Minimál és konstans görbületű felületek numerikus számítása

September 13, 2017

Plateau probléma: Adott egy térgörbe. Ehhez, mint peremhez keresünk minimális mértékű reguláris (?) felületet.

1 Elméleti alapok

1.1 A minimálfelület fogalma

A minimálfelület olyan reguláris felület, amelyen a középgörbület mindenhol nulla [1]. Egy másik definíció szerint a felületének lokálisan minimálisnak kell lennie [2]. Ez két, ekvivalens matematikai feltételt ad a felület pontjaira. A következőkben megmutatom, hogy a két állítás azonos differenciálegyenletre vezet. Az 1. és 2. fejezetben $(x, y, z(x, y))$ paraméterezésű felületekkel számolok, ahol $x, y \in R, z : R^2 \to R$.

1.2 A középgörbület

A mennyiség definiálásához előbb szükség lesz néhány alapvetőbb fogalomra. Az érintővektorok:

$$u_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix} \tag{1}$$

,

$$u_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Az első főmennyiség (Innentől $< a, b >$ a és b vektorok belső szorzatát jelöli):

$$g = \begin{pmatrix} < u_x, u_x > < u_x, u_y > \\ < u_y, u_x > < u_y, u_y > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 & (\frac{\partial z}{\partial x})(\frac{\partial z}{\partial y}) \\ (\frac{\partial z}{\partial y})(\frac{\partial z}{\partial x}) & 1 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

A normálvektor:

$$N = |u_x \times u_y| = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{\partial z}{\partial x} \\ -\frac{\partial z}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 + 1}} \tag{4}$$

A második főmennyiség:

$$b_{ij} =< u_{ij}, N > \tag{5}$$

, behelyettesítve:

$$b = \frac{\begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix}}{\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 + 1}} \tag{6}$$

Ezekből a középgörbület:

$$H = \frac{g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}b_{22}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} = \frac{(1 + z_x^2)z_{yy} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_y^2)z_{xx}}{(z_x^2 + z_y^2 + 1)^{3/2}} \tag{7}$$

Ha ezt egyenlővé tesszük nullával és beszorzunk a nevezővel (amely mindig pozitív), megkapjuk a minimálfelület-egyenletet (három dimenzióra):

$$(1 + z_x)^2 z_{yy} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_y^2)z_{xx} = 0 \tag{8}$$

n dimenzióra hasonlóan lehet megkapni, de ott a vektorok n dimenziósak, az első és a második főmennyiség mátrixa $n \times n$-es. Az általánosabb egyenlet:

$$\sum_j \left(1 + \sum_{k \neq j} \left(\frac{\partial z}{\partial x_k}\right)^2\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x_j^2} - 2 \sum_j \sum_{k<j} \frac{\partial z}{\partial x_j} \frac{\partial z}{\partial x_k} \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \tag{9}$$

Itt a felületet az

$$(x_1, ..., x_{n-1}, z(x_1, ..., x_{n-1})), x_1, ..., x_{n-1} \in R, z : R^{n-1} \to R \tag{10}$$

alakban írom le.

1.3 A felület első variációja

A sima alakzat felülete:

$$\int A dF \tag{11}$$

, ahol

$$A = |u_x \times u_y| = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} \tag{12}$$

z-t megvariálom egy olyan fügvénnyel, ami a vizsgált tartomány szélén eltűnik: $z(x, y) + \epsilon f(x, y)$. Itt ϵ egy infinitezimális valós konstans.
A variált felület:

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \int \sqrt{(z_x + \epsilon f_x)^2 + (z_y + \epsilon f_y)^2 + 1} dF|_{\epsilon=0} = \tag{13}$$

$$\int \frac{(z_x + \epsilon f_x) f_x + (z_y + \epsilon f_y) f_y}{\sqrt{(z_x + \epsilon f_x)^2 + (z_y + \epsilon f_y)^2 + 1}} dF|_{\epsilon=0} = \tag{14}$$

$$\int \frac{z_x f_x + z_y f_y}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} dF \tag{15}$$

Ebből el kell tűntetni f deriváltjait, ezért parciálisan integrálom az f_x -es részt x szerint, az f_y -osat y szerint

$$\int_\partial f ... - \int f \frac{\partial}{\partial x} \frac{z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} dF - \int f \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_y}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} dF \tag{16}$$

Az első tagban a tartomány határán integrálunk, de mivel itt f nulla, az egész integrál is nulla lesz. A parciális deriválásokat elvégezve:

$$-\int f \frac{z_{xx}}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} dF + \int f \frac{z_x(2z_x z_{xx} + 2z_y z_{xy})}{2(z_x^2 + z_y^2 + 1)^{3/2}} dF - \tag{17}$$

$$-\int f \frac{z_{yy}}{(z_x^2 + z_y^2 + 1)^{3/2}} dF + \int f \frac{z_y(2z_x z_{xy} + 2z_y z_{yy})}{2(z_x^2 + z_y^2 + 1)^{3/2}} dF \tag{18}$$

Közös nevezőre hozva:

$$-\int f \frac{(1 + z_y^2)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy}(1 + z_x^2)z_{yy}}{(z_x^2 + z_y^2 + 1)^{3/2}} dF \tag{19}$$

Minden, a tartomány szélén eltűnő f(x,y)-ra nullának kell lennie, ha (x, y, z(x,y)) minimálfelület, így ismét a minimálfelület-egyenletet kaptuk.

