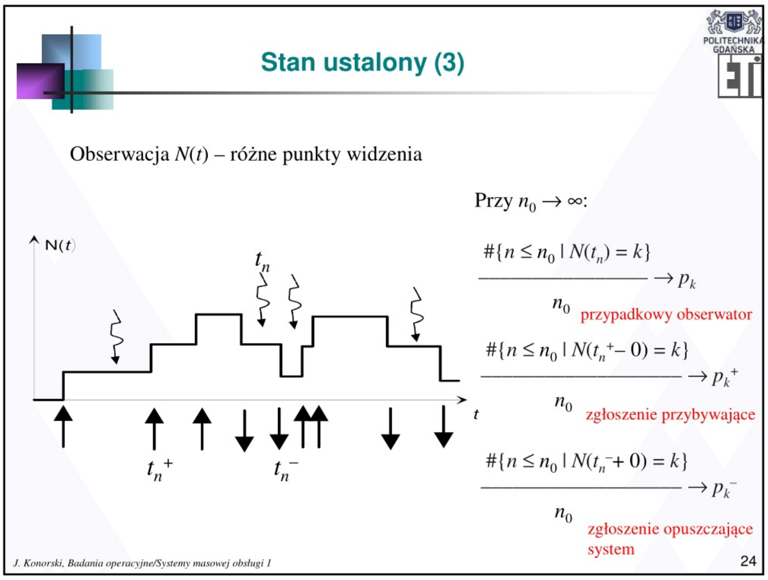
$$\frac{|\{t \le T \mid N(t) = k\}|}{T} \to p_k \text{ przy } T \to \infty$$

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 22

11

slajd - 012


Stan ustalony (2)
POLITECHNIKA GDAŃSKA
ten sam strumień zgłoszeń
($a_{śr}$ = 1 s, $b_{śr}$ = 1 j.o.)
k=0
k=1
k=2
r=0.95
p_k
0.1
0.05
0
0
200
400
600
800
1000
czas [s]
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1
23

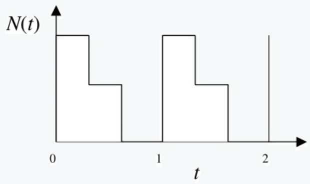

Stan ustalony (3)
POLITECHNIKA GDAŃSKA
Obserwacja $N(t)$ – różne punkty widzenia
Przy $n_0 \to \infty$:
N(t)
t_n
t
t_n^+
t_n^-
$\frac{\#\{n \le n_0 \mid N(t_n) = k\}}{n_0} \to p_k$
przypadkowy obserwator
$\frac{\#\{n \le n_0 \mid N(t_n^+ - 0) = k\}}{n_0} \to p_k^+$
zgłoszenie przybywające
$\frac{\#\{n \le n_0 \mid N(t_n^- + 0) = k\}}{n_0} \to p_k^-$
zgłoszenie opuszczające system
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1
24

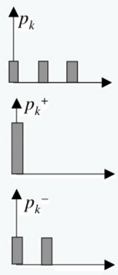
12

slajd - 013

Stan ustalony (4)

Uwaga, "praktycy"!

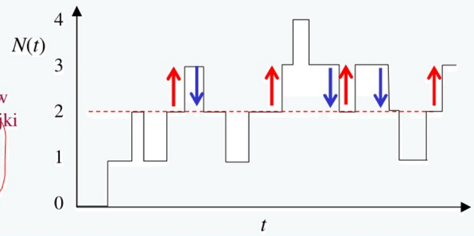




Stan ustalony (5)

Argument skoków ±1: jeżeli $N(t)$ zmienia się tylko o ±1, to $p_k^+ \equiv p_k^-$

Różnica między liczbą skoków w górę i w dół = długość kolejki (< ∞ z prawd. 1), zaś różnica między #↑ i #↓ jest ≤ 1 w dowolnym przedziale czasu!



Uwaga: Jeżeli możliwe są odmowy przyjęcia, to liczą się tylko zgłoszenia przyjęte. Np. gdy $Q < \infty$ (odmowy wskutek przepełnienia pamięci buforowej), to argument skoków ±1 daje

$$\frac{p_k^+}{1-p_Q^+} = p_k^-,\ k = 0,\ldots,Q-1$$

13

slajd - 014

Stan ustalony (6)

Istotne kryteria oceny systemu:

$p_1^+ + \ldots + p_{Q-1}^+$	frakcja zgłoszeń buforowanych
$L = p_Q^+$	frakcja zgłoszeń utraconych wskutek przepełnienia pamięci buforowej (bez ponowień)
$1 - p_0$	współczynnik zajętości (wykorzystania) procesora = 1 – współczynnik bezczynności

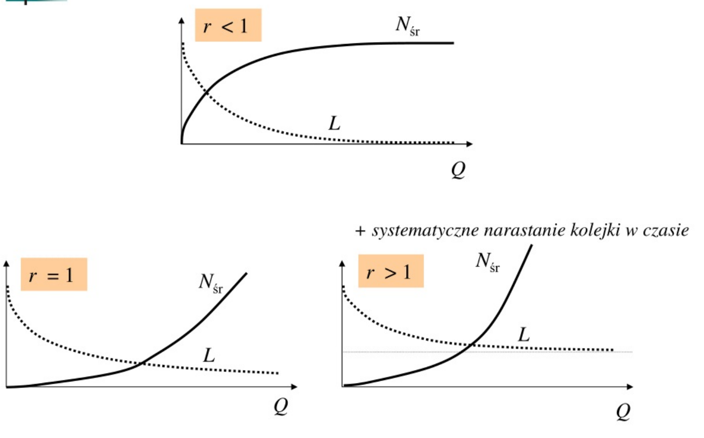
$$N_{śr} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T N(t)dt = \lim_{n_0\to\infty} \frac{1}{n_0}\sum_{n=1}^{n_0} N(t_n)$$

średnia liczba zgłoszeń w systemie

$\dfrac{w_{śr}}{\frac{b_{śr}}{v}} = \dfrac{w_{śr}}{\tau_{śr}}$	średnie opóźnienie buforowania	normalizacja względem średniego czasu obsługi
$\dfrac{d_{śr}}{\tau_{śr}}$	…systemowe	

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 27

Stan ustalony (7)

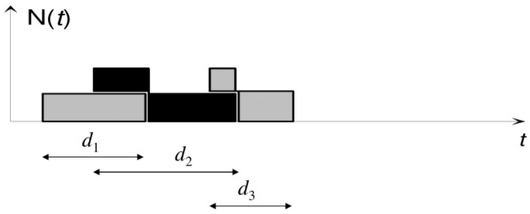


J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 28

14

slajd - 015

Prawo Little'a



przy $n, T \to \infty$: $\int_0^T N(t)dt = d_1 + ... + d_n$

$TN_{śr}$

$(T/a_{śr})(1 - L)d_{śr}$

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi I 29

Prawo Little'a (2)

$$N_{śr} = \frac{1-L}{a_{śr}} d_{śr}$$

średnia liczba zgłoszeń w systemie =
(średnia **przepływność** systemu) x (średni czas przebywania w systemie)

średnia populacja = (średnia cyrkulacja) x (średni czas życia)

Obowiązuje dla dowolnego fragmentu systemu:

- procesor: $1 - p_0 = \frac{1-L}{a_{śr}} \tau_{śr} = (1-L)r$ **równanie ciągłości przepływu**
- pamięć buforowa: $N_{śr} - (1 - p_0) = \frac{1-L}{a_{śr}} w_{śr}$

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi I 30

15

slajd - 016

Teoria kolejek straci znaczenie?

W przyszłości wzrost v (a więc spadek r do zera) wyeliminuje kolejki?

komunikacja transatlantycka	10 rejsów x 1000 pasażerów/20 dni	1000 lotów x 250 pasażerów/dzień	x500
handel detaliczny	10 sklepów x 100 klientów/dzień	100 sklepów x 10000 klientów/dzień	x1000
łącze dostępowe	10 kb/s	100 Mb/s	x10 000
moc obliczeniowa	\$15m/GFLOPS (1984)	\$0.5/GFLOPS (2007)	x30000000

http://en.wikipedia.org/wiki/FLOPS

Mimo wszystko odpowiedź: Nie.

Teoria kolejek straci znaczenie? (2)

Po pierwsze, samoloty na trasach transatlantyckich, kasy w supermarketach, łącza internetowe, centra komputerowe są zatłoczone jak nigdy.

Popyt na obsługę rośnie w ślad za podażą – r wcale nie spada!

slajd - 017

Teoria kolejek straci znaczenie? (3)

Po drugie, skąd właściwie biorą się kolejki?

Nie tylko z powodu $v < \infty$, lecz przede wszystkim z powodu zmienności a_n (arytmia strumienia zgłoszeń) oraz b_n (kapryśne wymagania zgłoszeń)!

Arytmia powoduje, że *chwilowe* obciążenie systemu waha się od 0 do ∞.
Eliminacja choćby tylko okazjonalnych kolejek wymaga procesora z $v = \infty$.

Przy $b_{śr}/a_{śr} < \infty$ daje to $r = 0$ tj. zerowe wykorzystanie procesora!!!
Bardzo nieeekonomiczne, niezależnie od nieprzewidywalnych postępów w technologii i zarządzaniu.

Co *jest* ekonomiczne? Utrzymywanie $r < 1$, tj. $v > b_{śr}/a_{śr}$, *ale nie bardzo!*
Oznacza to dopuszczenie do powstawania kolejek.

Komentarze do teorii kolejek

Teoria kolejek to analiza matematyczna. Lepszy byłby prototyp / symulator?

- wiarygodne oceny kłopotliwych charakterystyk
  zdarzenia rzadkie – przekroczenie progu długości kolejki,
  długi okres zajętości – czy to już niestabilność?
- jakościowy (a nie swoisty względem określonych ustawień) wpływ parametrów modelu na charakterystyki procesów obsługi – oszczędza wielu niepotrzebnych eksperymentów
- ! - uniwersalny (jakościowo, a często i ilościowo) charakter wyników dla nieskomplikowanych modeli systemów masowej obsługi

Wbrew pozorom analiza matematyczna jest bardzo kosztowna.
Opłaca się, gdy udziela odpowiedzi, o które inaczej byłoby trudno.

17

slajd - 018

Komentarze do teorii kolejek (2)

Agner Krarup Erlang (1878-1929)

duński matematyk i inżynier,
pierwszy zrozumiał, że nowoczesna telefonia nie może się obejść bez matematyki

jednostka ruchu telekomunikacyjnego = 1 *erlang*

Komentarze do teorii kolejek (3)

Jak teoria kolejek "ma się do" analizy:

szeregowania zadań
tam: optymalny harmonogram dla ustalonego zbioru zadań
tutaj: ciągły nieprzewidywalny strumień przybywających zadań

procesów współbieżnych
tam: deterministyczna analiza konkretnych scenariuszy zdarzeń
tutaj: w dużych populacjach zdarzeń (obsługa *masowa*...) widać tylko charakterystyki statystyczne

procesów przypadkowych
wykorzystuje podobny aparat obliczeniowy
(proces obsługi = inercyjne przekształcenie strumienia zgłoszeń)

slajd - 019

Badania operacyjne
Systemy masowej obsługi
2. Modele i charakterystyki stochastyczne

Jerzy Konorski
jekon@eti.pg.gda.pl

Zmienne losowe i strumienie losowe

Dla danego scenariusza zgłoszeń można wyznaczyć $a_{śr}$, $b_{śr}$ i inne charakterystyki. Jednak potrzeba modelu generacji nieprzewidywalnych (a_n) i (b_n).

Dobrym modelem zjawisk nieprzewidywalnych są **zmienne losowe** – przyjmują konkretne wartości z pewnymi prawdopodobieństwami, tj. posiadają pewne **rozkłady prawdopodobieństwa**. W ramach powszechnego w nauce i technice **podejścia bayesowskiego** przyjmujemy te rozkłady za znane / dające się wyliczyć.

Dalej interesować się będziemy wyłącznie **strumieniami losowymi**. Dlaczego nielosowymi nie?

- praktycznie nie występują,
- nie niosą informacji, nie stanowią problemu projektowego (!)

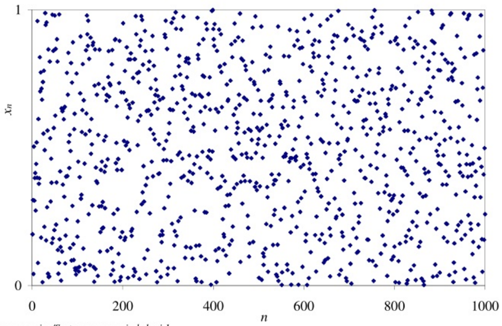
Przedmiotem dalszych rozważań będą więc **stochastyczne** modele i charakterystyki systemów masowej obsługi.

slajd - 020

Zmienne losowe i strumienie losowe (2)

Przykładem zmiennej losowej może być liczba zwracana przez `random` (o ile nie znamy algorytmu generacji liczb pseudolosowych).
Posiada ona o rozkład równomierny w przedziale [0,1).

Pierwsze 1000 **realizacji** (zaobserwowanych wartości):



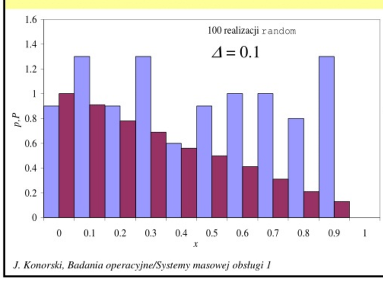
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 39

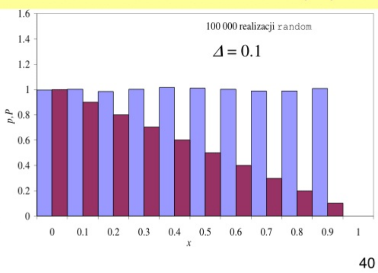
Rozkłady empiryczne

Na podstawie realizacji $x_1,\ldots,x_N$ tworzymy **histogram**:

- dzielimy zakres możliwych realizacji na przedziały o szerokości Δ,
- zliczamy realizacje w i-tym przedziale, $k_i = \#\{n \mid i\Delta \le x_n \le (i+1)\Delta\}$
- dla argumentu $i\Delta$ rysujemy słupek o szerokości Δ i wysokości $p_i = (k_i/N)/\Delta$,

Histogram kumulacyjny powstaje analogicznie, słupki o wysokości $P_i = \Sigma_{j\ge i} p_j$.





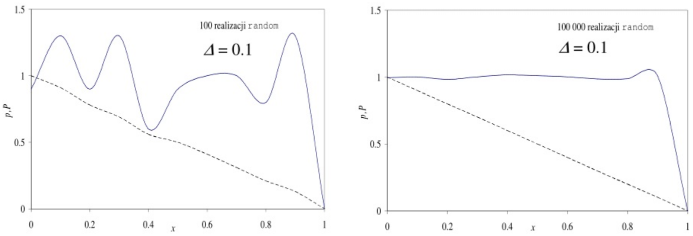
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 40

20

slajd - 021

Rozkłady empiryczne (2)

…albo bardziej czytelnie, przy pomocy linii ciągłych



Wartość średnia: $x_{\text{śr}} = \dfrac{x_1 + \ldots + x_N}{N}$

Odchylenie standardowe (rozrzut wokół średniej): $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(x_n - x_{\text{śr}})^2}$

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 41

Rozkłady teoretyczne

Gęstość prawdopodobieństwa i **komplementarna dystrybuanta** – histogramy, jakie otrzymalibyśmy w granicy przy $N \to \infty$ i $\Delta \to 0$.

Gęstość prawdopodobieństwa: $p(x) = \lim_{\Delta \to 0} \dfrac{\Pr[x \le X < x + \Delta]}{\Delta}$

Dla dowolnych x' i x'': $\Pr[x' \le X < x''] = \int_{x'}^{x''} p(x)dx$,

Komplementarna dystrybuanta: $P(x) = \int_x^{\infty} p(y)dy$

$x_{\text{śr}} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx, \quad \sigma_x = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}(x - x_{\text{śr}})^2 p(x)dx}$

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 42

21

slajd - 022

Rozkłady teoretyczne (2)

W wielu problemach inżynierskich występuje tzw. **rozkład Weibulla**:

$$P(x) = e^{-\lambda x^{\theta}}, \quad p(x) = \lambda\theta x^{\theta-1} e^{-\lambda x^{\theta}}, \quad x \geq 0$$

λ – parametr skali,
θ – parametr kształtu (= 1: **rozkład wykładniczy).**

$$x_{\text{śr}} = \int_0^{\infty} \sqrt[\theta]{\frac{y}{\lambda}}\, e^{-y} dy$$

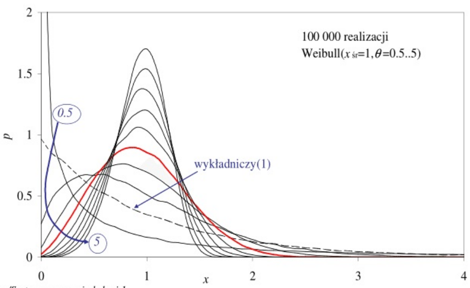
$$\sigma_x = \sqrt{\int_0^{\infty} \sqrt[\theta]{\frac{y^2}{\lambda^2}}\, e^{-y} dy - x_{\text{śr}}^2}$$

Sztuczna generacja strumieni zgłoszeń

Mamy generator `random` liczb pseudolosowych (z_n).
Jak generować liczby pseudolosowe (x_n) o dowolnej funkcji $P(x)$?

x_n jest rozwiązaniem równania $P(x) = z_n$, np. dla r. Weibulla: $x_n = \sqrt[\theta]{-\frac{\ln z_n}{\lambda}}$

(tzw. **metoda odwracania dystrybuanty**; jest też wiele innych).



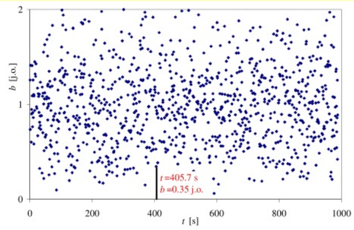
slajd - 023

Sztuczna generacja strumieni zgłoszeń (2)

Wprowadźmy zmienne losowe:

A – interwał (realizacje a_n),

B – wymaganie (realizacje b_n)

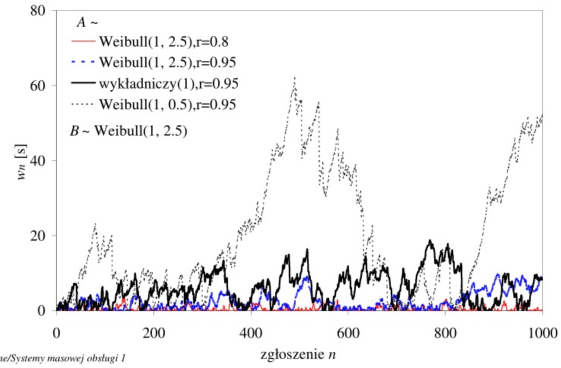


Znany nam już strumień został wygenerowany jako A, B ~ Weibull(1, 2.5).

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 45

Wpływ kształtu rozkładu *A*, *B*

Widzieliśmy, że przebieg procesu obsługi silnie zależy od wartości średnich $a_{śr}$, $b_{śr}$. Czy także od *kształtu* rozkładów A i B?



nawet bardzo!

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 46

23

slajd - 024

Notacja Kendalla

A/*B*/*S*/*Q*/*J* ...

Przykłady:

M/M/1
M/D/1/10
$E_3/H_2/5/10$
M/M/5//20
M/G/*S*
G/G/*S*
M^X/G/5
MMPP/G/1
D+M/M/1//20
M/D/1/*P***Q*
M/G/1 LIFO, HOL, ...

S – #procesorów
Q – pojemność pamięci buforowej
J – rozmiar populacji źródeł zgłoszeń

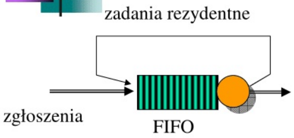
Typy rozkładów:

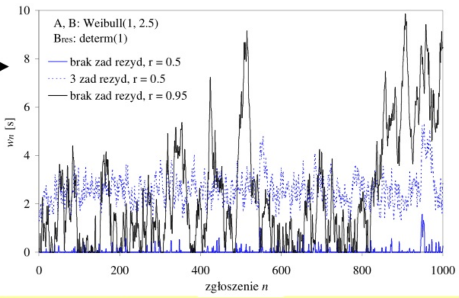
M – wykładniczy
D – deterministyczny
E_k – Erlanga rzędu *k*
H_k – hiperwykładniczy rzędu *k*
G – ogólny

Jaki jest wpływ innych czynników – *S*, *Q*, zachowań zgłoszeń, zasad obsługi?

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 47

Zadania rezydentne





Przyczyną wzrostu opóźnień jest wzrost *r*?

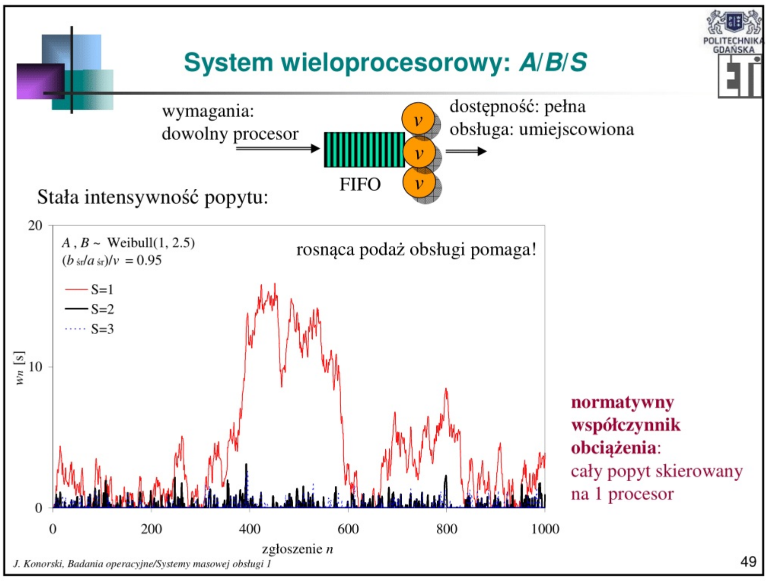
$$\frac{b_{śr}}{a_{śr}v} + \frac{\#rezyd \cdot b_{śr}}{d_{śr}v} \approx 0.5 + \frac{3 \cdot 1}{3.5 \cdot 2} \approx 0.95$$

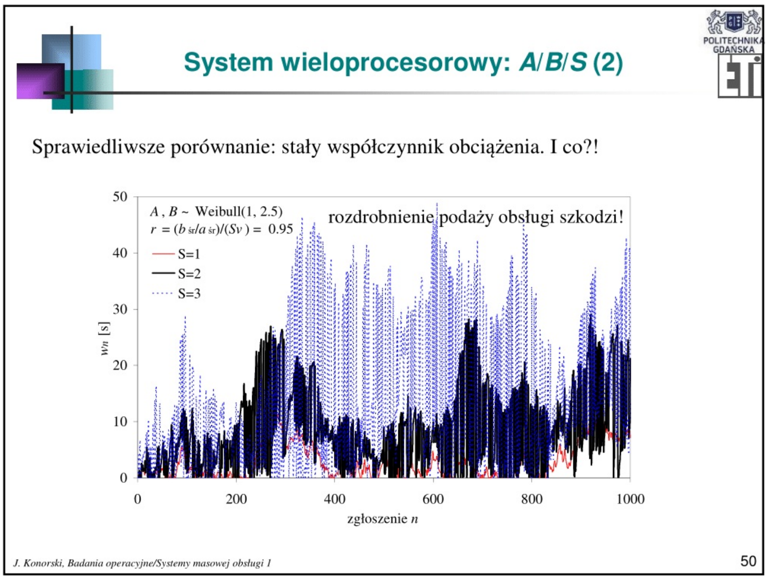
Porównaj wykresy dla *r* = 0.95 – jest też wpływ jakościowy.

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 48

24

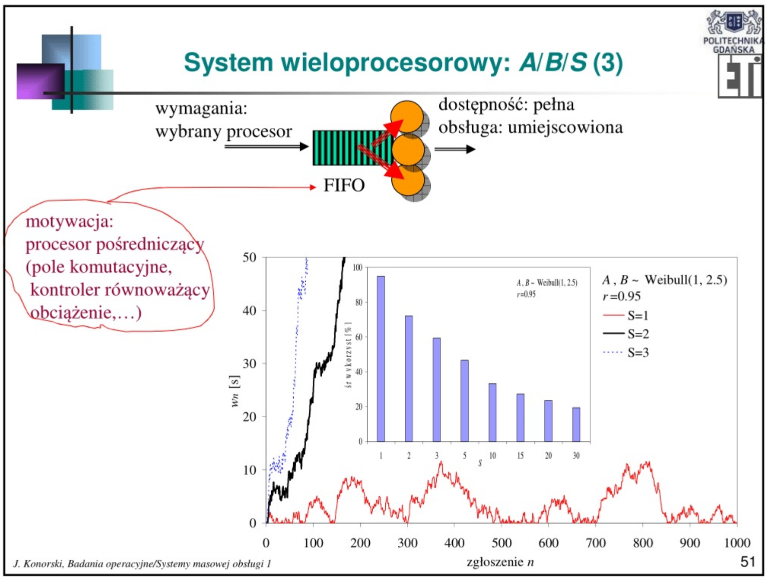
slajd - 025

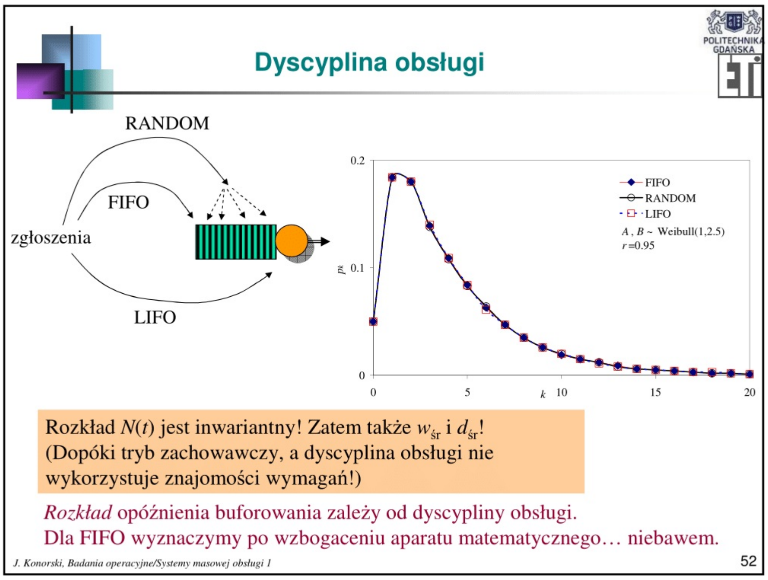

System wieloprocesorowy: A/B/S
wymagania:
dowolny procesor
FIFO
v
v
v
dostępność: pełna
obsługa: umiejscowiona
Stała intensywność popytu:
A , B ~ Weibull(1, 2.5)
(b śr/a śr)/v = 0.95
rosnąca podaż obsługi pomaga!
S=1
S=2
S=3
wn [s]
20
10
0
0
200
400
600
800
1000
zgłoszenie n
normatywny
współczynnik
obciążenia:
cały popyt skierowany
na 1 procesor
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1
49


System wieloprocesorowy: A/B/S (2)
Sprawiedliwsze porównanie: stały współczynnik obciążenia. I co?!
A , B ~ Weibull(1, 2.5)
r = (b śr/a śr)/(Sv) = 0.95
rozdrobnienie podaży obsługi szkodzi!
S=1
S=2
S=3
wn [s]
50
40
30
20
10
0
0
200
400
600
800
1000
zgłoszenie n
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1
50

25

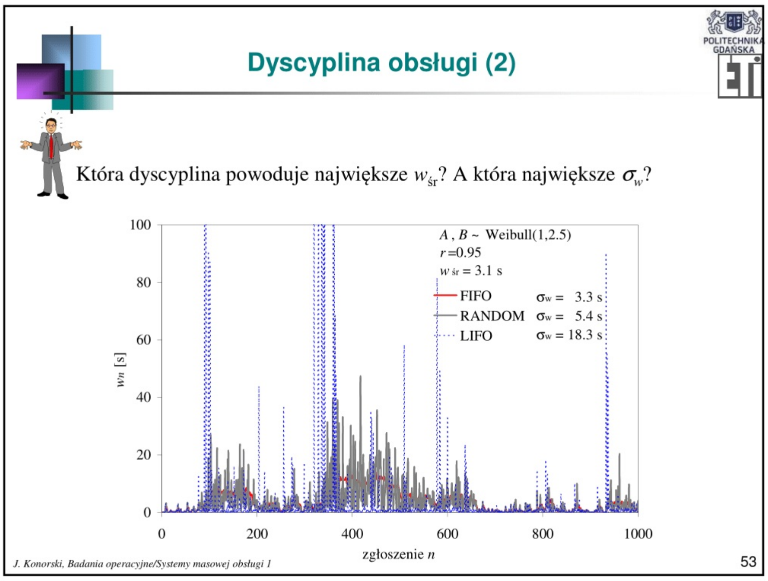
slajd - 026

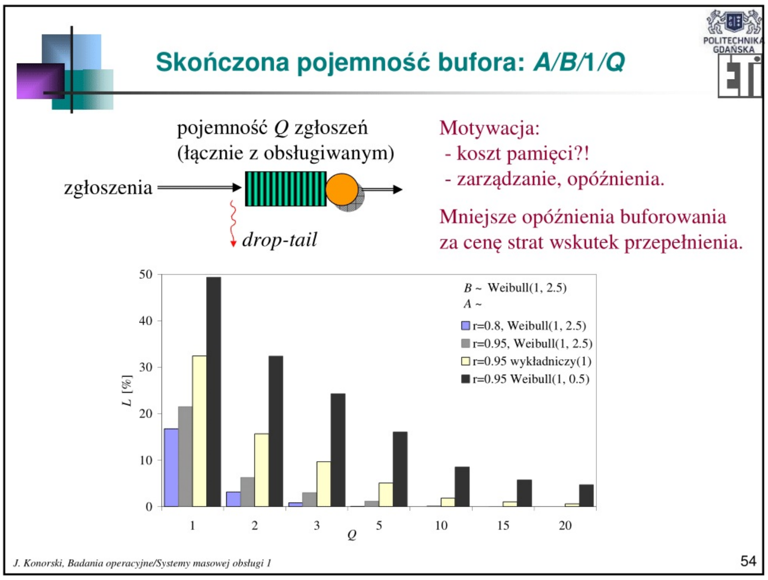

System wieloprocesorowy: A/B/S (3)
POLITECHNIKA GDAŃSKA
wymagania:
wybrany procesor
dostępność: pełna
obsługa: umiejscowiona
FIFO
motywacja:
procesor pośredniczący
(pole komutacyjne,
kontroler równoważący
obciążenie,…)
A , B ~ Weibull(1, 2.5)
r =0.95
S=1
S=2
S=3
wn [s]
zgłoszenie n
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1
51


Dyscyplina obsługi
POLITECHNIKA GDAŃSKA
RANDOM
FIFO
zgłoszenia
LIFO
FIFO
RANDOM
LIFO
A , B ~ Weibull(1,2.5)
r =0.95
0.2
0.1
0
5
k 10
15
20
Rozkład N(t) jest inwariantny! Zatem także wśr i dśr!
(Dopóki tryb zachowawczy, a dyscyplina obsługi nie
wykorzystuje znajomości wymagań!)
Rozkład opóźnienia buforowania zależy od dyscypliny obsługi.
Dla FIFO wyznaczymy po wzbogaceniu aparatu matematycznego… niebawem.
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1
52

26

slajd - 027

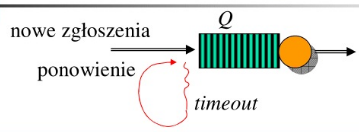

Dyscyplina obsługi (2)
POLITECHNIKA GDAŃSKA
Która dyscyplina powoduje największe $w_{śr}$? A która największe σ_w?
A , B ~ Weibull(1,2.5)
r =0.95
w śr = 3.1 s
FIFO σw = 3.3 s
RANDOM σw = 5.4 s
LIFO σw = 18.3 s
wn [s]
0
20
40
60
80
100
0
200
400
600
800
1000
zgłoszenie n
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1
53


Skończona pojemność bufora: A/B/1/Q
POLITECHNIKA GDAŃSKA
pojemność Q zgłoszeń
(łącznie z obsługiwanym)
zgłoszenia
drop-tail
Motywacja:
- koszt pamięci?!
- zarządzanie, opóźnienia.
Mniejsze opóźnienia buforowania
za cenę strat wskutek przepełnienia.
B ~ Weibull(1, 2.5)
A ~
r=0.8, Weibull(1, 2.5)
r=0.95, Weibull(1, 2.5)
r=0.95 wykładniczy(1)
r=0.95 Weibull(1, 0.5)
L [%]
0
10
20
30
40
50
1
2
3
5
10
15
20
Q
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1
54

27

slajd - 020

A/B/1/Q z ponowieniami



W bardziej realistycznym modelu zgłoszenie odrzucone nie jest utracone, lecz odczekuje pewien czas i przybywa znów (**ponowienie**).

- zajęty numer telefoniczny (*"spróbuj zadzwonić później"*)
- chwilowo niedostępny serwer/sieć GSM, …

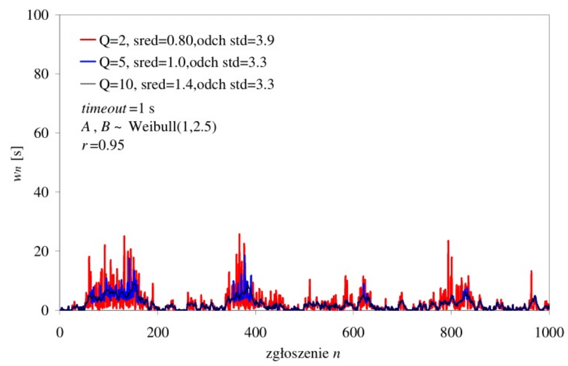
Jako w_n przyjmujemy czas od *pierwszego* zgłoszenia do rozpoczęcia obsługi. Odzwierciedla to jednocześnie opóźnienia i przepełnienia pamięci buforowej.

Prosty model:
- stały czas odczekania (*timeout*)
- nieograniczona liczba ponowień.

Jak dobierać Q?

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 55

A/B/1/Q z ponowieniami (2)



Zmniejszanie Q polepsza średnią, pogarsza rozrzut i "ogony" rozkładu opóźnień.

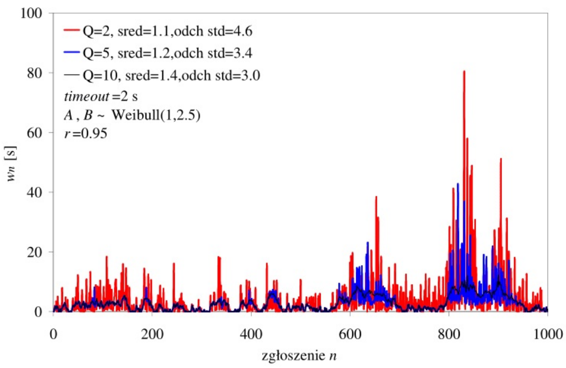
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 56

28

slajd - 029

A/B/1/Q z ponowieniami (3)

Staje się to bardziej widoczne przy "cierpliwszych" zgłoszeniach:

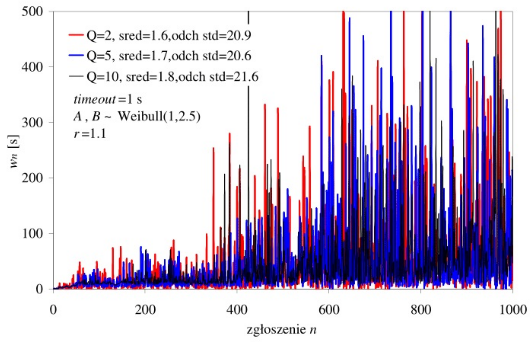


J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1

57

A/B/1/Q z ponowieniami (4)

Przy nieco większym obciążeniu dramatycznie widoczne są "ogony":



J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1

58

29

slajd - 030

Ważniejsze modele strumieni zgłoszeń

- Weibulla
- Bernouilliego
- Erlanga
- gamma
- …

strumienie odnowy:
(a_n) jest ciągiem realizacji niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie (**iid** – *independent, identically distributed*)

- bardziej skomplikowane
  zmienne w czasie rozkłady *A* i *B*, MMPP, BMAP, fraktalny proces Browna, …
  – modelują niestacjonarność, zależność od procesu obsługi, grupowość, wewnętrzną korelację, …

Wewnętrzna korelacja

Czy o przebiegu procesu kolejkowego przesądzają same rozkłady *A* i *B*, czy też rolę odgrywa **wewnętrzna korelacja** (**autokorelacja**) w ciągu (a_n)?

$$corr_a(l) = \frac{1}{\sigma_a^2}\frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M}(a_n - a_{śr})(a_{n+l} - a_{śr}), \quad M \to \infty, l = 0, 1, 2, ...$$

(**funkcja autokorelacji** = jak bardzo skorelowane są ze sobą interwały odległe o *l* zgłoszeń; korelacja zwykle zanika przy rosnącym *l*)

W strumieniu odnowy brak jest wewnętrznej korelacji (~ "biały szum"):

$$corr_a(l) = \begin{cases} 1, \text{gdy } l = 0 \\ 0, \text{gdy } l \neq 0 \end{cases}$$

slajd - 031

Wewnętrzna korelacja (2)

Eksperyment 1

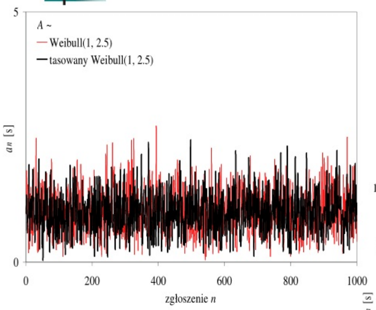
Generujemy ciągi (a_n) i (b_n) zgodnie z Weibull(1, 2.5) metodą odwracania dystrybuanty, wykorzystując kolejne liczby pseudolosowe. Tak powstały strumień odnowy kierujemy do systemu masowej obsługi z $r = 0.95$.

