Minimál és konstans görbületű felületek numerikus számítása

September 12, 2017

Plateau probléma: Adott egy térgörbe. Ehhez, mint peremhez keresünk minimális mértékű reguláris (?) felületet.

1. Elméleti alapok

1.1 Minimálfelület fogalma

A minimálfelület olyan reguláris felület, amelyen a középgörbület mindenhol nulla [1]. Egy másik definíció szerint a felületének lokálisan minimálisnak kell lennie [2]. Ez két, ekvivalens matematikai feltételt ad a felület pontjaira. Az 1. és 2. fejezetben (x, y, z(x,y)) paraméterezésű felületekkel számolunk.

Középgörbület

Az érintővektorok:

$$u_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix}, \; u_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Az első főmennyiség ($< a, b >$ a és b vektorok belső szorzatát jelöli):

$$g = \begin{pmatrix} < u_x, u_x > & < u_x, u_y > \\ < u_y, u_x > & < u_y, u_y > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 & (\frac{\partial z}{\partial x})(\frac{\partial z}{\partial y}) \\ (\frac{\partial z}{\partial y})(\frac{\partial z}{\partial x}) & 1 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 \end{pmatrix}$$

A normálvektor:

$$N = |u_x \times u_y| = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{\partial z}{\partial x} \\ -\frac{\partial z}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 + 1}}$$

A második főmennyiség:

$$b_{ij} =< u_{ij}, N > \text{, behelyettesítve: } b = \frac{\begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix}}{\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 + 1}}$$

Ezekből a középgörbület:
$H = \frac{g_{11}b_{22}-2g_{12}b_{12}+g_{22}b_{22}}{2(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)} = \frac{(1+z_x^2)z_{yy}-2z_xz_yz_{xy}+(1+z_y^2)z_{xx}}{(z_x^2+z_y^2+1)^{3/2}}$
Ha ezt egyenlővé tesszük nullával és beszorzunk a nevezővel (amely mindig pozitív), megkapjuk a minimálfelület-egyenletet:
$(1+z_x)^2z_{yy} - 2z_xz_yz_{xy} + (1+z_y^2)z_{xx} = 0$
A felület első variációja
A sima alakzat felülete:
$\int AdF$, ahol $A = |u_x \times u_y| = \sqrt{z_x^2+z_y^2+1}$ z-t megvariálom egy olyan fügvénnyel, ami a vizsgált tartomány szélén eltűnik: $z(x,y)+\epsilon f(x,y)$. Itt ϵ egy infinitezimális valós konstans.
A variált felület:
$\frac{\partial}{\partial\epsilon}\int\sqrt{(z_x+\epsilon f_x)^2+(z_y+\epsilon f_y)^2+1}dF|_{\epsilon=0} =$
$\int\frac{(z_x+\epsilon f_x)f_x+(z_y+\epsilon f_y)f_y}{\sqrt{(z_x+\epsilon f_x)^2+(z_y+\epsilon f_y)^2+1}}dF|_{\epsilon=0} =$
$\int\frac{z_xf_x+z_yf_y}{\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}}dF$
Ebből el kell tűntetni f deriváltjait, ezért parciálisan integrálom az f_x -es részt x szerint, az f_y -osat y szerint
$\int_\partial f... - \int f\frac{\partial}{\partial x}\frac{z_x}{\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}}dF - \int f\frac{\partial}{\partial y}\frac{z_y}{\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}}dF$
Az első tagban a tartomány határán integrálunk, de mivel itt f nulla, az egész integrál is nulla lesz. A parciális deriválásokat elvégezve:
$-\int f\frac{z_{xx}}{\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}}dF + \int f\frac{z_x(2z_xz_{xx}+2z_yz_{xy})}{2(z_x^2+z_y^2+1)^{3/2}}dF-$
$-\int f\frac{z_{yy}}{(z_x^2+z_y^2+1)^{3/2}}dF + \int f\frac{z_y(2z_xz_{xy}+2z_yz_{yy})}{2(z_x^2+z_y^2+1)^{3/2}}dF$
Közös nevezőre hozva:
$-\int f\frac{(1+z_y^2)z_{xx}-2z_xz_yz_{xy}(1+z_x^2)z_{yy}}{(z_x^2+z_y^2+1)^{3/2}}dF$ Minden, a tartomány szélén eltűnő f(x,y)-ra nullának kell lennie, ha (x, y, z(x,y)) minimálfelület, így ismét a minimálfelület-egyenletet kaptuk.

2. A nemlineáris PDE megoldása

Véges differencia módszerrel oldjuk meg a következő nemlineáris parciáis differenciálegyenletet:
$(1+z_x^2)z_{yy} - 2z_xz_yz_{xy} + (1+z_y^2)z_{xx} = 0$
z(x, y)-t egy NxN-es négyzet alakú tartományon diszkretizáljuk:
$z(x_i,y_j) = \tilde{z}(i,j)$
A számítás könnyen átalakítható téglalap alakú tartományra. A következő differencia-sémákat használjuk:
$z_x(i,j) = \frac{\tilde{z}(i+1,j)-\tilde{z}(i-1,j)}{2h}$