2 A nemlineáris PDE megoldása

Véges differencia módszerrel oldjuk meg a következő nemlineáris parciáis differenciálegyenletet:

$$(1 + z_x^2)z_{yy} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_y^2)z_{xx} = 0 \tag{20}$$

z(x, y)-t egy NxN-es négyzet alakú tartományon diszkretizáljuk:

$$z(x_i, y_j) = \tilde{z}(i, j) \tag{21}$$

A számítás könnyen átalakítható téglalap alakú tartományra. A következő differencia-sémákat használjuk:

$$z_x(i, j) = \frac{\tilde{z}(i + 1, j) - \tilde{z}(i - 1, j)}{2h} \tag{22}$$

$$z_y(i,j) = \frac{\tilde{z}(i,j+1) - \tilde{z}(i,j-1)}{2h} \tag{23}$$

$$z_{xx}(i,j) = \frac{\tilde{z}(i+1,j) - 2\tilde{z}(i,j) + \tilde{z}(i-1,j)}{h^2} \tag{24}$$

$$z_{xy}(i,j) = \frac{\tilde{z}(i+1,j+1) - \tilde{z}(i+1,j) - \tilde{z}(i,j-1) + \tilde{z}(i-1,j-1)}{4h^2} \tag{25}$$

$$z_{yy}(i,j) = \frac{\tilde{z}(i,j+1) - 2\tilde{z}(i,j) + \tilde{z}(i,j-1)}{h^2} \tag{26}$$

A kapott differenciaegyenlet:

$$(1+(\frac{\tilde{z}(i+1,j) - \tilde{z}(i-1,j)}{2h})^2)\frac{\tilde{z}(i,j+1) - 2\tilde{z}(i,j) + \tilde{z}(i,j-1)}{h^2} - 2\frac{\tilde{z}(i+1,j) - \tilde{z}(i-1,j)}{2h}\frac{\tilde{z}(i,j}{} \tag{27}$$

Ezt minden belső pontra felírjuk, így N^2 egyenletünk van. A megoldást Newton iterációval közelítettem, $\tilde{z}(i,j)$ elemeit $\underline{x}$ vektorba tettem $x_n = \tilde{z}(i,j), n = iN + j$ szerint. Az $F(\underline{x}) = \underline{0}$ megoldásához az iterációs képlet:

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} - J(\underline{x}^{(k)})^{-1} F(\underline{x}^{(k)}) \tag{28}$$

,

ahol J F Jacobi mátrixa. Példának egy elem:

$$J_{m,m+1} = \frac{\partial F_m}{\partial x_{m+1}}, m = iN + j \tag{29}$$

$$J_{m,m+1} = \frac{\partial F_{i,j}}{\partial \tilde{z}(i,j+1)} = (1+(\frac{\tilde{z}(i+1,j) - \tilde{z}(i-1,j)}{2h})^2)\frac{1}{h^2} - 2\frac{\tilde{z}(i+1,j) - \tilde{z}(i-1,j)}{4h^2}\frac{\tilde{z}(i+1,j+}{} \tag{30}$$

3 A felület közelítése harmonikus függvényekkel

[2] 3.2-es fejezete szerint egy $\phi : \Omega \to R^3, z = u + iv \mapsto (x_1(z), x_2(z), x_3(z))$ felület minimálfelület akkor és csak akkor, ha a koordinátafüggvények harmonikusak. Azaz

$$\Delta x_i = (\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2})x_i = 0, i = 1, 2, 3 \qquad (31)$$

Itt Δ a Laplace-operátor. Mivel a koordinátafüggvények egymástól függetlenül kezelhetők, kiválasztok egyet közülük és diszkretizálom:

$$\tilde{z}(i, j) := x_k(u_i, v_j), 1 \leq i, j \leq N \qquad (32)$$

A derivált operátorokat hasonlóan alakítom át, mint az előző fejelzetben. Az új egyenletem:

$$4\tilde{z}(i, j) - \tilde{z}(i - 1, j) - \tilde{z}(i, j - 1) - \tilde{z}(i + 1, j) - \tilde{z}(i, j + 1) = 0 \qquad (33)$$

z-ből olszlopvektor készítek és a fenti egyenletrendszert mátrixos alakra hozom. Ekkor A (az egyenletrendszer mátrixa) ritka lesz. Főátlójában 4-esek, négy mellékátlójában -1 -ek fonak szerepelni, a többi elem nulla.
Ezt a Gauss-módszerrel megoldhatom.

4 A Weierstrass reprezentáció alkalmazása

Adott egy zárt görbe, ezt egy négyzet oldalaiként parametrizálom a komplex síkon: X(z), Y(z), Z(z) a pontok koordinátái. A négyzet oldalai mentén pontokat veszek fel, azonos távolságra egymástól:

$$u_0+kh+iv_0, u_0+Nh+i(v_0+kh), u_0+kh+i(v_0+Nh), u_0+i(v_0+kh), k = 0..N \qquad (34)$$

A pontok felezőiben z szerinti deriváltakat számítok, így ott megkapom egy X'(z) függvény közelítő értékeit. X'(z) holomorf függvényt keresem.

Állítás (egzisztencia) Minden $\Phi(z)|_{\partial\Gamma}$ peremfeltételhez létezik olyan Ψ függvény, hogy $\Psi = \Phi$ Γ határán.
Bizonyítás parciális deriváltakkal.
Állítás (unicitás) Ψ egyértelmű.
Bizonyítás Holomorf => Cauchy-integrál
A számítás következő lépése, hogy a kapott deriváltakat fehasználva Cauchy-integrállal kiszámolom a négyzet belsejében lévő, rácsszerűen elhelyezkedő pontokra a derivált értékét. Utána ezen rács segítségével kiszámítom a négyzet belsejében X(z) értékét egyszerű integrálással:

$$X = \int^{z} X'(w)dw \tag{35}$$

Ugyanígy számítjuk Y(z)-t és Z(z)-t. Ez a [2]-ben található Weierstrass reprezentáció.

References

[1] Bär - Elementary differential geometry

[2] Weber - Classical minimal surfaces in Euclidean space