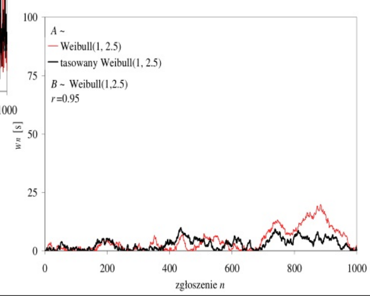
Obserwujemy proces kolejkowy (w_n).

Następnie **tasujemy**, tj. przypadkowo permutujemy wygenerowany ciąg (a_n), bierzemy ten sam ciąg (b_n) i powtarzamy obserwację (w_n).

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 61

Wewnętrzna korelacja (3)





J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 62

31

slajd - 032

Wewnętrzna korelacja (4)

Eksperyment 2

Generujemy ciąg (a_n) metodą odwracania dystrybuanty, A ~ Weibull(1, 2.5),

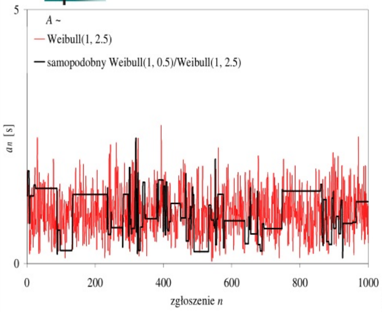
- wykorzystując kolejne liczby pseudolosowe – strumień odnowy
- powtarzając interwał liczbę razy wylosowaną z rozkładu Weibull(1, 0.5)

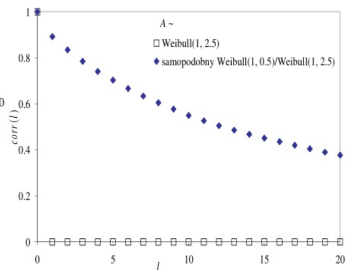
W obu wariantach rozkład interwału jest taki sam. Jednak drugi wariant daje (a_n) z dalekosiężną wewnętrzną korelacją – tzw. **strumień samopodobny**.

Bierzemy ten sam ciąg (b_n) i znów kierujemy tak powstały strumień zgłoszeń do systemu masowej obsługi, w którym r = 0.95.

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 63

Wewnętrzna korelacja (5)





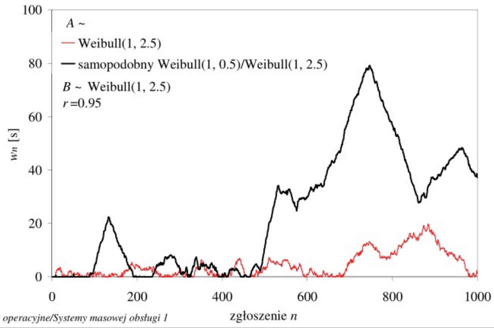
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 64

32

slajd - 033

Wewnętrzna korelacja (6)

Porównanie procesów kolejkowych dla strumienia odnowy i samopodobnego wypada dramatycznie…



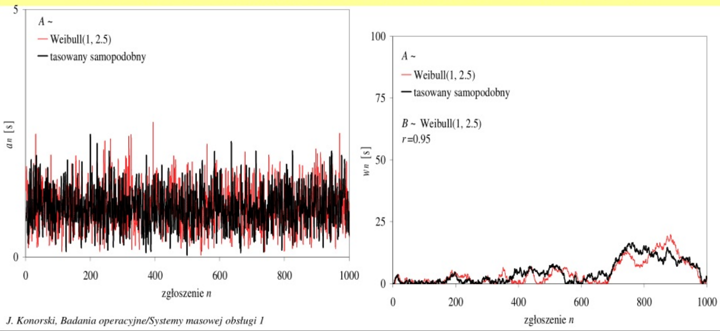
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 65

Wewnętrzna korelacja (7)

Eksperyment 3

Tasujemy ciąg (a_n) we wcześniej wygenerowanym strumieniu samopodobnym, co niszczy wewnętrzną korelację, lecz zachowuje rozkłady *A* i *B*.

Bierzemy ten sam ciąg (b_n) i porównujemy ze strumieniem odnowy…



J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 66

33

slajd - 034

Wewnętrzna korelacja (8)

Wnioski:

- Tasowanie strumienia odnowy nie zmienia (braku) wewnętrznej korelacji, nie wpływa też istotnie na przebieg procesu kolejkowego – można się o tym przekonać np. konstruując histogram opóźnień buforowania. W przypadku strumienia odnowy rozkłady *A* i *B* stanowią wystarczającą informację dla przewidywania własności procesu kolejkowego.
- Obecność wewnętrznej korelacji w strumieniu zgłoszeń może wyraźnie pogarszać przebieg procesu kolejkowego – obserwowaliśmy to na przykładzie strumienia samopodobnego (z dalekosiężną wewnętrzną korelacją). Tutaj o przebiegu i własnościach procesu kolejkowego decyduje głównie postać funkcji autokorelacji ciągu (a_n) .
- Znaczenie wewnętrznej korelacji staje się widoczne po jej usunięciu poprzez tasowanie.

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 67

Strumień odnowy: interwał resztkowy

Z wyjątkiem szczególnych zastosowań (rytm serca, wylewy Nilu, ruch WWW,…) strumienie odnowy stanowią dobry model rzeczywistych strumieni zgłoszeń. Przez chwilę skupimy uwagę tylko na interwałach.

Jakie typy rozkładów *A* są spotykane w praktyce?

Naturalnie bardzo różne. Jednak istnieje pewien rozkład o uniwersalnym znaczeniu i pewnych "magicznych" właściwościach.
Aby je zrozumieć, należy prześledzić problem **interwału resztkowego**.

Zdarzenia zachodzą z przypadkowymi interwałami. Wybieramy przypadkową chwilę. Jak długo poczekamy na najbliższe zdarzenie?

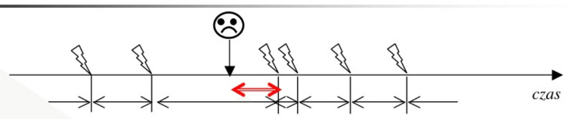
Może to być problem pasażera autobusu, abonenta dodzwaniającego się do zajętego numeru telefonicznego, nieprzerywającego zgłoszenia VIP i in.

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 68

34

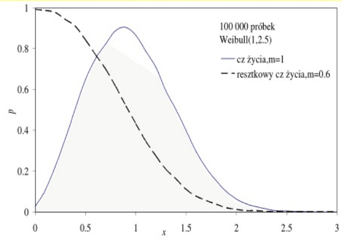
slajd - 035

Strumień odnowy: interwał resztkowy (2)



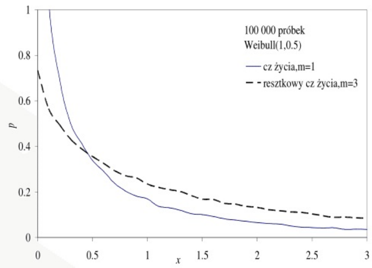
Autobus przyjeżdża średnio co godzinę. "Statystyczny pasażer" czeka pół godziny?

Znamy rozkład interwału między autobusami. Jaki przewidujemy rozkład interwału resztkowego? Przesunięty w stronę mniejszych realizacji?



J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 69

Strumień odnowy: interwał resztkowy (3)



Paradoks resztkowego czasu życia:

$\tilde{a}_{śr} = \frac{a_{śr}}{2}(1+c_a^2)$ $\quad c_a = \frac{\sigma_a}{a_{śr}}$ – **współczynnik rozproszenia** rozkładu A

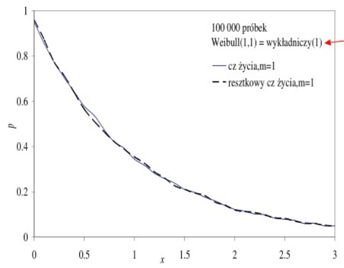
Jeżeli $A \sim P(x)$, to $\tilde{A} \sim \tilde{p}(x) = P(x)/a_{śr}$

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 70

35

slajd - 036

Strumień odnowy: interwał resztkowy (4)



$P(x) = e^{-x/a_{śr}}$

Rozkład wykładniczy jest **bezpamięciowy**:

$$\Pr[A < x + \Delta \mid A \geq x] = \frac{p(x)\Delta}{P(x)} = \frac{\Delta}{a_{śr}}$$ bez względu na x

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 71

Strumień Poissona

Simeon-Denis Poisson (1781-1840)

matematyk, fizyk i astronom francuski

badał bezpamięciowe procesy stochastyczne – *procesy Poissona* – dobrze modelujące współczesny ruch telekomunikacyjny i komputerowy

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 72

slajd - 037

Strumień Poissona (2)

W każdej chwili nowe zgłoszenie przybywa ze stałym prawdopodobieństwem.
W notacji Kendalla: **systemy M/…**

Pr[zgłoszenie w $(t, t + \Delta)$] = $\Delta / a_{\acute{s}r} + o(\Delta)$

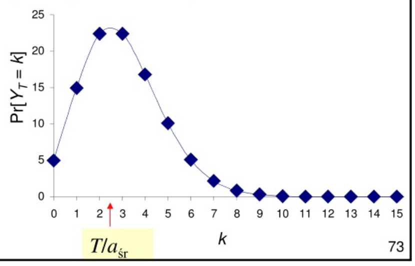
Δ

Y_T – liczba zgłoszeń przybywających w przedziale długości T

$Y_{T\acute{s}r} = T / a_{\acute{s}r}$

$$\Pr[Y_T = k] = \frac{(T / a_{\acute{s}r})^k}{k!} e^{-T / a_{\acute{s}r}}$$

rozkład Poissona



J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 73

Strumień Poissona (3)

Dla stacjonarnych modeli stochastycznych charakterystyki procesu obsługi mające sens średnich czasowych wyznaczamy z pomocą rachunku prawdopodobieństwa.

Stan ustalony nazywa się wtedy **równowagą statystyczną**.
Polega na ustalaniu się w czasie interesujących nas średnich, np. prawdopodobieństw stanów systemu / utraty zgłoszenia / opóźnień buforowania /…

PASTA (*Poisson Arrivals See Time Averages*): dla strumienia Poissona $p_k^+ \equiv p_k$

(przybywające zgłoszenia tworzące strumień Poissona "widzą" taki sam rozkład długości kolejki jak przypadkowy obserwator)

Dowód: $\Pr[N(t) = k \mid \text{przybycie w } (t, t+\Delta)] = \dfrac{\Pr[N(t) = k] \frac{\Delta}{a_{\acute{s}r}}}{\frac{\Delta}{a_{\acute{s}r}}} = \Pr[N(t) = k]$

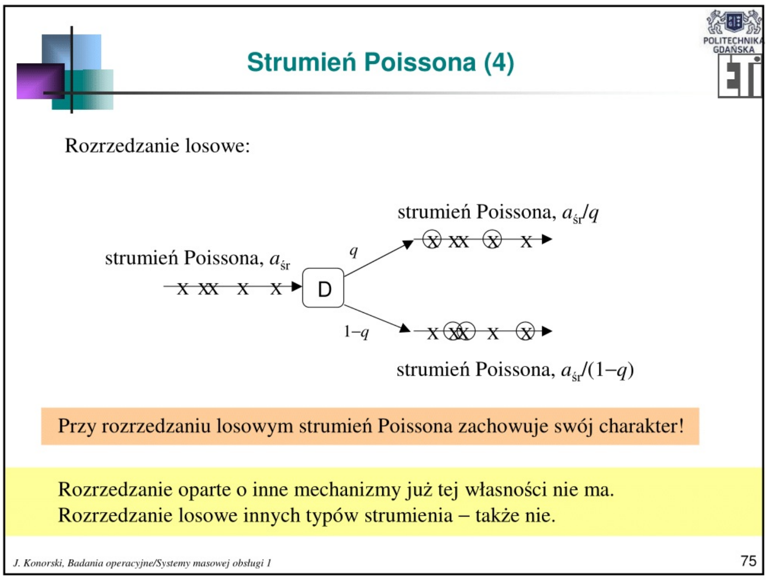
M/G/S/Q: straty wskutek przepełnienia pamięci buforowej $L = p_Q^+ \equiv p_Q$.

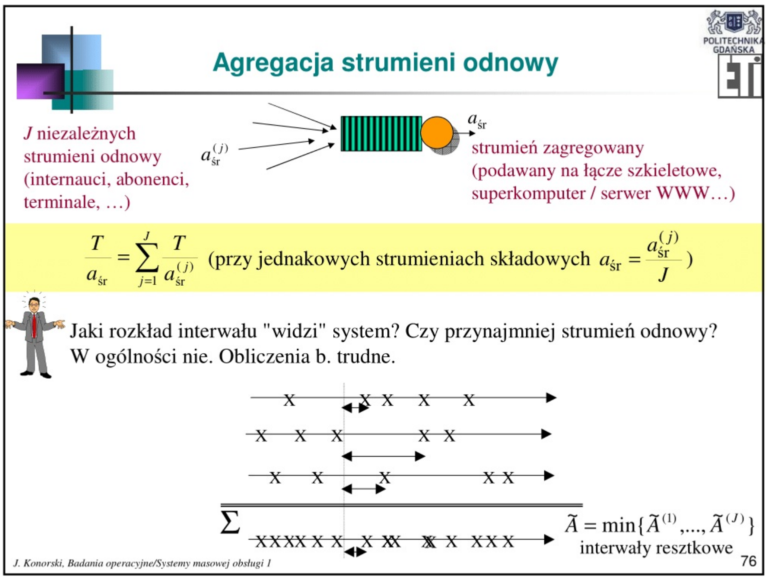
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 74

37

slajd - 038

strumien poissona





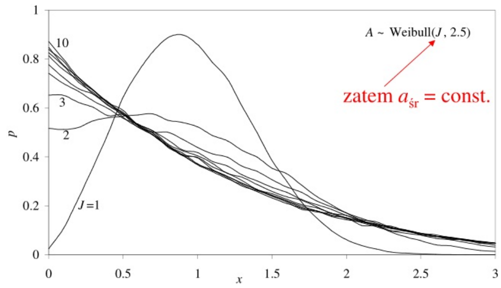
38

slajd - 039

Agregacja strumieni odnowy (2)

Przy $J \to \infty$, ale $a_{śr} > 0$ (praktyczna sytuacja) oraz przy założeniu, że strumienie składowe są niezależne:

Strumień zagregowany jest strumieniem Poissona (**twierdzenie Palma**).



J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 77

Agregacja strumieni odnowy (3)

Dowód pominiemy :)

$\tilde{A} = \min\{\tilde{A}^{(1)},...,\tilde{A}^{(J)}\}$, zatem $\Pr[\tilde{A} \ge x] = \prod_{j=1}^{J} \Pr[\tilde{A}^{(j)} \ge x]$

$J \to \infty$, ale $a_{śr} > 0$ (praktyczna sytuacja). Czyli $a_{śr}^{(j)} \to \infty$.

Dla dowolnego skończonego x: $x / \tilde{a}_{śr}^{(j)} \to 0$ i możemy zaniedbać $Y_x^{(j)} > 1$.

$\Pr[\tilde{A}^{(j)} \ge x] = 1 - \Pr[Y_x^{(j)} > 0] \approx 1 - \Pr[Y_x^{(j)} = 1] \approx 1 - Y_{x,śr}^{(j)} \approx 1 - \frac{x}{a_{śr}^{(j)}}$

Ostatecznie

$$\Pr[\tilde{A} \ge x] \approx \prod_{j=1}^{J}\left(1 - \frac{x}{a_{śr}^{(j)}}\right) \approx \exp\left(-\sum_{j=1}^{J}\frac{x}{a_{śr}^{(j)}}\right) = e^{-x/a_{śr}}$$

gdyż przy $x << 1$ mamy $1 - x \approx e^{-x}$

Interwał resztkowy ma rozkład wykładniczy, więc interwał także!

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 78

39

slajd - 040

Badania operacyjne
Systemy masowej obsługi
3. Modele markowowskie

Jerzy Konorski
jekon@eti.pg.gda.pl

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 79

Systemy markowowskie

Przypomnienie: teoria kolejek zajmuje się problemami masowej obsługi, tj. systemami i procesami, które można obserwować, mierzyć i symulować.

Analiza matematyczna systemów masowej obsługi też jest przydatna, ale tylko wówczas, gdy przynosi *proste i pouczające* wyniki.

Rozpatrzmy model *A*/*B*/... Czy charakterystyki procesu obsługi łatwo jest przewidzieć teoretycznie?

Tak – o ile wprowadzimy niezbędne uproszczenia:
- niezbyt drastyczne - związek z rzeczywistością!
  inaczej zarzut "szukania pod latarnią, bo tam jest jasno"
- znaczne – prostota analizy! uniwersalne walory poznawcze!

Przykład: **systemy markowowskie**.

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 80

40

slajd - 041

Systemy markowowskie (2)

Mają niezwykłą i niezwykle przydatną w modelowaniu **własność Markowa.**

(Którą co prawda dzielą z ogromną liczbą występujących w rzeczywistości systemów dynamicznych: technicznych, fizycznych, społecznych, biologicznych, ekonomicznych, ...)

$stan(t + \Delta) = f[stan(t), \phi]$

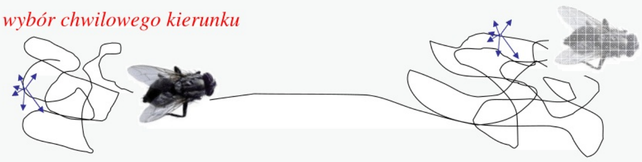
losowe "pobudzenie zewnętrzne" w chwili t
na ogół zależne od bieżącego stanu,
jednak niezależne od stanów wcześniejszych

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 81

Systemy markowowskie (3)

- Mucha…

wybór chwilowego kierunku



- tasowanie talii kart: kolejność kart *(wybór karty do przełożenia)*
- kapitał gracza / populacja *(bieżąca stopa zysku / przyrost naturalny)*
- $trend(t + \Delta) = (1 - c)\cdot trend(t) + c\cdot\phi(t)$ *(kolejna obserwacja)*
- $udzia\l\_w\_rynku(t + \Delta) = \phi\cdot udzia\l\_w\_rynku(t)[1 - udzia\l\_w\_rynku(t)]$ *(bieżąca jakość zarządzania)*
- topologia Internetu *(liczba nowych sieci i miejsca ich dołączenia)*

ϕ

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 82

41

slajd - 042

Systemy markowowskie (4)

Andriej Andriejewicz Markow (1856-1922)

matematyk rosyjski

badał procesy przypadkowe o ograniczonej pamięci – *procesy Markowa* – doskonale modelujące wiele zjawisk przyrodniczych i technicznych

Systemy markowowskie (5)

Są nimi systemy obsługi M/M/…

strumień Poissona, $a_{śr}$
wykładniczy rozkład wymagań, $b_{śr}$

Znaczenie:

• strumień Poissona:
- twierdzenie Palma
- rozrzedzanie losowe
- PASTA
- pesymistyczne oceny charakterystyk procesów obsługi

• wykładniczy rozkład wymagań:
- rozmowa telefoniczna
- transfer P2P
- …

42

slajd - 043

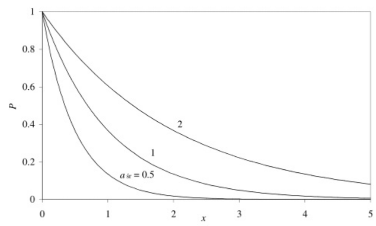
Systemy markowowskie (6)

v – (stała) wydajność procesora

A ~ M = wykładniczy($a_{śr}$): $\Pr(A \geq x) = e^{-x/a_{śr}}$

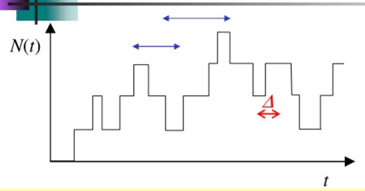
B ~ M = wykładniczy($b_{śr}$): $\Pr(B \geq x) = e^{-x/b_{śr}}$

Pr[czas obsługi $\geq x$] = $e^{-x/(b_{śr}/v)}$



J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 85

System M/M/1



$N(t)$ – **proces urodzin i śmierci**
$a_{śr}$ – średni **interwał urodzin**
$\tau_{śr} = b_{śr}/v$ – średni **interwał śmierci**

Niech $p_k(t) = \Pr[N(t) = k]$. Wiemy, że $\lim_{t\to\infty} p_k(t) = p_k$ (**równowaga statystyczna**). Podstawą wyznaczenia rozkładu (p_k) jest wypisanie **równań urodzin i śmierci.**

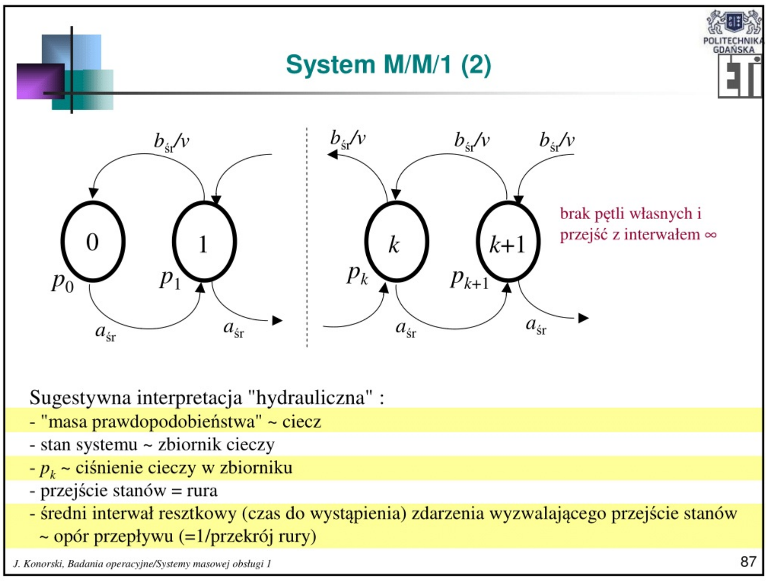
- Rozkład wykładniczy nie posiada "atomu" w punkcie 0
  ⇒ Obserwujemy stan $N(t) = k$. Co może zdarzyć się między t a $t + \Delta$?
  praktycznie tylko: nic / 1 urodziny / 1 śmierć (gdy $k > 0$),
  (przejścia jedynie między sąsiednimi stanami)

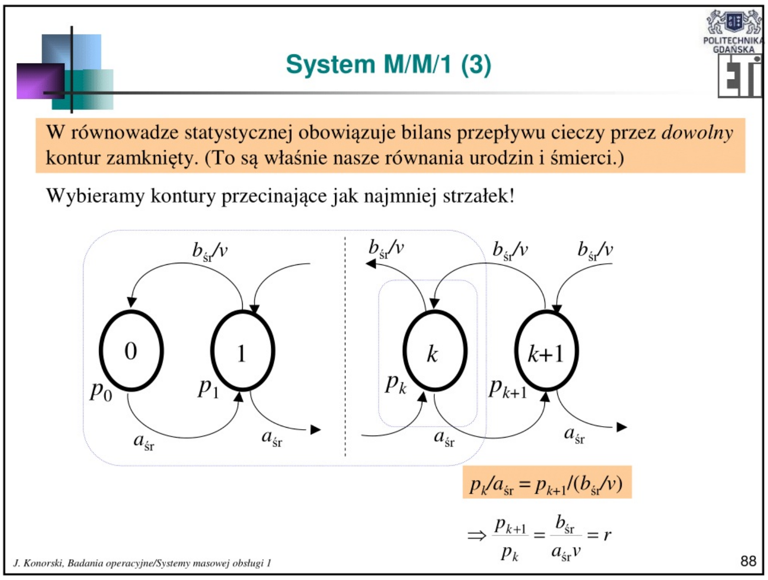
- Rozkład wykładniczy jest bezpamięciowy (własność Markowa)
  ⇒ interwał resztkowy (czas do wystąpienia) najbliższego zdarzenia urodziny / śmierć jest statystycznie taki sam jak interwał pomiędzy takimi zdarzeniami

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 86

43

slajd - 045

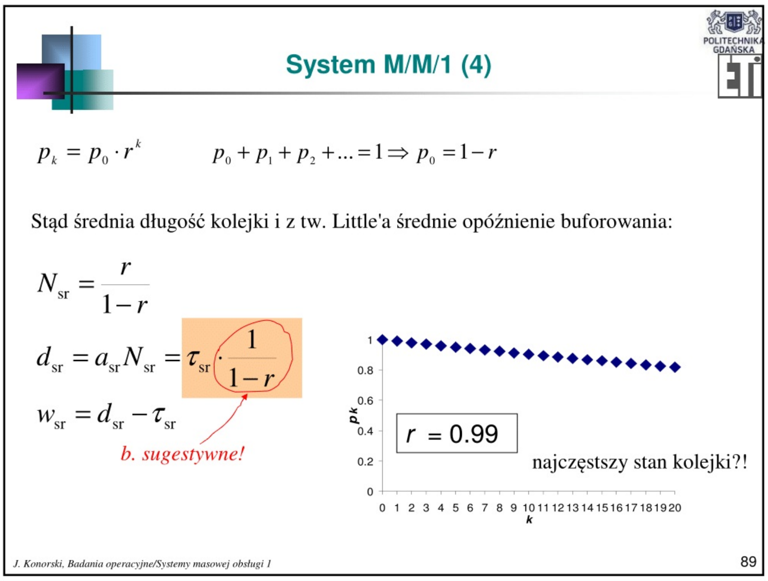

System M/M/1 (2)
POLITECHNIKA GDAŃSKA
$b_{śr}/v$
0
1
p_0
p_1
$a_{śr}$
k
k+1
p_k
p_{k+1}
brak pętli własnych i przejść z interwałem ∞
Sugestywna interpretacja "hydrauliczna" :
- "masa prawdopodobieństwa" ~ ciecz
- stan systemu ~ zbiornik cieczy
- p_k ~ ciśnienie cieczy w zbiorniku
- przejście stanów = rura
- średni interwał resztkowy (czas do wystąpienia) zdarzenia wyzwalającego przejście stanów ~ opór przepływu (=1/przekrój rury)
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1
87

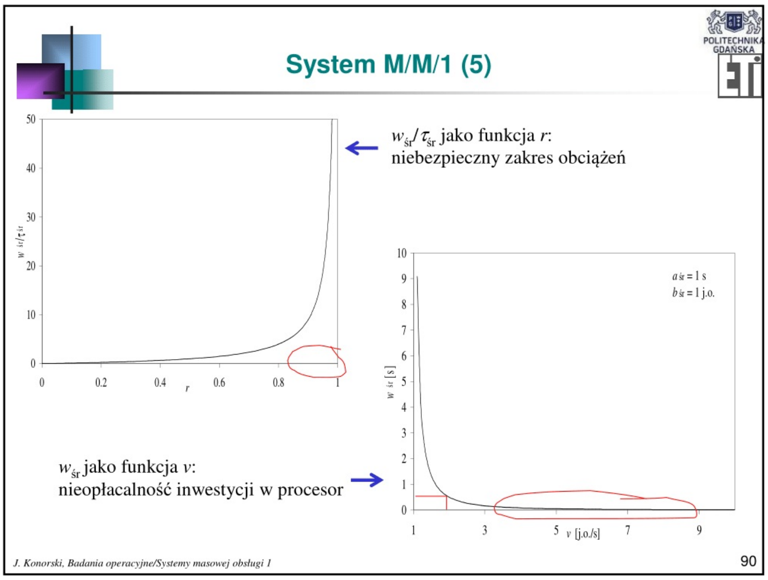

System M/M/1 (3)
POLITECHNIKA GDAŃSKA
W równowadze statystycznej obowiązuje bilans przepływu cieczy przez *dowolny* kontur zamknięty. (To są właśnie nasze równania urodzin i śmierci.)
Wybieramy kontury przecinające jak najmniej strzałek!
$b_{śr}/v$
0
1
p_0
p_1
$a_{śr}$
k
k+1
p_k
p_{k+1}
$p_k/a_{śr} = p_{k+1}/(b_{śr}/v)$
$\Rightarrow \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{b_{śr}}{a_{śr} v} = r$
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1
88

44

slajd - 045

r�wnanie urodzin i �mierci





45

slajd - 046

Systemy M/M/…

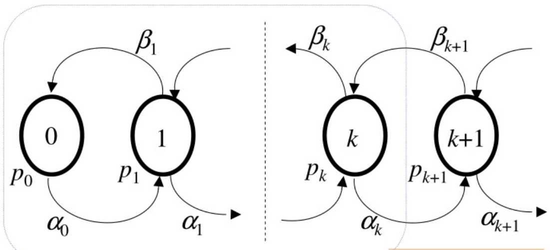
Okazuje się, że proces urodzin i śmierci nadaje się do analizy o wiele bogatszych (i bardziej realistycznych) markowowskich modeli systemów masowej obsługi, np:

- skończona pojemność pamięci buforowej (bez ponawiania, *drop-tail*)
- wiele procesorów (wymagania: dowolny procesor), być może w liczbie zależnej od stanu kolejki
- intensywność przybywania zgłoszeń zależna od stanu kolejki (źródła zgłoszeń modelowane jako inteligentne końcówki)
- różne specjalne modele – postój taksówek / wiadro tokenowe, niecierpliwość, …

…i to praktycznie *bez komplikacji analizy*!

Systemy M/M/… (2)

Średni interwał przejścia może zależeć od stanu wyjściowego:



$p_k/\alpha_k = p_{k+1}/\beta_{k+1}$

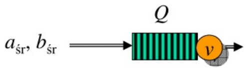
Rozwiązanie: $p_k = p_0 \dfrac{\beta_1 \dots \beta_k}{\alpha_0 \dots \alpha_{k-1}}, \; k = 0,1,2,\dots$ p_0 z warunku normalizacyjnego

Można stąd wyznaczyć wszystkie interesujące charakterystyki: L, p_0, $N_{śr}$, $d_{śr}$, $w_{śr}$,…

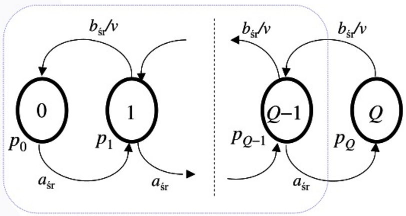
46

slajd - 047

System M/M/1/*Q*



$r = b_{śr}/(a_{śr}v)$



Przybycia ustają przy $k = Q$:

$$\alpha_k = \begin{cases} a_{śr}, \text{gdy } k < Q \\ \infty, \text{gdy } k \ge Q \end{cases} \qquad \beta_k \equiv b_{śr}/v$$

$$p_k = p_0 r^k,\ k = 0,\dots,Q$$

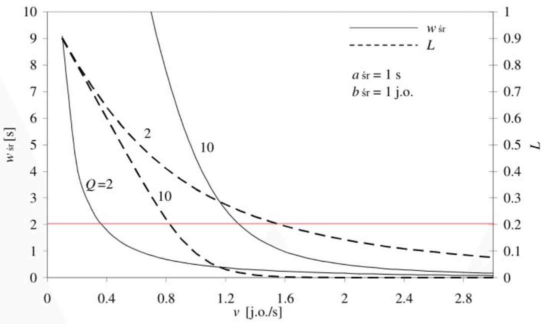
$$L = p_Q^{+} = p_Q = \begin{cases} \dfrac{1-r}{1-r^{Q+1}} r^Q, \text{gdy } r \ne 1 \\ \dfrac{1}{Q+1}, \text{gdy } r = 1 \end{cases} \qquad d_{śr} = \frac{N_{śr}}{\frac{1-L}{a_{śr}}} \qquad w_{śr} = d_{śr} - \tau_{śr}$$

PASTA

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 93

System M/M/1/*Q* (2)

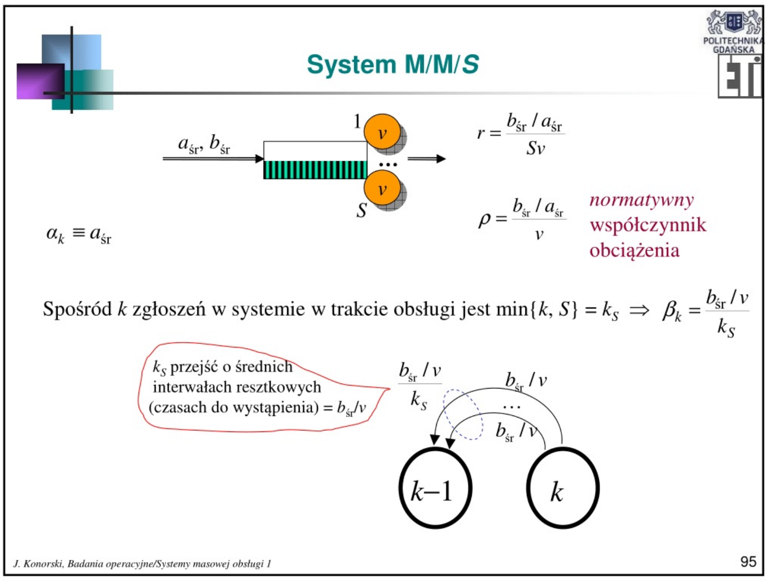
Planowanie wydajności procesora:
- wielkość v niezbędna dla zapewnienia $w_{śr} \le 2$ s oraz $L \le 20\%$
- który warunek jest ostrzejszy?