$z_y(i,j) = \frac{\tilde{z}(i,j+1)-\tilde{z}(i,j-1)}{2h}$
$z_{xx}(i,j) = \frac{\tilde{z}(i+1,j)-2\tilde{z}(i,j)+\tilde{z}(i-1,j)}{h^2}$
$z_{xy}(i,j) = \frac{\tilde{z}(i+1,j+1)-\tilde{z}(i+1,j)-\tilde{z}(i,j-1)+\tilde{z}(i-1,j-1)}{4h^2}$
$z_{yy}(i,j) = \frac{\tilde{z}(i,j+1)-2\tilde{z}(i,j)+\tilde{z}(i,j-1)}{h^2}$
A kapott differenciaegyenlet:
$(1+(\frac{\tilde{z}(i+1,j)-\tilde{z}(i-1,j)}{2h})^2)\frac{\tilde{z}(i,j+1)-2\tilde{z}(i,j)+\tilde{z}(i,j-1)}{h^2} - 2\frac{\tilde{z}(i+1,j)-\tilde{z}(i-1,j)}{2h}\frac{\tilde{z}(i,j+1)-\tilde{z}(i,j-1)}{2h}\frac{\tilde{z}(i+1,j+1)-\tilde{z}(i+1,j)-\tilde{z}(i,j-1)+\tilde{z}(i-1,j-1)}{4h^2} + (1+(\frac{\tilde{z}(i,j+1)-\tilde{z}(i,j-1)}{2h})^2)\frac{\tilde{z}(i+1,j)-2\tilde{z}(i,j)+\tilde{z}(i-1,j)}{h^2} = 0$ Ezt minden belső pontra felírjuk, így N^2 egyenletünk van. A megoldást Newton iterációval közelítettem, $\tilde{z}(i,j)$ elemeit $\underline{x}$ vektorba tettem $x_n = \tilde{z}(i,j), n = iN+j$ szerint. Az $F(\underline{x}) = \underline{0}$ megoldásához az iterációs képlet:
$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} - J(\underline{x}^{(k)})^{-1}F(\underline{x}^{(k)})$,
ahol J F Jacobi mátrixa. Példának egy elem:
$J_{m,m+1} = \frac{\partial F_m}{\partial x_{m+1}}, m = iN+j$
$J_{m,m+1} = \frac{\partial F_{i,j}}{\partial \tilde{z}(i,j+1)} = (1+(\frac{\tilde{z}(i+1,j)-\tilde{z}(i-1,j)}{2h})^2)\frac{1}{h^2} - 2\frac{\tilde{z}(i+1,j)-\tilde{z}(i-1,j)}{4h^2}\frac{\tilde{z}(i+1,j+1)-\tilde{z}(i+1,j)-\tilde{z}(i,j-1)+\tilde{z}(i-1,j-1)}{4h^2} + (2\tilde{z}(i,j+1)-\tilde{z}(i,j-1))\frac{\tilde{z}(i+1,j)-2\tilde{z}(i,j)+\tilde{z}(i-1,j)}{4h^4}$

3. A felület közelítése harmonikus függvényekkel

[2] 3.2-es fejezete szerint egy $\phi : \Omega arrow R^3, z = u + ivarrow(x_1, x_2, x_3)$ felület minimálfelület akkor és csak akkor, ha a koordinátafüggvények harmonikusak. Azaz
$\Delta x_i = (\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2})x_i = 0, i = 1,2,3$
Mivel a koordinátafüggvények egymástól függetlenül kezelhetők, kiválasztok egyet közülük és diszkretizálom: $x_k(u_i, v_j) = \tilde{z}(i,j), 1 less or equal i, j less or equal N$
A derivált operátorokat hasonlóan alakítom át, mint az előző fejelzetben. Az új egyenletem:
$4\tilde{z}(i,j) - \tilde{z}(i-1,j) - \tilde{z}(i,j-1) - \tilde{z}(i+1,j) - \tilde{z}(i,j+1) = 0$
z-ből olszlopvektor készítek és a fenti egyenletrendszert mátrixos alakra hozom. Ekkor A (az egyenletrendszer mátrixa) ritka lesz. Főátlójában 4-esek, négy mellékátlójában -1 -ek fonak szerepelni, a többi elem nulla.
Ezt a Gauss-módszerrel megoldhatom.

4. A Weierstrass reprezentáció alkalmazása

Adott egy zárt görbe, ezt egy négyzet oldalaiként parametrizálom a komplex síkon: X(z), Y(z), Z(z) a pontok koordinátái. A négyzet oldalai mentén pontokat veszek fel, azonos távolságra egymástól:

$u_0+kh+iv_0, u_0+Nh+i(v_0+kh), u_0+kh+i(v_0+Nh), u_0+i(v_0+kh), k=0..N$
A pontok felezőiben z szerinti deriváltakat számítok, így ott megkapom egy X'(z) függvény közelítő értékeit. X'(z) holomorf függvényt keresem.
Állítás (egzisztencia) Minden $\Phi(z)|_{\partial\Gamma}$ peremfeltételhez létezik olyan Ψ függvény, hogy $\Psi = \Phi$ Γ határán.
Bizonyítás: parciális deriváltakkal.
Állítás (unicitás) Ψ egyértelmű.
Bizonyítás: Holomorf => Cauchy-integrál
A számítás következő lépése, hogy a kapott deriváltakat fehasználva Cauchy-integrállal kiszámolom a négyzet belsejében lévő, rácsszerűen elhelyezkedő pontokra a derivált értékét. Utána ezen rács segítségével kiszámítom a négyzet belsejében X(z) értékét egyszerű integrálással:
$X = \int^z X'(w)dw$
Ugyanígy számítjuk Y(z)-t és Z(z)-t. Ez a [2]-ben található Weierstrass reprezentáció.

<u>Referenciák</u>
[1] Bär - Elementary differential geometry
[2] Weber - Classical minimal surfaces in Euclidean space