

Minimál és konstans görbületű felületek numerikus számítása

August 29, 2017

Plateau probléma: Adott egy térgörbe. Ehhez, mint peremhez keresünk minimális mértékű reguláris (?) felületet.

1. Elméleti alapok

1.1 Minimálfelület fogalma

A minimálfelület olyan reguláris felület, amelyen a középgörbület mindenhol nulla [1]. Egy másik definíció szerint a felületének lokálisan minimálisnak kell lennie [2]. Ez két, ekvivalens matematikai feltételt ad a felület pontjaira. Az 1. és 2. fejezetben $(x, y, z(x,y))$ paraméterezésű felületekkel számolunk.

Középgörbület

Az érintővektorok:

$$u_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad u_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Az első főmennyiség ($\langle a, b \rangle$ a és b vektorok belső szorzatát jelöli):

$$g = \begin{pmatrix} \langle u_x, u_x \rangle & \langle u_x, u_y \rangle \\ \langle u_y, u_x \rangle & \langle u_y, u_y \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 & \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) & 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix}$$

A normálvektor:

$$N = |u_x \times u_y| = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{\partial z}{\partial x} \\ -\frac{\partial z}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

A második főmennyiség:

$$b_{ij} = \langle u_{ij}, N \rangle, \text{ behelyettesítve: } b = \frac{\begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

Ezekből a középgörbület:

$$H = \frac{g_{11}b_{22}-2g_{12}b_{12}+g_{22}b_{22}}{2(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)} = \frac{(1+z_x^2)z_{yy}-2z_xz_yz_{xy}+(1+z_y^2)z_{xx}}{(z_x^2+z_y^2+1)^{3/2}}$$

Ha ezt egyenlővé tesszük nullával és beszorzunk a nevezővel (amely mindig pozitív), megkapjuk a minimálfelület-egyenletet:

$$(1+z_x^2)z_{yy} - 2z_xz_yz_{xy} + (1+z_y^2)z_{xx} = 0$$

A felület első variációja

A sima alakzat felülete:

$\int AdF$, ahol $A = |u_x \times u_y| = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}$ z-t megvariálom egy olyan függvénnyel, ami a vizsgált tartomány szélén eltűnik: $z(x, y) + \epsilon f(x, y)$. Itt ϵ egy infinitezimális valós konstans.

A variált felület:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \int \sqrt{(z_x + \epsilon f_x)^2 + (z_y + \epsilon f_y)^2 + 1} dF|_{\epsilon=0} = \\ \int \frac{(z_x + \epsilon f_x)f_x + (z_y + \epsilon f_y)f_y}{\sqrt{(z_x + \epsilon f_x)^2 + (z_y + \epsilon f_y)^2 + 1}} dF|_{\epsilon=0} = \\ \int \frac{z_x f_x + z_y f_y}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} dF \end{aligned}$$

Ebből el kell tüntetni f deriváltjait, ezért parciálisan integrálok az f_x -es részt x szerint, az f_y -osat y szerint

$$\int \partial f \dots - \int f \frac{\partial}{\partial x} \frac{z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} dF - \int f \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_y}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} dF$$

Az első tagban a tartomány határán integrálunk, de mivel itt f nulla, az egész integrál is nulla lesz. A parciális deriválásokat elvégezve:

$$\begin{aligned} - \int f \frac{z_{xx}}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} dF + \int f \frac{z_x(2z_x z_{xx} + 2z_y z_{xy})}{2(z_x^2 + z_y^2 + 1)^{3/2}} dF - \\ - \int f \frac{z_{yy}}{(z_x^2 + z_y^2 + 1)^{3/2}} dF + \int f \frac{z_y(2z_x z_{xy} + 2z_y z_{yy})}{2(z_x^2 + z_y^2 + 1)^{3/2}} dF \end{aligned}$$

Közös nevezőre hozva:

$$- \int f \frac{(1+z_y^2)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1+z_x^2)z_{yy}}{(z_x^2 + z_y^2 + 1)^{3/2}} dF$$

Minden, a tartomány szélén eltűnő f(x,y)-ra nullának kell lennie, ha (x, y, z(x,y)) minimálfelület, így ismét a minimálfelület-egyenletet kaptuk.