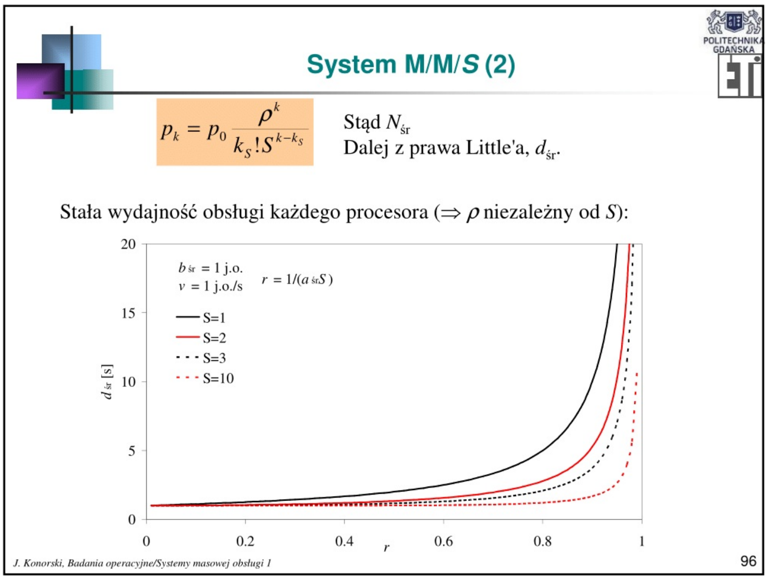


J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 94

47

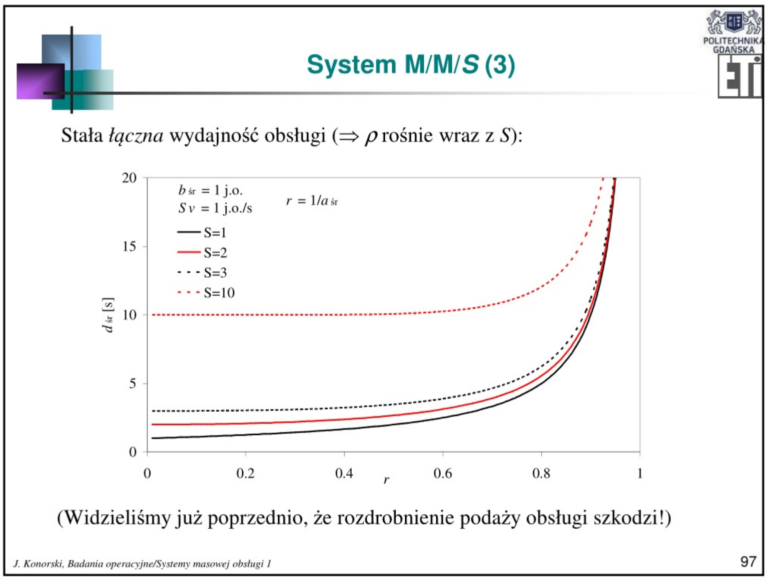
slajd - 048

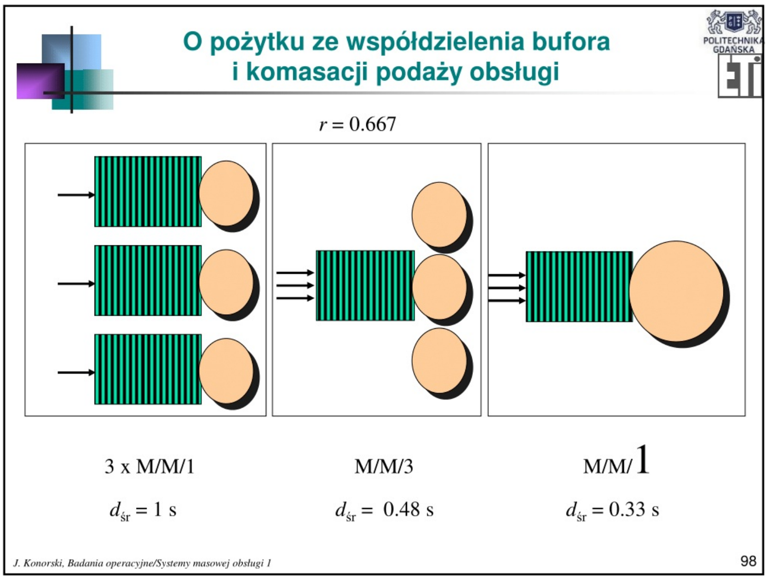

System M/M/S
POLITECHNIKA GDAŃSKA
$a_{śr}, b_{śr}$
1
v
v
S
$r = \frac{b_{śr} / a_{śr}}{Sv}$
$\rho = \frac{b_{śr} / a_{śr}}{v}$
normatywny współczynnik obciążenia
$\alpha_k \equiv a_{śr}$
Spośród k zgłoszeń w systemie w trakcie obsługi jest $\min\{k, S\} = k_S \Rightarrow \beta_k = \frac{b_{śr} / v}{k_S}$
k_S przejść o średnich interwałach resztkowych (czasach do wystąpienia) = $b_{śr}/v$
$\frac{b_{śr} / v}{k_S}$
$b_{śr} / v$
$b_{śr} / v$
$k-1$
k
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1
95


System M/M/S (2)
POLITECHNIKA GDAŃSKA
$p_k = p_0 \frac{\rho^k}{k_S! S^{k-k_S}}$
Stąd $N_{śr}$
Dalej z prawa Little'a, $d_{śr}$.
Stała wydajność obsługi każdego procesora ($\Rightarrow \rho$ niezależny od S):
$b_{śr}$ = 1 j.o.
v = 1 j.o./s
$r = 1/(a_{śr}S)$
S=1
S=2
S=3
S=10
$d_{śr}$ [s]
r
0
5
10
15
20
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1
96

48

slajd - 049

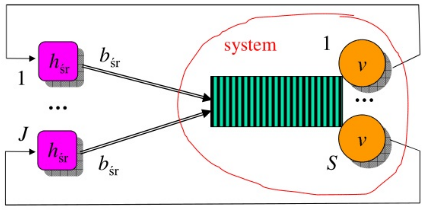

System M/M/S (3)
Stała łączna wydajność obsługi (⇒ ρ rośnie wraz z S):
b śr = 1 j.o.
S v = 1 j.o./s
r = 1/a śr
S=1
S=2
S=3
S=10
d śr [s]
r
(Widzieliśmy już poprzednio, że rozdrobnienie podaży obsługi szkodzi!)
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1
97


O pożytku ze współdzielenia bufora
i komasacji podaży obsługi
r = 0.667
3 x M/M/1
M/M/3
M/M/1
d śr = 1 s
d śr = 0.48 s
d śr = 0.33 s
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1
98

49

slajd - 050

System M/M/*S*//*J*



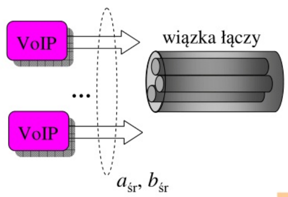
Model

- Pr[czas namysłu $\geq x$] = $e^{-x/h_{śr}}$
- populacja końcówek $J > S$

Gdy k zgłoszeń w systemie:

- w trakcie namysłu $J - k$ końcowek $\Rightarrow$ $\alpha_k = \dfrac{h_{śr}}{J-k}$
- w trakcie obsługi k_S zgłoszeń $\Rightarrow$ β_k jak dla M/M/S
- $J \to \infty$, $h_{śr} \to \infty$, $h_{śr}/J \to a_{śr}$: M/M/S

System M/M/*S*/*S*



brak oczekiwania w kolejce
v – prędkość transmisji w 1 łączu
$\rho = b_{śr}/(a_{śr}v)$
– normatywny współczynnik obciążenia
α_k, β_k, $k = 0,\ldots,S$ jak dla M/M/S

$$p_k = p_0 \frac{\rho^k}{k!} \qquad p_S = L = \frac{\dfrac{\rho^S}{S!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{S} \frac{\rho^k}{k!}}$$

- słynna **formuła B Erlanga**
- magia: prawdziwa dla *dowolnego* rozkładu wymagań, tj. dla M/G/S/S (!)
- istnieją kalkulatory online (`www.voip-calculator.com/calculator/`)

50

slajd - 051

System M/M/∞

Do bardzo dużego hipermarketu wchodzi średnio 20 klientów na minutę, a każdy średnio robi zakupy (łącznie z czekaniem przy kasie) przez 15 minut.

Oblicz rozkład liczby klientów w hipermarkecie w dowolnej chwili, przyjmując markowowski model systemu obsługi.

$a_{śr} = 3$ s, $\tau_{śr} = 900$ s, $\rho = 300$ erlangów

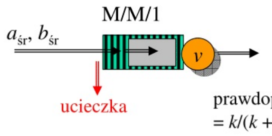
$N_{śr} = \rho = 300$ (to wiemy z prawa Little'a)

Szczególny przypadek M/M/S/S: $S \to \infty$, zatem $p_0 = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!}} = e^{-\rho}$

$p_k = e^{-\rho} \dfrac{\rho^k}{k!}$ – rozkład Poissona (!)

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 101

Niecierpliwe zgłoszenia



prawdopodobieństwo rezygnacji
= $k/(k + 1)$, k – liczba zastanych zgłoszeń

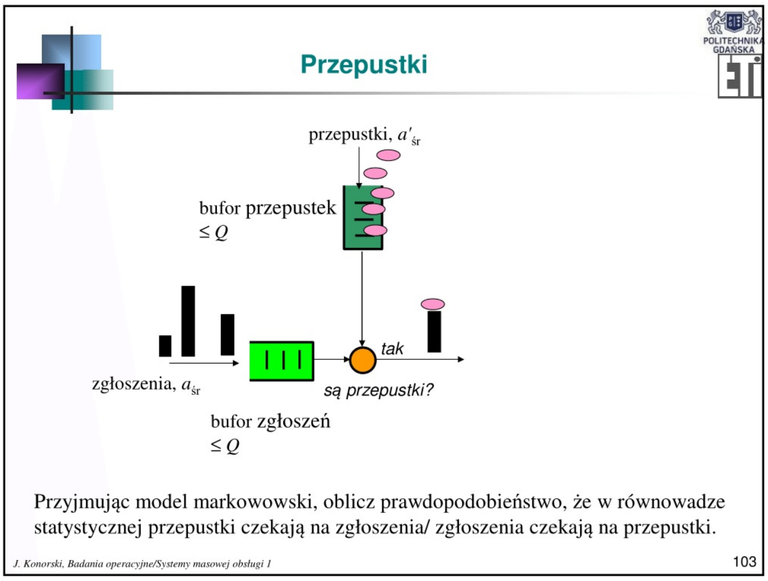
Przyjmując model markowowski, oblicz frakcję ucieczek.

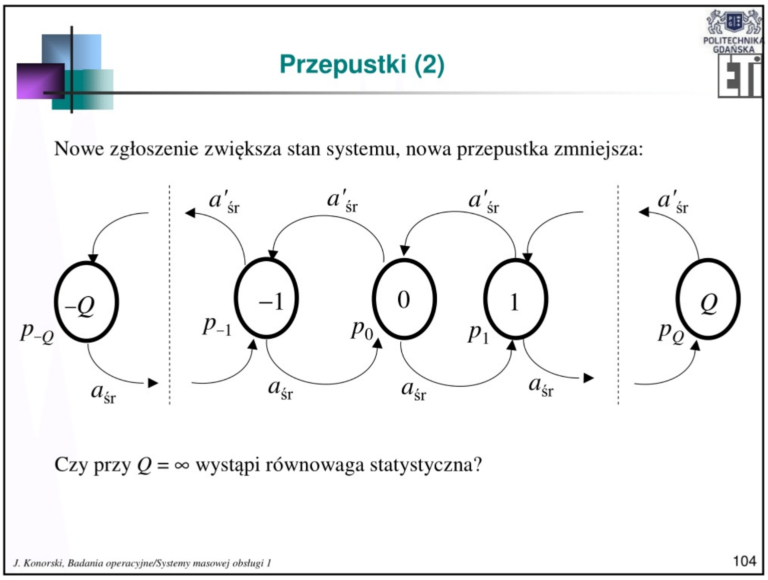
$\alpha_k = \dfrac{a_{śr}}{1 - \frac{k}{k+1}} = a_{śr}(k+1), \quad \beta_k = b_{śr} / v \quad \Rightarrow \quad (p_k)$ – rozkład Poissona (!)

$$L = p_0 \cdot 0 + p_1 \cdot \frac{1}{2} + p_2 \cdot \frac{2}{3} + \ldots + p_k \cdot \frac{k}{k+1} + \ldots$$

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 102

slajd - 052

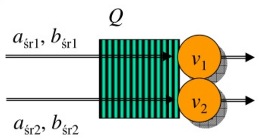

Przepustki
przepustki, $a'_{śr}$
bufor przepustek
$\leq Q$
tak
zgłoszenia, $a_{śr}$
są przepustki?
bufor zgłoszeń
$\leq Q$
Przyjmując model markowowski, oblicz prawdopodobieństwo, że w równowadze statystycznej przepustki czekają na zgłoszenia/ zgłoszenia czekają na przepustki.
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1
103

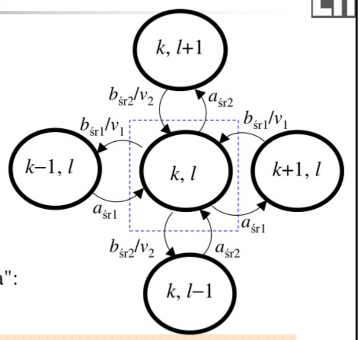

Przepustki (2)
Nowe zgłoszenie zwiększa stan systemu, nowa przepustka zmniejsza:
$a'_{śr}$
$-Q$
-1
0
1
Q
p_{-Q}
p_{-1}
p_0
p_1
p_Q
$a_{śr}$
Czy przy $Q = \infty$ wystąpi równowaga statystyczna?
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1
104

52

slajd - 053

Procesory dedykowane





Bilans przepływu "masy prawdopodobieństwa":

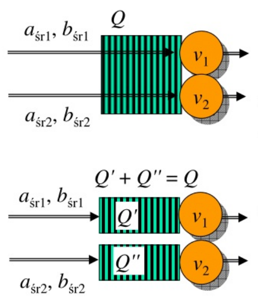
$$p_{k,l}/a_{śr1} + p_{k,l}/a_{śr2} + p_{k,l}/(b_{śr1}/v_1) + p_{k,l}/(b_{śr2}/v_2)$$
$$= p_{k-1,l}/a_{śr1} + p_{k,l-1}/a_{śr2} + p_{k+1,l}/(b_{śr1}/v_1) + p_{k,l+1}/(b_{śr2}/v_2)$$

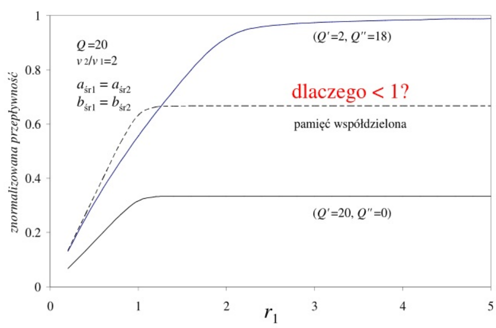
Rozwiązanie przez odgadnięcie: $p_{k,l} = p_{0,0} r_1^k r_2^l$, gdzie $r_1 = \frac{b_{śr1}}{a_{śr1} v_1}$, $r_2 = \frac{b_{śr2}}{a_{śr2} v_2}$

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 105

O pożytku z rozdziału pamięci buforowej

Znormalizowana przepływność: $$\frac{\frac{1}{b_{śr1}/v_1}\left(1-\sum_{l=0}^{Q} p_{0,l}\right) + \frac{1}{b_{śr2}/v_2}\left(1-\sum_{k=0}^{Q} p_{k,0}\right)}{\frac{1}{b_{śr1}/v_1} + \frac{1}{b_{śr2}/v_2}}$$





J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 106

53

slajd - 054

Transformata Laplace'a

Wyznaczanie *rozkładu prawdopodobieństwa* opóźnień jest trudniejszym zadaniem, wymaga dodatkowego aparatu matematycznego – **transformata Laplace'a**.

Dla zmiennej losowej X o komplementarnej dystrybuancie $P(x)$ definiujemy:

$$X^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}(-dP(x)) = \left(e^{-sX}\right)_{\text{sr}}$$

Np. dla rozkładu wykładniczego $P(X \geq x) = e^{-x/c} \Rightarrow X^*(s) = \frac{1}{cs+1}$

Transformata Laplace'a jest operatorem liniowym.

Jeżeli zmienne losowe X_1 i X_2 są statystycznie niezależne oraz $X = X_1 + X_2$, to

$$X^*(s) = X_1^*(s)X_2^*(s).$$

Dla sumy 2, 3, … zmiennych losowych o rozkładach wykładniczych :

$$X^*(s) = \left(\frac{1}{cs+1}\right)^2, \left(\frac{1}{cs+1}\right)^3, \ldots$$

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 107

Transformata Laplace'a (2)

Mając $X^*(s)$, jak znaleźć $P(x)$? Czyli jak **odwracać** transformatę Laplace'a?

- Można analitycznie – całka Bromwitcha… niezalecane :)
- Pomocne są obszerne tablice, np. gdy $X^*(s) = \left(\frac{1}{cs+1}\right)^K$ (K całkowite), to

$$P(x) = e^{-x/c}\sum_{i=0}^{K-1}\frac{(x/c)^i}{i!} \quad (x \geq 0)$$ **rozkład Erlanga rzędu K**

- Istnieje też dużo software'u rachunku symbolicznego, por. np. `www.educypedia.be/education/calculatorsalgebra.htm`
- Dla pewnych typów $X^*(s)$ powyższe zawodzi. Zostają algorytmy numeryczne. Nie ma jednego uniwersalnego, bo problem jest numerycznie niestabilny! Bezpośrednie korzystanie ze wzoru na transformatę odwrotną jest kłopotliwe, gdyż wymaga operowania na liczbach zespolonych.

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 108

54

slajd - 055

Transformata Laplace'a (3)

www.pe.tamu.edu/blasingame/data/P620_reference/P620_Lectures_(pdf)/P620_Mod1_Math/P620_Mod1_ML_05_LaplaceTrans.pdf

- The Gaver formula for numerical Laplace transform inversion is

$$f_{Gaver}(n,t) = \frac{\ln(2)}{t}\,\frac{(2n)!}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(n-k)!\,k!}\,\bar{f}\left[\frac{\ln(2)}{t}\,(n+k)\right]$$

- The Gaver-Stehfest formula for numerical Laplace transform inversion is

$$f_{Gaver\text{-}Stehfest}(n,t) = \frac{\ln(2)}{t}\sum_{i=1}^{n} V_i\,\bar{f}\left[\frac{\ln(2)}{t}\,i\right]$$

and the Stehfest extrapolation coefficients are given

$$V_i = (-1)^{\frac{n}{2}+i}\sum_{k=\left[\frac{i+1}{2}\right]}^{Min\left[i,\frac{n}{2}\right]}\frac{k^{\frac{n}{2}}\,(2k)!}{\left[\frac{n}{2}-k\right]!\,k!\,(k-1)!\,(i-k)!\,(2k-i)!}$$

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 109

M/M/1 FIFO: rozkład opóźnień systemowych

Opóźnienie systemowe zgłoszenia zastającego k zgłoszeń w chwili przybycia składa się z $k + 1$ czasów obsługi (w tym jednego resztkowego, gdy $k > 0$) o rozkładach wykładniczych $P(x) = e^{-x/\tau_m}$.

Zatem jego transformata Laplace'a: $\left(\frac{1}{\tau_{śr}s+1}\right)^{k+1}$

Działa PASTA, zatem $p_k^+ \equiv p_k$.

Uśredniając na różne liczby zastanych zgłoszeń i wykorzystując liniowość:

$$D^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\left(\frac{1}{\tau_{śr}s+1}\right)^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(1-r)r^k\left(\frac{1}{\tau_{śr}s+1}\right)^{k+1} = \frac{1}{\frac{\tau_{śr}}{1-r}s+1}$$

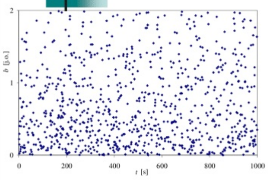
Rozkład wykładniczy (o znanej już wcześniej wartości średniej) !

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 110

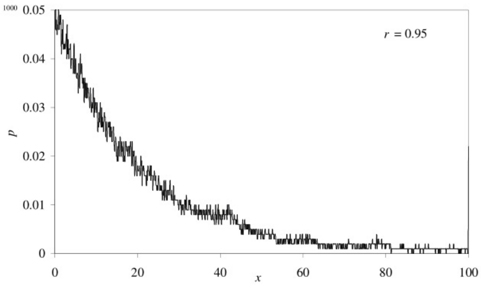
55

slajd - 056

M/M/1 FIFO: rozkład opóźnień systemowych (2)



strumień M/M, $a_{śr} = b_{śr} = 1$

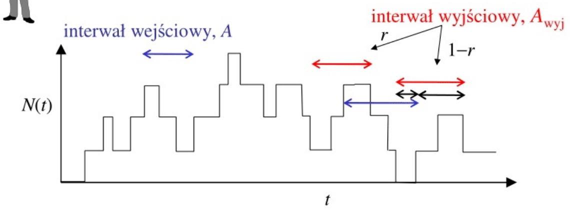


histogram
opóźnień systemowych

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 111

M/M/1: strumień wyjściowy

Jak wygląda strumień *wyjściowy* z M/M/1?



Działa PASTA i argument skoków ±1, zatem $p_k \equiv p_k^+ \equiv p_k^-$. Czyli $p_0^- = 1 - r$.

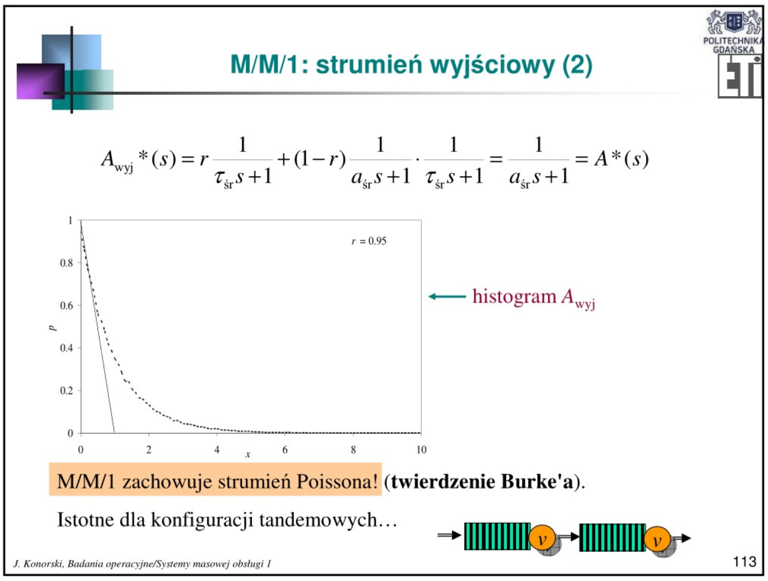
A_{wyj} jest z prawdopodobieństwem r jednym czasem obsługi, zaś z prawd. $1 - r$ sumą jednego czasu obsługi i resztkowego interwału wejściowego.

Wyznaczenie rozkładu A_{wyj} jest nietrudne, gdy już się opanowało transformatę Laplace'a.

J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1 112

56

slajd - 057


POLITECHNIKA GDAŃSKA
M/M/1: strumień wyjściowy (2)
$A_{\text{wyj}}*(s) = r\frac{1}{\tau_{\text{śr}}s+1} + (1-r)\frac{1}{a_{\text{śr}}s+1}\cdot\frac{1}{\tau_{\text{śr}}s+1} = \frac{1}{a_{\text{śr}}s+1} = A*(s)$
r = 0.95
p
x
histogram A_{wyj}
M/M/1 zachowuje strumień Poissona! (twierdzenie Burke'a).
Istotne dla konfiguracji tandemowych…
J. Konorski, Badania operacyjne/Systemy masowej obsługi 1
113

57

Treści zadań

PDF

Część 1

Badania Operacyjne – Systemy kolejkowe / Ćwiczenia 1

Zadanie 1

Narysuj przebieg procesów kolejkowych $N(t)$ oraz $U(t)$ = **praca do zakończenia** w systemie masowej obsługi przyjmującego strumień zgłoszeń: $(t_n^+) = (0.5, 2, 5, 6.5)$, $(b_n) =(3, 2, 2, 3)$ dla dwóch przypadków: a) $S = 2$ procesory o wydajności $v = 1$ j.o./s każdy (pełna dostępność, obsługa umiejscowiona), b) $S = 1$ procesor o wydajności $v = 2$ j.o./s. Porównaj te przypadki.

Uwaga na nachylenie opadających części wykresu! Co jest podstawą porównania obu przypadków? Czy $S = 2$ pod jakimś względem góruje nad $S = 1$?

Zadanie 2

Porównaj średnie opóźnienie systemowe zgłoszenia w 1-procesorowym systemie kolejkowym z dyscypliną obsługi FIFO oraz *Round Robin* z **kwantem obsługi** 2 s (niepełne wykorzystanie kwantu obsługi powoduje wcześniejsze rozpoczęcie kolejnego kwantu obsługi). Wydajność procesora wynosi 1 j.o./s. Trzy zgłoszenia: X, Y i Z, o wymaganiach odpowiednio 7 j.o., 1 j.o. i 3 j.o., przybywają jednocześnie i ustawiają się w kolejności a) XYZ, b) YZX, c) XZY.

Czy z porównania opóźnień zgłoszeń dla poszczególnych scenariuszy wynikają ogólne cechy FIFO i RR?

Zadanie 3

System masowej obsługi realizuje średnio w ciągu sekundy 800 transakcji, wymagających wykonania średnio 5000 operacji. Każda przybywająca transakcja otrzymuje do swej dyspozycji procesor o średniej wydajności 4 000 000 operacji na sekundę. Oblicz średnią liczbę transakcji w systemie.

Wykorzystaj prawo Little'a.

Część 2

Badania Operacyjne – Systemy kolejkowe / Ćwiczenia 2

Zadanie 1

Do 1-procesorowego systemu masowej obsługi z procesorem o wydajności v = 1 j.o./s przybywa bardzo "gęsty" strumień zgłoszeń, przy czym współczynnik obciążenia wynosi r = 75%. Łączny popyt na obsługę zgłoszony w ciągu sekundy ma odchylenie standardowe σ = 0.1 s. Jakie są szanse, że w tym okresie uda się wygospodarować pół sekundy pracy procesora dla przetwarzania zadań systemowych bez tworzenia zaległości w obsłudze strumienia zgłoszeń?

Wykorzystaj centralne twierdzenie graniczne i **funkcję Laplace'a**: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-y^2/2} dy$.

Jest tablicowana przeważnie dla x = 0..5, a jej wybrane wartości wynoszą: Φ(0.5) = 0.191, Φ (1) = 0.341, Φ (1.5) = 0.433, Φ (2) = 0.477, Φ (2.5) = 0.4938, Φ (3) = 0.4987, Φ (≥4) ≈ 0.5. Co robić, gdy x < 0?

Zadanie 2

1-procesorowy system masowej obsługi posiada pamięć buforową o pojemności $Q < \infty$ zgłoszeń i pracuje ze współczynnikiem obciążenia $r > 1$. W takim systemie pomimo wzrostu Q frakcja utraconych zgłoszeń L nigdy nie spadnie poniżej pewnego progu – jaką ma on wartość?

Wykorzystaj równanie ciągłości przepływu.
Jak często procesor jest bezczynny, gdy $Q \to \infty$?

Zadanie 3

1-procesorowy system przetwarzania raportów z końcówek telemetrycznych posiada skończoną pamięć buforową o pojemności Q raportów. W zależności od Q i współczynnika obciążenia r zbadano charakterystyki: średniego opóźnienia systemowego raportu, znormalizowanego względem średniego czasu przetwarzania przez procesor (wytłuszczone w tabeli) oraz frakcji raportów utraconych wskutek przepełnienia pamięci buforowej.
Wyznacz maksymalną liczbę jednakowych końcówek telemetrycznych oraz niezbędną pojemność pamięci buforowej przy następujących założeniach:

- końcówka generuje średnio 20 raportów na minutę,
- raport zawiera średnio 1800 rekordów,
- dysponujemy procesorem o wydajności przetwarzania 12000 rekordów na sekundę,
- podział procesora pomiędzy obsługiwane końcówki ma miejsce na zasadzie wspólnego obszaru pamięci buforowej o skończonej pojemności (w raportach),
- dopuszczalne średnie opóźnienie systemowe raportu wynosi 1.8 s,
- dopuszczalna frakcja raportów utraconych wskutek przepełnienia wynosi 4%.

Q=	20		21		22		23		24		25	
r =												
0.1	**1.11**	0	**1.11**	0	**1.11**	0	**1.11**	0	**1.11**	0	**1.11**	0
0.2	**1.25**	0	**1.25**	0	**1.25**	0	**1.25**	0	**1.25**	0	**1.25**	0
0.3	**1.43**	0	**1.43**	0	**1.43**	0	**1.43**	0	**1.43**	0	**1.43**	0
0.4	**1.67**	0	**1.67**	0	**1.67**	0	**1.67**	0	**1.67**	0	**1.67**	0
0.5	**2**	0	**2**	0	**2**	0	**2**	0	**2**	0	**2**	0
0.6	**2.5**	0	**2.5**	0	**2.5**	0	**2.5**	0	**2.5**	0	**2.5**	0
0.7	**3.32**	0	**3.32**	0	**3.32**	0	**3.33**	0	**3.33**	0	**3.33**	0
0.8	**4.77**	0	**4.8**	0	**4.84**	0	**4.86**	0	**4.89**	0	**4.91**	0
0.9	**7.23**	0.01	**7.42**	0.01	**7.6**	0.01	**7.76**	0.01	**7.92**	0.01	**8.07**	0.01
1	**10.5**	0.05	**11**	0.05	**11.5**	0.04	**12**	0.04	**12.5**	0.04	**13**	0.04
1.1	**13.5**	0.11	**14.3**	0.1	**15.1**	0.1	**15.9**	0.1	**16.7**	0.1	**17.5**	0.1
1.2	**15.5**	0.17	**16.5**	0.17	**17.4**	0.17	**18.4**	0.17	**19.3**	0.17	**20.3**	0.17
1.3	**16.8**	0.23	**17.8**	0.23	**18.7**	0.23	**19.7**	0.23	**20.7**	0.23	**21.7**	0.23
1.4	**17.5**	0.29	**18.5**	0.29	**19.5**	0.29	**20.5**	0.29	**21.5**	0.29	**22.5**	0.29
1.5	**18**	0.33	**19**	0.33	**20**	0.33	**21**	0.33	**22**	0.33	**23**	0.33
1.6	**18.3**	0.38	**19.3**	0.38	**20.3**	0.38	**21.3**	0.38	**22.3**	0.38	**23.3**	0.38
1.7	**18.6**	0.41	**19.6**	0.41	**20.6**	0.41	**21.6**	0.41	**22.6**	0.41	**23.6**	0.41
1.8	**18.8**	0.44	**19.8**	0.44	**20.8**	0.44	**21.8**	0.44	**22.8**	0.44	**23.8**	0.44
1.9	**18.9**	0.47	**19.9**	0.47	**20.9**	0.47	**21.9**	0.47	**22.9**	0.47	**23.9**	0.47
2	**19**	0.5	**20**	0.5	**21**	0.5	**22**	0.5	**23**	0.5	**24**	0.5

Część 3

Badania Operacyjne – Systemy kolejkowe / Ćwiczenia 3

Zadanie 1

Każda z 50 końcówek sieciowych dołączonych do wspólnego nadajnika pracuje w następujący sposób: faza namysłu trwa średnio $^2/_3$ s, po czym generowane jest zgłoszenie; w 80% przypadków jest to wiadomość (średnio 1000 B), zaś w 20% – raport diagnostyczny (średnio 160 B). Nadajnik pracuje w trybie transmisji półduplekSowej z prędkością 1 Mb/s i w każdej sekundzie średnio przez 750 ms jest przełączony na odbiór (w tym czasie jest niedostępny dla naszych zgłoszeń). Jaka będzie średnia frakcja zgłoszeń utraconych?

Dane pozwalają na identyfikację $a_{śr}$, $b_{śr}$ oraz współczynnika zajętości procesora.
Należy teraz powrócić do równania ciągłości przepływu.

Zadanie 2

O 1-procesorowym systemie masowej obsługi z pamięcią buforową o pojemności Q = 2 wiadomo, że w stanie ustalonym mamy $p_0 \geq p_1 \geq p_2$ oraz że r = 0.75. Znajdź przedział możliwych wartości p_1.

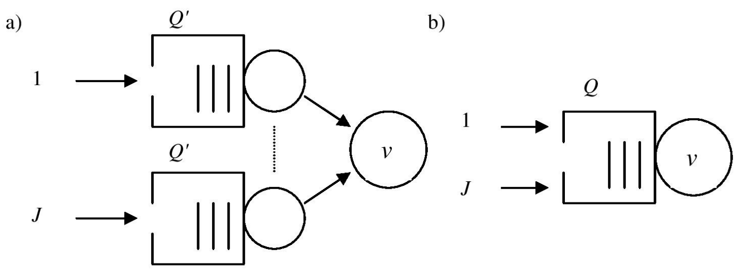
Należy postąpić tak, jak w poprzednim zadaniu.

Zadanie 3 (eksperyment symulacyjny)

Każdy spośród użytkowników systemu jednoprocesorowego generuje strumień dokumentów ze średnim interwałem $a_{śr}$. Długości dokumentów mają średnią $b_{śr}$. Wydajność przetwarzania dokumentów przez procesor wynosi v. Dopuszcza się:

- frakcję dokumentów utraconych wskutek przepełnienia nie większą niż L_{max},
- średnie opóźnienie systemowe dokumentu nie większe niż c-krotność $b_{śr}/v$.

Porównaj maksymalną liczbę J_{max} użytkowników oraz wymaganą pojemność pamięci buforowych dla przypadków: a) *dostęp dedykowany* z procesorami wirtualnymi o jednakowej wydajności i z odrębnymi kolejkami, b) *dostęp ze wspólną kolejką* do procesora fizycznego. Wykonaj symulacje dla $a_{śr}$ = 6 s, $b_{śr}$ = 0.6 KB, v = 24 KB/s, L_{max} = 0.1%, c = 5.

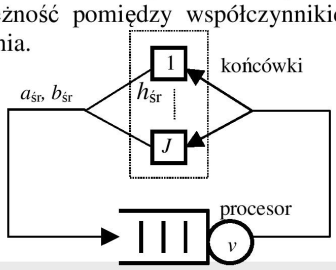


Część 4

Badania Operacyjne – Systemy kolejkowe / Ćwiczenia 4

Zadanie 1

1-procesorowy system masowej obsługi współpracuje z J =10 inteligentnymi końcówkami w trybie konwersacyjnym zapytanie-odpowiedź. Po otrzymaniu odpowiedzi końcówka generuje nowe zapytanie po czasie namysłu wynoszącym średnio $h_{śr}$ = 4 s. Średnia liczba operacji niezbędnych do wygenerowania odpowiedzi wynosi $b_{śr}$ = 15000, zaś procesor w systemie posiada wydajność v = 5000 operacji/s. Wyznacz zależność pomiędzy współczynnikiem bezczynności procesora a średnim opóźnieniem buforowania.



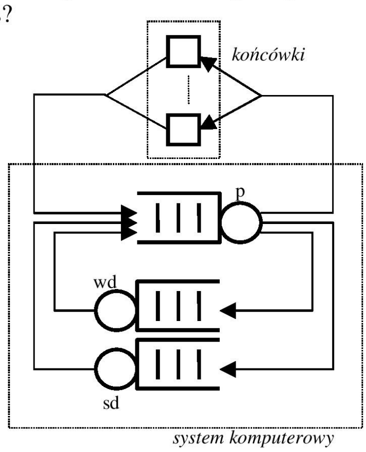
Przyda się prawo Little'a.

Zadanie 2

Każda z J = 30 końcówek systemu komputerowego generuje zgłoszenia wymagające sekwencyjnego przetwarzania w procesorze, stacji wolnych dysków i stacji szybkich dysków. Średnie liczby wizyt zgłoszenia w urządzeniach wynoszą l_p = 21, l_{wd} = 12, l_{sd} = 8, zaś średnie czasy przetwarzania w trakcie wizyty wynoszą τ_p = 0.05 s, τ_{wd} = 0.07 s, τ_{sd} = 0.02 s. Po zakończeniu przetwarzania zgłoszenia końcówka przechodzi do fazy namysłu trwającej średnio $h_{śr}$ = 15 s, po czym generuje kolejne zgłoszenie.

a) Gdzie jest wąskie gardło systemu, a gdzie występuje największe przewymiarowanie? Jak się to zmieni, gdy przyśpieszymy procesor tak, że τ_p = 0.03 s?

b) Jakie przyśpieszenie procesora niezbędne jest dla uzyskania średniego opóźnienia systemowego $d^*_{śr}$ = 12 s, a jakie dla uzyskania $d^*_{śr}$ = 9 s?



Załóż jakąś prędkość przepływu [zgł/s] na styku systemu komputerowego i zbioru końcówek. Wyraź przy jego pomocy współczynnik obciążenia dowolnego urządzenia w systemie. W punkcie b) wykorzystaj prawo Little'a.

Badania Operacyjne – Systemy kolejkowe / Ćwiczenia 5

Zadanie 1

a) W systemie M/M/1/2 średnia intensywność przybywania zgłoszeń wynosi 40 na sekundę, zaś średni czas obsługi zgłoszenia wynosi 20 ms. Ile zgłoszeń średnio zostaje utraconych w ciągu doby?

b) W systemie M/M/1/5 w trakcie obsługi zgłoszenia o średnim wymaganiu obsługi przybywają średnio dwa nowe zgłoszenia. Jak duża jest frakcja zgłoszeń utraconych wskutek przepełnienia pamięci buforowej?

c) W systemie M/M/1/Q strumień zgłoszeń ma dane parametry $a_{śr}$ i $b_{śr}$. Dla prawidłowej pracy procesor potrzebuje p-% udziału czasu bezczynności, do czego z kolei wymagana jest pewna minimalna wydajność obsługi v_{min}. Jak v_{min} zmienia się ze wzrostem Q?

Informację zawartą w punkcie b) przetłumacz na współczynnik obciążenia.

Zadanie 2

Każdy spośród 150 użytkowników systemu M/M/S/S generuje w ciągu sekundy średnio 10 transakcji, dopuszczając $L \leq 3$ %. Każda transakcja wymaga wykonania średnio 800 operacji. Operator systemu ma do wyboru wydzierżawienie procesorów o wydajności 0.5 miliona operacji na sekundę lub procesorów 4-krotnie szybszych, których koszt dzierżawy jest 2.5-krotnie wyższy.

Ile i których procesorów powinien wydzierżawić, by zminimalizować koszty, spełniając zarazem wymagania użytkowników?

Do obliczeń wykorzystaj poniższy fragment "kalkulatora formuły B Erlanga", gdzie podano wartości L (w %) dla *normatywnych* współczynników obciążenia od 0.2 do 6 erlangów oraz dla liczb procesorów od 1 do 10.

S= \ r=	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
1	16.67	28.57	37.5	44.44	50	54.55	58.33	61.54	64.29	66.67	68.75	70.59	72.22	73.68	75
2	1.64	5.41	10.11	15.09	20	24.66	28.99	32.99	36.65	40	43.06	45.86	48.42	50.78	52.94
3	0.11	0.72	1.98	3.87	6.25	8.98	11.92	14.96	18.03	21.05	24	26.84	29.56	32.15	34.61
4	0.01	0.07	0.3	0.77	1.54	2.62	4	5.65	7.5	9.52	11.66	13.87	16.12	18.37	20.61
5	0	0.01	0.04	0.12	0.31	0.63	1.11	1.77	2.63	3.67	4.88	6.24	7.73	9.33	11
6	0	0	0	0.02	0.05	0.12	0.26	0.47	0.78	1.21	1.76	2.44	3.24	4.17	5.21
7	0	0	0	0	0.01	0.02	0.05	0.11	0.2	0.34	0.55	0.83	1.19	1.64	2.19
8	0	0	0	0	0	0	0.01	0.02	0.05	0.09	0.15	0.25	0.39	0.57	0.81
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0.01	0.02	0.04	0.07	0.11	0.18	0.27
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.01	0.02	0.03	0.05	0.08

S= \ r=	3.2	3.4	3.6	3.8	4	4.2	4.4	4.6	4.8	5	5.2	5.4	5.6	5.8	6
1	76.19	77.27	78.26	79.17	80	80.77	81.48	82.14	82.76	83.33	83.87	84.37	84.85	85.29	85.71
2	54.94	56.78	58.48	60.07	61.54	62.91	64.19	65.39	66.51	67.57	68.56	69.49	70.38	71.21	72
3	36.95	39.15	41.24	43.21	45.07	46.83	48.49	50.06	51.55	52.97	54.3	55.57	56.78	57.92	59.02
4	22.81	24.97	27.07	29.1	31.07	32.96	34.78	36.54	38.22	39.83	41.38	42.86	44.29	45.65	46.96
5	12.74	14.51	16.31	18.11	19.91	21.68	23.44	25.16	26.84	28.49	30.09	31.64	33.15	34.62	36.04
6	6.36	7.6	8.91	10.29	11.71	13.18	14.66	16.17	17.68	19.18	20.68	22.16	23.63	25.07	26.49
7	2.83	3.56	4.38	5.29	6.27	7.33	8.44	9.6	10.81	12.05	13.32	14.6	15.9	17.2	18.5
8	1.12	1.49	1.93	2.45	3.04	3.7	4.44	5.23	6.09	7	7.97	8.97	10.01	11.09	12.19
9	0.4	0.56	0.77	1.02	1.33	1.7	2.12	2.6	3.15	3.74	4.4	5.11	5.86	6.67	7.51
10	0.13	0.19	0.28	0.39	0.53	0.71	0.93	1.18	1.49	1.84	2.24	2.68	3.18	3.72	4.31

Jaki będzie normatywny współczynnik obciążenia przy wolniejszych i szybszych procesorach?

Zadania

ZADANIE 1-01

Narysuj przebieg procesów kolejkowych $N(t)$ oraz $U(t) = pracadozakonczenia$ w systemie masowej obsługi przyjmującego strumień zgłoszeń: (t_n^+) = (0.5, 2, 5, 6.5) $(b_n) = (3, 2, 2, 3)$

dla dwóch przypadków:

a) S = 2 procesory o wydajności v = 1 j.o./s każdy (pełna dostępność, obsługa umiejscowiona),

b) S = 1 procesor o wydajności v = 2 j.o./s. Porównaj te przypadki.

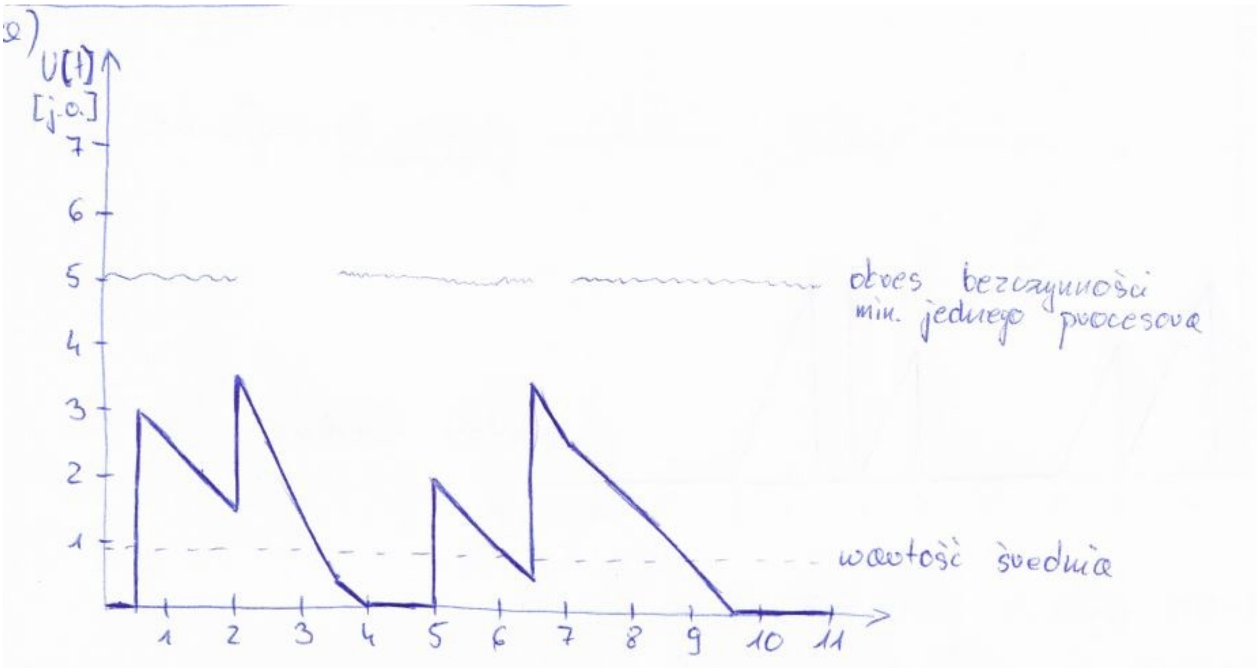
Pytania:

Co jest podstawą porównania obu przypadków?

Czy S = 2 pod jakimś względem góruje nad S = 1?

Rozwiązanie

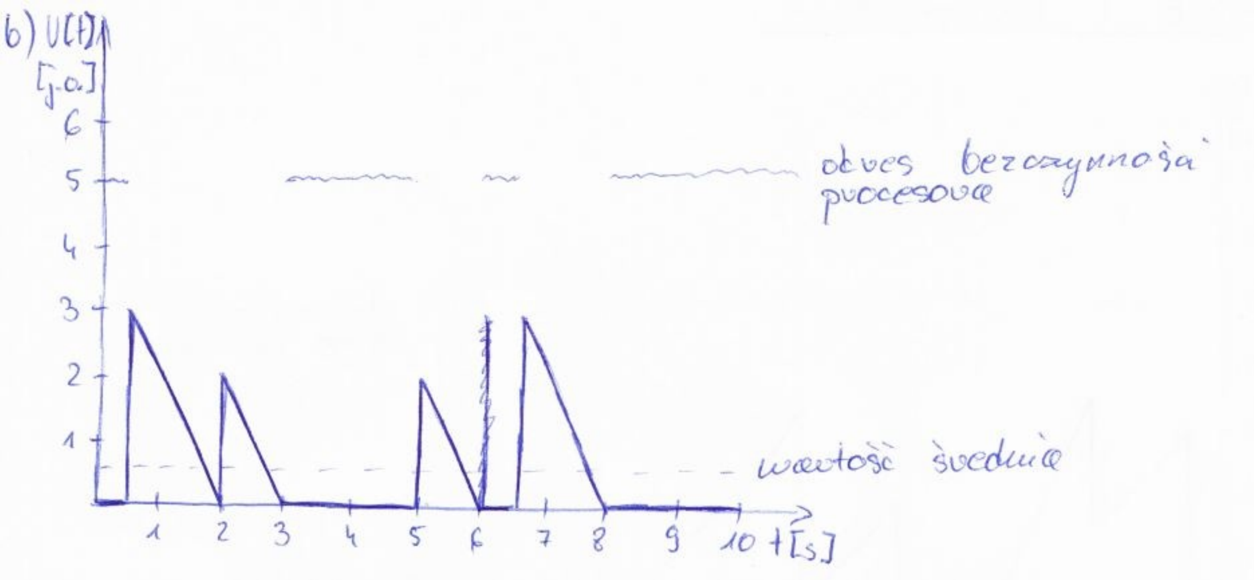
A)



1. w t = 0.5 pojawia się zgłoszenie $b_1 = 3$
2. do t = 2 wykonywane jest zgłoszenie b_1 (pozozstaje 1,5)
3. w t = 2 pojawia się zgłoszenie $b_2 = 2$
4. do t = 3,5 równolegle wykonywane są oba zgłoszenia, gdzie b_1 (się kończy) a b_2 (wynosi jeszcze 0.5)
5. do t = 4 kończy się wykonywanie b_2
6. do t = 5 procesory pozostają bezczynne
7. w t = 5 pojawia się zgłoszenie $b_3 = 2$

8. do t = 6,5 wykonywane jest zgłoszenie b_3 (pozostaje 0.5)
9. w t = 6,5 pojawia się zgłoszenie $b_4 = 3$
10. do t = 7 wykonywane są równolegle zgłoszenia b_3 i b_4
11. do t = 9,5 wykonywane jest zgłoszenie b_4

B)



1. w t = 0.5 pojawia się zgłoszenie $b_1 = 3$
2. zgłoszenie b_1 wykonywane jest do t = 2
3. w t = 2 pojawia się zgłoszenie $b_2 = 2$
4. zgłoszenie b_2 wykonywane jest do t = 3
5. w t = 5 pojawia się zgłoszenie $b_3 = 2$
6. zgłoszenie b_3 wykonywane jest do t = 6
7. w t = 6,5 pojawia się zgłoszenie $b_4 = 3$
8. zgłoszenie b_4 wykonywane jest do t = 8

Odpowiedź:

Co jest podstawą porównania obu przypadków? podstawą porównania obu przypadków jest wartość średnia.

Czy S = 2 pod jakimś względem góruje nad S = 1? Lepiej wykorzystuje procesor (krótszy czas bezczynności)

ZADANIE 1-02

Porównaj średnie opóźnienie systemowe zgłoszenia w 1-procesorowym systemie kolejkowym.

Z dyscypliną obsługi FIFO oraz Round Robin z kwantem obsługi *2s* (niepełne wykorzystanie kwantu obsługi powoduje wcześniejsze rozpoczęcie kolejnego kwantu obsługi). Wydajność procesora wynosi $1\frac{j.o}{s}$. Trzy zgłoszenia: X, Y i Z, o wymaganiach odpowiednio 7 j.o., 1 j.o. i 3 j.o., przybywają jednocześnie i ustawiają się w kolejności:

- a - XYZ
- b - YZX
- c - XZY

Dane

> Kwant obsługi - 2s
>
> $X = 7$
>
> $Y = 1$
>
> $Z = 3$
>
> FIFO - obsługa zgłoszeń po kolei
>
> Round Robin - każde zgłoszenie jest obsługiwane w kolejności ale tylko przez pewien czas

Rozwiązanie

$d_{sr} = \frac{d_1+d_2+d_3}{3}$ - trzy zadania

A) (X - Y - Z)

FIFO

1. wykonujemy x w 7s (kończymy zadanie w 7 sekundzie)
2. wykonujemy y w 1s (kończymy zadanie w 8 sekundzie)
3. wykonujemy z w 3s (kończymy zadanie w 11 sekundzie)

średnie opóźnienie systemowe $= \frac{7+8+11}{3} = 8\frac{2}{3}s$

Round Robin

1. dwa kwanty czasu dla x (pozostaje x=5)
2. jeden kwant czasu dla y (kończymy zadanie y - w 3 sekundzie)
3. dwa kwanty czasy dla z (pozostaje z=1)
4. dwa kwanty czasu dla x (pozostaje x=3)
5. jeden kwant czasu dla z (kończymy zadanie z - w 8 sekundzie)
6. dwa kwanty czasu dla x (pozostaje x=1)
7. jeden kwant czasu dla x (kończymy zadanie x - w 11 sekundzie)

średnie opóźnienie systemowe $= \frac{3+8+11}{3} = 7\frac{1}{3}s$

B) (Y - Z - X)

FIFO

1. wykonujemy y w 1s (kończymy zadanie w 1 sekundzie)
2. wykonujemy z w 3s (kończymy zadanie w 4 sekundzie)
3. wykonujemy x w 7s (kończymy zadanie w 11 sekundzie)

średnie opóźnienie systemowe $= \frac{1+4+11}{3} = 5\frac{1}{3}s$

Round Robin

1. jeden kwant czasu dla y (kończymy zadanie y - w 1 sekundzie)
2. dwa kwanty czasu dla z (pozostaje z=1)
3. dwa kwanty czasu dla x (pozostaje x=5)
4. jeden kwant czasu dla z (kończymy zadanie z - w 6 sekundzie)
5. dwa kwanty czasu dla x (pozostaje x=3)
6. dwa kwanty czasu dla x (pozostaje x=2)
7. jeden kwant czasu dla x (kończymy zadanie x - w 11 sekundzie)

średnie opóźnienie systemowe $= \frac{1+6+11}{3} = 6s$

C) (X - Z - Y)

FIFO

1. wykonujemy x w 7s (kończymy zadanie w 7 sekundzie)
2. wykonujemy z w 3s (kończymy zadanie w 10 sekundzie)
3. wykonujemy y w 1s (kończymy zadanie w 11 sekundzie)

średnie opóźnienie systemowe $= \frac{7+10+11}{3} = 9\frac{1}{3}s$

Round Robin

1. 2 kwanty czasu dla x (pozostaje x = 5)
2. 2 kwanty czasu dla z (pozostaje z = 1)
3. 1 kwant czasu dla y (kończymy zadanie y - w 5 sekundzie)
4. 2 kwanty czasu dla x (pozostaje x = 3)
5. 1 kwanty czasu dla z (kończymy zadanie z - w 8 sekundzie)
6. 2 kwanty czasu dla x (pozostaje x = 1)
7. jeden kwant czasu dla x (kończymy zadanie x - w 11 sekundzie)

średnie opóźnienie systemowe $= \frac{5+8+11}{3} = 8s$

FIFO ($8\frac{2}{3}, 5\frac{1}{3}, 9\frac{1}{3}$)

RR ($7\frac{1}{3}, 6s, 8s$)

Odpowiedź:

Round robin jest mniej wrażliwy na przypadek

ZADANIE 1-03

cechy zadania: zadanie z prawem little'a

System masowej obsługi realizuje średnio w siągu sekundy 800 transakcji, wymagających wykonania średnio 5000 operacji. Każda przybywająca transakcja otrzymuje do swojej dyspozycji procesor o średniej wydajności 4 000 000 operacji na sekundę. Oblicz średnią liczbę transakcji w systemie.

Rozwiązanie

> Prawo Little'a Średnia populacja = średnia cyrkulacja * średni czas życia

Sposób 1

średnia cyrkulacja = $800\frac{transakcji}{s}$

średni czas życia = $\frac{5000op}{4000000\frac{op}{s}} = \frac{1}{800}s$

średnia populacja = $800\frac{transakcji}{s} * \frac{1}{800}s = 1transakcja$

Sposób 2

$N_{sr} = \frac{(1-L)}{a_{sr}} * d_{sr}, gdzie = d_{sr} = \frac{b_{sr}}{v}$

> N = liczba zgłoszeń w systemie
>
> d - opóźnienie systemowe
>
> a_{sr} - średni interwał pomiędzy zgłoszeniami
>
> b_{sr} - średnie wymaganie zgłoszenia (rozmiar zgłoszenia)[wymagane jednostki operacji]
>
> L - frakcja utraconych transakcji w skutek przepełnienia bufora
>
> v - wydajność procesora

przyjmujemy że bufor jest nieskończony czyli $L = 0$ z treści zadania nie wynika innaczej

$d_{sr} = \frac{5000op}{4000000\frac{op}{s}} = \frac{1}{800}s$

$a_{sr} = \frac{1s}{8000op}$

$N_{sr} = \frac{1-0}{\frac{1}{800}} * \frac{1}{800} = 1$

Odpowiedź: Średnia liczba transakcji w systemie wynosi 1.

ZADANIE 2-01

Do 1-procesorowego systemu masowej obsługi z procesorem o wydajności $v = 1\frac{j.o}{s}$ przybywa bardzo "gęsty" strumień zgłoszeń przy czym współczynnik obciążenia wynosi $r = 75\%$. Łączny popyt na obsługę zgłoszony w ciągu sekundy ma odchylenie standardowe σ = 0.1 s.

Jakie są szanse, że w tym okresie uda się wygospodarować pół sekundy pracy procesora dla przetwarzania zadań systemowych bez tworzenia zaległości w obsłudze strumienia zgłoszeń?

Wskazówki

> Wykorzystaj centralne twierdzenie graniczne
>
> Wykorzystaj funkcję Laplace'a

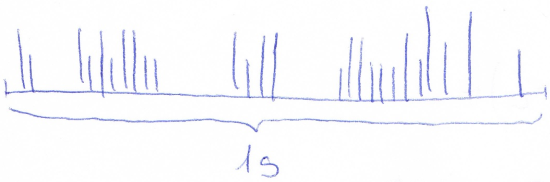
Rozwiązanie

Zadanie 1 ćwiczenia 2

Do 1-procesorowego systemu masowej obsługi z procesorem o wydajności v = 1 j.o./s przybywa bardzo "gęsty" strumień zgłoszeń, przy czym współczynnik obciążenia wynosi r = 75%. Łączny popyt na obsługę zgłoszony w ciągu sekundy ma odchylenie standardowe σ = 0.1 s. Jakie są szanse, że w tym okresie uda się wygospodarować pół sekundy pracy procesora dla przetwarzania zadań systemowych bez tworzenia zaległości w obsłudze strumienia zgłoszeń?

Wykorzystaj centralne twierdzenie graniczne i **funkcję Laplace'a**: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-y^2/2} dy$.

Jest tablicowana przeważnie dla x = 0..5, a jej wybrane wartości wynoszą: $\Phi(0.5)$ = 0.191, $\Phi(1)$ = 0.341, $\Phi(1.5)$ = 0.433, $\Phi(2)$ = 0.477, $\Phi(2.5)$ = 0.4938, $\Phi(3)$ = 0.4987, $\Phi(\geq 4) \approx$ 0.5. Co robić, gdy x < 0?



$\tau_n = \frac{b_n}{v}$ - wymagany czas obsługi zgłoszenia n

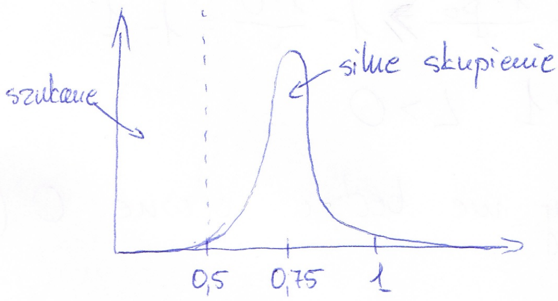
$B = \sum_{n=1}^{\text{dużo}} \tau_n$ - popyt zgłoszony w czasie 1s (suma wysokości słupków)

$\bar{B} = r = 75\%$ z treści zadania

$\sigma_B = 0{,}1$ s odchylenie standardowe

$P(B \leq 0{,}5)$ - szukane prawdopodobieństwo

Z centralnego twierdzenia granicznego B ma rozkład normalny (Gaussa).



$$P(a \leq X_{(v,\sigma)} \leq b) = P(0 \leq X_{(0.75,0.1)} \leq 0.5) =$$
$$= \Phi\left(\frac{b-v}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-v}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{0.5-0.75}{0.1}\right) - \Phi\left(\frac{0-0.75}{0.1}\right) =$$
$$= \Phi(-2{,}5) - \Phi(-7{,}5) = \Phi(7{,}5) - \Phi(2{,}5) \approx 0.5 - 0.4938 =$$
$$= 0.0062 = 0{,}62\%$$

Odp. Szanse wynoszą 6,2‰, czyli taka sytuacja wystąpi raz na około 162 sekundy.

3

ZADANIE 2-02

cechy zadania: zadanie z równaniem ciagłości przeplywu

1-procesorowy system masowej obsługi posiada pamięć buforową o pojemności $Q \leq \infty$ zgłoszeń i pracuje ze współczynnikiem obciążenia $r > 1$. W takim systemie pomimo wzrostu Q frakcja utraconych zgłoszeń : nigdy nie spadnie poniżej pewnego progu - jaką ma on wartość ?

Wskazówki:

1. Należy przypomnieć sobię równianie ciągłości przepływu.
2. Jak często procesor jest bezczynny gdy $Q \to \infty$

Wzory

> równanie ciągłości przepływu: $1 - p_0 = \frac{1-L}{a_{sr}} * \tau_{sr} = (1 - L) * r$
>
> p_0 współczynik bezczynności procesora L współczynnik strat r współczynnik obciążenia a_{sr} τ_{sr}

Rozwiązanie

$1 - p_0 = (1 - L) * r$

$\frac{1-p0}{r} = \frac{(1-L)*r}{r}$

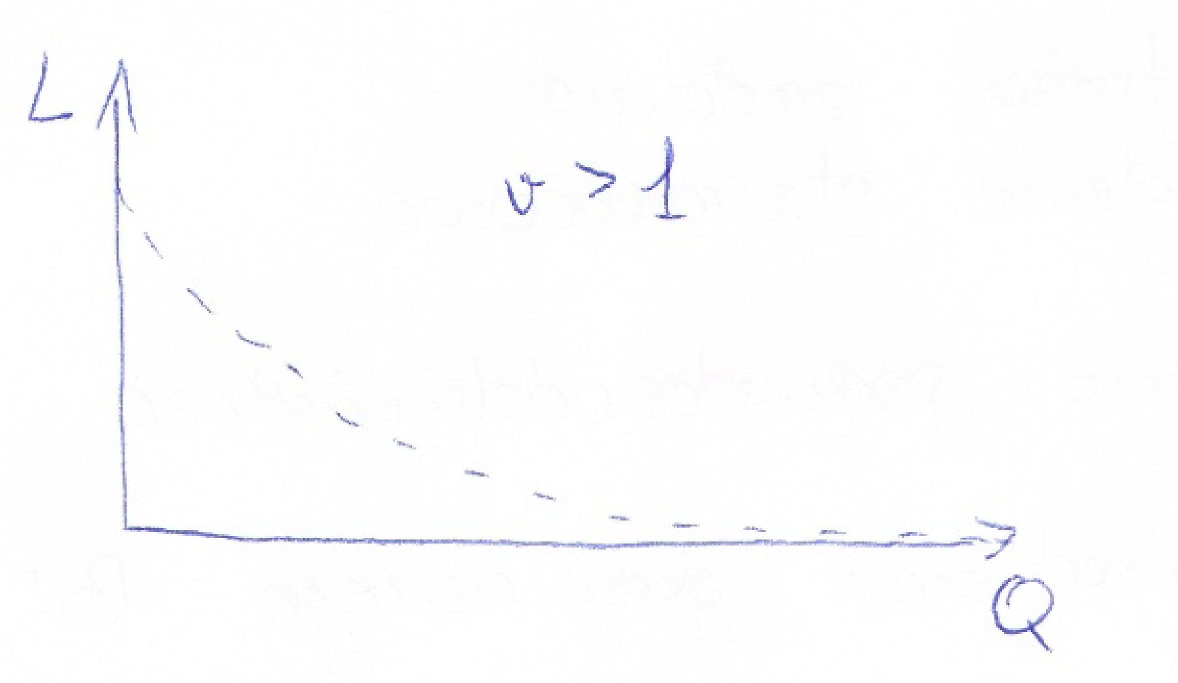
$\frac{1-p0}{r} = (1 - L)$

$\frac{1-p0}{r} - 1 = -L$

$L = 1 - \frac{1-p0}{r}$

wiedząc że $r > 1$ oraz że $Q \to \infty$ można przyjąć że współczynnik bezczynności procesora w takich warunkach wynosi 0 ($p_0 \to 0$)

$L = 1 - \frac{1-p0}{r} \geq 1 - \frac{1-0}{r} = 1 - \frac{1}{r}$ dla $r > 1$



Odpowiedź

Ponieważ $r > 1$, L nigdy nie będzie równe 0 (jest to szukany próg).

ZADANIE 2-03

cechy zadania: zadanie z tabelą - średnich znormalizowanych opóźnienień systemowych

1 - procesorowy system przetwarzania raportów z końcówek telemetrycznych posiada skończoną pamięć buforową o pojemności **Q** raportów. W zależności od **Q** i współczynnika obciążenia **r** zbadano charakterystyki: średniego opóźnienia systemowego raportu, znormalizowanego względem średniego czasu przetwarzania przez procesor(wytłuczczone w tabeli) oraz frakcji raportów utraconych wskutek przepełnienia pamięci buforowej. Wyznacz maksymalną licznę jednakowych końcówek telemetrycznych oraz niezbędną pojemność pamięci buforowej przy następujących założeniach:

- końcówka generuje $20\frac{raport}{min}$
- raport zawiera średnio $1800 rekordow$
- dysponujemy procesorem o wydajności przetwarzania $12000\frac{rekordow}{sek}$
- podział procesora pomiędzy obsługiwane końcówki ma miejsce na zasadzie wspólnego obszaru pamięci buforowej o skończonej pojemności (w raportach)
- dopuszczalne średnie opóźnienie systemowe raportu wynosi $1.8 sek$
- dopuszczalne frakcja raportów utraconych wskutek przepełnienia wynosi 4%

Tabelka

wartość po lewej średnie opóźnienie systemowego raportu, znormalizowanego względem średniego czasu przetwarzania przez procesor(wytłuczczone w tabeli) wartość po prawej frakcja raportów utraconych wskutek przepełnienia pamięci buforowej.

r\Q	20	21	22	23	24	25
0.1	1.11\0.0	1.11\0.0	1.11\0.0	1.11\ 0.0	1.11\ 0.0	1.11\ 0
0.2	1.25\0.0	1.25\0.0	1.25\0.0	1.25\ 0.0	1.25\ 0.0	1.25\ 0
0.3	1.43\0.0	1.43\0.0	1.43\0.0	1.43\ 0.0	1.43\ 0.0	1.43\ 0
0.4	1.67\0.0	1.67\0.0	1.67\0.0	1.67\ 0.0	1.67\ 0.0	1.67\ 0
0.5	2 \0.0	2 \0.0	2 \0.0	2 \ 0.0	2 \ 0.0	2 \ 0
0.6	2.5 \0.0	2.5 \0.0	2.5 \0.0	2.5 \ 0.0	2.5 \ 0.0	2.5 \ 0
0.7	3.32\0.0	3.32\0.0	3.32\0.0	3.33\ 0.0	3.33\ 0.0	3.33\ 0
0.8	4.47\0.0	4.8 \0.0	4.84\0.0	4.86\ 0.0	4.89\ 0.0	4.91\ 0
0.9	7.23\0.01	7.42\0.01	7.6 \0.01	7.76\ 0.01	7.92\ 0.01	8.07\0.01
1	10.5\0.05	11 \0.05	11.5\0.04	12 \ 0.04	12.5\ 0.04	13 \0.04
1.1	13.5\0.11	14.3\0.1	15.1\0.1	15.9\ 0.1	16.7\ 0.1	17.5\ 0.1
1.2	15.5\0.17	16.5\0.17	17.4\0.17	18.4\ 0.17	19.3\ 0.17	20.3\0.17

Dane

> $a_{sr} = 3 sek$

> $b_{sr} = 1800\frac{rek}{rap}$
>
> $v = 12000\frac{rek}{sek}$
>
> $d = 1.8sek$
>
> $L = 4\%$

Rozwiązanie

Chcemy otrzymać współczynik obciążenia od 1 - końcówki:

$r = \frac{b_{sr}}{a_{sr} * v}$

$r_1 = \frac{b_{sr}}{a_{sr1} * v} = \frac{1800rek}{3sek * 12000\frac{rek}{sek}} = 5\%$

wiemy że frakcja raportów utraconych ma być mniejsza niż 4% co oznacza iż $r \leq 1$ (wnioskujemy to z tabelki - frakcje strat dla r > 1 zawsze przekraczają 4%)

$J * r \leq 1$

$J * 5\% \leq 1$

$J \leq 20$

> *Odpowiedź:* Maksymalna wartość J to 20

$\tau_{sr} = \frac{b_{sr}}{v} = \frac{1800\frac{rek}{rap}}{12000\frac{rek}{sek}} = 0.15\frac{sek}{raport}$

znormalizowane opóźnienie systemowe $\frac{d}{\tau_{sr}} = \frac{1.8sek}{0.15\frac{sek}{raport}} = 12raportow$

patrząc na tabelkę szukamy miejsc gdzie znormalizowane opóźnienie systemowe $\frac{d}{\tau_{sr}}$ jest ≤ 12 => Q(22) i Q(23)

Odpowiedź: Maksymalna liczba końcówek to 20, a niezbędna pojemonść bufora wynosi 22.

ZADANIE 3-01

cechy zadania: zadanie z równaniem ciagłości przeplywu

Każda z 50 końcówek sieciowych dołączonych do wspólnego nadajnika pracuje w następujący sposób: faza namysłu trwa średnio $\frac{2}{3}$ sekundy, po czym generowane jest zgłoszenie:

- w 80% przypadkach jest to wiadomiść (średnio 1000B)
- w 20% przypadkach jest to raport diagnostyczny (średnio 160B). Nadajnik pracuje w trybie transmisji. półduplekswej z prędkością $1\frac{Mb}{s}$ i w każdej sekundzie średnio prezez 750 ms jest przełączony na odbiór (w tym czasie jest niedostępny dla innych zgłoszeń). Jaka będzie średnia frakcja zgłoszeń utraconcyh ?

Wskazówki:

Dane pozwalają na identyfikację a_{sr}, b_{sr} oraz współczynnika zajętości procesora. Należy teraz powrócić do równania ciągłości przepływu

Dane:

> $J = 50$
>
> $v = 1\frac{Mb}{s}$ / serwer jest w trybie odbierania(bezproduktywnym) przez 75%
>
> $a_{sr1} = \frac{2}{3}s$
>
> $b_{sr} = 20\% * 160B + 80\% * 1000B = 832Bajtow = 6656bitow$
>
> równanie ciągłości przepływu: $\overline{populacja} = \overline{cyrkulacja} * \overline{czas.zycia}$
>
> równanie ciagłości przeplywu : $(1 - p_0) = \frac{1}{a_{sr}}(1 - L) * \frac{b_{sr}}{v}$

Rozwiązanie

znając a_{sr1} obliczymy a_{sr} dla całego systemu z wszystkimi końcówkami

$$a_{sr} = \frac{a_{sr1}}{J} = \frac{\frac{2}{3}s}{50} = \frac{1}{75}s$$

procesor przetwarza zgoszenia tylko przez 25% czasu więc jego prędkosć spada

$$v = 1\frac{Mb}{s} * 25\% = 0.25\frac{Mb}{s}$$

$$r = \frac{b_{sr}}{a_{sr} * v} = \frac{6656bitow}{\frac{1}{75}s * 0.25 * 10^6\frac{bitow}{s}} = 1,9968$$

> przy $r \approx 200\%$ możemy przyjąć iż: $p_0 \to 0$

równanie ciagłości przeplywu : $(1 - p_0) = \frac{1}{a_{sr}}(1 - L) * \frac{b_{sr}}{v}$

$1 = \frac{1}{a_{sr}}(1 - L) * \frac{b_{sr}}{v}$ gdzie $p_0 = 0$

$1 * a_{sr} * v = (1 - L) * b_{sr}$

$L = 1 - \frac{a_{sr} * v}{b_{sr}}$

$L = 1 - \frac{\frac{1}{75}s * 0.25 * 10^6 \frac{bitow}{s}}{6656 bitow} \approx 0.49919(871794)$

Odpowiedź Frakcja utraconych zgłoszeń to około 50%

ZADANIE 3-02

O 1-procesorowym systemie masowej obsługi z pamięcią buforową o pojemności $Q = 2$ wiadomo, że w stanie ustalonym mamy $p_0 \geq p_1 \geq p_2$ oraz że $r = 0.75$

Znajdź przedział możliwych wartości p_1.

Wskazówki:

należy postąpić tak jak w zadaniu 3-01

Dane:

> $Q = 2$
>
> $p_0 \geq p_1 \geq p_2$
>
> $p_0 + p_1 + p_2 = 1$
>
> $r = 0.75$

Rozwiązanie

$p_0 \geq p_1 \geq p_2 \Rightarrow (1 - p_0) \leq (1 - p_1) \leq (1 - p_2)$

$(1 - p_0) + (1 - p_1) + (1 - p_2) = Q, gdzie$ (**Q = 2**)

$\frac{1-p0}{1-p_2} = r, gdzie$ ($r = \frac{3}{4}$)

$1 - p_0$	$1 - p_1$	$1 - p_2$
3	x	4

$x \in (3, 4)$

$\frac{1-p1}{(1-p_0)+(1-p_1)+(1-p_2)} = \frac{x}{3+x+4}$

$\frac{1-p1}{2} = \frac{x}{3+x+4}$

$p_1 = 1 - \frac{2x}{x+7}$

dla x = 3;

$p_1 = 1 - \frac{2*3}{3+7} = \frac{2}{5}$

dla x = 4;

$p_1 = 1 - \frac{2*4}{4+7} = \frac{3}{11}$

Odpowiedź

$p_1 \in (\frac{3}{11}, \frac{2}{5})$

ZADANIE 3-03

cechy zadania: zadanie obecnie - bez rozwiązania

Każdy sposród użytkowników systemu jednoprocesorowego generuje strumień dokumentów ze średnim interwałem a_{sr} Długości dokumentów mają średnią b_{sr}. Wydajność przetwarzania dokumentów przez procesor wynosi v.