2. A nemlineáris PDE megoldása

Véges differencia módszerrel oldjuk meg a következő nemlineáris parciális differenciálegyenletet:

$$(1+z_x^2)z_{yy} - 2z_xz_yz_{xy} + (1+z_y^2)z_{xx} = 0$$

z(x, y)-t egy NxN-es négyzet alakú tartományon diszkrétizáljuk:

$$z(x_i, y_j) = \tilde{z}(i, j)$$

A számítás könnyen átalakítható téglalap alakú tartományra. A következő differencia-sémákat használjuk:

$$z_x(i, j) = \frac{\tilde{z}(i+1, j) - \tilde{z}(i-1, j)}{2h}$$

$$\begin{aligned}
z_y(i, j) &= \frac{\tilde{z}(i, j+1) - \tilde{z}(i, j-1)}{2h} \\
z_{xx}(i, j) &= \frac{\tilde{z}(i+1, j) - 2\tilde{z}(i, j) + \tilde{z}(i-1, j)}{h^2} \\
z_{xy}(i, j) &= \frac{\tilde{z}(i+1, j+1) - \tilde{z}(i+1, j) - \tilde{z}(i, j-1) + \tilde{z}(i-1, j-1)}{4h^2} \\
z_{yy}(i, j) &= \frac{\tilde{z}(i, j+1) - 2\tilde{z}(i, j) + \tilde{z}(i, j-1)}{h^2}
\end{aligned}$$

A kapott differenciaegyenlet:

$$\begin{aligned}
&(1 + (\frac{\tilde{z}(i+1, j) - \tilde{z}(i-1, j)}{2h})^2) \frac{\tilde{z}(i, j+1) - 2\tilde{z}(i, j) + \tilde{z}(i, j-1)}{h^2} - \\
&2 \frac{\tilde{z}(i+1, j) - \tilde{z}(i-1, j)}{2h} \frac{\tilde{z}(i, j+1) - \tilde{z}(i, j-1)}{2h} \frac{\tilde{z}(i+1, j+1) - \tilde{z}(i+1, j) - \tilde{z}(i, j-1) + \tilde{z}(i-1, j-1)}{4h^2} + \\
&(1 + (\frac{\tilde{z}(i, j+1) - \tilde{z}(i, j-1)}{2h})^2) \frac{\tilde{z}(i+1, j) - 2\tilde{z}(i, j) + \tilde{z}(i-1, j)}{h^2} = 0
\end{aligned}$$

Ezt minden belső pontra felírjuk, így N^2 egyenletünk van. A megoldást Newton iterációval közelítettem, $\tilde{z}(i, j)$ elemeit \underline{x} vektorba tettem $x_n = \tilde{z}(i, j)$, $n = iN + j$ szerint. Az $F(\underline{x}) = 0$ megoldásához az iterációs képlet:

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} - J(\underline{x}^{(k)})^{-1} F(\underline{x}^{(k)}),$$

ahol J F Jacobi mátrixa. Példának egy elem:

$$\begin{aligned}
J_{m, m+1} &= \frac{\partial F_m}{\partial x_{m+1}}, m = iN + j \\
J_{m, m+1} &= \frac{\partial F_{i, j}}{\partial \tilde{z}(i, j+1)} = (1 + (\frac{\tilde{z}(i+1, j) - \tilde{z}(i-1, j)}{2h})^2) \frac{1}{h^2} - \\
&2 \frac{\tilde{z}(i+1, j) - \tilde{z}(i-1, j)}{4h^2} \frac{\tilde{z}(i+1, j+1) - \tilde{z}(i+1, j) - \tilde{z}(i, j-1) + \tilde{z}(i-1, j-1)}{4h^2} + \\
&(2\tilde{z}(i, j+1) - \tilde{z}(i, j-1)) \frac{\tilde{z}(i+1, j) - 2\tilde{z}(i, j) + \tilde{z}(i-1, j)}{4h^4}
\end{aligned}$$

3. A felület közelítése harmonikus függvényekkel

[2] 3.2-es fejezete szerint egy $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, z = u + i \varphi(x_1, x_2, x_3)$ felület minimálfelület akkor és csak akkor, ha a koordinátafüggvények harmonikusak. Azaz

$$\Delta x_i = (\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}) x_i = 0, i = 1, 2, 3$$

Mivel a koordinátafüggvények egymástól függetlenül kezelhetők, kiválasztok egyet közülük és diszkretizálom: $x_k(u_i, v_j) = \tilde{z}(i, j)$, $1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N$. A derivált operátorokat hasonlóan alakítom át, mint az előző fejeletben. Az új egyenletem:

$$4\tilde{z}(i, j) - \tilde{z}(i-1, j) - \tilde{z}(i, j-1) - \tilde{z}(i+1, j) - \tilde{z}(i, j+1) = 0$$

z -ből oszlopvektor készítek és a fenti egyenletrendszert mátrixos alakra hozom. Ekkor A (az egyenletrendszer mátrixa) ritka lesz. Főátlójában 4-esek, négy mellékátlójában -1 -ek fonak szerepelni, a többi elem nulla.

Ezt a Gauss-módszerrel megoldhatom.

Referenciák

- [1] Bär - Elementary differential geometry
- [2] Weber - Classical minimal surfaces in Euclidean space