Dopuszcza się:

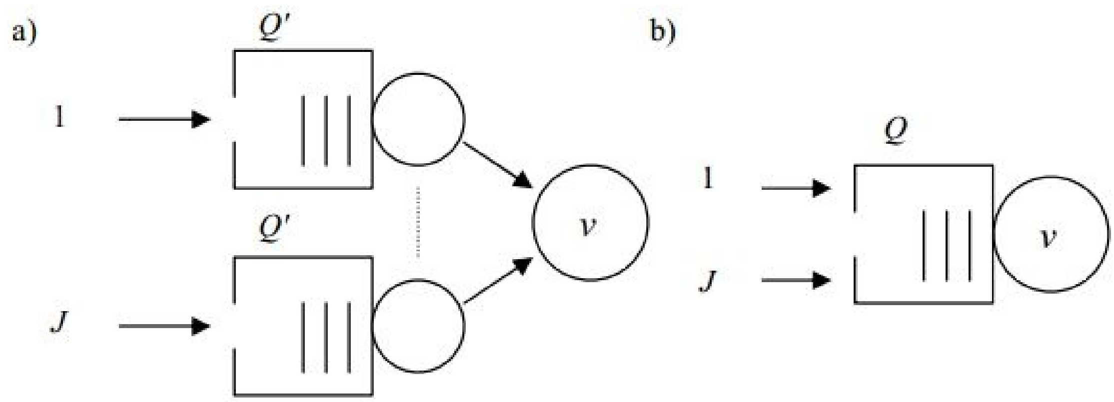
- frakcję dokumentów utraconych wskutek przepełniani a nie wiekszą niż L_{max}
- Średnie opóźnienie systemowe dokumentu nie większe niż c-krotność $\frac{b_{sr}}{v}$

Porównaj maksymalną liczbę J_{max} użytkowników oraz wymaganą pojemność pamięci buforowych dla przypadków:

A. Dostęp dedykowany z procesorami wurtualnymi o jednakowej wydajnośći i z odrębnymi kolejkami.

B. Dostęp ze wspólną kolejką do procesora fizycznego.

Przykładowe dane dla porównania przypadków A i B $a_{sr} = 6s$, $b_{sr} = 0.6KB$, $v = 24KB$, $L_{max} = 0.1\%$, $c = 5$



Dane:

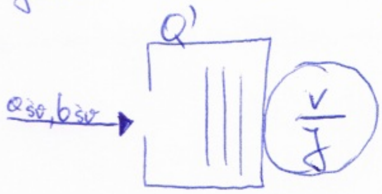
> System typu: M/M/1/Q
>
> $a_{sr} = 6s$
>
> $b_{sr} = 0.6KB$
>
> $v = 24KB$
>
> $L_{max} = 0.1\%$
>
> $c = 5$

Rozwiązanie

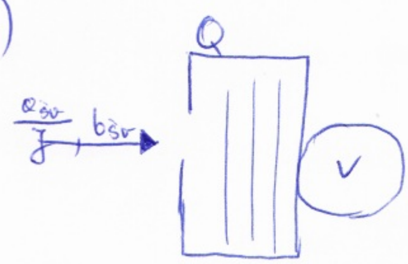
jak się nie ma co się lubi to się lubi co się ma - w myśl tej zasady dołączana jest ta notatka:

zadanie 3 ćwiczenie 3

a) System można interpretować w ten sposób:



b)



W obu przypadkach wykorzystując przykładowe dane należy doliczyć J_{max} oraz Q (lub Q') dla takiej liczby użytkowników.

$$L \leqslant L_{max}$$

$$d_{śr} \leqslant c \cdot \frac{b_{śr}}{V}$$

$$\rho = \frac{b_{śr}}{a_{śr} \cdot V}$$

$$L = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{Q+1}} \cdot \rho^{Q} & \text{dla } \rho \neq 1 \\ \frac{1}{Q+1} & \text{dla } \rho = 1 \end{cases}$$

$$d_{śr} = \frac{N_{śr}}{\frac{1-L}{a_{śr}}}$$

system M/M/1/

ZADANIE 4-01

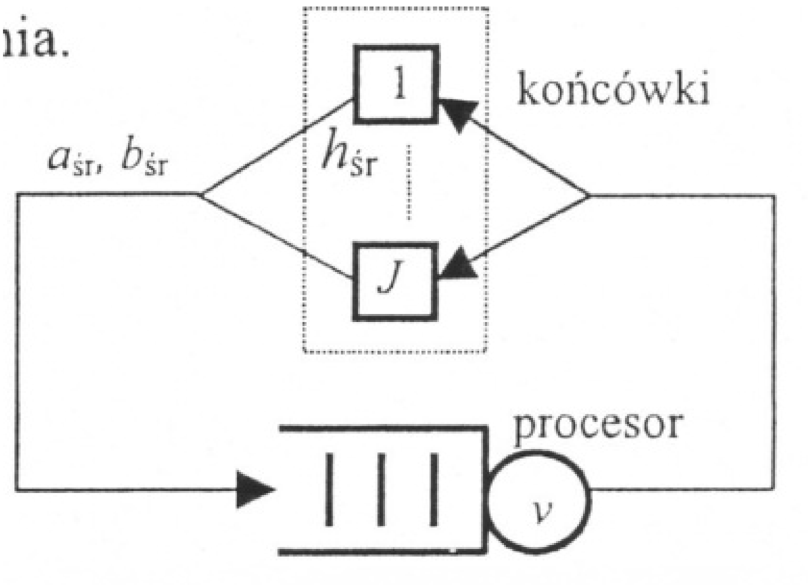
cechy zadania: zadanie z prawem little'a

1 procesorowy system masowej obsługi współpracuje z $J = 10$ inteligentnymi końcówkami w trybie konwersacyjnym zapytanie odpowiedź.

Po otrzymaniu odpowiedzi końcówka generuje nowe zapytanie po czasie namysłu wynoszącym średnio $h_{sr} = 4s$.

Średnia liczba operacji niezbędnych do wygenerowania odpowiedzi wynosi $b_{sr} = 15000$, zaś procesor w systemie posiada wydajność $v = 5000\frac{operacji}{s}$

Wyznacz zależność pomiędzy współczynnikiem bezczynności procesora (p_o). a średnim opóźnieniem buforowania (ω).



Dane:

> $h_{sr} = 4s$ czas namysłu
>
> $b_{sr} = 15000 operacji$ średnia wielkość zgłoszenia
>
> $v = 5000\frac{operacji}{s}$ prędkość procesora
>
> $J = 10$ koncowek
>
> prawo littlea: $\overline{populacja} = \overline{cyrkulacja} * \overline{czas.zycia}$
>
> $\overline{populacja} = J = 10$
>
> $\overline{cyrkulacja} = h_{sr} + \frac{b_{sr}}{v} + \omega$ (sredni czas przybywania)
>
> $\overline{czas.zycia} = \frac{1}{a_{sr}} = \frac{1-p_0}{\tau_{sr}} = \frac{1-p_0}{\frac{b_{sr}}{v}}$

Rozwiązanie

$\overline{populacja} = \overline{cyrkulacja} * \overline{czas.zycia}$

$J = (\frac{1-p_0}{\frac{b_{sr}}{v}}) * (h_{sr} + \frac{b_{sr}}{v} + \omega)$

$J * \frac{b_{sr}}{v} = (1 - p_0) * (h_{sr} + \frac{b_{sr}}{v} + \omega)$

$\frac{J*\frac{b_{sr}}{v}}{(1-p_0)} = h_{sr} + \frac{b_{sr}}{v} + \omega$

$\omega = \frac{J*\frac{b_{sr}}{v}}{(1-p_0)} - h_{sr} - \frac{b_{sr}}{v}$

podstawiając dane:

$\omega = \frac{10*\frac{15000 operacji}{5000\frac{operacji}{s}}}{(1-p_0)} - 4s - \frac{15000 operacji}{5000\frac{operacji}{s}}$

$\omega = \frac{30}{1-p_0} - 7s$

Odpowiedź

szukana zależność krztałtuje się następującym wzorem:

$\omega = \frac{30}{1-p_0} - 7s$

ZADANIE 4-02

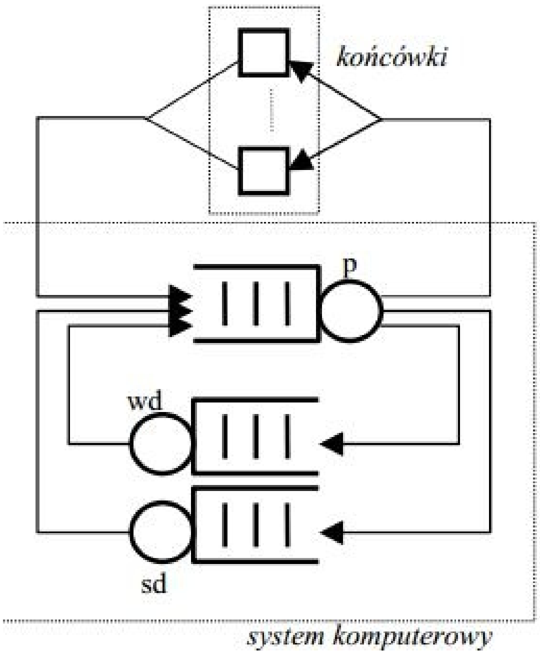
cechy zadania: zadanie z prawem little'a

Każda z J = 30 końcówek systemu komputerowego generuje zgłoszenia wymagające sekwencyjnego przetwarzania w procesorze, stacji wolnych dysków i stacji szybkich dysków.

Średnie liczby wizyt zgłoszenia w urządzeniach wynoszą $l_p = 21, l_{wd} = 12, l_{sd} = 8$ zaś średnie czasy przetwarzania w trakcie wizyty wynoszą $\tau_p = 0.05s, \tau_{wd} = 0.07s, \tau_{sd} = 0.02s$. Po zakończeniu przetwarzania zgłoszenia końcówka przechodzi do fazy namysłu trwającej średnio $h_{sr} = 15s$, po czym generuje kolejne zgłoszenie.

a) Gdzie jest wąskie gardło systemu, a gdzie występuje największe przewymiarowanie? Jak się to zmieni, gdy przyśpieszymy procesor tak, że $\tau_p = 0.03s$?

b) Jakie przyśpieszenie procesora niezbędne jest dla uzyskania średniego opóźnienia systemowego $d^*_{sr} = 12s$, a jakie dla uzyskania $d^*_{sr} = 9s$?



Zadanie 2 ćwiczenia 4

$l_p = 21$ $\quad \tau_p = 0.05\,s$ $\quad \to$ procesor

$l_{wd} = 12$ $\quad \tau_{wd} = 0.07\,s$ $\quad \to$ wolne dyski

$l_{sd} = 8$ $\quad \tau_{sd} = 0.02\,s$ $\quad \to$ szybkie dyski

$J = 30$

$Q_{śr} = 15\,s$

$$v_x = \frac{\tau_x}{Q_{śr}/l_x} = \frac{1}{Q_{śr}} \cdot \tau_x \cdot l_x$$

takie same $\qquad$ porównać

$\tau_p \cdot l_p = 1.05\,s$

$\tau_{wd} \cdot l_{wd} = 0.84\,s$

$\tau_{sd} \cdot l_{sd} = 0.16\,s$

po przyspieszeniu procesora ($\tau_p = 0.03\,s$)

$$\tau_p \cdot l_p = 0.63\,s$$

a) wąskie gardło systemu stanowi procesor. Największe przewymiarowanie występuje w szybkich dyskach. Po przyspieszeniu procesora wąskim gardłem będzie wolny dysk.

b)
$$\overline{\text{populacja}} = \overline{\text{cyrkulacja}} \times \overline{\text{czas życia}}$$

$$J = (h_{śr} + d_{śr}) \times \frac{1}{Q_{śr}} \Rightarrow Q_{śr} = \frac{h_{śr} + d_{śr}}{J}$$

$d_{śr} = 12\,s$

$Q_{śr} = \frac{15s + 12s}{30} = 0.9s$

$\frac{1}{Q_{śr}} = 1.11s \leftarrow$ cyrkulacja, którą trzeba wymusić

$v_p = 1.11 \cdot 1.05 = 1.166 \leftarrow$ czy taką cyrkulację wytrzyma procesor?

Odp. Nie. Jest to ponad 116% możliwości procesora.

ZADANIE 5-01

cechy zadania: zadanie typu M/M/1/Q

A) w systemie M/M/1/2 średnia intensywność przybywania zgłoszeń wynosi 40 na sekundę, zaś średni czas obsługi zgłoszenia wynosi 20 ms. Ile zgłoszeń średnio zostaje utraconych w ciągu doby?

$a_{sr} = \frac{1}{40s} = 0,025s$, $\tau_{sr} = 0,02s, Q = 2$

$r = \frac{\tau_{sr}}{a_{sr}} = \frac{0,02}{0,025} = 0,8$

$r \neq 1$, $L = \frac{1-r}{1-r^{Q+1}} * r^Q = \frac{1-0,8}{1-(0,8)^2} * (0,8)^2 = 0,2622 = 26,22\%$

ilość utraconych zgłoszeń w ciągu doby: $40 \frac{zgloszen}{sek} *$ dzień w sekundach $*$ procent utraconych zgloszen =

$40 \frac{zgloszen}{sek} * 86400sek * 0,2622 = 906163.2$

Odpowiedź: średnio w ciągu dnia w systemie zostaje utraconych 906163.2 zgłoszeń.

B) W systemie M/M/1/5 w trakcie obsługi zgłoszenia o średnim wymaganiu obsługi przybywają średnio dwa nowe zgłoszenia. Jak duża jest frakcja zgłoszeń utraconych wskutek przepełnienia pamięci buforowej ?

$\tau_{sr} = 2 * a_{sr}$

> $r = \frac{b_{sr}}{a_{sr} * v} = \frac{\tau_{sr}}{a_{sr}}$

$r = \frac{\tau_{sr}}{v} = \frac{2 * a_{sr}}{a_{sr}} = 2$

$r \neq 1$, $L = \frac{1-r}{1-r^{Q+1}} * r^Q = \frac{1-2}{1-(2)^6} * (2)^5 = \frac{32}{63} = 50,79\%$

Odpowiedź: frakcja zgłoszeń utraconych wskutek przepełnienia wynosi $50,79\%$

C) W systemie M/M/1/Q strumień zgłoszeń ma dane parametry a_{sr} i b_{sr}. Dla prawidłowej pracy procesor potrzebuje $p - \%$ udziału czasu bezczynności, do czego z kolei wymagana jest pewna minimalna wydajność obsługi v_{min}. Jak v_{min} zmienia się ze wzrostem Q ?

$r = \frac{b_{sr}}{a_{sr} * v}$

$p_0 = \frac{1-r}{1-r^{Q+1}}$

$p_0 = \frac{1-\frac{b_{sr}}{a_{sr} * v}}{1-(\frac{b_{sr}}{a_{sr} * v})^{Q+1}}$

Odpowiedź: Przy wzroście Q, aby zachować stałe p, wartość v również musi rosnąć.

ZADANIE 5-02

cechy zadania: zadanie typu M/M/S/S

Każdy spośród 150 użytkowników systemu M/M/S/S generuje w ciągu sekundy średnio 10 transakcji, dopuszczając $L \leq 3\%$.

Każda transakcja wymaga wykonania średnio 800 operacji.

Operator systemu ma do wyboru wydzierżawienie procesorów o wydajności 0.5 miliona operacji na sekundę lub procesorów 4-krotnie szybszych, których koszt dzierżawy jest 2.5-krotnie wyższy.

Ile i których procesorów powinien wydzierżawić, by zminimalizować koszty, spełniając zarazem wymagania użytkowników?

> Do obliczeń wykorzystaj poniższy fragment "kalkulatora formuły B Erlanga", gdzie podano wartości L (w %) dla normatywnych współczynników obciążenia od 0.2 do 6 erlangów oraz dla liczb procesorów od 1 do 10.

S \ r	**0.2**	**0.4**	**0.6**	**0.8**	**1**	**1.2**	**1.4**	**1.6**	**1.8**	**2**	**2.2**
1	16.67	28.57	37.5	44.44	50	54.55	58.33	61.54	64.29	66.67	68.75
2	1.64	5.41	10.11	15.09	20	24.66	28.99	32.99	36.65	40	43.06
3	0.11	0.72	1.98	3.87	6.25	8.98	11.92	14.96	18.03	21.05	24
4	0.01	0.07	0.3	0.77	1.54	2.62	4	5.65	7.5	9.52	11.66
5	0	0.01	0.04	0.12	0.31	0.63	1.11	1.77	2.63	3.67	4.88
6	0	0	0	0.02	0.05	0.12	0.26	0.47	0.78	1.21	1.76
7	0	0	0	0	0.01	0.02	0.05	0.11	0.2	0.34	0.55
8	0	0	0	0	0	0	0.01	0.02	0.05	0.09	0.15
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0.01	0.02	0.04
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.01

S \ r	**3.2**	**3.4**	**3.6**	**3.8**	**4**	**4.2**	**4.4**	**4.6**	**4.8**	**5**	**5.2**
1	76.19	77.27	78.26	79.17	80	80.77	81.48	82.14	82.76	83.33	83.8
2	54.94	56.78	58.48	60.07	61.54	62.91	64.19	65.39	66.51	67.57	68.5
3	36.95	39.15	41.24	43.21	45.07	46.83	48.49	50.06	51.55	52.97	54.
4	22.81	24.97	27.07	29.1	31.07	32.96	34.78	36.54	38.22	39.83	41.3
5	12.74	14.51	16.31	18.11	19.91	21.68	23.44	25.16	26.84	28.49	30.0
6	6.36	7.6	8.91	10.29	11.71	13.18	14.66	16.17	17.68	19.18	20.6
7	2.83	3.56	4.38	5.29	6.27	7.33	8.44	9.6	10.81	12.05	13.3
8	1.12	1.49	1.93	2.45	3.04	3.7	4.44	5.23	6.09	7	7.9
9	0.4	0.56	0.77	1.02	1.33	1.7	2.12	2.6	3.15	3.74	4.4
10	0.13	0.19	0.28	0.39	0.53	0.71	0.93	1.18	1.49	1.84	2.2

Jaki będzie normatywny współczynnik obciążenia przy wolniejszych i szybszych procesorach ?

Dane

> System Typu: M/M/S/S
>
> $b_{sr} = 800op$
>
> $a_{sr} = \frac{a_{sr}^{(j)}}{J} = \frac{\frac{1}{10}}{150} = \frac{1}{1500s}$ - przy jednakowych strumieniach
>
> $\rho = \frac{b_{sr}}{a_{sr}*v}$
>
> $r = \frac{b_{sr}}{a_{sr}*v*S}$

$v_1 = 500000\frac{op}{s}$, $v_2 = 2000000\frac{op}{s}$

Koszty: $v_1 = x$, $v_2 = 2.5x$

Rozwiązanie

procesor wolniejszy:

$\rho_1 = \frac{b_{sr}}{a_{sr}*v1} = \frac{800*\frac{1}{1500}}{500000} = 2.4$

procesor szybszy:

$\rho_2 = \frac{b_{sr}}{a_{sr}*v2} = \frac{800*\frac{1}{1500}}{2000000} = 0.6$

szukamy w tabeli wartości które są mniejsze niż 3%:

dla pierwszego normatywnego współczynnika ($\rho_1 = 2.4$) szukamy takiej ilości procesorów która spełni założenie (L<3%) czyli (6 procesorów) (wartość L = 2.44%)

dla drugiego normatywnego współczynnika ($\rho_2 = 0.6$) szukamy takiej ilości procesorów która spełni założenie (L<3%) czyli (3 procesorów) (wartość L = 1.98%)

koszty:

procesory (wolniejsze) = 6x

procesory (szybsze) = 3*2,5x = 7,5x

Odpowiedź: bardziej opłacalne w zakupie są procesory tańsze, należy zakupić 6 procesorów.

ZADANIE 5-03

cechy zadania: zadanie typu graf stanów

Do systemu M/M/1 przybywa strumień zgłoszeń ze średnim interwałem $a_{sr} = 10s$ i średnim wymaganiem zgłoszenia $b_{sr} = 10j.o.$ Wydajność procesora wynosi v Narysuj odpowiedni graf przejść stanów dla procesu urodzin i śmierci w przypadku, gdy:

> Dla każdego z powyższych modeli starannie zdefiniuj stan systemu. Rozpatrz zdarzenia, jakie w każdej chwili mogą zajść w danym stanie oraz wynikające z nich stany w następnej chwili.

A) z prawdopodobieństwem 25% zgłoszenie po zakończeniu obsługi nie opuszcza systemu, lecz natychmiast powraca do kolejki,

$a_{sr} = 10s$

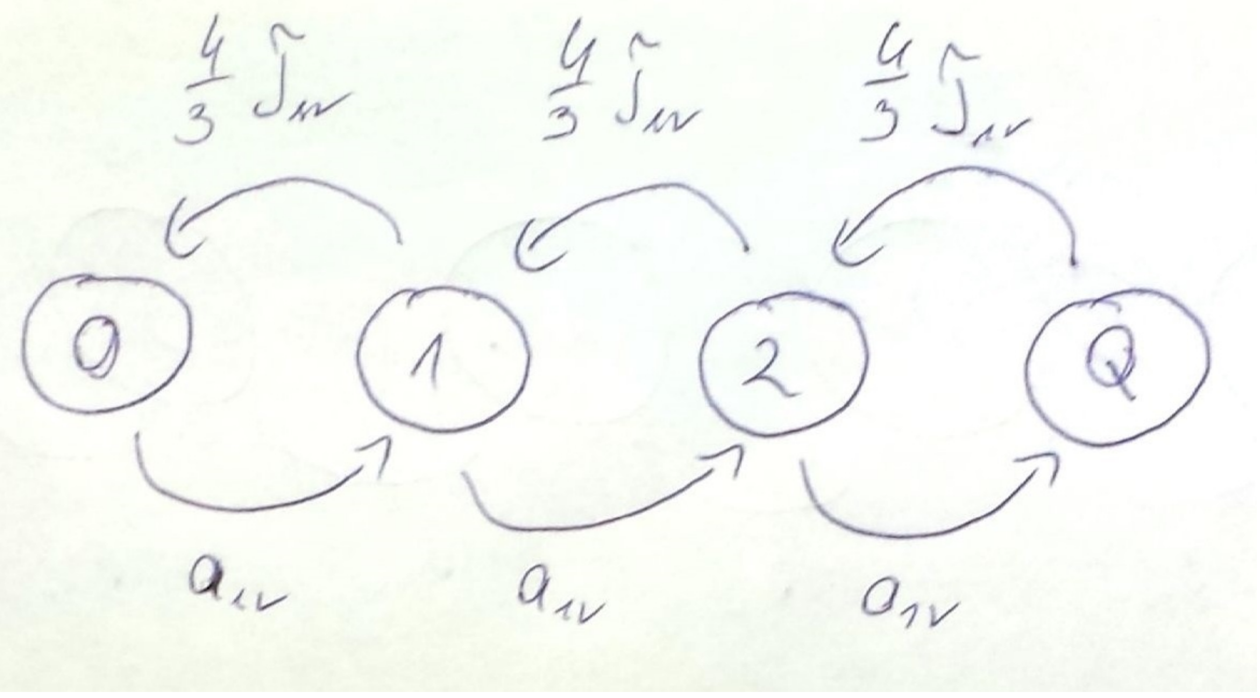
zazwyczaj każde kolejne żądanie powino się pojawić co 10 s, ale co czwarte wraca do kolejki, czyli możemy przyjąć że interwał tego zgłoszenia wynosi 0 (" bo od razu" wraca_do_kolejki/pojawia_sie_w_kolejce ")

$a_{sr}^{(')} = \frac{a_{sr}+a_{sr}+a_{sr}+0}{4} = \frac{3*a_{sr}}{4} = \frac{3}{4}a_{sr}$

> $\tau_{sr} = \frac{b_{sr}}{v}$
>
> $r = \frac{b_{sr}}{a_{sr}*v} = \frac{\tau_{st}}{a_{sr}} \Rightarrow \tau_{st} = r * a_{sr}$

$r = \frac{b_{sr}}{a_{sr}^{(')}v} = \frac{b_{sr}}{\frac{3}{4}a_{sr}v} = \frac{4}{3}\frac{b_{sr}}{a_{sr}v} = \frac{4}{3}\frac{\tau_{sr}}{a_{sr}}$

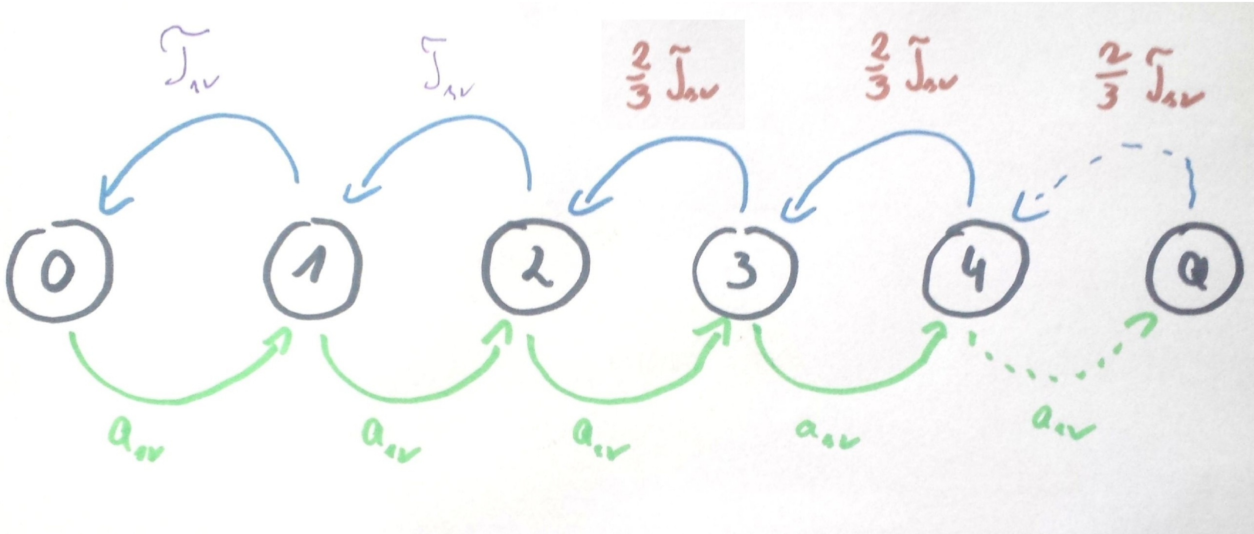
$\tau_{st} = r * a_{sr} = \frac{4}{3}\frac{\tau_{sr}}{a_{sr}}a_{sr} = \frac{4}{3}\tau_{sr}$



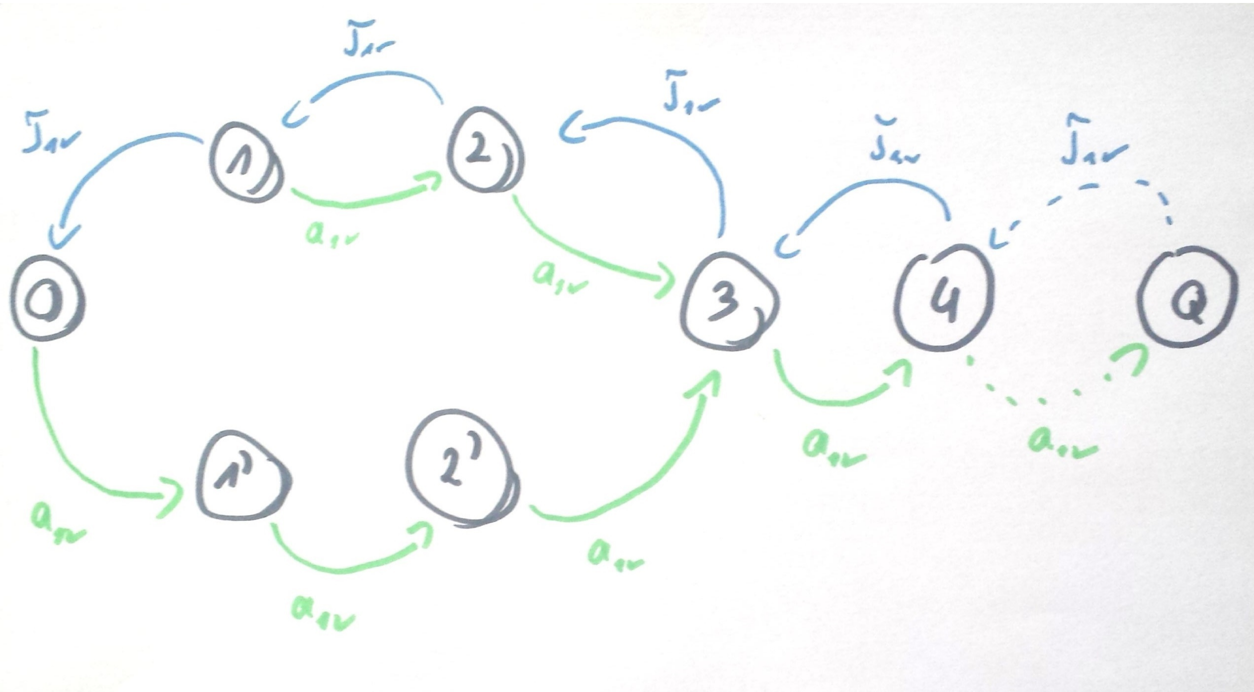
B) przy 3 lub więcej zgłoszeniach w systemie procesor zwiększa wydajność obsługi o 50%,

$\tau_{sr} = \frac{b_{sr}}{v}$

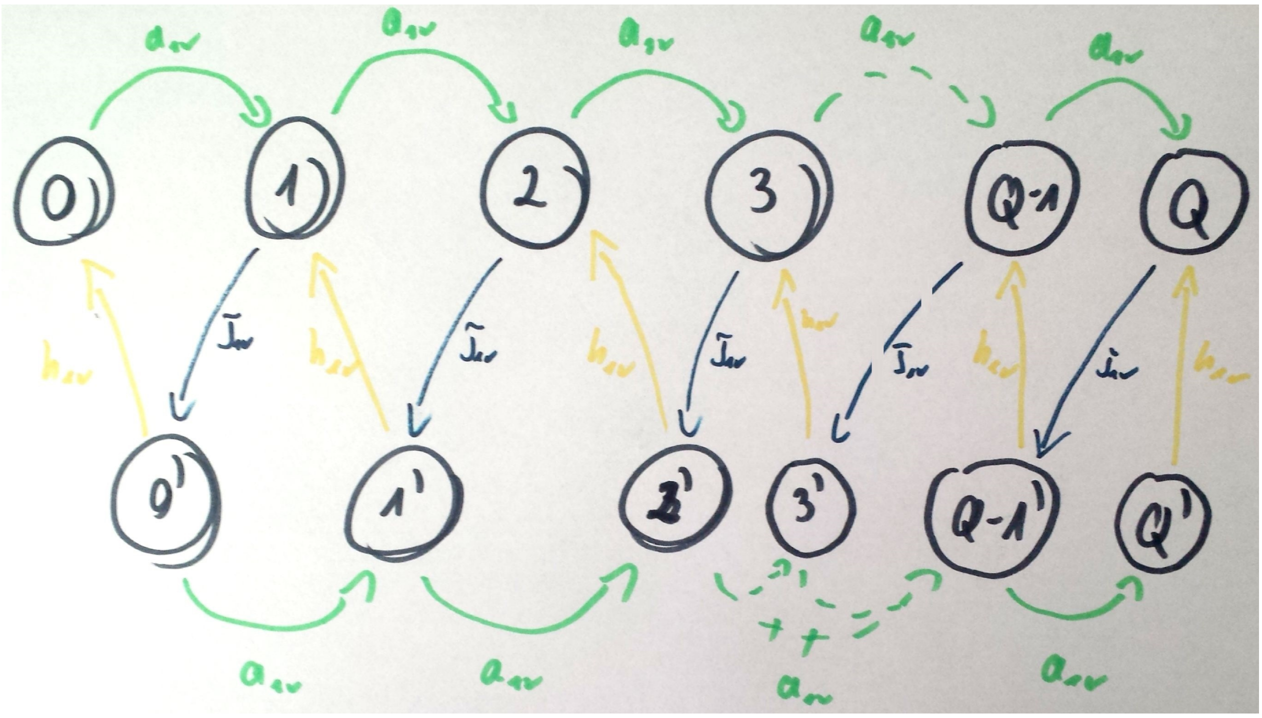
$\tau_{sr}^{(')} = \frac{b_{sr}}{(150\%)v} = \frac{b_{sr}}{\frac{3}{2}v} = \frac{2}{3} * \frac{b_{sr}}{v} = \frac{2}{3} * \tau_{sr}$



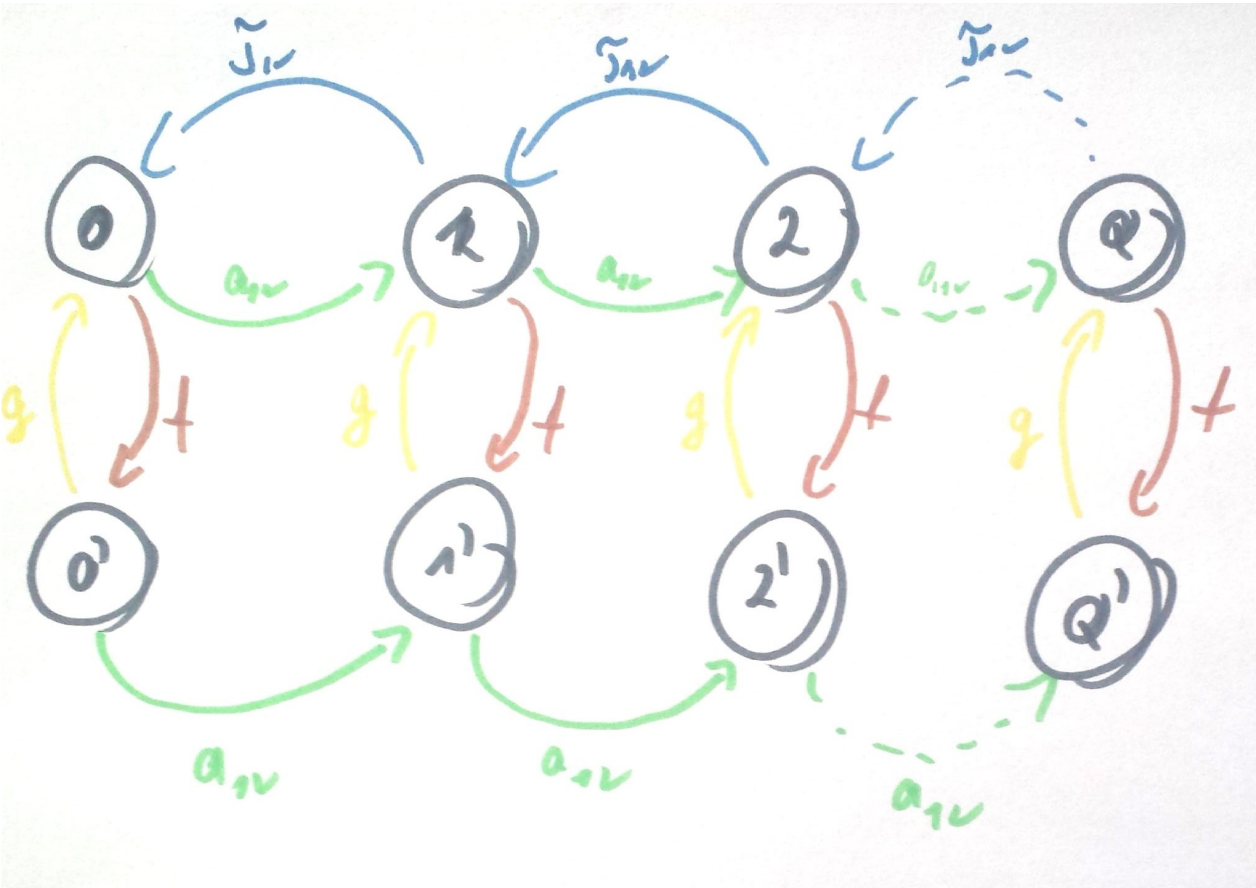
C) po zakończeniu okresu zajętości procesor "idzie na wakacje", w trakcie których ignoruje zgłoszenia, zaś wznawia pracę dopiero przy 3 oczekujących zgłoszeniach,



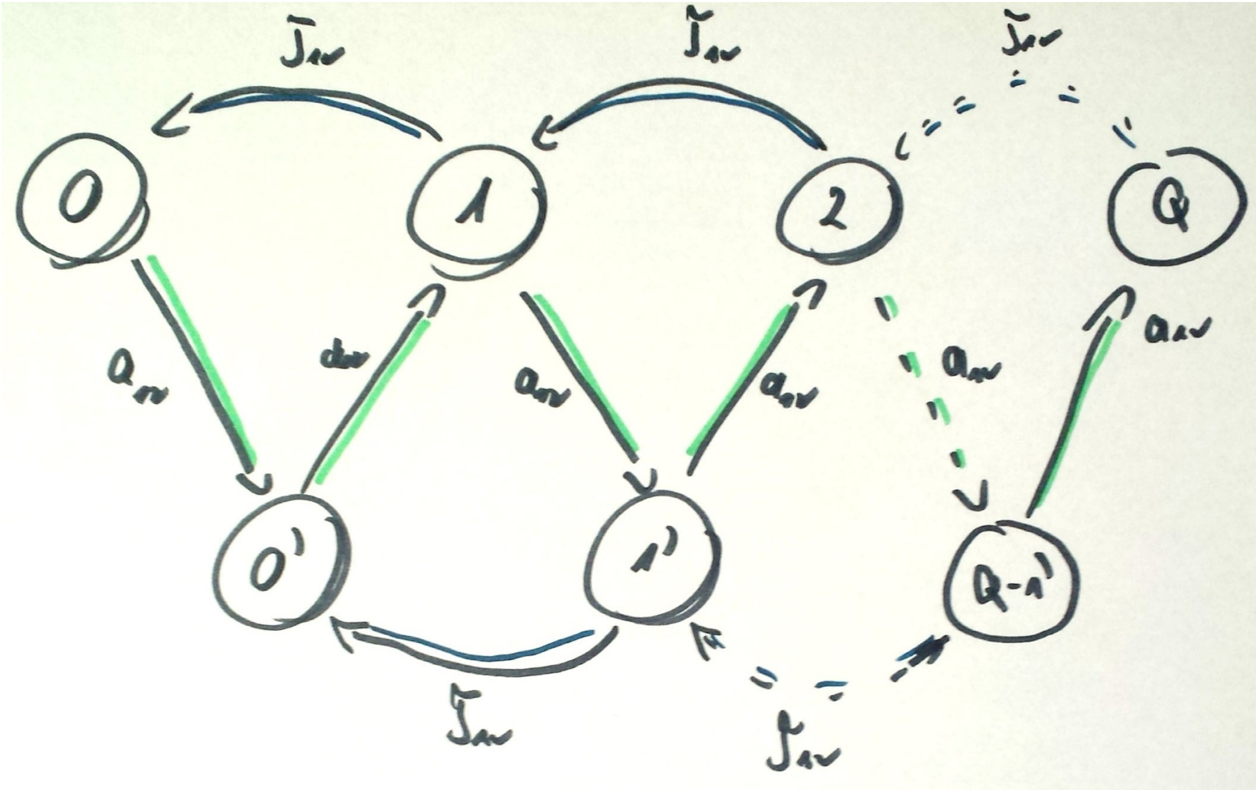
D) każdorazowo po zakończeniu obsługi zgłoszenia procesor "idzie na wakacje", w trakcie których ignoruje znajdujące się w systemie zgłoszenia; czas trwania "wakacji" ma rozkład wykładniczy ze średnią h_{sr}



E) procesor ulega awariom, w trakcie których nie obsługuje zgłoszeń (przerwana obsługa zgłoszenia zostaje dokończona po zakończeniu awarii). Czasy trwania awarii oraz bezawaryjnej pracy mają rozkłady wykładnicze ze średnimi odpowiednio f_{sr} i g_{sr},



F) system przyjmuje zgłoszenia parami − pierwsze z pary oczekuje na następne i tak utworzona para traktowana jest jako jedno przybywające zgłoszenie o wymaganiu obsługi równym wymaganiu drugiego z pary.


0
1
2
Q
0'
1'
Q-1'

ZADANIE 5-04

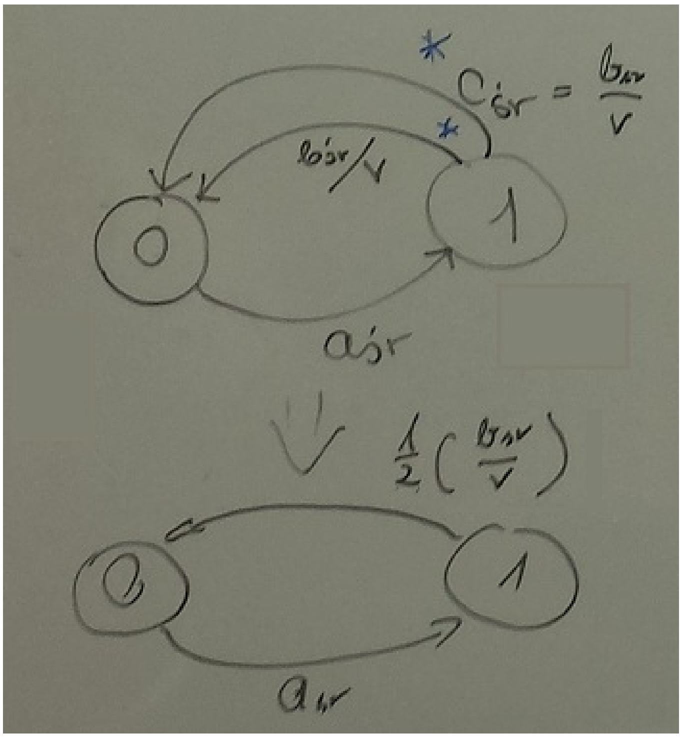
Zgłoszenia przybywają do systemu M/M/1 średnio co $a_{sr} = 10s$, średnie wymaganie wynosi $b_sr = 10j.o.$, zaś wydajność procesora $v = 1\frac{j.o}{s}$. W chwili przybycia każde zgłoszenie losuje swój "próg cierpliwości" z rozkładu wykładniczego o średniej c_{sr} Jeżeli po jego upływie ciągle jeszcze oczekuje na rozpoczęcie obsługi – ucieka z kolejki. Przyjmując $c_{sr} = \frac{b_{sr}}{v}$ znajdź rozkład liczby zgłoszeń w systemie i frakcję zgłoszeń, które uciekły z kolejki.

Dane

> $a_{sr} = 10s$
>
> $b_{sr} = 10j.o.$
>
> $v = 1\frac{j.o.}{s}$
>
> $c_{sr} = \frac{b_{sr}}{v}$ - próg cierpliwości
>
> $Q = \infty$

Rozwiązanie

równanie urodzin i śmierci : $\frac{p_k}{a_{sr}} = \frac{p_{k+1}}{\frac{b_{sr}}{v}}$



$\frac{p_k}{a_{sr}} = \frac{p_{k+1}}{\frac{1}{2} * \frac{b_{sr}}{v}}$

$p_k * \frac{b_{sr}}{2*v} = p_{k+1} * a_{sr}$

$p_{k+1} = \frac{pk*\frac{b_{sr}}{2*v}}{a_{sr}}$

$p_{k+1} = \frac{pk*\frac{10j.o.}{2*1\frac{j.o}{s}}}{10s} = \frac{1}{2} * p_k$

$p_{k+1} = \frac{1}{2} * p_k$

$p_0 + p_1 + p_2 + ... + p_Q = 1 = \frac{p0}{1-1/2}$ - suma nieskończonego ciągu geometrycznego

$p_0 = \frac{1}{2}$

> $1 - p_0 = (1 - L) * r \Rightarrow L = 1 - \frac{1-p0}{r}$ - równanie ciągłości przepływu

$r = \frac{b_{sr}}{a_{sr}*v} = \frac{10}{10*1} = 1$

$L = 1 - \frac{1-0.5}{1} = 1 - 0.5 = 0.5$

Odpowiedź: frakcja zgłoszeń wynosi 50%

Kolokwium 2015

pierwszy termin:

Imię NAZWISKO ______________________________ Nr indeksu ______________

Badania Operacyjne cz. I – zaliczenie 23.4.2015

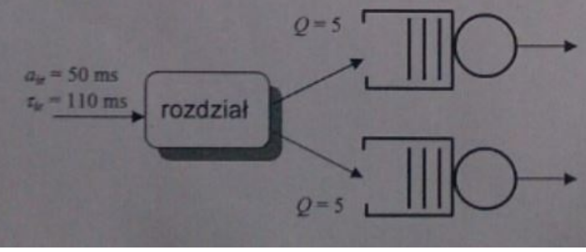
__Czas__: 45 min. __Dozwolone__: notatki, kalkulatory – tylko własne! __Rozwiązania__: tylko na tej kartce – brudnopisy nie będą oceniane! __Zalicza__: ≥ 17 pkt. __Wyniki__: w przyszłym tygodniu u kierownika przedmiotu.

__Zadanie 1__ *(11 pkt)*
W systemie M/M/S/S każdy użytkownik generuje średnio w ciągu 1000 s jedno połączenie głosowe o średnim czasie trwania 50 s, dopuszczając frakcję strat $L \leq 2$ % wskutek braku wolnych linii. Operator systemu pobiera od każdego dołączonego użytkownika stałą opłatę miesięczną \$150, zaś za wydzierżawienie każdej linii płaci stałą opłatę miesięczną \$1000. Jaką minimalną liczbę linii powinien wydzierżawić i ilu użytkowników powinien dołączyć, by system zaczął przynosić zysk? W poniższej tabeli formuły B Erlanga podano L (w %) dla normatywnego współczynnika obciążenia $\rho = 0.1..2.5$ erlanga oraz liczby linii $S = 1..10$.

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
1	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
2	2.4	4.8	7	9.1	11.1	13	14.9	16.7	18.4	20	21.6	23.1	24.5	25.9	27.3	28.6	29.8	31	32.2	33.3	34.4	35.5	36.5	37.5	38.5
3	0.1	0.3	0.7	1.2	1.8	2.5	3.4	4.3	5.2	6.2	7.3	8.5	9.6	10.8	12	13.2	14.5	15.7	16.9	18.2	19.4	20.6	21.9	23.1	24.3
4	0	0	0.1	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.2	1.5	2	2.5	3	3.6	4.3	5	5.8	6.6	7.4	8.3	9.3	10.2	11.2	12.2	13.2
5	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.8	1	1.3	1.6	1.9	2.3	2.8	3.2	3.7	4.3	4.9	5.5	6.2
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.4	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.8	2.2	2.5
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.9
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

__Zadanie 2__ *(12 pkt)*
W systemie M/M/1 parametry strumienia zgłoszeń wynoszą $a_{śr}$ i $b_{śr}$, zaś wydajność procesora wynosi v. Narysuj graf przejść stanów procesu urodzin i śmierci dla następującego modelu z wakacjami. Każdorazowo po zakończeniu obsługi zgłoszenia lub kolejnych wakacji procesor sprawdza liczbę zgłoszeń w systemie i jeżeli nie przekracza ona 3, udaje się na wakacje, w trakcie których nie obsługuje zgłoszeń; w przeciwnym razie obsługuje następne zgłoszenie. Czas trwania wakacji ma rozkład wykładniczy ze średnią $h_{śr}$.

__Zadanie 3__ *(11 pkt)*
Strumień Poissona ze średnim interwałem $a_{śr} = 50$ ms i wykładniczym rozkładem wymagań zgłoszeń ze średnią $\tau_{śr} = 110$ ms rozdzielany jest na dwa systemy o pojemności $Q = 5$ jak na rysunku.
Oblicz frakcję strat L dla dwóch trybów pracy:
a) dla każdego zgłoszenia wybór systemu jest przypadkowy z prawdopodobieństwami 50%,
b) do każdego systemu trafia połowa każdego zgłoszenia.
Który tryb pracy wprowadza większe średnie opóźnienie systemowe?



Kolokwium 2015 - Zadanie 1

cechy zadania: **zadanie typu M/M/S/S**

W systemie M/M/S/S każdy użytkownik generuje średnio w ciągu 1000 s jedno połączenia głosowe o średnim, czasie trwania 50s, dopuszczając frakcję strat $L \leq 2\%$ wskutek braku wolnych lini. Operator systemu pobiera od każdego dołączonego użytkownika stałą połatę miesięczną $150 , zaś za wydzierżawienie lini płaci stałą opłatę $1000. Jaką minimalną liczną linie powinien wydzierżawić i ilu użytkowników powinien dołączyć, by system zaczął przynosić zysk? W poniższej tabeli formuły B Erlanga podano L (w %) dla normatywnego współczynnika obciążenia $\rho = 0.1...2.5$ ernangla oraz liczby nini $S = 1...10$

Tabela formuły B Erlanga:

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3
1	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
2	2.4	4.8	7	9.1	11.1	13	14.9	16.7	18.4	20	21.6	23.1	24.5
3	0.1	0.3	0.7	1.2	1.8	2.5	3.4	4.3	5.2	6.2	7.3	8.5	9.6
4	0	0	0.1	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.2	1.5	2	2.5	3
5	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.8
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.1	0.2
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
1	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
2	25.9	27.3	28.6	29.8	31	32.2	33.3	34.4	35.5	36.5	37.5	38.5
3	10.8	12	13.2	14.5	15.7	16.9	18.2	19.4	20.6	21.9	23.1	24.3
4	3.6	4.3	5	5.8	6.6	7.4	8.3	9.3	10.2	11.2	12.2	13.2
5	1	1.3	1.6	1.9	2.3	2.8	3.2	3.7	4.3	4.9	5.5	6.2
6	0.2	0.3	0.4	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.8	2.2	2.5
7	0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.9
8	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Dane

> $a_{sr} = 1000s$ - interwał pomiędzy zgłoszeniami jednego użytkownika
>
> $\tau_{sr} = 50s$ - średni wymagany czas obsługi jednego zgłoszenia
>
> $L \leq 2\%$ - dopuszczana frakcja strat wskutek braku wolnych lini
>
> $150\$$ - zysk z jednego użytkownika
>
> $1000\$$ - koszt jednej lini
>
> U - liczba użytkowników
>
> S - liczba lini

Rozwiązanie #1

$\rho = \frac{\tau_{sr}}{a_{sr}} = 0.05$ - normatywny współczynnik obciążenia - obciążenie jakie generuje jeden użytkownik na jednym procesorze.

$\frac{\rho_{ztabeli}}{\rho}$ = U

$$150 * U - 1000 * S > 0$$

$$U > \frac{1000}{150} S$$

$$U > \frac{20}{3} S$$

$$\frac{\rho_{ztabeli}}{\rho} > \frac{20}{3} S$$

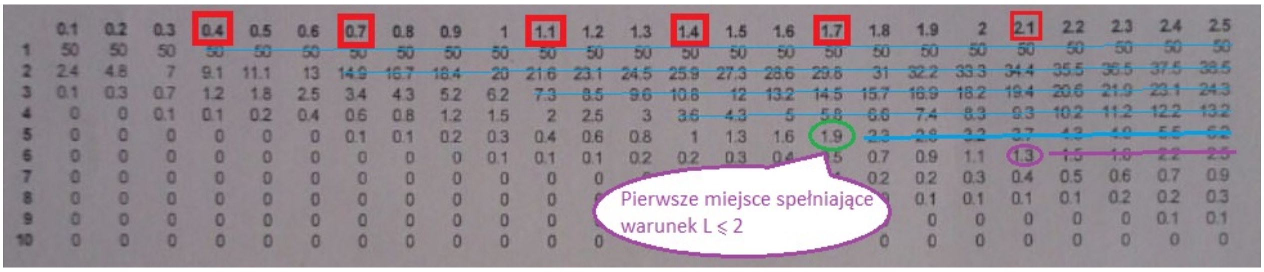
$\rho_{ztabeli} > \rho * \frac{20}{3}S$

$\rho_{ztabeli} > 0.05 * \frac{20}{3}S$

$\rho_{ztabeli} > \frac{1}{3}S$ - zależność między ρ a S

S	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{3}S$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$
$\rho_{ztabeli} > \frac{1}{3}S$	0.4	0.7	1.1	1.4	1.7	2.1

szukamy w tabeli miejsc gdzie spełniany jest warunek $L \leq 2\%$



	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3
1	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
2	2.4	4.8	7	9.1	11.1	13	14.9	16.7	18.4	20	21.6	23.1	24.5
3	0.1	0.3	0.7	1.2	1.8	2.5	3.4	4.3	5.2	6.2	7.3	8.5	9.6
4	0	0	0.1	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.2	1.5	2	2.5	3
5	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.8
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.1	0.2
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	[illegible]
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	[illegible]	[illegible]
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	[illegible]	[illegible]
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	[illegible]

	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
1	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
2	25.9	27.3	28.6	29.8	31	32.2	33.3	34.4	35.5	36.5	37.5	38.5
3	10.8	12	13.2	14.5	15.7	16.9	18.2	19.4	20.6	21.9	23.1	24.3
4	3.6	4.3	5	5.8	6.6	7.4	8.3	9.3	10.2	11.2	12.2	13.2
5	1	1.3	1.6	1.9	2.3	2.8	3.2	3.7	4.3	4.9	5.5	6.2
6	0.2	0.3	0.4	[illegible]	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.8	2.2	2.5
7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.2	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.9
8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3
9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	0	0	0	0	0.1	0.1
10	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	0	0	0	0	0	0	0

Odp: najmniejsza liczba lini by system przynosił zysk to 5 (34 użytkowników)

Rozwiązanie #2 - Sprawdzanie iteracyjne

$\rho = \frac{\tau_{sr}}{a_{sr}} = 0.05$ - normatywny współczynnik obciążenia - obciążenie jakie generuje jeden użytkownik na jednym procesorze.

widzimy z tabeli iż S=1, S=2 nigdy nie spełniają warunków $L \leq 2\%$

sprawdzamy dla S = 3

$\frac{\rho_{ztabeli}}{\rho}$ = U

$\frac{\rho_{ztabeli}}{\rho} = \frac{0.5}{0.05} = 10$ - użytkowników

$150 * U - 1000 * S = 1500 - 3000 = -1500\$$

sprawdzamy dla S = 4

$\frac{\rho_{ztabeli}}{\rho}$ = U

$\frac{\rho_{ztabeli}}{\rho} = \frac{1.1}{0.05} = 22$ - użytkowników

$150 * U - 1000 * S = 3300 - 4000 = -700\$$

sprawdzamy dla S = 5

$\frac{\rho ztabeli}{\rho}$ = U

$\frac{\rho ztabeli}{\rho} = \frac{1.7}{0.05} = 34$ - użytkowników

$150 * U - 1000 * S = 5100 - 5000 = +100\$$

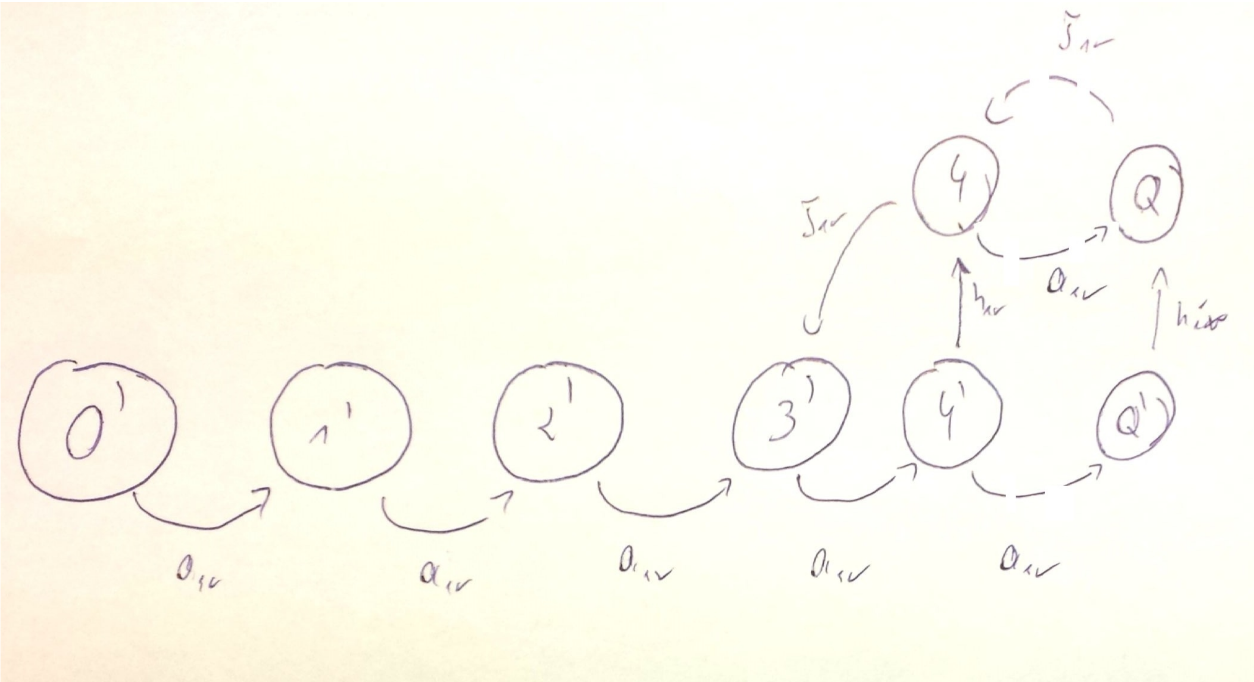
Odp: najmniejsza liczba lini by system przynosił zysk to 5 (34 użytkowników)

Kolokwium 2015 - Zadanie 2

cechy zadania: zadanie typu graf stanów

w systemie M/M/1 parametry strumienia zgłoszeń wynoszą a_{sr} i b_{sr} zaś wydajność procesora wynosi v Narysuj graf przejść stanów procesu urodzin i śmierci dla następującego modelu z wakacjami. Każdorazowo po zakończeniu obsługi zgłoszenia lub kolejnych wakacji procesor sprawdza liczbę zgłoszeń w systemie i jeżeli nie przekracza ona 3, udaje się na wakacje, w trakcie których nie obsługuje zgłoszeń; w przeciwnym razie obsługuje kolejne zgłoszenie. Czas trwania wakacji ma rozkład wykładniczy ze średnią h_{sr}

Rozwiązanie



Opis:

Każdorazowo po **zakończeni obsługi zgłoszenia** lub **kolejnych wakacji** procesor idzie na wakacje jeśli liczba zgłoszeń w systemie wynosi **0, 1, 2, 3** (nie rysujemy przejść "do siebie")

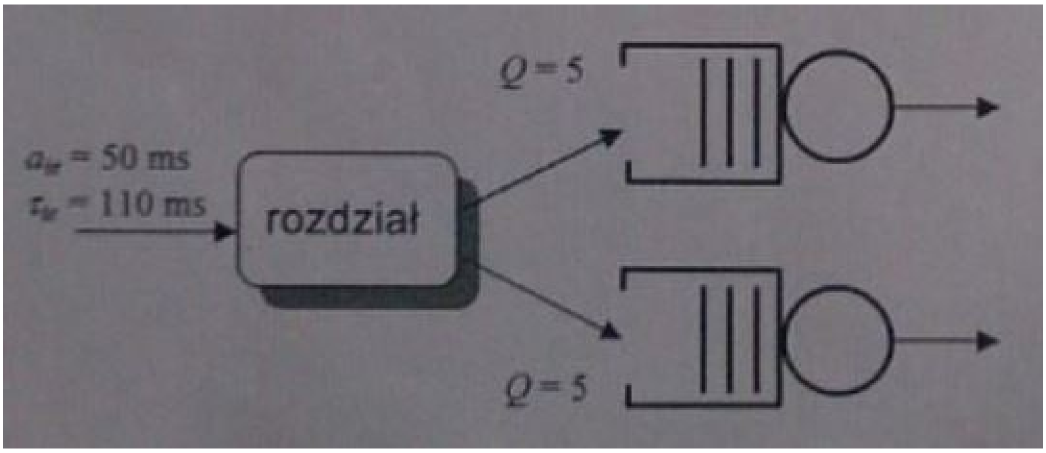
Jeśli system jest w stanach 4,5 lub 6... i skończy wakacje rozpoczyna normalną pracę

system pracuje tak długo normalnie aż nie zejdzie z ilością zgłoszeń do 3 wtedy rozpoczyna wieczne wakacje tak długo aż nie otrzyma kolejnego (4 go) zadania. (może się zdarzyć ze otrzyma 2 3 lub 4... zadania więc stany 5' 6' 7' Q' są możliwe)

w stanie **4'** wyjdzie poza warunek wiecznych wakacji przeczeka jeszcze jedną kolejkę wakacji i spowrotem do normalnej pracy

Kolokwium 2015 - Zadanie 3

Strumień Poissona ze średnim interwałem $a_{sr} = 50ms$ i wykładniczym rozkladem wymagań zgłoszeń ze średnią $\tau_{sr} = 110ms$ rozdzielany jest na dwa systemy o pojemności $Q = 5$ jak na rysunku.



Oblicz frakcję strat L dla dwóch trybów pracy:

a) dla każdego zgłoszenia wybór systemu jest przypadkowy z prawdopodobieństwami 50%

b) do każdego systemu trafia połowa każdego zgłoszenia.

Który tryb pracy wprowadza większe średnie opóźnienie systemowe ?

Dane

> $a_{sr} = 50ms$
>
> $\tau_{sr} = 110ms$
>
> $Q = 5$

Rozwiązanie

$r = \frac{b_{sr}}{a_{sr} * v}$

$\tau_{sr} = \frac{b_{sr}}{v}$

$r = \frac{\tau_{sr}}{a_{sr}}$

$L = \frac{1-r}{1-r^{Q+1}} * r^Q$

A

> note: można interpretować system jako system M/M/1 dlatego mogę stosować wzór na L

$a_{sr}^{(A)} = a_{sr} * 2$ - losowe rozrzedzanie - strumien poissona

$r^{(A)} = \frac{\tau_{sr}}{a_{sr}^{(A)}} = \frac{110}{50*2} = 1.1$

$L = \frac{1-(1.1)}{1-(1.1)^6} * (1.1)^5 = 0.2087 = 20.87\%$

B

> note: można interpretować system jako system M/M/1 dlatego mogę stosować wzór na L

$\tau_{sr} = \frac{b_{sr}}{v}$

$\tau_{sr}^{(B)} = \frac{\frac{b_{sr}}{2}}{v} = \frac{\tau_{sr}}{2}$

$r^{(B)} = \frac{\tau_{sr}^{(B)}}{a_{sr}} = \frac{\frac{110}{2}}{50} = 1.1$

$L = \frac{1-(1.1)}{1-(1.1)^6} * (1.1)^5 = 0.2087 = 20.87\%$

Który tryb pracy wprowadza większe średnie opóźnienie systemowe ?

$N_{sr} = \frac{1-L}{a_{sr}} * d_{sr} \Rightarrow d_{sr} = \frac{N_{sr}*a_{sr}}{(1-L)}$

$d_{sr} = \frac{N_{sr}*a_{sr}}{(1-L)}$

w oby dwóch trybach pracy $\frac{N_{sr}}{(1-L)}$ jest stałe, a a_{sr} jest zmienne.

wystarczy porównać a_{sr} obydwu trybów pracy by porównać między sobą opóźnienia systemowe.

A) $a_{sr}^{(A)} = a_{sr} * 2$

B) $a_{sr}^{(B)} = a_{sr}$

$a_{sr}^{(A)} > a_{sr}^{(B)} \Rightarrow d_{sr}^{(A)} > d_{sr}^{(B)}$

Odp: większe opóźnienie systemowe wprowadza pierwszy tryb pracy.

Kolokwium 2014

pierwszy termin:

Imię NAZWISKO _

Badania Operacyjne cz. I – zaliczenie 16.4.2014

__Czas__: *50 min.* __Dozwolone__: *notatki, kalkulatory – tylko własne!* __Rozwiązania__: *tylko na tej kartce – brudnopisy nie będą oceniane!*
__Zalicza__: *≥ 17 pkt.* __Wyniki__: *po Świętach, u kierownika przedmiotu*

__Zadanie 1__ *(13 pkt)*

1-procesorowy system kolejkowy o skończonej pojemności ma przyjmować raporty z 20 końcówek telemetrycznych. Każda końcówka generuje średnio 30 raportów/min o średnim rozmiarze raportu 1040 rekordów. Dopuszcza się średnie opóźnienie systemowe raportu do 2.7 s oraz do 5% raportów utraconych wskutek przepełnienia. Dostępne są procesory o wydajności v = 9600, 10000 i 10400 rekordów/s oraz pojemności pamięci buforowej Q = 20, 30, 40 i 50 raportów.

Dobierz najmniejsze możliwe Q i v przy powyższych ograniczeniach. Jaki będzie współczynnik obciążenia procesora?

W tabeli pokazano średnie opóźnienia systemowe znormalizowane względem średniego czasu przetwarzania raportu oraz frakcje strat dla różnych Q i współczynników obciążenia procesora r.

r	Q=20		Q=30		Q=40		Q=50	
	$d_{\acute{s}r}/\tau_{\acute{s}r}$	L (%)	$d_{\acute{s}r}/\tau_{\acute{s}r}$	L (%)	$d_{\acute{s}r}/\tau_{\acute{s}r}$	L (%)	$d_{\acute{s}r}/\tau_{\acute{s}r}$	L (%)
0.8	**4.8**	0.23	**5.0**	0.02	**5.0**	0.00	**5.0**	0.00
0.82	**5.2**	0.35	**5.5**	0.05	**5.5**	0.01	**5.6**	0.00
0.84	**5.6**	0.50	**6.1**	0.09	**6.2**	0.01	**6.2**	0.00
0.86	**6.1**	0.72	**6.8**	0.15	**7.0**	0.03	**7.1**	0.01
0.88	**6.7**	1.00	**7.7**	0.26	**8.1**	0.07	**8.2**	0.02
0.9	**7.2**	1.37	**8.7**	0.44	**9.4**	0.15	**9.7**	0.05
0.92	**7.8**	1.83	**9.8**	0.71	**11.0**	0.29	**11.7**	0.13
0.94	**8.5**	2.39	**11.1**	1.10	**13.0**	0.55	**14.3**	0.28
0.96	**9.2**	3.07	**12.5**	1.64	**15.3**	0.96	**17.5**	0.59
0.98	**9.8**	3.86	**14.0**	2.34	**17.8**	1.58	**21.4**	1.13
1	**10.5**	5.00	**15.5**	3.23	**20.5**	2.44	**25.5**	1.96
1.02	**11.2**	5.76	**17.0**	4.27	**23.1**	3.53	**29.6**	3.08
1.04	**11.8**	6.85	**18.4**	5.47	**25.5**	4.81	**33.2**	4.45
1.06	**12.4**	8.02	**19.7**	6.77	**27.6**	6.23	**36.2**	5.97
1.08	**13.0**	9.24	**20.8**	8.16	**29.4**	7.74	**38.6**	7.56
1.1	**13.5**	10.51	**21.8**	9.59	**30.9**	9.28	**40.4**	9.16
1.12	**14.0**	11.81	**22.7**	11.04	**32.1**	10.82	**41.8**	10.75
1.14	**14.4**	13.12	**23.5**	12.50	**33.1**	12.34	**42.9**	12.30
1.16	**14.8**	14.43	**24.1**	13.93	**33.9**	13.82	**43.8**	13.80
1.18	**15.2**	15.74	**24.7**	15.34	**34.5**	15.27	**44.5**	15.26
1.2	**15.5**	17.04	**25.1**	16.73	**35.0**	16.68	**45.0**	16.67

__Zadanie 2__ *(8 pkt)*

4-procesorowy system bez oczekiwania przyjmuje strumień Poissona ze średnim interwałem przybywania zgłoszeń 0.6 s. W stanie ustalonym prawdopodobieństwo zajętości k procesorów wynosi 0.3–0.05·k, gdzie k = 0, 1, 2, 3, 4.

Wykorzystując prawo Little'a określ średni czas obsługi zgłoszenia.

__Zadanie 3__ *(13 pkt)*
Do 1-procesorowego systemu masowej obsługi przybywa strumień Poissona zgłoszeń ze średnim interwałem $a_{\acute{s}r}$. Obsługa zgłoszenia składa się z dwóch następujących po sobie faz o wykładniczych rozkładach czasu trwania ze średnimi odpowiednio $\tau_{\acute{s}r}'$ i $\tau_{\acute{s}r}''$.

Narysuj graf przejść stanów dla odpowiedniego procesu urodzin i śmierci.

poprawka wrze�niowa

Badania Operacyjne cz. I – zaliczenie poprawkowe 16.9.2014

***Czas**: 45 min. **Dozwolone**: notatki, kalkulatory – tylko własne! **Rozwiązania**: tylko na tej kartce – brudnopisy nie będą oceniane!*
***Zalicza**: ≥ 17 pkt. **Wyniki**: w przyszłym tygodniu, u kierownika przedmiotu.*

Zadanie 1 *(13 pkt)*

1-procesorowy system kolejkowy przyjmuje raporty z 20 końcówek. Każda końcówka generuje na minutę średnio 30 raportów, średni rozmiar raportu wynosi 1000 rekordów. Wydajność procesora wynosi 10000 rekordów/s, zaś pojemność pamięci buforowej Q = 30 raportów. Potrzebujemy czterokrotnego zmniejszenia średniego opóźnienia systemowego raportu oraz zmniejszenia frakcji raportów utraconych wskutek przepełnienia poniżej 1%. Czy uda się to osiągnąć poprzez zwiększenie wydajności procesora do 12000 rekordów/s?

W tabeli pokazano średnie opóźnienia systemowe znormalizowane względem średniego czasu przetwarzania raportu oraz frakcje strat dla różnych Q i współczynników obciążenia procesora r.

r	Q=20 $d_{śr}/\tau_{śr}$	Q=20 L (%)	Q=30 $d_{śr}/\tau_{śr}$	Q=30 L (%)	Q=40 $d_{śr}/\tau_{śr}$	Q=40 L (%)	Q=50 $d_{śr}/\tau_{śr}$	Q=50 L (%)
0.8	**4.8**	0.23	**5.0**	0.02	**5.0**	0.00	**5.0**	0.00
0.82	**5.2**	0.35	**5.5**	0.05	**5.5**	0.01	**5.6**	0.00
0.84	**5.6**	0.50	**6.1**	0.09	**6.2**	0.01	**6.2**	0.00
0.86	**6.1**	0.72	**6.8**	0.15	**7.0**	0.03	**7.1**	0.01
0.88	**6.7**	1.00	**7.7**	0.26	**8.1**	0.07	**8.2**	0.02
0.9	**7.2**	1.37	**8.7**	0.44	**9.4**	0.15	**9.7**	0.05
0.92	**7.8**	1.83	**9.8**	0.71	**11.0**	0.29	**11.7**	0.13
0.94	**8.5**	2.39	**11.1**	1.10	**13.0**	0.55	**14.3**	0.28
0.96	**9.2**	3.07	**12.5**	1.64	**15.3**	0.96	**17.5**	0.59
0.98	**9.8**	3.86	**14.0**	2.34	**17.8**	1.58	**21.4**	1.13
1	**10.5**	5.00	$\boxed{\textbf{15.5}}$	$\boxed{3.23}$	**20.5**	2.44	**25.5**	1.96
1.02	**11.2**	5.76	**17.0**	4.27	**23.1**	3.53	**29.6**	3.08
1.04	**11.8**	6.85	**18.4**	5.47	**25.5**	4.81	**33.2**	4.45
1.06	**12.4**	8.02	**19.7**	6.77	**27.6**	6.23	**36.2**	5.97
1.08	**13.0**	9.24	**20.8**	8.16	**29.4**	7.74	**38.6**	7.56
1.1	**13.5**	10.51	**21.8**	9.59	**30.9**	9.28	**40.4**	9.16
1.12	**14.0**	11.81	**22.7**	11.04	**32.1**	10.82	**41.8**	10.75
1.14	**14.4**	13.12	**23.5**	12.50	**33.1**	12.34	**42.9**	12.30
1.16	**14.8**	14.43	**24.1**	13.93	**33.9**	13.82	**43.8**	13.80
1.18	**15.2**	15.74	**24.7**	15.34	**34.5**	15.27	**44.5**	15.26
1.2	**15.5**	17.04	**25.1**	16.73	**35.0**	16.68	**45.0**	16.67

~~a_m = 20·30 = 600 raportów/min~~

20 końcówek × 30 raportów na minutę

$\frac{1}{a_m} = 10$, bo 10 raportów na 1s

$a_m = \frac{1}{10}$ raportów co 0,1s

$b_n = 1000$ rekordów

$Q = 30$ raportów

$v = 10000$ rekordów/s

$r = \frac{b_n}{a_n \cdot v} = \frac{1000}{\frac{1}{10} \cdot 10000} = 1$

z tabeli dla $Q = 30 \wedge r = 1 \Rightarrow \frac{d_{śr}}{\tau_{śr}} = 15,5$

$L = 3,23\%$

$d_{m_1} = \frac{15,5 \cdot 1000}{10000} = 1,55s$

~~$d_{m_1} > 4d_{m_2}$~~

WARUNEK

$L \leq 1 \wedge d_{m_1} \geq 4d_{m_2}$

Dla wydajniejszego procesora:

$v = 12000$ rekordów/s

$r = \frac{1000}{\frac{1}{10} \cdot 12000} = 0,8(3) \approx 0,83$

z tabeli dla $Q = 30 \wedge r \leq 0,83 \Rightarrow r = 0,82 \Rightarrow \frac{d_{śr}}{\tau_{śr}} = 5,5$

L =

$d_{m_2} = \frac{5,5 \cdot 1000}{12000} = 0,458(3) \approx 0,458$

$d_{m_1} \geq 4d_{m_2} \Rightarrow 1,55 \geq 4 \cdot 0,458$

$1,55 \geq 1,833$ – sprzeczność

Odp. Nie uda się, gdyż nie zmniejszylibyśmy 4-krotnie średniego opóźnienia systemowego

Zadanie 2 *(8 pkt)*

Każdy z 20 inteligentnych terminali generuje zadania dla systemu komputerowego. Średni czas namysłu nad następnym zadaniem wynosi 2.75 s. Zadanie potrzebuje średnio 10 etapów obliczeń w procesorze (średni czas obsługi 20 ms) oraz 12 dostępów do dysku (średni czas obsługi 30 ms). (1 etapu) Procesor i kontroler dysku wyposażone są w nieskończone pamięci buforowe, przy czym średni czas oczekiwania na rozpoczęcie obsługi nie powinien przekraczać 50% czasu obsługi.

Wykorzystując prawo Little'a wyznacz wynikające stąd współczynniki obciążenia procesora i kontrolera dysku i odpowiedz na pytanie: czy taki system może poprawnie działać i dlaczego?

Zadanie 3 *(13 pkt)*

Do systemu M/M/1 przybywa strumień zgłoszeń ze średnim interwałem $a_{śr}$ i średnim wymaganiem zgłoszenia $b_{śr}$. Wydajność procesora wynosi v. Narysuj odpowiedni graf przejść stanów dla procesu urodzin i śmierci w przypadku, gdy po zakończeniu okresu zajętości procesor "idzie na wakacje", w trakcie których ignoruje zgłoszenia; czas trwania "wakacji" ma rozkład wykładniczy ze średnią $h_{śr}$.

Kolokwium 2014 - Zadanie 1

cechy zadania: zadanie z tabelą - średnich znormalizowanych opóźnienień systemowych

1-procesorowy system kolejkowy o skończonej pojemności ma przyjmować raporty z 20 końcówek telemetrycznych. Każda końcówka generuje średnio 30 raportów na minutę o średnim rozmiarze raportu 1040 rekordów. Dopuszcza się średnie opóźnienie systemowe raportu do 2.7s oraz do 5% raportów utraconych wskutek przepełnienia. Dostępne są procesory o wydajności v = 9600, 10000 i 10400 rekordów/s oraz pojemności pamięci buforowej Q = 20, 30, 40 i 50 raportów.

Dobierz najmniejsze możliwe Q i v przy powyższych ograniczeniach. Jaki będzie współczynnik obciążenia procesora ?

W tabeli pokazano średnie opóźnienia systemowe znormalizowane względem średniego czasu przetwarzania raportu oraz frakcje strat dla różnych Q i współczynników obciążenia procesora r.

r	Q=20		Q=30		Q=40		Q=50	
	$d_{śr}/\tau_{śr}$	L (%)	$d_{śr}/\tau_{śr}$	L (%)	$d_{śr}/\tau_{śr}$	L (%)	$d_{śr}/\tau_{śr}$	L (%)
0.8	4.8	0.23	5.0	0.02	5.0	0.00	5.0	0.00
0.82	5.2	0.35	5.5	0.05	5.5	0.01	5.6	0.00
0.84	5.6	0.50	6.1	0.09	6.2	0.01	6.2	0.00
0.86	6.1	0.72	6.8	0.15	7.0	0.03	7.1	0.01
0.88	6.7	1.00	7.7	0.26	8.1	0.07	8.2	0.02
0.9	7.2	1.37	8.7	0.44	9.4	0.15	9.7	0.05
0.92	7.8	1.83	9.8	0.71	11.0	0.29	11.7	0.13
0.94	8.5	2.39	11.1	1.10	13.0	0.55	14.3	0.28
0.96	9.2	3.07	12.5	1.64	15.3	0.96	17.5	0.59
0.98	9.8	3.86	14.0	2.34	17.8	1.58	21.4	1.13
1	10.5	5.00	15.5	3.23	20.5	2.44	25.5	1.96
1.02	11.2	5.76	17.0	4.27	23.1	3.53	29.6	3.08
1.04	11.8	6.85	18.4	5.47	25.5	4.81	33.2	4.45
1.06	12.4	8.02	19.7	6.77	27.6	6.23	36.2	5.97
1.08	13.0	9.24	20.8	8.16	29.4	7.74	38.6	7.56
1.1	13.5	10.51	21.8	9.59	30.9	9.28	40.4	9.16
1.12	14.0	11.81	22.7	11.04	32.1	10.82	41.8	10.75
1.14	14.4	13.12	23.5	12.50	33.1	12.34	42.9	12.30
1.16	14.8	14.43	24.1	13.93	33.9	13.82	43.8	13.80
1.18	15.2	15.74	24.7	15.34	34.5	15.27	44.5	15.26
1.2	15.5	17.04	25.1	16.73	35.0	16.68	45.0	16.67

Dane

> $J = 20$ - końcówek telemetrycznych

> $b_{sr} = 1040 rek$ - średni rozmiar jednego zgłoszenia.
>
> $a_{sr} =$ co 2 sekundy jedna końcówka daje zgłoszenie / liczba końcówek $= \frac{2}{20} = 0.1$ - interwał pomiędzy zgłoszeniami
>
> $L \leq 5\%$ - dopuszczana frakcja strat wskutek przepełnienia.
>
> d_{sr} - dopuszczane opóźnienie systemowe.
>
> $v_1 = 10400 \frac{rek}{s}$, $v_2 = 10000 \frac{rek}{s}$, $v_3 = 9600 \frac{rek}{s}$
>
> $Q_1 = 20$, $Q_2 = 30$,$Q_3 = 40$,$Q_4 = 50$

Rozwiązanie

szukamy najmniejszego Q i v spełniającego założenia związane z L i d_{sr}

procesor - v_1

$r_1 = \frac{b_{sr}}{a_{sr} * v1} = \frac{1040}{0.1 * 10400} = 1$

najmniejsze Q spełniające warunek $L \leq 5\%$ to $Q_1(20)$

$\tau_{sr} = \frac{b_{sr}}{v1} = \frac{1040}{10400} = 0.1s$

$\frac{d_{sr}}{\tau_{sr}} = 10.5 \Rightarrow d_{sr} = 0.1s * 10.5 = 1.05s \leq 2.7s$

procesor - v_2

$r_2 = \frac{b_{sr}}{a_{sr} * v2} = \frac{1040}{0.1 * 10000} = 1.04$

najmniejsze Q spełniające warunek $L \leq 5\%$ to $Q_3(40)$

$\tau_{sr} = \frac{b_{sr}}{v2} = \frac{1040}{10000} = 0.104s$

$\frac{d_{sr}}{\tau_{sr}} = 25.5 \Rightarrow d_{sr} = 0.104s * 25.5 = 2.652s \leq 2.7s$

procesor - v_3

$r_3 = \frac{b_{sr}}{a_{sr} * v3} = \frac{1040}{0.1 * 9600} = 1.083$

nie istnieje Q spełniające warunek $L \leq 5\%$

> note treść zadania nie informuje nas co mamy minimalizować najpierw czy Q czy v.

Odpowiedź: minimalizując jednocześnie w równym stopniu Q oraz V. możemy w systemie zastosować v_1 i Q_1 lub v_2 i Q_3

oby dwie konfiguracje spełnią nażucane systemowi wymagania.

Kolokwium 2014 - Zadanie 2

cechy zadania: zadanie z prawem little'a

4-procesorowy system bez oczekiwania przyjmuje strumień Poissona ze średnim interwałem przybywania zgłoszeń 0.6s. W stanie ustalonym przwdopodobieństwo zajętości k procesorów wynosi 0.3-0.05*k gdzie k = 0, 1, 2, 3, 4. Wykorzystując prawo little'a określ średni czas obsługi zgłoszenia.

Dane

> $a_{sr} = 0.6$
>
> $Q = 0$
>
> prawdopodobieństa zajęcia N procesorów - wegług formuły 0.3-0.05*n, gdzie n = 0, 1, 2, 3, 4.
>
> | liczba zajętych procesorów | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
> |---|---|---|---|---|---|
> | prawdopodobieństwo | 0.3 | 0.25 | 0.2 | 0.15 | 0.1 |
>
> prawo little'a: $N_{sr} = \frac{1-L}{a_{sr}} * d_{sr}$

Rozwiązanie

> L - procent utraconych zgłoszeń w systemie bez kolejki = procent zajętości wszystkich procesorów

$L = 0.1$

równanie ciągłości przepływu: $1 - p_0 = \frac{1-L}{a_{sr}} * \tau_{sr} \Rightarrow \tau_{sr} = (1 - p_0) * \frac{a_{sr}}{1-L}$

> p_0 - prawdopodobieństwo iż jest 0 zadań w systemie = prawdopodobieństwo zajętości żadnego z procesorów

$p_0 = 0.3$

$\tau_{sr} = (1 - p_0) * \frac{a_{sr}}{1-L} = (1 - 0.3) * \frac{0.6}{1-0.1} = 0.4666s$

Odpowiedź: średni czas obsługi zgłoszenia wynosi 0.46666 sekundy

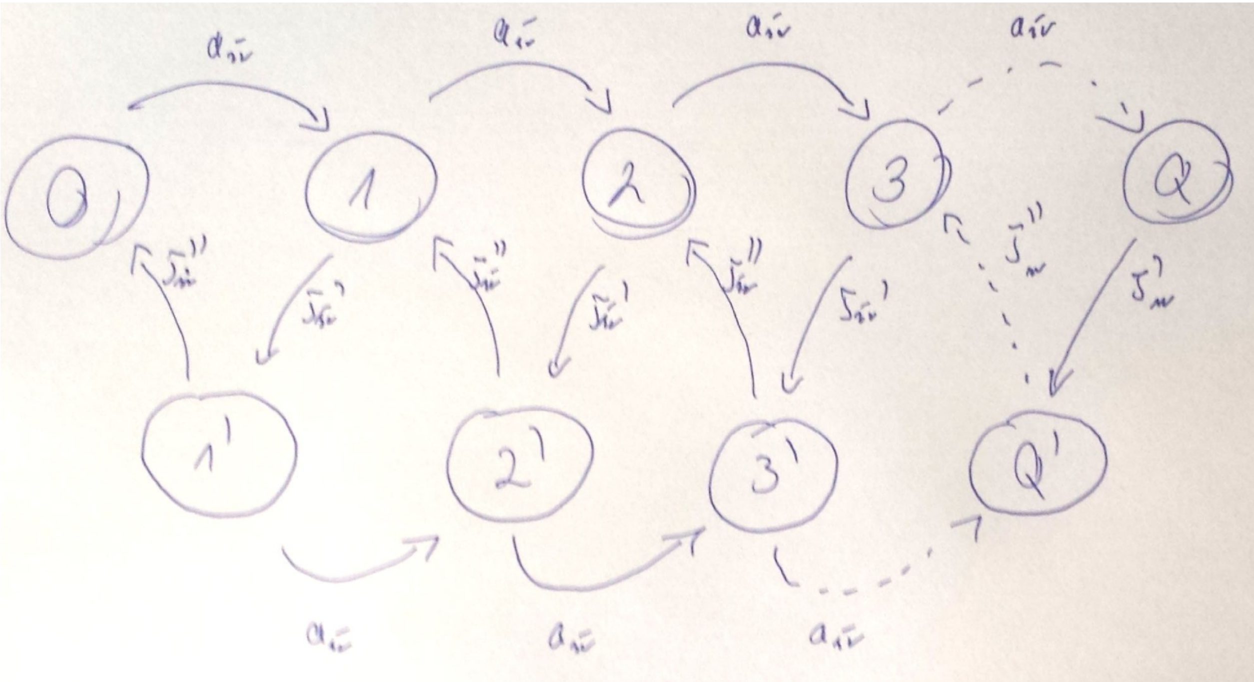
> side note: wyliczenie d_{sr}
>
> Prawo little'a: $N_{sr} = \frac{1-L}{a_{sr}} * d_{sr} \Rightarrow d_{sr} = N_{sr} * \frac{a_{sr}}{1-L}$
>
> $N_{sr} = \sum_{i=0}^{i=4} N(i) * i = 0.3 * 0 + 0.25 * 1 + 0.2 * 2 + 0.15 * 3 + 0.1 * 4 = 1.5$
>
> $d_{sr} = N_{sr} * \frac{a_{sr}}{1-L} = 1.5 * \frac{0.6}{1-0.1} = 1s$

Kolokwium 2014 - Zadanie 3

cechy zadania: zadanie typu graf stanów

Do 1-procesorowego systemu masowej obsługi przybywa strumień Poissona zgłoszeń ze średnim interwałem a_{sr}. Obsługa zgłoszenia składa się z dwóch następujących po sobie faz o wykładniczych rozkładach czasu trwania ze średnimi odpowiednio $\tau_{sr}^{(')}$ i $\tau_{sr}^{('')}$

Narysuj graf przejść stanów dla odpowiedniego procesu urodzin i śmierci.



Kolokwium 2014 - wrzesień - Zadanie 1

cechy zadania: zadanie z tabelą - średnich znormalizowanych opóźnienień systemowych

1-procesorowy system kolejkowy przyjuje raporty z 20 końcówek. Każda końcówka generuje na minutę średnio 30 raportów, średni rozmiar raportu wynosi 1000 rekordów. Wydajność procesora wynosi 1000 rekordów na sekundę, zaś pojemność pamięci buforowej Q = 30 raportów. Potrzebujemy cztefokrotnego zmniejszenia średniego opóźnienia systemowego raportu oraz zmniejszenia frakcji raportów utraconych wskutek przepełnienia poniżej 1%. Czy uda się to osiągnąć poprzez zwiększenie wydajności procesora do 12000 rekordów na sekundę.

W tabeli pokazano średnie opóźnienia systemowe znormalizowane względem średniego czasu przetwarzania raportu oraz frakcje strat dla różnych Q i współczynników obciążenia procesora r.

Dane

> $J = 20$
>
> $a_{sr1} = 30 \text{ na minutę} = 2s$
>
> $a_{sr} = \frac{2s}{20} = 0.1s$
>
> $b_{sr} = 1000rek$
>
> $v = 10000\frac{rek}{s}$
>
> $Q = 30$

Rozwiązanie

$r = \frac{b_{sr}}{a_{sr} * v} = \frac{1000rek}{0.1sek * 10000\frac{rek}{s}} = 1$

$\tau_{sr} = \frac{b_{sr}}{v} = \frac{1000rek}{10000\frac{rek}{s}} = 0.1s$

z treści zadania $Q = 20$ co oznacza iż przy $r = 1$ stosunek $\frac{d_{sr}}{\tau_{sr}} = 15.5$

$\frac{d_{sr}}{\tau_{sr}} = 15.5 \Rightarrow d_{sr} = \tau_{sr} * 15.5$

$d_{sr} = 0.1s * 15.5 = 1.55s$

Frakcja strat wynosi $L = 3.23\%$

W przypadku zwiększenia mocy procesora do $v = 12000\frac{rek}{s}$

$r = \frac{b_{sr}}{a_{sr} * v} = \frac{1000rek}{0.1sek * 12000\frac{rek}{s}} = \frac{5}{6} = 0.8333(3) \approx 0.84$

> nie wiadomo do końca do czego przybliżać r, czy w górę czy w dół.

$\tau_{sr} = \frac{b_{sr}}{v} = \frac{1000 rek}{12000 \frac{rek}{s}} = \frac{1}{12} s$

z treści zadania $Q = 20$ co oznacza iż przy $r = 0.84$ stosunek $\frac{d_{sr}}{\tau_{sr}} = 6.1$

$\frac{d_{sr}}{\tau_{sr}} = 6.1 \Rightarrow d_{sr} = \tau_{sr} * 6.1$

$d_{sr} = \frac{1}{12} * 6.1 = 0.5083(3)$

Frakcja strat wynosi $L = 0.05\%$

Odpowiedź:

po zwiększeniu procesora frakcja strat jest poniżej 1% ale średnie opóźnienie systemowe nie jest czterokrotnie niższe niż przed zwiększeniem wydajności procesora. średnie opóźnienie systemowe po zwiększeniu procesora po wynosi ($4 * 0.5083(3) = 2.033s \nless 1.55s$)

Kolokwium 2014 - wrzesień - Zadanie 2

cechy zadania: zadanie z prawem little'a

Każdy z 20 inteligentnych terminali generuje zadania dla systemu komputerowego. Średni czas namysłu nad następnym zadaniem wynosi 2.75s. Zadanie potrzebuje średnio 10 etapów obliczeń w procesorze (średni czas obsługi 20 ms) oraz 12 dostępów do dysku (średni czas obsługi 30 ms). Procesor i kontroler dysku wyposażone są w nieskończone pamięci buforowe, przy czym średni czas oczekiwania na rozpoczęcie obsługi nie powinien przekraczać 50 % czasu obsługi.

Rozwiązanie

$a_{sr} = \frac{2.75s}{20} = 0.1375s$

procesor: $\tau_{sr} = 10 * \frac{20}{1000} = 0.2s$

dysk: $\tau_{sr} = 12 * \frac{30}{1000} = 0.36s$

> $\frac{(1-L)}{a_{sr}} * \tau_{sr} = (1-L) * r$

jako że kolejka jest ∞ to $L = 0$

$\frac{(1-0)}{a_{sr}} * \tau_{sr} = (1-0) * r$

$r = \frac{\tau_{sr}}{a_{sr}}$

procesor: $r = \frac{0.2}{0.1375} = 1.45$

dysk: $r = \frac{0.36}{0.1375} = 2.61$

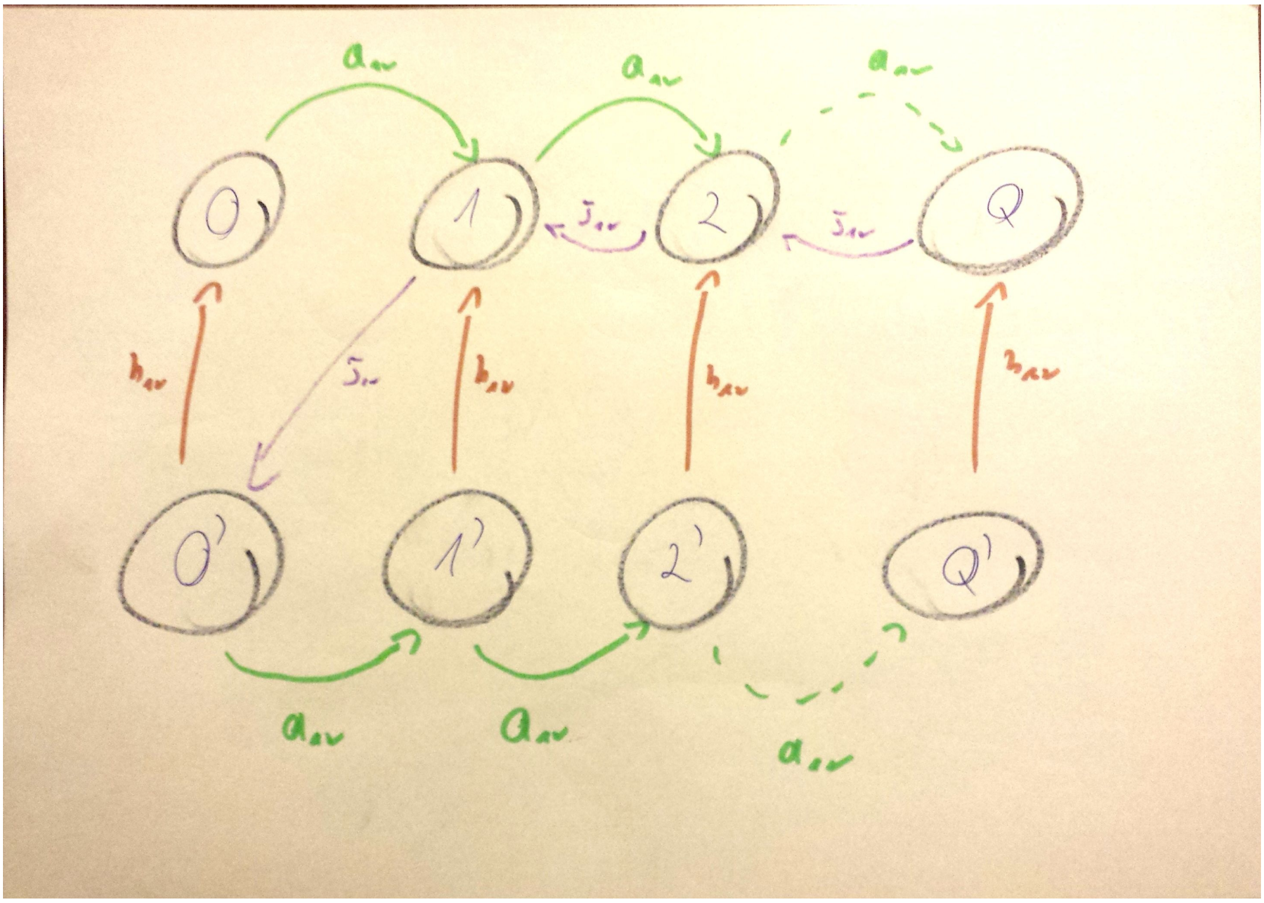
Odpowiedź: w przypadku r > 1 i nieskończonej kolejki dla procesora i dysków, system będzie stopniowo rozszerzać kolejkę w nieskończoność, dlatego nie uda mu się spełnić warunku aby średni czas oczekiwania na rozpoczęcie obsługi nie przekraczał 50 % czasu obsługi.

Kolokwium 2014 - wrzesień - Zadanie 3

cechy zadania: zadanie typu graf stanów

Do systemu M/M/1 przybywa strumień zgłoszeń ze średnim interwałem a_{sr} i średnim wymaganiem zgłoszenia b_{sr}, Wydajność procesora wynosi v. Narysuj odpowiedni graf przejść stanów dla procesu urodzin i śmierci w przypadku, gdy po zakończeniu okresu zajętości procesor "idzie na wakacje", w trakcie których ignoruje zgłoszenia; czas trwania "wakacji" ma rozkład wykładniczy ze średnią h_{sr}

Rozwiązanie



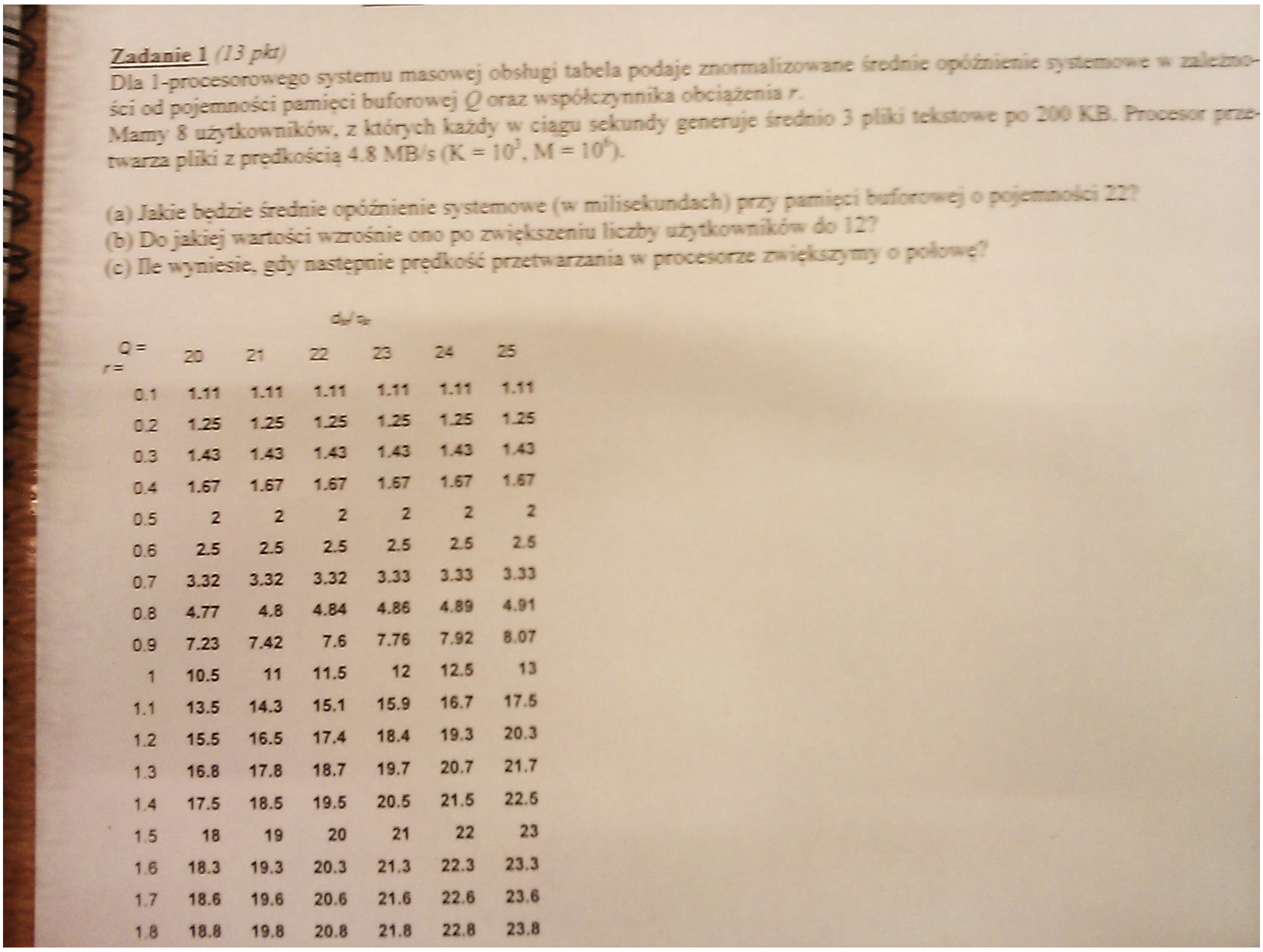
Kolokwium 2013

pierwszy termin:

Brak Zdjęcia

---

poprawka wrześniowa



Zadanie 1 *(13 pkt)*
Dla 1-procesorowego systemu masowej obsługi tabela podaje znormalizowane średnie opóźnienie systemowe w zależności od pojemności pamięci buforowej Q oraz współczynnika obciążenia r.
Mamy 8 użytkowników, z których każdy w ciągu sekundy generuje średnio 3 pliki tekstowe po 200 KB. Procesor przetwarza pliki z prędkością 4.8 MB/s ($K = 10^3$, $M = 10^6$).

(a) Jakie będzie średnie opóźnienie systemowe (w milisekundach) przy pamięci buforowej o pojemności 22?
(b) Do jakiej wartości wzrośnie ono po zwiększeniu liczby użytkowników do 12?
(c) Ile wyniesie, gdy następnie prędkość przetwarzania w procesorze zwiększymy o połowę?

d_q/τ_r

Q = / r =	20	21	22	23	24	25
0.1	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11
0.2	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25
0.3	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43
0.4	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67
0.5	2	2	2	2	2	2
0.6	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
0.7	3.32	3.32	3.32	3.33	3.33	3.33
0.8	4.77	4.8	4.84	4.86	4.89	4.91
0.9	7.23	7.42	7.6	7.76	7.92	8.07
1	10.5	11	11.5	12	12.5	13
1.1	13.5	14.3	15.1	15.9	16.7	17.5
1.2	15.5	16.5	17.4	18.4	19.3	20.3
1.3	16.8	17.8	18.7	19.7	20.7	21.7
1.4	17.5	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5
1.5	18	19	20	21	22	23
1.6	18.3	19.3	20.3	21.3	22.3	23.3
1.7	18.6	19.6	20.6	21.6	22.6	23.6
1.8	18.8	19.8	20.8	21.8	22.8	23.8

0.8	4.77	4.8	4.84	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.9	7.23	7.42	7.6	7.76	7.92	8.07
1	10.5	11	11.5	12	12.5	13
1.1	13.5	14.3	15.1	15.9	16.7	17.5
1.2	15.5	16.5	17.4	18.4	19.3	20.3
1.3	16.8	17.8	18.7	19.7	20.7	21.7
1.4	17.5	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5
1.5	18	19	20	21	22	23
1.6	18.3	19.3	20.3	21.3	22.3	23.3
1.7	18.6	19.6	20.6	21.6	22.6	23.6
1.8	18.8	19.8	20.8	21.8	22.8	23.8

Zadanie 2 *(8 pkt)*

System masowej obsługi M/M/1/200 obsługuje grupę 10 użytkowników, z których każdy generuje średnio 1 zgłos na 5 sekund. Procesor może w ciągu godziny obsłużyć średnio 7200 zgłoszeń.

(a) Ile średnio zgłoszeń znajduje się w systemie?
(b) Jaka jest frakcja zgłoszeń utraconych?

Zadanie 3 *(13 pkt)*

Do 1-procesorowego systemu masowej obsługi przybywa strumień Poissona zgłoszeń ze średnim interwałem $a_{śr}$. Ob zgłoszenia składa się z dwóch kolejnych faz o wykładniczych rozkładach czasu trwania ze średnimi $\tau_{śr}'$ oraz $\tau_{śr}''$.

Narysuj graf przejść stanów dla odpowiedniego procesu urodzin i śmierci.

Kolokwium 2013 - Zadanie 1

cechy zadania: zadanie typu M/M/S/S, zadanie obecnie - bez rozwiązania

Z klastra 8 serwerów o wydajności 10^6 operacji elementarnych na sekundę modelowanego jako system bez oczekiwania korzysta N_1 użytkowników wysokoaktywnych i N_2 użytkowników niskoaktywnych, zgłaszających transakcje, z których każda wymaga przetwarzania na jednym serwerze. Średnio na sekundę użytkownik pierwszego typu zgłasza 50 transakcji o średnim zapotrzebowaniu 10k operacji elementarnych, zaś użytkownik drugiego typu zgłasza 5 transakcji o średnim zapotrzebowaniu 20k operacji elementarnych. Każdy użytkownik dopuszcza 1% utraconych transakcji.

a) Korzystając z tabeli formuły Erlanga-B określ graficznie rejon dopuszczalnych par (N1, N2)

b) Przedyskutuj krótko zasadniczość modelowania tego systemu jako M/M/8/8

Kolokwium 2013 - Zadanie 2

cechy zadania: zadanie typu M/M/1/Q

W systemie M/M/1/49 strumień zgłoszeń ma parametry

$$a_{sr} = 400ms, b_{sr} = 160j.o, v = 400\frac{j.o}{s}$$

Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przybywające zgłoszenie dozna niezerowego opóźnienia buforowania?

Rozwiązanie

$$a_{sr} = 400ms = 0.4s$$

$$r = \frac{b_{sr}}{a_{sr} * v} = \frac{160}{0.4 * 400} = 1$$

jako że $r = 1$, to wszystkie prawdopodobieństwa są rownoprawdopodobne:

$$p_0 = p_1 = p_2 = ... = p_q(p_{49})$$

$$p_0 = p_q$$

> $$p_q = L$$

$$p_0 = L$$

$$L = \frac{1}{1+Q} = \frac{1}{1+49} = \frac{1}{50}$$

$$1 - p_0 = (1 - L)r \Rightarrow p_0 = 1 - (1 - L)r$$

$$p_0 = 1 - (1 - L)r = 1 - (1 - \frac{1}{50}) * 1$$

$$p_0 = 0.02$$

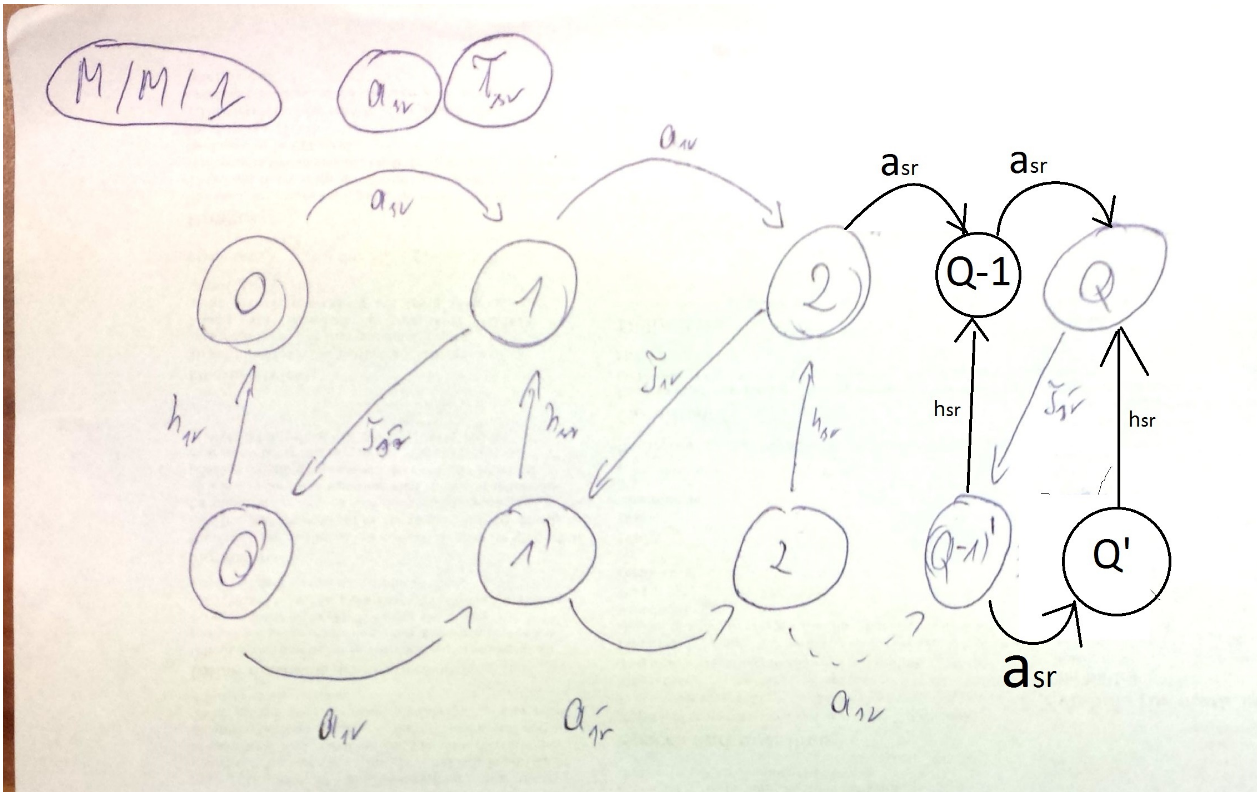
Odp: prawdopodobieństwo tego że przybywajce zgłoszenie dozna niezerowego opóźnienia buforowania wynosi 2%

Kolokwium 2013 - Zadanie 3

cechy zadania: zadanie typu graf stanów

Do systemu M/M/1 przybywają zgłoszenia ze średnim interwałem a_{sr} i średnim czasem obsługi $t_s r$. Narysuj graf przejść stanów odpowiedniego procesu narodzin i śmierci w przypadku gdy każdorazowo po zakończeniu obsługi zgłoszenia procesor "idzie na wakacje" w trakcie których ignoruje znajdujące się w systemie zgłoszenia; czas trwania "wakacji" ma rozkład wykładniczy ze średnią h_{sr}

Rozwiązanie



Kolokwium 20YY - Zadanie 1

cechy zadania: zadanie z tabelą - średnich znormalizowanych opóźnienień systemowych

Dla 1-procesorowego systemu masowej obsługi tabela podaje znaormalizowane średnie opóźnienie systemowe w zależności od pojemności pamięci buforowej Q oraz współczynnika obciązenia r. Mamy 8 użytkowników, z których każdy w ciągu sekundy generuje średnio 3 pliki tekstowe po 200KB. Procesor przetwarza pliki z prędkością 4.8 MB/s.

a) jakie będzie średnie opóźnienie systemowe (w milisekundach) przy pamięci buforowej o pojemności 22?

b) Do jakiej wartości wzrośnie ono po zwiększeniu liczby użutkowników do 12 ?

c) Ile wyniesie, gdy następnie prędkość przetwarzania w procesorze zwiększymy o połowę.

			d_q/t_s			
r = \ Q =	20	21	22	23	24	25
0.1	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11
0.2	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25
0.3	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43
0.4	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67
0.5	2	2	2	2	2	2
0.6	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
0.7	3.32	3.32	3.32	3.33	3.33	3.33
0.8	4.77	4.8	4.84	4.86	4.89	4.91
0.9	7.23	7.42	7.6	7.76	7.92	8.07
1	10.5	11	11.5	12	12.5	13
1.1	13.5	14.3	15.1	15.9	16.7	17.5
1.2	15.5	16.5	17.4	18.4	19.3	20.3
1.3	16.8	17.8	18.7	19.7	20.7	21.7
1.4	17.5	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5
1.5	18	19	20	21	22	23
1.6	18.3	19.3	20.3	21.3	22.3	23.3
1.7	18.6	19.6	20.6	21.6	22.6	23.6
1.8	18.8	19.8	20.8	21.8	22.8	23.8

Dane

> $J = 8$ - użytkowników
>
> $a_{sr} = \frac{\frac{1}{3}s}{J} = \frac{1}{3}s * \frac{1}{8} = \frac{1}{24}s$
>
> $b_{sr} = 200KB = 200KB$
>
> $v = 4,8MB/s = 4800KB/s$
>
> $Q = 22$

Rozwiązanie

A)

$r = \frac{b_{sr}}{a_{sr} * v} = \frac{200KB}{\frac{1}{24} * 4800KB/s} = 1$

$\tau_{sr} = \frac{b_{sr}}{v} = \frac{200KB}{4800KB/s} = \frac{1}{24}$

z treści zadania: Q = 22, więc przy r = 1 stosunek $\frac{d_{sr}}{\tau_{sr}} = 11.5$

$d_{sr} = \tau_{sr} * 11.5 = \frac{1}{24} * 11.5 = 0.4791s$ = **479.1 milisekund**

B)

$J = 12$

$a_{sr}^{(B)} = \frac{\frac{1}{3}s}{J} = \frac{\frac{1}{3}s}{12} = \frac{1}{36}s$

$r^{(B)} = \frac{b_{sr}}{a_{sr}^{(B)} * v} = \frac{200KB}{\frac{1}{36} * 4800KB/s} = 1.5$

$\tau_{sr} = \frac{b_{sr}}{v} = \frac{200KB}{4800KB/s} = \frac{1}{24}$

z treści zadania: Q = 22, więc przy r = 1.5 stosunek $\frac{d_{sr}}{\tau_{sr}} = 20$

$d_{sr} = \tau_{sr} * 20 = \frac{1}{24} * 20 = \frac{5}{6}s =$ **833 milisekund**

C)

$v^{(C)} = 150\% * v = 7200KB/s$

$r^{(C)} = \frac{b_{sr}}{a_{sr}^{(B)} * v^{(C)}} = \frac{200KB}{\frac{1}{36} * 7200KB/s} = 1$

$\tau_{sr} = \frac{b_{sr}}{v} = \frac{200KB}{7200KB/s} = \frac{1}{36}$

z treści zadania: Q = 22, więc przy r = 1 stosunek $\frac{d_{sr}}{\tau_{sr}} = 11.5$

$d_{sr} = \tau_{sr} * 11.5 = \frac{1}{36} * 11.5 = 0.31944s$ **319.4 milisekund**

Kolokwium 20YY - Zadanie 2

System masowej obsługi M/M/1/200 obsługuje grupę 10 użytkowników, z których każdy generuje średnio 1 zgłoszenie na 5 sekund. Procesor może w ciągu godziny obsłużyć średnio 7200 zgłoszeń.

a) ile średnio zgłoszeń znajduje się w systemie ?

b) Jaka jest frakcja zgłoszeń utraconych ?

Dane

> $a_{sr} = \frac{5s}{J} = \frac{5}{10} = 0.5s$
>
> $b_{sr} = 1zgl$
>
> $v = 7200\frac{zgloszen}{3600s} = 2\frac{zgl}{s}$
>
> $\sum_{k=0}^{x} k = \frac{k_0+k_x}{2} * x$

Rozwiązanie

A)

$r = \frac{b_{sr}}{a_{sr} * v} = \frac{1}{0.5*2} = 1$

Jako że $r = 1$ wszystkie prawdopodobieństwa stanów są jednakowe.

> $p_0 = p_1 = p_2 = .. = p_k = p_{k+1} = ... = p_q(p_{200})$

$N_{sr} = \sum_{k=0}^{Q(200)} p_k * k = p_k * \sum_{k=0}^{Q(200)} k$

$N_{sr} = \frac{1}{201} * \frac{0+200}{2} * 201 = 100$

B)

$r = 1, \Rightarrow L = \frac{1}{Q+1}$

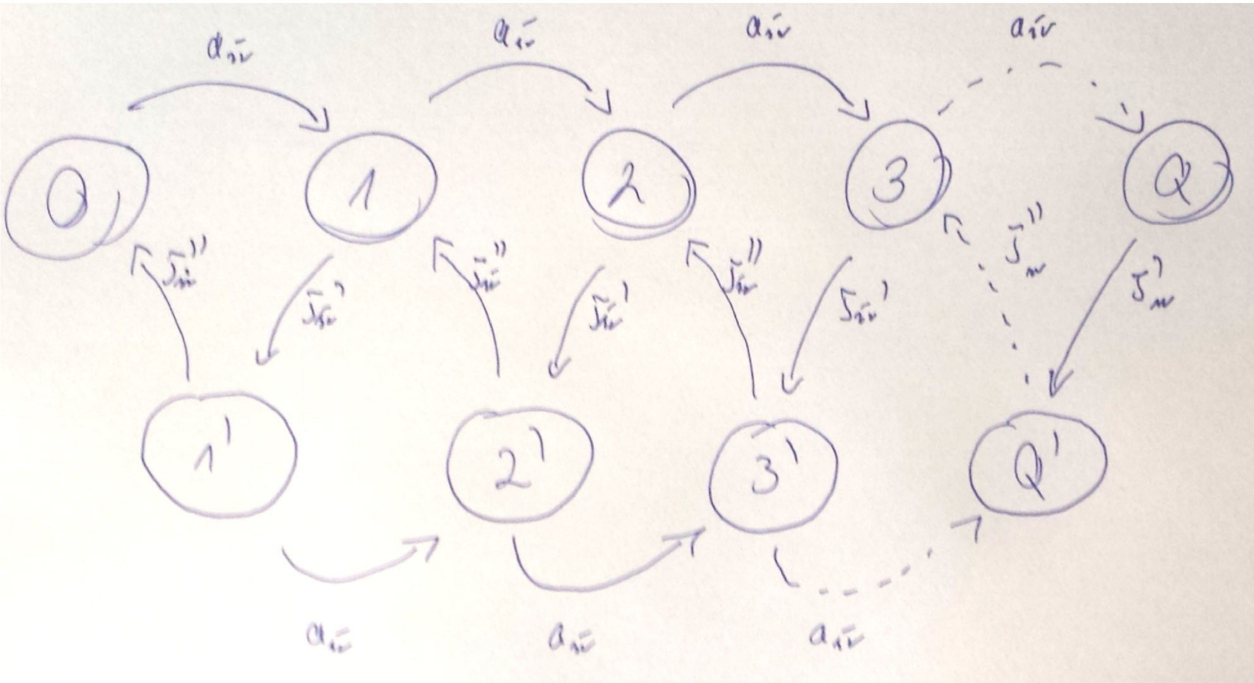
$L = \frac{1}{201} = 0.0497 = 4.97\%$

Kolokwium 20YY - Zadanie 3

cechy zadania: zadanie z typu graf stanów

Do 1-procesorowego systemu masowej obsługi przybywa strumień Poissona zgłoszeń ze średnim interwałem a_{sr}. Obsługa zgłoszenia składa się z dwóch kolejnych faz o wykładniczych rozkładach czasu trwania ze średnim $\tau_{sr}^{(`)}$, $\tau_{sr}^{(``)}$.

Narysuj graf przejść stanów dla odpowiedniego procesu urodzin i śmierci.



Kolokwium 2012

pierwszy termin:

brak zdjęcia

nie pełne treści zadań - nie do rozwiązania bez konkretnej treści i danych

Kolokwium 2012 Zadanie 1

(treść zadania nie pełna)

1. nie pamiętam do końca treści zadania, poniżej dane 1200 użytkowników za korzystanie z klastra płaci 100$/miesiąc, zaś dzierżawa 1 serwera kosztuje 10 000$. 1/aśr = 5 bśr = 1 000 operacji v = 2 000 000 operacji/s J = 1 200 L<=4% Tabelka z ERLANGAMI

a) ile potrzeba wydzierżawić serwerów? jaki zysk niesie każdy z nich? b) liczba użytkowników wzrosła o 800. ile serwerów i jaki zysk niesie każdy z nich?

Kolokwium 2012 - Zadanie 2

(treść zadania nie pełna)

1. to samo co zadanie 3 w kolokwium czerwcowym (2009)

M/M/1/9 p0 = 10% aśr = 0.5s bśr = 100 j.o.

p0 = (1 - r) / (1 - r^[Q+1]) r = bsr / (aśr * v)

Kolokwium 2012 - Zadanie 3

(treść zadania nie pełna)

1. narysować graf systemu z interwałem aśr i czasem obsługi 'tau'śr.

interwał dzieli się na 2 fazy... [nie pamiętam dalej dokładnie]

Kolokwium 2009

drugi termin:

Imię NAZWISKO ______________________________________ Nr indeksu __________

BADANIA OPERACYJNE – kolokwium zaliczające część III, 17.6.2009

- *czas pisania: 45 minut*
- *punktacja zadań jednakowa*
- *można korzystać z materiałów – tylko notatek z wykładu, tylko własnych*
- *rozwiązania tylko na tej kartce (także na odwrocie) – nie dołączamy innych kartek, brudnopisów itp.*
- *wyniki zostaną przesłane do kierownika przedmiotu na początku przyszłego tygodnia.*

1. Dla 1-procesorowego systemu kolejkowego, dla różnych wartości obciążenia r i pojemności Q, tabela podaje: frakcję utraconych zgłoszeń L, a poniżej – znormalizowane średnie opóźnienie systemowe $d_{śr}/\tau_{śr}$.

Do systemu przybywa strumień zgłoszeń ze średnim interwałem $a_{śr}$ = 100 ms. Zgłoszenie jest programem do przetworzenia, zawierającym średnio $b_{śr}$ = 1000 linii kodu. Wydajność procesora wynosi 12500 linii kodu/s, zaś dopuszczalna przez użytkowników frakcja utraconych zgłoszeń wynosi L_{max} = 1%.

a) Jaka jest niezbędna pojemność systemu?

b) Planowana jest instalacja procesora o wydajności większej od poprzedniego o 33.3%. O ile sekund zostanie zredukowane średnie opóźnienie systemowe zgłoszenia i jaka będzie niezbędna do tego pojemność systemu?

r=	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Q= 5	0	0.002	0.006	0.016	0.033	0.057	0.089	0.126	0.167
	1.2	1.4	1.6	1.8	2.1	2.3	2.6	2.8	3
Q= 6	0	0.001	0.002	0.008	0.019	0.038	0.066	0.102	0.143
	1.2	1.4	1.6	1.9	2.2	2.5	2.9	3.2	3.5
Q= 7	0	0	0.001	0.004	0.011	0.026	0.05	0.084	0.125
	1.2	1.4	1.7	1.9	2.3	2.7	3.1	3.6	4
Q= 8	0	0	0	0.002	0.007	0.018	0.039	0.07	0.111
	1.2	1.4	1.7	2	2.4	2.8	3.4	4	4.5
Q= 9	0	0	0	0.001	0.004	0.012	0.03	0.059	0.1
	1.2	1.4	1.7	2	2.4	3	3.6	4.3	5
Q=10	0	0	0	0	0.002	0.009	0.023	0.051	0.091
	1.2	1.4	1.7	2	2.4	3	3.8	4.6	5.5
Q=11	0	0	0	0	0.001	0.006	0.018	0.044	0.083
	1.2	1.4	1.7	2	2.5	3.1	4	5	6
Q=12	0	0	0	0	0.001	0.004	0.015	0.038	0.077
	1.2	1.4	1.7	2	2.5	3.2	4.1	5.3	6.5
Q=13	0	0	0	0	0.001	0.003	0.012	0.033	0.071
	1.2	1.4	1.7	2	2.5	3.2	4.2	5.6	7
Q=14	0	0	0	0	0	0.002	0.009	0.029	0.067
	1.2	1.4	1.7	2	2.5	3.2	4.4	5.8	7.5
Q=15	0	0	0	0	0	0.001	0.007	0.025	0.063
	1.2	1.4	1.7	2	2.5	3.3	4.5	6.1	8

2. Do systemu M/M/∞ średnio w ciągu sekundy przybywa 50 transakcji, z których każda wymaga wykonania średnio 100 000 operacji. Każdy procesor posiada wydajność 2 000 000 operacji na sekundę. Wyznacz:

a) średnią liczbę transakcji w systemie,

b) rozkład liczby transakcji w systemie.

3. W systemie M/M/1/9 strumień zgłoszeń ma parametry $a_{śr}$ = 0.5 s oraz $b_{śr}$ = 100 j.o. Dla prawidłowej pracy procesor potrzebuje 10-procentowego udziału czasu bezczynności.

Jaka jest niezbędna wydajność obsługi v?

Kolokwium 2009 - Zadanie 1

cechy zadania: zadanie z tabelą - średnich znormalizowanych opóźnienień systemowych

Dla 1-procesorowego ststemu kolejkowego, dla różnych wartości obciążenia r i pojemności Q, tabela podaje: frakcję utraconych zgłoszeń L, a poniżej - znormalizowane średnie opóźnienie systemowe $\frac{d_{sr}}{\tau_{sr}}$

Do systemu przybywa strumień zgłoszeń ze średnim interwałem $a_{sr} = 100ms$ Zgłoszenie jest programem do przetworzenia zawierającym średnio $b_{sr} = 1000$ lini kodu. Wydajność procesora wynosi $12500\frac{linikodu}{s}$ zaś dopuszczalna przez użytkowników frakcja utraconych zgłoszeń wynosi $L_{max} = 1\%$

a) jaka jest niezbędna pojemność systemu ?

b) Planowana jest instalacja procesora o wydajności większej od poprzedniego o 33.3%. O ile sekund zostanie zredukowane średnie opóźnienie systemowe zgłoszenia i jaka będzie niezbędna do tego pojemność systemu ?

r=	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Q= 5	0	0.002	0.006	0.016	0.033	0.057	0.089	0.126	0.167
	1.2	1.4	1.6	1.8	2.1	2.3	2.6	2.8	3
Q= 6	0	0.001	0.002	0.008	0.019	0.038	0.066	0.102	0.143
	1.2	1.4	1.6	1.9	2.2	2.5	2.9	3.2	3.5
Q= 7	0	0	0.001	0.004	0.011	0.026	0.05	0.084	0.125
	1.2	1.4	1.7	1.9	2.3	2.7	3.1	3.6	4
Q= 8	0	0	0	0.002	0.007	0.018	0.039	0.07	0.111
	1.2	1.4	1.7	2	2.4	2.8	3.4	4	4.5
Q= 9	0	0	0	0.001	0.004	0.012	0.03	0.059	0.1
	1.2	1.4	1.7	2	2.4	3	3.6	4.3	5
Q=10	0	0	0	0	0.002	0.009	0.023	0.051	0.091
	1.2	1.4	1.7	2	2.4	3	3.8	4.6	5.5
Q=11	0	0	0	0.	0.001	0.006	0.018	0.044	0.083
	1.2	1.4	1.7	2	2.5	3.1	4	5	6
Q=12	0	0	0	0	0.001	0.004	0.015	0.038	0.077
	1.2	1.4	1.7	2	2.5	3.2	4.1	5.3	6.5
Q=13	0	0	0	0	0.001	0.003	0.012	0.033	0.071
	1.2	1.4	1.7	2	2.5	3.2	4.2	5.6	7
Q=14	0	0	0	0	0	0.002	0.009	0.029	0.067
	1.2	1.4	1.7	2	2.5	3.2	4.4	5.8	7.5
Q=15	0	0	0	0	0	0.001	0.007	0.025	0.063
	1.2	1.4	1.7	2	2.5	3.3	4.5	6.1	8

Dane

$b_{sr} = 1000 loc$

$a_{sr} = 100 ms = 0.1 s$

$v = 12500 \frac{loc}{s}$

$L_{max} = 1\%$

Rozwiązanie

A)

$r = \frac{b_{sr}}{a_{sr} * v} = \frac{1000 loc}{0.1 s * 12500 \frac{loc}{s}} = 0.8$

w tabeli przy r = 0.8 wartość która spełnia warunek L <= 1% to **Q = 14**

B)

$v_2 = \frac{4}{3} * 12500 \frac{loc}{s} = \frac{50000loc}{3s}$

$r_2 = \frac{b_{sr}}{a_{sr} * v2} = \frac{1000loc}{0.1s*\frac{50000loc}{3s}} = 0.6$

w tabeli przy r = 0.6 wartość która spełnia warunek L <= 1% to **Q = 8**

O ile sekund zostanie zredukowane średnie opóźnienie systemowe zgłoszenia ?

$\tau_a = \frac{b_{sr}}{v1} = \frac{1000}{12500} = 0.08s$

$\tau_b = \frac{b_{sr}}{v2} = \frac{1000}{\frac{50000}{3}} = 0.06s$

wiemy też że przy Q = 14 i $r_1 = 0.8$ stosunek $\frac{d_{sr}}{\tau_{sr}} = 4.4$ oraz że przy Q = 8 i $r_2 = 0.6$ stosunek $\frac{d_{sr}}{\tau_{sr}} = 2.4$

$d_{sr}^{(1)} = \tau_a * 4.4 = 0.352s$

$d_{sr}^{(2)} = \tau_b * 2.4 = 0.144s$

średnie opóźnienie systemowe zgłoszenie zostanie zredukowane o 0.208s (59%) w przypadku zwiększenia procesora o 33.3%

Kolokwium 2009 - Zadanie 2

cechy zadania: zadanie typu M/M/inf

Do systemu M/M/inf średnio w ciągu sekundy przybywa 50 transakcji z których każda wymaga wykonania średnio 100 000 operacji. Każdy procesor posiada wydajność 2 000 000 operacji na sekundę. Wyznacz:

a) średnią liczbę transakcji w systemie.

b) rozkład liczby transakcji w systemie.

Dane

> $a_{sr} = \frac{1}{50}$
>
> $b_{sr} = 100000 operacji$
>
> $v = 2000000 \frac{operacji}{s}$
>
> $N_{sr} = \rho$ wzór na N średnie

Rozwiązanie

A)

$$N_{sr} = \rho = \frac{b_{sr}}{a_{sr} * v} = \frac{100000}{\frac{1}{50} * 2000000} = 2.5$$

B)

$p_k = e^{-\rho * \frac{-\rho^k}{k!}}$ wzór na rozkład liczby zgłoszeń w systemie

$$\rho = N_{sr} = 2.5$$

$p_k = e^{-2.5 * \frac{e^k}{k!}}$ - rozkład Poissona

---

wzór na rozkład liczby zgłoszeń w systemie slajd 051

wzór na N średnie slajd 051

Kolokwium 2009 - Zadanie 3

W systemie M/M/1/9 strumień zgłoszeń ma parametry $a_{sr} = 0.5s$ oraz $b_{sr} = 100j.o.$ Dla prawidłowej pracy procesor potrzebuje 10 -procentowego udziału czasu bezczynności. Jaka jest niezbędna wydajnośc obsługi v ?

Dane

> $a_{sr} = 0.5s$
>
> $b_{sr} = 100j.o$
>
> $p_0 = 10\%$
>
> $(1 - p_0) = (1 - L) * r$ - równanie ciągłości przepływu

Rozwiązanie

$p_Q = \frac{1-r}{1-r^{Q+1}} * r^Q$

$p_k = p_0 * r^k \Rightarrow p_Q = p_0 * r^Q$

$p_0 * r^Q = \frac{1-r}{1-r^{Q+1}} * r^Q$

$p_0 = \frac{1-r}{1-r^{Q+1}}$

$0.1 = \frac{1-r}{1-r^{Q+1}} \Rightarrow r^{10} - 10r + 9 = 0$

$r^{10} - 10r + 9 = 0 \Rightarrow r = 1$

jeśli $r = 1$, to:

$p_Q = \frac{1}{Q+1} = \frac{1}{10}$

$L = p_Q = \frac{1}{10}$

$p_k = p_0 * r^k = p_0 * 1^k \Rightarrow p_0 = p_1 = p_2 = ... = p_Q$

$p_0 = p_Q$, - bo r = 1

$p_0 = \frac{1}{10}$

> $(1 - p_0) = (1 - L) * r$ - równanie ciągłości przepływu

$v = \frac{(1-L)*b_{sr}}{(1-p0)*a_{sr}}$

$v = \frac{(1-0.1)*100}{(1-0.1)*0.5} = 200\frac{j.o}{s}$

Odp: niezbędna wydajnośc obsługi wynosi $200\frac{j.o}{s}$

Kolokwium 20XX - nieznany rok

mię NAZWISKO ______________________________ Nr indeksu __________

Badania Operacyjne – Systemy kolejkowe

Czas: 50 min.

Rozwiązania: tylko w ramkach (na odwrocie brudnopis, nie będzie oceniany)

Pomoce: można mieć notatki z wykładów i ćwiczeń oraz kalkulator – tylko własne.

Wyniki: w przyszłym tygodniu.

Zadanie 1 (*21 pkt*)

Dla 1-procesorowego systemu masowej obsługi z pamięcią buforową o pojemności Q oraz współczynnikiem obciążenia r tabela podaje normalizowane średnie opóźnienie systemowe oraz (praktycznie stałą w podanym zakresie Q) frakcję strat wskutek przepełnienia. Mamy 10 użytkowników, z których każdy w ciągu sekundy generuje średnio 4 pliki tekstowe po 100 KB. Procesor przetwarza pliki z prędkością 4000 KB/s.

(a) Jakie będzie średnie opóźnienie systemowe (w milisekundach) i frakcja strat przy $Q = 21$?

(b) Do jakich wartości wzrosną one po zwiększeniu liczby użytkowników do 12?

(c) Ile wyniosą, gdy następnie prędkość przetwarzania w procesorze zwiększy się o połowę?

	$d_{śr}/t_{śr}$						L [%]
Q = / r =	20	21	22	23	24	25	
0.1	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11	0
0.2	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	0
0.3	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	0
0.4	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67	0
0.5	2	2	2	2	2	2	0
0.6	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	0
0.7	3.32	3.32	3.32	3.33	3.33	3.33	0
0.8	4.77	4.8	4.84	4.86	4.89	4.91	0
0.9	7.23	7.42	7.6	7.76	7.92	8.07	1
1	10.5	11	11.5	12	12.5	13	5
1.1	13.5	14.3	15.1	15.9	16.7	17.5	11
1.2	15.5	16.5	17.4	18.4	19.3	20.3	17
1.3	16.8	17.8	18.7	19.7	20.7	21.7	23
1.4	17.5	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	29
1.5	18	19	20	21	22	23	33
1.6	18.3	19.3	20.3	21.3	22.3	23.3	38
1.7	18.6	19.6	20.6	21.6	22.6	23.6	41
1.8	18.8	19.8	20.8	21.8	22.8	23.8	44
1.9	18.9	19.9	20.9	21.9	22.9	23.9	47
2	19	20	21	22	23	24	50

Zadanie 2 (*12 pkt*)

Do 1-procesorowego systemu masowej obsługi przybywa strumień Poissona zgłoszeń ze średnim interwałem $a_{śr}$ i średnim czasem obsługi zgłoszenia $t_{śr}$. Obsługa zgłoszenia składa się z dwóch następujących po sobie faz o wykładniczych rozkładach czasu trwania ze średnimi odpowiednio $t_{śr}/3$ i $2\,t_{śr}/3$. Narysuj graf przejść stanów dla procesu urodzin i śmierci.

mię NAZWISKO ______________________________ Nr indeksu ____________

Badania Operacyjne – Systemy kolejkowe

Czas: 50 min.

Rozwiązania: tylko w ramkach (na odwrocie brudnopis, nie będzie oceniany)

Pomoce: można mieć notatki z wykładów i ćwiczeń oraz kalkulator – tylko własne.

Wyniki: w przyszłym tygodniu.

Zadanie 1 (*21 pkt*)

Dla 1-procesorowego systemu masowej obsługi z pamięcią buforową o pojemności Q oraz współczynnikiem obciążenia r tabela podaje normalizowane średnie opóźnienie systemowe oraz (praktycznie stałą w podanym zakresie Q) frakcję strat wskutek przepełnienia. Mamy 10 użytkowników, z których każdy w ciągu sekundy generuje średnio 4 pliki tekstowe po 100 KB. Procesor przetwarza pliki z prędkością 4000 KB/s.

(a) Jakie będzie średnie opóźnienie systemowe (w milisekundach) i frakcja strat przy $Q = 21$?

(b) Do jakich wartości wzrosną one po zwiększeniu liczby użytkowników do 12?

(c) Ile wyniosą, gdy następnie prędkość przetwarzania w procesorze zwiększy się o połowę?

	d_s/t_s						L [%]
r = \ Q =	20	21	22	23	24	25	
0.1	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11	0
0.2	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	0
0.3	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	0
0.4	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67	0
0.5	2	2	2	2	2	2	0
0.6	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	0
0.7	3.32	3.32	3.32	3.33	3.33	3.33	0
0.8	4.77	4.8	4.84	4.86	4.89	4.91	0
0.9	7.23	7.42	7.6	7.76	7.92	8.07	1
1	10.5	11	11.5	12	12.5	13	5
1.1	13.5	14.3	15.1	15.9	16.7	17.5	11
1.2	15.5	16.5	17.4	18.4	19.3	20.3	17
1.3	16.8	17.8	18.7	19.7	20.7	21.7	23
1.4	17.5	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	29
1.5	18	19	20	21	22	23	33
1.6	18.3	19.3	20.3	21.3	22.3	23.3	38
1.7	18.6	19.6	20.6	21.6	22.6	23.6	41
1.8	18.8	19.8	20.8	21.8	22.8	23.8	44
1.9	18.9	19.9	20.9	21.9	22.9	23.9	47
2	19	20	21	22	23	24	50

Zadanie 2 (*12 pkt*)

Do 1-procesorowego systemu masowej obsługi przybywa strumień Poissona zgłoszeń ze średnim interwałem $a_{śr}$ i średnim czasem obsługi zgłoszenia t_s. Obsługa zgłoszenia składa się z dwóch następujących po sobie faz o wykładniczych rozkładach czasu trwania ze średnimi odpowiednio $t_s/3$ i $2\,t_s/3$. Narysuj graf przejść stanów dla procesu urodzin i śmierci.

Kolokwium 20XX - Zadanie 1

cechy zadania: zadanie z tabelą - średnich znormalizowanych opóźnienień systemowych

Dla 1-procesorowego systemu masowej obsługi z pamięcią buforową o pojemności Q oraz współczynnikiem obciążenia r tabela podaje normalizowane średnie opóźnienie systemowe oraz (praktycznie stałą w podanym zakresie Q) Frakcję strat wskutek przepełnienia. Mamy 10 użytkowników, z których każdy w ciągu sekundy generuje średnio 4 pliki tekstowe po 100KB. Procesor przetwarza pliki z prędkością 4000 KB/s.

a) jakie będzie średnie opóźnienie systemowe (w milisekundach) i frakcja strat przy Q = 21 ?

b) do jakich wartości wzrosną one po zwiększeniu liczby użytkowników do 12?

c) Ile wyniosą, gdy następnie prędkość przetwarzania w procesorze zwiększy się o połowę ?

	d/a						L [%]
Q = / r =	20	21	22	23	24	25	
0.1	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11	0
0.2	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	0
0.3	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	0
0.4	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67	0
0.5	2	2	2	2	2	2	0
0.6	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	0
0.7	3.32	3.32	3.32	3.33	3.33	3.33	0
0.8	4.77	4.8	4.84	4.86	4.89	4.91	0
0.9	7.23	7.42	7.6	7.76	7.92	8.07	1
1	10.5	11	11.5	12	12.5	13	5
1.1	13.5	14.3	15.1	15.9	16.7	17.5	11
1.2	15.5	16.5	17.4	18.4	19.3	20.3	17
1.3	16.8	17.8	18.7	19.7	20.7	21.7	23
1.4	17.5	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	29
1.5	18	19	20	21	22	23	33
1.6	18.3	19.3	20.3	21.3	22.3	23.3	38
1.7	18.6	19.6	20.6	21.6	22.6	23.6	41
1.8	18.8	19.8	20.8	21.8	22.8	23.8	44
1.9	18.9	19.9	20.9	21.9	22.9	23.9	47
2	19	20	21	22	23	24	50

Dane

> $J = 10$ - użytkowników
>
> $a_{sr} = \frac{\frac{1}{4}}{J} = \frac{1}{4} * \frac{1}{10} = \frac{1}{40} s$
>
> $b_{sr} = 100KB = 100KB$
>
> $v = 4000KB/s$
>
> $Q = 21$

Rozwiązanie

A)

$r = \frac{b_{sr}}{a_{sr} * v} = \frac{100KB}{\frac{1}{40} * 4000KB/s} = 1$

$\tau_{sr} = \frac{b_{sr}}{v} = \frac{100KB}{4000KB/s} = \frac{1}{40}$

z treści zadania: Q = 21, więc przy r = 1 stosunek $\frac{d_{sr}}{\tau_{sr}} = 11$

$d_{sr} = \tau_{sr} * 11 = \frac{1}{40} * 11 = \frac{11}{40} = 0.275s$ = **275 milisekund**

$L = 5\%$ - **frakcja strat**

B)

$J = 12$

$a_{sr}^{(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{J} = \frac{1}{4} * \frac{1}{12} = \frac{1}{48}s$

$r^{(B)} = \frac{b_{sr}}{a_{sr}^{(B)} * v} = \frac{100KB}{\frac{1}{48} * 4000KB/s} = 1.2s$

$\tau_{sr} = \frac{b_{sr}}{v} = \frac{100KB}{4000KB/s} = \frac{1}{40}$

z treści zadania: Q = 21, więc przy r = 1.2 stosunek $\frac{d_{sr}}{\tau_{sr}} = 16.5$

$d_{sr} = \tau_{sr} * 16.5 = \frac{1}{40} * 16.5 = 0.4125s =$ **412.5 milisekund**

$L = 17\%$ - **frakcja strat**

C)

$v^{(C)} = 150\% * v = 1.5 * 4000KB/s = 6000KB/s$

$r^{(C)} = \frac{b_{sr}}{a_{sr}^{(B)} * v^{(C)}} = \frac{100KB}{\frac{1}{48} * 6000KB/s} = 0.8s$

$\tau_{sr} = \frac{b_{sr}}{v} = \frac{100KB}{6000KB/s} = \frac{1}{60}$

z treści zadania: Q = 21, więc przy r = 0.8 stosunek $\frac{d_{sr}}{\tau_{sr}} = 4.8$

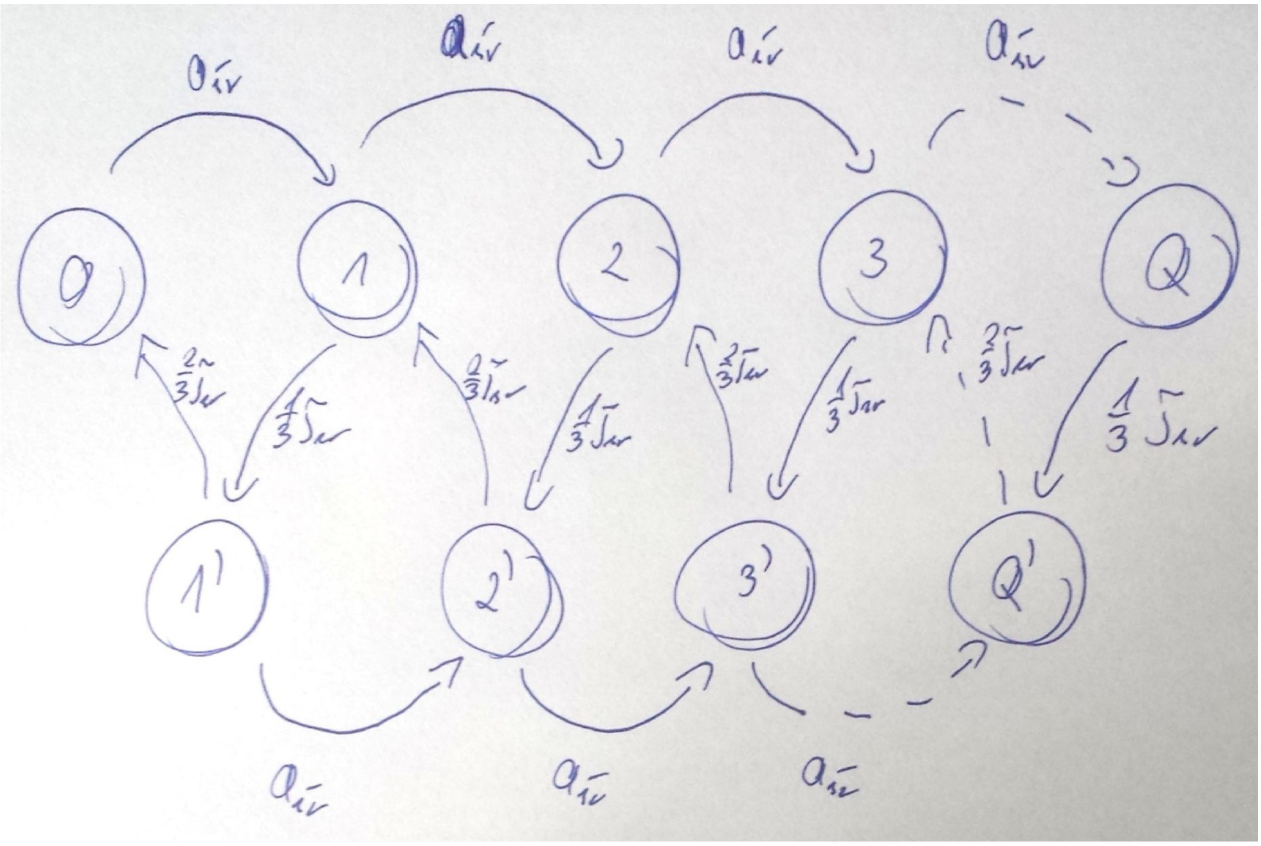
$d_{sr} = \tau_{sr} * 4.8 = \frac{1}{60} * 4.8 = 0.08s =$ **80 milisekund**

$L = 0\%$ - **frakcja strat**

Kolokwium 20XX - Zadanie 2

cechy zadania: zadanie z typu graf stanów

Do 1-procesorowego systemu masowej obsługi przybywa strumień Poissona zgłoszeń ze średnim interwałem a_{sr} i średnim czasem obsługi zgłoszenia τsr Obsługa zgłoszenia składa się z dwóch natępujących po sobie faz o wykładniczych rozkładach czasu trwania ze średnimi odpowiednio $\frac{\tau sr}{3}$ i $\frac{2\tau sr}{3}$. Narysuj Graf przejść stanów dla procesu urodzin i śmierci.



Glosariusz

równanie urodzin i śmierci

równanie urodzin i śmierci

3.15. 5.04

strumien poissona

strumien poissona

4.3. zad3   2.39. slajd-038

zadanie obecnie - bez rozwiązania

grupa zadań które obecnie są bez rozwiązania, rozwiązane nie całkowicie lub rozwiązanie jest bardzo enigmatyczne wymagające poprawy. Wkład własny bardzo mile widziany. Przyjmuję pull-request'y pod https://github.com/pawelgorka/badania-operacyjne ale dla osób nieznających gita - mile widziane będą też (skany/smartfonowe fotografie) przesłane na email: contact@pawelgorka.com

6.1. pierwszy-termin:zad1   3.9. 3.03

zadanie typu graf stanów

zadania z typu graf stanów:

6.3. pierwszy-termin:zad3   5.6. drugi-termin:zad3   5.3. pierwszy-termin:zad3   4.2. zad2   3.14. 5.03

zadanie typu M/M/1

zadania z systemem typu M/M/1 - , gdzie pojemność pamięci bufora jest nieskończona:

zadanie typu M/M/1/Q

zadania z systemem typu M/M/1/Q - ,gdzie Q jest skończone:

6.2. pierwszy-termin:zad2   3.12. 5.01

zadanie typu M/M/inf

zadania z systemem typu M/M/inf - , gdzie liczba procesorów jest nieskończona

8.2. zad2

zadanie typu M/M/S/S

zadania z systemem typu M/M/S/S:

6.1. pierwszy-termin:zad1   4.1. zad1   3.13. 5.02

zadanie z prawem little'a

zadania z prawem little'a:

5.5. drugi-termin:zad2   5.2. pierwszy-termin:zad2   3.3. 1.03   3.10. 4.01   3.11. 4.02

zadanie z równaniem ciaglości przeplywu

zadania z równaniem ciaglości przeplywu:

3.5. 2.02   3.7. 3.01

zadanie z tabelą - średnich znormalizowanych opóźnienień systemowych

zadania z tabelą - średnich znormalizowanych opóźnienień systemowych

8.1. zad1   6.4. drugi-termin:zad1   5.4. drugi-termin:zad1   5.1. pierwszy-termin:zad1   9.1. zad1   3.6. 2.03